Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid

WB 7
Rekenen - Wiskunde

F. van der Blij, A. Treffers

Vakgroep onderzoek wiskunde onderwijs
en onderwijscomputercentrum
Rijksuniversiteit Utrecht

's-Gravenhage, december 1985

Verkoopprijs f 10,--. Exemplaren van deze uitgave zijn uitsluitend te bestellen door vooruitbetaling op giro 751, ten name van Distributiecentrum Overheidspublikaties DOP, Postbus 20014, 2500 EA 's-Gravenhage, onder vermelding van het ISBN-nummer en het aantal gewenste exemplaren.

ISBN: 90 346 0666 X
Publikatie van de Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid

TEN GELEIDE

Deze studie is verricht in opdracht van de Wetenschappelijke Raad voor het Regeringsbeleid en vormt een onderdeel van de voorbereiding van het WRR-rapport over basisvorming in het onderwijs.
De Raad beoogt met de publikatie van deze studie de daarin aangeboden informatie voor een groter publiek toegankelijk te maken. Het spreekt vanzelf dat de WRR geen verantwoordelijkheid draagt voor de inhoud van dit werkdocument.

Prof.dr.mr. C.J.M. Schuyt,
lid van de WRR en
voorzitter van de projectgroep
Basisvorming in het onderwijs

INHOUDSOPGAVE

VERKLARING VOORAF

Het a priori vaststellen van de inhoud van de basisvorming via het formuleren van eindtermen is naar onze mening zonder meer onverantwoord. Pas in de eindfase van een proces van ontwikkelingsonderzoek dat met het oog op de bepaling van deze basisvorming wordt verricht, dus a posteriori, is het mogelijk en wenselijk om de inhoud ervan concreet te omschrijven.
Dit is dan ook de reden dat we hier wel uitspraken over rekenen-wiskunde in de eerste fase van de basisvorming (i.c. het basisonderwijs) zullen doen, maar niet over de tweede fase (12-15 jarigen). In het laatste geval beperken we ons tot een schets van de onderzoeksprocedure die naar ons oordeel zou moeten worden gevolgd om tot een gefundeerde omschrijving van de basisvorming rekenen-wiskunde als geheel te geraken.
We lichten een en ander ter inleiding kort toe.

Eindtermen-formulering geldt als één van de belangrijkste instrumenten om de vormingsinhoud van een schoolsoort te bepalen, zo blijkt uit tal van publikaties. Nu zijn de omschrijvingen van eindtermen niet altijd dezelfde. Zo pleiten verschillende personen, groeperingen en instanties ervoor om in de eindtermen ook het onderwijsaanbod of de input te betrekken, en niet alleen de leeropbrengst, of te wel de output. Anderen echter bedoelen met eindtermen uitsluitend eindleerdoelen.
In 'Studies in leerplanontwikkeling 1' van de SLO wordt de laatstgenoemde interpretatie voorgesteld.
Een voorbeeld van zo'n eindterm:

> 'de leerling kan de stelling van Pythagoras toepassen bij eenvoudige praktische problemen.' (pag.43)

Deze formulering is 'tweedimensionaal': hij bevat een gedragscomponent (kunnen toepassen) en een inhoudscomponent (de stelling van Pythagoras). De derde dimensie van het onderwijsaanbod ontbreekt erin.
Nu maakt het nogal wat uit:

1. of de stelling van Pythagoras zonder meer wordt aangeboden (zoals in sommige leerboeken het geval is),
2. of de stelling gemotiveerd en beargumenteerd stapje-voor-stapje wordt aangeleerd in een onderwijsleergang met tal van ontdekkingsmomenten (zoals in de aanpak van het Mavo-project gebeurt),
3. of dat deze stelling wordt herontdekt (onder leiding) in onderwijs dat sterk probleem- en onderzoeksgericht is (zoals in het IOWO-pakket van M. Kindt gebeurt).

Drie verschillende wegen naar één einddoel, of beter naar één eindterm.

Want in die drie wegen liggen verschillende doelen besloten. Sterker: precies de kern van het reken-wiskundeonderwijs, namelijk het essentieel 'vormende' deel ervan, ligt in het onderwijsaanbod ingebed (dus in genoemde werkwijzen 2 en 3) of juist niet, zoals in aanpak 1. Het grote tekort van twee-dimensionale eindtermformuleringen is dus dat er niet in tot uitdrukking komt dat de onderwijswegen die naar die eindtermen (als leerdoelen) leiden zelf belangrijke vormende doelen (kunnen) bevatten welke in feite ook tot die eindtermen behoren. Kortom men krijgt via deze 'platte' eindtermen geen zicht op de aard en de inrichting van het beoogde reken-wiskundeonderwijs in het algemeen en de verschillende leergangen in het bijzonder. Met name het onderscheid tussen enerzijds het sterk op vorming van denkwijzen en attitudes gerichte realistische onderwijs (zoals in aanpak 3) en niet-vormende regelgeleide, leerstofgerichte, mechanistische onderwijs (zie aanpak 1) komt er niet in tot uitdrukking. Dit grote verschil tussen mechanistisch en realistisch onderwijs in verband met de basisvorming rekenen-wiskunde zal overigens straks nog nader worden toegelicht aan de hand van de staartdeling. Dienen dergelijke eindtermen nu als richtsnoer voor de onderwijsontwikkeling dan lopen we het gevaar dat hetzelfde effect optreedt als bij de onderwijsontwikkeling als afgeleide van de toetsontwikkeling, namelijk van een enorme onderwijsverschraling. Met name in de Verenigde Staten heeft men van deze gang van zaken in het verleden z'n trekken thuis gekregen en stelt men er zich thans in het reken-wiskundeonderwijs dan ook sterk tegen te weer (zie de NCTM-publikatie 'An agenda for action'). Trouwens ook het traditionele rekenonderwijs in Nederland is als gevolg van de eindtoetsen basisonderwijs niet aan deze uitholling ontkomen.
Conclusie: de inhoud van de basisvorming rekenen-wiskunde dient niet tweedimensionaal maar driedimensionaal te worden beschreven. Dat wil zeggen: naast de gedragscomponent en de vakinhoudelijke component dient ook de onderwijscomponent i.c. de schets van de leergang in de beschrijving voor te komen. Dit laatste mede om de globale teneur van het betreffende onderwijs zichtbaar te maken.
En dit impliceert weer dat er eerst onderwijs ontwikkeld moet worden vooraleer de inhoud van de betreffende basisvorming concreet kan worden beschreven.
Dit brengt ons bij de kern van onze beginselverklaring die veel dieper blijkt te reiken dan louter de kwestie van de wijze van formuleren, namelijk die van het construeren en implementeren van onderwijs.

Willen we de basisvorming min of meer in concrete termen beschrijven of in meer algemene termen verwijzend aanduiden, dan moeten we kunnen steunen op 'onderwijspartituur' in de vorm van leerboeken en

handleidingen die (soms nog in experimentele situaties) in het onderwijs worden gebruikt. Het soort onderwijs dat in die boeken 'gestold' ligt opgeslagen, zou in principe in het totale onderwijsveld gerealiseerd moeten kunnen worden. En daartoe moeten dan wel bepaalde condities vervuld zijn. Maar daarover zullen we het nu verder niet hebben.
Wil de overheid de richting van de basisvorming aangeven dan kan dit, althans voor het reken-wiskundeonderwijs, alleen als er projecten worden opgezet waarin de betreffende onderwijsvisie tot op het schoolboekniveau (met handleiding) wordt uitgewerkt: Zelfs meer dan dat: ook de implementatie van het onderwijs zoals beoogd, zal via opleiding, nascholing en toetsontwikkeling moeten worden verzorgd. Tevens zal de commerciële methodenontwikkeling verder informeel moeten worden begeleid.
Een voorbeeld van een dergelijke werkwijze vinden we in het Wiskobasproject. Het resultaat is hier, dat binnen tien jaar nadat het eerste experimentele schoolwerkplan is ontwikkeld en vijf jaar nadat de eerste 'Wiskobas-methoden' op de onderwijsmarkt verschenen, ongeveer de helft van de Nederlandse basisscholen met een of andere variant van de experimentele Wiskobasmethode werkt. Maar daarover straks meer.
Een andere voorbeeld is het Hewet-project – de herverkaveling van wiskunde I en II in de bovenbouw van het VWO tot Wiskunde A en B. Ook hier is de visie op en de inhoud van de beoogde vorming concreet vertaald in leerboeken en handleidingen, terwijl de implementatie op de geschetste wijze wordt verzorgd. En ook hier stimuleert het feit dat het experiment tot op het niveau van het leerboek is uitgewerkt, de verdere methodenontwikkeling.
Kortom, in beide gevallen neemt de overheid het voortouw van de onderwijsontwikkeling en geeft ze een voorbeeld van wat concreet met de vorming van rekenen-wiskunde in de betreffende schoolsoorten wordt beoogd. Zonder overigens dat dit voorbeeld op zich tot voorschrift wordt verheven. Maar, de trend wordt gezet, de algemene teneur bepaald.
Wat er gebeurt als men zich bij het vaststellen van die vorming in eerste en in laatste instantie tot een algemene schets van het bedoelde bepaalt en slechts een omschrijving van 'platte' eindtermen verstrekt, kunnen we bijvoorbeeld zien op de experimentele middenscholen. Tien jaar experimenteren heeft hier onvoldoende duidelijkheid en geen enkele eenheid gebracht.
Het formuleren van eindtermen, zonder dat dit onderdeel uitmaakt van een breed projectplan voor onderwijsontwikkeling betekent in feite dat de uitwerking van de beoogde vorming aan educatieve uitgeverijen wordt overgelaten zonder dat die een concreet voorbeeld hebben.

I BASISVORMING (EERSTE FASE)

1 Inleiding

In de nota 'Verder na de basisschool' is één van de criteria voor de bepaling van het onderwijsaanbod:

> 'het onderwijsaanbod in het voortgezet basisonderwijs is met name bedoeld als voortzetting van de periode van gemeenschappelijke basisvorming voor alle leerlingen.' (pag.27)

Wat houdt die gemeenschappelijke basisvorming nu concreet in voor rekenen-wiskunde op de basisschool?

Uit onderzoek is gebleken dat na het derde-vierde leerjaar nauwelijks van een gemeenschappelijke basisvorming kan worden gesproken. Althans niet in het nog vrijwel uitsluitend traditionele rekenonderwijs zoals zich dat in de jaren zeventig in Nederland manifesteerde.

Dertienjarige havo/vwo-leerlingen (begin tweede leerjaar) blijken gemiddeld zeventig procent goede antwoorden te scoren op elementaire rekenvraagstukken uit het vijfde en zesde leerjaar van de basisschool. Het betreft hier vijfkeuze-opgaven over breuken, procenten, verhoudingen, oppervlakte, inhoud, gemiddelde en kommagetallen. Mavo-leerlingen van dezelfde leeftijd halen vijftig procent en lbo-leerlingen veertig procent. Lhno-leerlingen komen zelfs niet verder dan 25% procent goede antwoorden. (Pelgrum e.a., 1984). We dienen daarbij te bedenken dat ongeveer eenderde deel van de basisschool-leerlingen naar havo/vwo gaan, eenderde deel naar mavo en eenderde deel naar lbo/lhno (Geldens, 1984).

Uit deze gegevens mag ruwweg geconcludeerd worden dat een aanzienlijk deel van de basisschoolleerlingen – zeg bijna de helft – weinig tot niets opsteekt van de onderwerpen die op papier tot de typische bovenbouwstof van de basisschool worden gerekend. In het buitenland is het overigens niet beter gesteld (Hart 1980; Carpenter 1981).

In Nederland is de onbevredigende opzet en opbrengst van het traditionele 'mechanistische' rekenonderwijs (waarover straks meer) aanleiding geweest om omstreeks 1970 het Wiskobasproject te starten. Internationaal kwam toentertijd de New Math tot volle wasdom. Deze 'structuralistische' onderwijsaanpak legde het accent op verzamelingen, relaties, transformaties, logica, en zette slechts een lichte toets op rekenvaardigheden en toepassingen ervan. Maar hier te lande kreeg ze, bij uitzondering, geen vaste voet aan de grond.

De redenen voor dit opmerkelijke feit zijn divers; we noemen er vier:

— aan het einde van de jaren zestig kwam de Wiskobasbeweging op, die zich van meet af aan zeer terughoudend ten opzichte van de moderne wiskundemethoden opstelde, en zich al snel van de New Math afkeerde;

- de onderwijsinspectie deelde de opvattingen van Wiskobas op dit punt en oefende met de haar ter beschikking staande middelen mede een sterk remmende invloed uit op de invoering van New Math-methoden;
- in het onderwijsveld steeg toentertijd de belangstelling voor andere werk- en groeperingsvormen dan die in de traditionele klassikale school gebruikelijk waren, wat zich voor het vak rekenen vertaalde in een toenemende interesse voor rekenmethoden die individueel werken op eigen niveau toelieten i.c. het zogenoemde mechanistische rekenonderwijs;
- daarnaast was Wiskobas in de loop van de jaren zeventig bezig een experimenteel programma te ontwikkelen dat schrijversgroepen als voorbeeld en bron van inspiratie konden gebruiken, hetgeen echter tegelijkertijd wel tot een zekere vertraging in de methodenontwikkeling leidde, omdat de opbrengst van dat ontwikkelingswerk pas na 1975 duidelijk zichtbaar werd.

Als gevolg van dit alles ontstaat in het begin van de jaren tachtig één verdeling op de Nederlandse methodenmarkt die op een cruciaal punt verschilt van het methodenbestand in de meeste andere landen. Er zijn ten eerste nauwelijks New Math-restanten, en ten tweede verschijnen nu reeds *'realistische'* reken/wiskundemethoden welke voor een belangrijk deel voldoen aan de voorstellen tot revisie en actie die thans in het buitenland worden gelanceerd.

Men zou derhalve kunnen zeggen dat we in Nederland wat de methodenontwikkeling betreft, verder zijn dan in de meeste andere landen.

Maar dat wil uiteraard nog niet zeggen dat het reken-wiskundeonderwijs hier te lande ook beter zou zijn dan elders: Want een goed methodenbestand is weliswaar een noodzakelijke, maar zeker nog geen voldoende voorwaarde voor goed reken-wiskundeonderwijs. Daartoe moeten nog heel wat andere condities vervuld zijn. In dat opzicht is er in Nederland nog wel wat te wensen.

Het is trouwens ook niet zo, dat het Nederlandse methodenbestand enigermate homogeen is. Integendeel: de methoden van het mechanistische rekenen nemen ook op de Nederlandse markt nog steeds een belangrijke positie in.

Dit nu levert een tweedeling op, we citeren uit het PgLOB-rapport:

> 'Wanneer we de huidige stand van zaken in ogenschouw nemen, dan kunnen we, met enige overdrijving en lettend op uitersten, in ons land twee stromingen onderscheiden: het overwegend *produktgerichte, traditionele rekenonderwijs* en het meer *procesgerichte wiskundeonderwijs*.

Produktgericht rekenonderwijs

De kern van het traditionele rekenonderwijs wordt gevormd door het aanleren van standaardoplossingen of algoritmen (bijvoorbeeld de staartdeling). De weg waarlangs kinderen de rekenhandelingen leren, is van tevoren aangegeven.

Aan het traditionele rekenonderwijs liggen enkele vooronderstellingen ten grondslag:

- de kinderen zijn in staat zelf de relatie te leggen tussen de sommen in hun boek en de rekenkundige aspecten van de werkelijkheid;
- als inzicht er nu niet is, dan komt dat later wel;
- kinderen leren rekenen door middel van kleine stapjes die zich volgens één bepaalde leerlijn laten ordenen; alle leerlingen zullen deze stapjes moeten nemen: van 1 + 1 = tot 378,475.843,21\ ...

De opvatting dat alle kinderen dezelfde leerweg moeten gaan, heeft tot gevolg dat pogingen om te individualiseren in de praktijk neerkomen op tempodifferentiatie, met alle nadelen van dien: de leerprestaties lopen nog verder uiteen, de leerkrachten raken het overzicht over hun klas kwijt en zijn gedwongen steeds weer opnieuw uit te leggen.

In de traditionele rekenles blijft de activiteit van de kinderen meestal beperkt tot het maken van rijtjes 'kale' sommen. Soms maken zij ook 'ingeklede' rekenopgaven, zogenaamde redactiesommen. De relatie tussen deze sommen en de werkelijkheid is echter ver te zoeken:

Procesgericht wiskundeonderwijs

Het moderne wiskundeonderwijs richt zich vooral op het proces van *zelf actief kennis verwerven*.

Door het stellen van problemen probeert men de aandacht van de kinderen op wiskundige aspecten van hun omgeving te richten en hen vertrouwd te maken met elementaire wiskundige begrippen, handelingen en werkwijzen. Hiertoe behoren onder andere: getallen, bewerkingen met getallen en het verwerken van kwantitatieve gegevens in tabellen en grafieken. Er wordt veel waarde gehecht aan het onder woorden brengen, c.q. bewustmaken van de wiskundige ervaringen. De wiskundige activiteiten van kinderen vinden plaats binnen *contexten*. Dit zijn situaties in de belangstellingssfeer van de kinderen, waarin probleempjes worden gesteld, nieuwe begrippen en inzichten worden geïntroduceerd en bestaande kennis en vaardigheden toegepast. (pgLOB, pag.146)

Eén en ander heeft wel tot consequentie dat er ten aanzien van de einddoelstellingen van de basisschool een nog verder groeiende onduidelijkheid is ontstaan. Dit geldt met name voor hetgeen vrijwel alle leerlingen aan het einde van de basisschool zouden moeten kunnen en waarop in de eerste leerjaren van het voortgezet onderwijs kan worden voortgebouwd.

Maar zo kan men zich afvragen, fungeren de bestaande eindtoetsen basisonderwijs in dit opzicht dan niet als baken?
Deze eindtoets is gezien zijn feitelijke hoofdfunctie, namelijk die van advisering in een schoolkeuzeprocedure, niet zo'n geschikt instrument om de opbrengst van het basisonderwijs te peilen – en hij pretendeert dat trouwens ook niet te zijn. Ten eerste bevatten die toetsen haast geen toepassingen – en dat is juist iets waar de realistische reken-wiskundemethoden zoveel aandacht aan schenken. Ten tweede hebben ze vrijwel geen opgaven over belangwekkende onderdelen van schattend rekenen, verhoudingen, meten en meetkunde waaraan in vrijwel alle nieuwe methoden veel onderwijstijd wordt gewijd. En ten derde geven de eindtoetsen ook niet aan dat een aanzienlijk deel van de kinderen de tafels niet voldoende beheersen, niet vlot elementaire hoofdrekenopgaven kunnen maken, het cijferen niet volledig onder de knie hebben, niet alle basisoperaties in elementaire contextproblemen kunnen toepassen, geen goed begrip van meten hebben.... Om dan nog maar te zwijgen over (toepassingen van) kommagetallen, breuken, procenten, metriek e.d.
We missen in Nederland op dit moment eindtoetsen die als hoofddoel opbrengstpeiling hebben, met als gevolg dat er geen duidelijk zicht is op wat thans tot de basisvorming van rekenen-wiskunde gerekend wordt of kan worden.
Misschien is één van de positieve gevolgen van het op zich genomen negatieve verschijnsel van de geschetste tweedeling in het reken-wiskundeonderwijs – althans in het methodenbestand ervan – dat we zo langzamerhand wel gedwongen worden ons op nationaal niveau op de werkelijke inhoud van de basisvorming te bezinnen.

Dit alles is voor de NVORWO (Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs) aanleiding geweest de vakgroep OW & OC te verzoeken een onderzoek in te stellen naar de mogelijkheden om tot een (informeel) nationaal plan voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool te komen.
We zullen hier niet ingaan op de procedure die bij dit onderzoek wordt gevolgd. Wel vermelden we dat het voorstel dat we hierna samenvattend formuleren aan het genoemde (nog lopende) onderzoek is ontleend. Thans is echter al wel duidelijk dat er bij opleiders, begeleiders, onderzoekers en ontwikkelaars een grote mate van instemming met dit plan blijkt te bestaan. Voorts is het van belang te weten dat anno 1985 vier van de vijf basisschoolteams voor een methode kiezen die in de (Wiskobas-)lijn van dit plan liggen. Kortom, het onderhavige voorstel komt niet uit de lucht vallen, maar vindt z'n oorsprong in de

ontwikkelingen die vooral het laatste decennium in het brede onderwijsveld hebben plaatsgevonden.
Het zou echter overdreven zijn te stellen dat er volledige consensus over dit plan zou bestaan. Die is er niet en die zal ook niet te krijgen zijn. Ook zijn er tussen de methoden tal van nuance-verschillen. En zo hoort het ook te zijn – we willen in Nederland tenslotte terecht geen eenheidsmethodiek. Maar wel kan gezegd worden dat het (informele) nationale plan rekenen-wiskunde voor 6-12 jarigen, dat gestoeld is op een serie 'Wiskobasmethoden', een belangrijk richtsnoer is voor onderwijs- en toetsontwikkeling; en niet te vergeten voor courseware-ontwikkeling.
We komen tot de slotsom van deze inleiding:
Er is in Nederland wat rekenen-wiskunde betreft geen sprake van een gemeenschappelijke basisvorming in de eerste fase. Dit was feitelijk gesproken in het traditionele rekenonderwijs tot in de jaren zeventig niet het geval, en dit is in het huidige tweestromenland van rekenen-wiskunde zeker niet zo. Wel worden er op dit moment grote inspanningen gedaan om tot meer gemeenschappelijkheid te komen en om gunstige condities te scheppen om het beoogde reken-wiskundeonderwijs te kunnen realiseren. En er is alle reden om te veronderstellen dat dit lukt. In de verzorging van het reken-wiskundeonderwijs is een uitstekende infrastructuur: alle belangrijke groeperingen en instanties werken goed samen – dit als vrucht van het Wiskobaswerk uit de jaren zeventig – en de ideeën van de betrokken onderwijsgevenden, opleiders, begeleiders, ontwikkelaars, toetsdeskundigen en onderzoekers sporen voor een belangrijk deel met elkaar. Maar er valt nog heel wat af te wikkelen. Daarbij denken we aan het construeren van alternatieve toetsen (in de overgangsfase) waaraan door het Cito gewerkt gaat worden, aan het Pabo-onderwijs, de nascholing e.d.
Maar wat van belang is voor de voortgezette basisvorming: de grondslag van de basisvorming in de eerste fase is goeddeels gelegd.
In het volgende zullen we allereerst de kern van dit reken-wiskundeonderwijs schetsen en daarna een algemene inhoudelijke beschrijving geven van:

- basisvaardigheden;
- cijferen;
- hoofdrekenen-plus;
- verhoudingen en procenten;
- breuken en kommagetallen;
- meten;
- meetkunde.

We eindigen met opmerkingen over methoden, opleiding en andere conditiebepalingen.

2 Algemene typering rekenen-wiskunde

Inleiding

We beschrijven de visie op en de aard van rekenen-wiskunde aan de hand van een voorbeeld. We nemen daartoe het eerste grote obstakel in het traditionele rekenonderwijs, te weten de staartdeling. Om de aanbevolen realistische onderwijsaanpak reliëf te geven, wordt ze beschouwd tegen de achtergrond van de gangbare mechanistische werkwijze.

Met dit voorbeeld kan tevens overtuigend gedemonstreerd worden dat eindtermen niet los gezien kunnen worden van de onderwijsaanpak, dus dat een driedimensionale beschrijving ervan noodzakelijk is – een kwestie waarover we in de 'verklaring vooraf' uitvoerig schreven.

Mechanistische aanpak

Ten eerste is kenmerkend voor de traditionele mechanistische leergang van het staartdelen dat ze geïsoleerd is van andere leergangen zoals die van het handig rekenen i.c. delen, en van het maken van toepassingsproblemen in verband met delen, opdelen e.d. Ten tweede is deze leergang opgebouwd volgens het principe van de toenemende complicering: er wordt gestart met eenvoudige 'kale' rekenopgaven en vervolgd met sommenseries die geordend zijn volgens opklimmende moeilijkheid. De mate van complexiteit hangt dan af van de grootte van de getallen, de benodigde inwisselhandelingen, het aantal nullen en nog enkele factoren. Ten derde leren de kinderen steeds per deelgeval de staartdeling volgens de standaardprocedure uit te voeren. Dat wil zeggen: er wordt pas naar een complexer geval overgestapt, indien het voorgaande minder complexe geval volledig beheerst wordt. Een voorbeeld van een stukje van zo'n leergang en van de werkwijze die hierbij wordt gevolgd, treffen we in het volgende fragment aan. Het gaat hierbij om aanwijzingen voor de leerlingen bij een voorbeeld-opgave. Het is de bedoeling dat de kinderen daarna per deelgeval soortgelijke opgaven zelfstandig gaan maken.

1

$$\begin{array}{r} 8 \\ -\,2 \\ \hline 6 \\ -\,2 \\ \hline 4 \\ -\,2 \\ \hline 2 \\ -\,2 \\ \hline 0 \end{array}$$

4 x aftrekken.

$$\begin{array}{r} 9 \\ -\,3 \\ \hline 6 \\ -\,3 \\ \hline 3 \\ -\,3 \\ \hline 0 \end{array}$$

3 x aftrekken.

2

Som 1 kan veel korter. We zeggen: hoeveel maal gaat 2 op de 8, of hoeveel maal kan ik 2 van 8 afnemen?
Dat gaat 4 x
We schrijven 't zo op → 2/8\4 x
en zeggen 4 x 2 = 8
Die trekken we af van de 8 tussen de strepen.

$$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

Dit noemen we delen.

3/9\3 x Hoeveel maal gaat 3 op de 9? 3 x
De 3 zetten we achter de streep.
We trekken 9 af van de 9 tussen de strepen.

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

(3) Nu gaan we het weer korter doen.

```
2/24\12
  2|
  -
   4
   4
  -
   0
```

We delen eerst 2 op de 2
Dat gaat 1 ×. Opschrijven 1
Dan delen we 2 op de 4. *Die 4 zetten we 2 regels lager en noemen het bijhalen.*
2 op de 4 gaat 2 ×. Opschrijven 2

```
3/36\12
  3|
  -
   6
   6
  -
   0
```

Eerst 3 op de 3. Gaat 1 ×. Opschrijven 1
Dan 6 bijhalen. 3 op de 6 gaat 2 ×. Opschr. 2

(4)

```
2/246\123
  2||
  -
   4|
   4|
   -
    6
    6
    -
    0
```

2 op de 2 gaat 1 ×. Opschrijven 1
dan 4 bijhalen.
2 op de 4 gaat 2 ×. Opschrijven 2
nu nog de 6 bijhalen.
2 op de 6 gaat 3 ×. Opschrijven 3

(5)

```
2/84\42
  8|
  -
   4
   4
  -
   0
```

2 op de 8 gaat 4 ×. Opschrijven 4
4 bijhalen.
2 op de 4 gaat 2 ×. Opschrijven 2

```
2/840\420
  8||
  -
   4|
   4|
   -
    0
    0
    -
    0
```

2 op de 8 gaat 4 ×
2 op de 4 gaat 2 ×
2 op de 0 gaat 0 ×

(6)

```
2/12\6
```

2 op de 1 gaat niet.
2 op de 12 gaat 6 ×

```
2/1200\600
  12
  --
   0
   0
   -
    0
    0
    -
    0
```

2 op de 12 gaat 6 ×, opschrijven 6
2 op de 0 gaat 0 ×, opschrijven 0
2 op de 0 gaat 0 ×, opschrijven 0

```
2/1246\6..
  12
```

2 op de 12 gaat 6 ×
Achter de 6 zet je 2 puntjes, omdat je nog

(7)

```
2/286\143
  2||
  -
   8|
   8|
   -
    6
    6
    -
    0
```

2 op de 2 gaat 1 ×
8 bijhalen.
2 op de 8 gaat 4 ×
6 bijhalen.
2 op de 6 gaat 3 ×

(8)

```
5/405\81
  40|
  --
    5
    5
    -
    0
```

5 op de 4 gaat niet.
5 op de 40 gaat 8 ×
5 bijhalen.
5 op de 5 gaat 1 ×

(9) Deze delingen zijn moeilijker.

```
2/156\78
  14
  --
   16
   16
   --
    0
```

2 op de 1 gaat niet.
2 op de 15 gaat 7 ×, want 7 × 2 = 14
Dat kan nog net van 15 af (8 × 2 gaat niet).
Aftrekken. Blijft over 1. Nu 6 bijhalen en de 6 naast de 1 zetten.
2 op de 16 gaat 8 ×, want 8 × 2 = 16
Aftrekken. Over 0

(10)

```
21/1491\7
   147|
   ---
     21
```

Je kijkt naar de 2
2 op de 1 gaat niet.
2 op de 14 gaat 7 ×
7 × 21 = 147

```
21/1491\71
   147|
   ---
     21
     21
     --
      0
```

Nu gaat het nog 1 ×

(11)

```
80/5040\6.
   480|
   ---
    240
```

Je kijkt naar de 8.
8 op de 5 gaat niet.
8 op de 50 gaat 6 ×
6 × 80 = 480
Nu gaat het nog 3 ×

```
80/5040\63
   480|
   ---
    240
    240
    ---
      0
```

(12)

```
320/93875\293
    640||
    ---
    2987|
    2880|
    ----
     1075
      960
      ---
      115
```

3 op de 9 gaat .. 3 × ?
Mis. 3 × 320 = 960
Dus 2 × 2 × 320 = 640
3 op de 29 gaat 9 ×
9 × 320 = 2880
3 op de 10 gaat 3 ×
3 × 320 = 960

Bij de volgende delingen goed uitkijken.

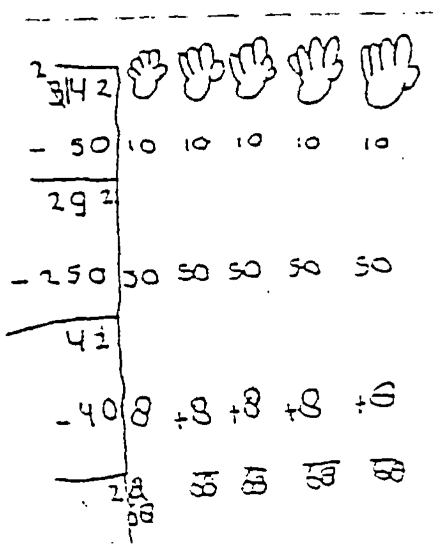
Realistische aanpak

Bij de zogenoemde realistische onderwijsaanpak welke we hier voor de basisvorming rekenen-wiskunde aanbevelen, wordt ten eerste de staartdeling niet van handig rekenen en het maken van toepassingen afgeschermd. Sterker: handig rekenen aan de hand van toepassingsproblemen wordt juist als start- en aangrijpingspunt voor het leren van de staartdelingsprocedure gebruikt. Ten tweede wordt hier de standaardwerkwijze niet van meet af aan per deelgeval aangeleerd, zoals in de mechanistische aanpak. Maar de staartdelingsalgoritme wordt hier langs de geleidelijke weg van steeds verdergaande schematisering en verkorting van de rekenwijzen aangeleerd. Vanaf het begin komen tamelijk complexe problemen aan bod, doch deze worden dan op een betrekkelijk laag niveau van schematisering en verkorting opgelost. Later worden soortgelijke opgaven korter genoteerd en sneller en effectiever uitgerekend, veelal tot aan de standaardmethode toe.

Concreet gaat dat ongeveer zo..

Er wordt met een elementair probleem over eerlijk delen begonnen, bijvoorbeeld '342 stickers worden onder vijf kinderen verdeeld, hoeveel krijgt ieder?'

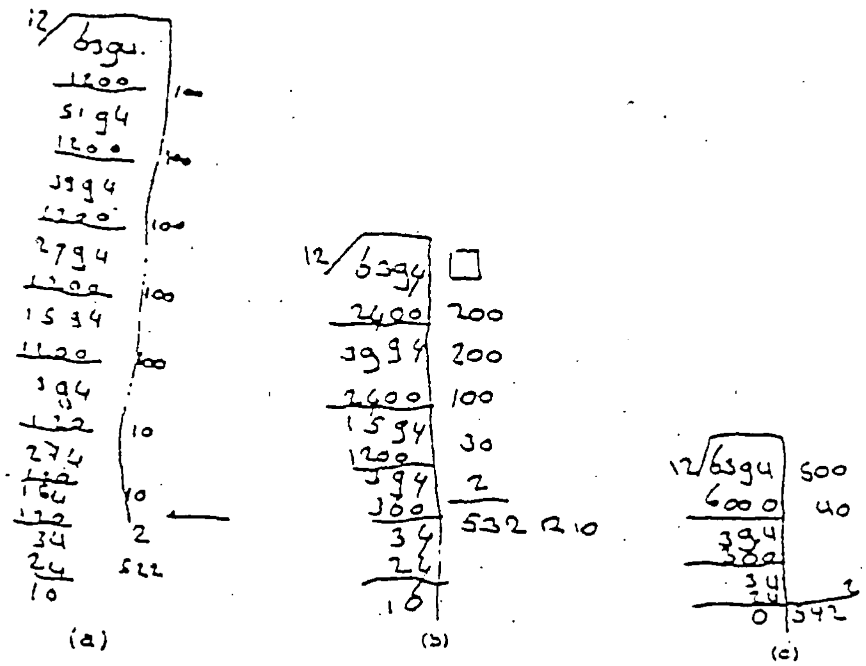
In de eerste fase van de leergang voeren de leerlingen het verdelen concreet uit via één-voor-één uitdelen; tegelijkertijd noteren en controleren ze het resultaat. De langdradige en onhandige één-voor-één werkwijze komt daarbij ter sprake.



Verdelingsschema

In de tweede fase worden er grotere porties uitgedeeld en de stand wordt in een verdelingsschema bijgehouden (zie figuur 'verdelingsschema'). In de derde fase noteren de kinderen nog maar één kolom (de porties zijn

immers toch gelijk) en werken ze aan een steeds verdergaande verkorting. Honderdtallen, tientallen en eenheden worden bij het verdelen en opdelen zoveel mogelijk samengenomen.
Na een les of vijftien werken de kinderen op verschillende niveaus. Sommigen zitten nog duidelijk in fase 2, terwijl anderen zich aan het einde van fase 3 bevinden (zie figuur 'lange, middellange en korte staartdeling', waarin overigens wel enkele foutjes zitten).



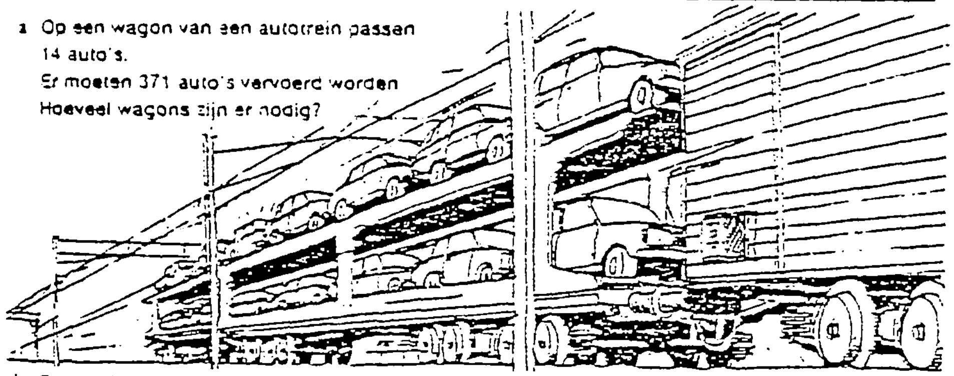
Lange, middellange en korte staartdeling

In de vierde fase wordt de relatie met breuken en kommagetallen gelegd. Ook de nauwe verbinding met toepassingsproblemen blijft bewaard. Dit komt mede tot uitdrukking in de aandacht die aan het delen met rest wordt besteed. Van dit laatste geven we twee voorbeelden van opgaven die daarbij aan bod kunnen komen (zie figuren 'Denk om de rest' en 'Bedenk zelf een kale som').

De geschetste realistische leergang staartdelen ontwikkelt zich geleidelijk uit handig en steeds handiger rekenen. Reële problemen spelen een dominerende rol, zowel bij het ontwikkelen van de staartdelingsprocedure als bij het toepassen ervan. Deze nieuwe aanpak onderscheidt zich van de traditionele leergangen die voornamelijk zijn opgebouwd volgens het principe van de toenemende complexiteit van de getallen, dus steeds moeilijker delingen waarbij per geval op de standaardvorm wordt aangestuurd.

2 Doe wat met de rest!

a Op een wagon van een autotrein passen 14 auto's.
Er moeten 371 auto's vervoerd worden.
Hoeveel wagons zijn er nodig?



b Een schildersbedrijf moet de muren van een kantoor wit schilderen.
Het totale oppervlak is 494 m².
Met één pot verf kan 6 m² worden geschilderd.
Hoeveel potten verf moeten er worden gebruikt?
Hoeveel is er in de laatste pot nog over?

c Christine verdiende met allerlei klusjes in 4 maanden ƒ 115,–.
Hoeveel is dat gemiddeld per maand?

d In een fabriek werden 7562 gevulde koeken gebakken.
Ze werden verpakt in doosjes van 8 stuks.
Hoeveel doosjes waren er nodig?
Welk deel van het laatste doosje was gevuld?

Denk om de rest

Bedenk een verhaaltje bij 6394 : 12, zodat de uitkomst van het gestelde probleem 532 is.

- Bedenk een opgave bij 6394 : 12 met 533 als oplossing.
- Nog eens, maar nu komt er 532 rest 10 uit.
- Idem, uitkomst $532\frac{5}{6}$.
- Idem, 532,83 rest 4 is het antwoord.
- 532,833333.

Bedenk zelf toepassingsopgaven bij een kale som

Discussie basisvorming staartdeling

Zou men het leren van de staartdeling tot de basisvorming rekenen-wiskunde moeten rekenen?
We beschouwen deze vraag eerst vanuit traditioneel gezichtspunt, dus vanuit de geschetste mechanistische aanpak.
De staartdeling is van oudsher de eerste grote hindernis in het rekenonderwijs op de basisschool.
Eén op de drie kinderen blijkt dat obstakel niet te kunnen nemen, en bij wat moeilijker delingsproblemen (bijvoorbeeld met nullen in de uitkomst) struikelt zelfs meer dan de helft. En dan worden slordigheidsfouten niet meegerekend; doch alleen de typische procedurefouten.
Specifieke overtredingen tegen de staartdelingsvoorschriften zijn onder meer:

— nullen worden niet in het quotiënt opgenomen;
— het 'restgetal' is te groot, zowel op het eind als midden in de staart;
— er wordt niet aangehaald;

— en in het quotiënt wordt een getal tien of groter ingevuld.
Een mager resultaat – en dan hebben we het nog niet eens over toepassingsproblemen.
Toch wordt aan het leren van de staartdeling per traditie heel wat onderwijstijd besteed, namelijk zestig tot honderd uur. Als we de kommagetallen erbij nemen zelfs nog aanzienlijk meer.
Er zou dus alle reden zijn om hem af te schaffen, lijkt het. Temeer daar kinderen tegenwoordig over een zakrekenmachine kunnen beschikken. Dus wèg ermee?
Hier en daar gebeurt dat. De eerste leerlingen die geen staartdelingen hebben geleerd, zijn al in het voortgezet onderwijs gesignaleerd. Sterker: de eerste Pabo-studenten die zelf niet aan de staartdeling zijn toegekomen, hebben zich reeds aangediend.
Toch zijn er ook enkele bedenkingen tegen afschaffing te formuleren.
Ten eerste verschaft de zakrekenmachine in bepaalde gevallen niet zonder meer de oplossing van delingsproblemen, bijvoorbeeld niet als het om de rest gaat. Hoe bepaal je bijvoorbeeld uit het kommagetal dat op het schermpje verschijnt het restgetal van de betreffende deling? Dat gaat niet zomaar, en toch gaat het soms juist om die rest. Een ander voorbeeld is dat de rest invloed heeft op het antwoord. In de voorgaande figuur 'Bedenk zelf toepassingsopgaven bij een kale som' ging het over deze kwestie Uit onderzoek blijkt dat kinderen grote moeite hebben met problemen waarin de context van invloed is op het antwoord (Bruckheimer 1984).
Ten tweede blijkt ook uit onderzoek (Carpenter 1981) dat kinderen elementaire toepassingsproblemen slechter maken met de zakrekenmachine dan zonder. Dat komt omdat de leerlingen lang niet altijd de delingsstructuur in delingssituaties onderkennen. Ze gebruiken dan ook primitieve, minder efficiënte methoden in plaats van de korte (staart-) deling. Dus net zoals aftrekkingen vaak via de winkelmethode worden opgelost van het doortellen, zo worden delingsproblemen bijvoorbeeld via proberend doorvermenigvuldigen of herhaald optellen opgelost, zonder dat die leerlingen ze kortweg als deling identificeren. Blijkbaar werkt de rekenmachine in zo'n geval blokkerend op het ondernemen van meer informele omslachtige methoden, zodat het aantal goede antwoorden per saldo terugloopt.
Hoewel deze gegevens opmerkelijk mogen heten, spreken ze alleen maar voor het veelzijdig leren gebruiken van de zakrekenmachine in toepassingssituaties, en niet zozeer voor het aanleren van de staartdeling. Want als je niet door hebt dat het om een deling gaat, kun je evenmin de staartdeling maken, als de zakrekenmachine gebruiken.
Kortom, de genoemde twee reserves lijken niet doorslaggevend te zijn om

de staartdeling in het pakket van de basisvorming te handhaven – althans niet vanuit de traditionele onderwijsoptiek bezien.

Maar nu bekijken we hetzelfde onderwerp vanuit het gezichtspunt van de eerder geschetste realistische aanpak.
Eerst maar eens wat nieuwe gegevens.
Welnu, de staartdeling blijkt nu geen hindernis te zijn: meer dan negentig procent van de leerlingen uit het reguliere onderwijs beheerst na 25 lessen een vorm van de staartdeling (Rengerink 1983). Ruwweg de helft maakt gebruik van de meest verkorte werkwijze waarin duidendtallen, honderdtallen, tientallen en eenheden ineens goed worden geschat (vergelijkbaar dus met de standaardmethode). Ongeveer 35 procent rekent al wel verkort, neemt dus wel eenheden, tientallen, etc. samen, maar nog niet (altijd) op de meest efficiënte manier. De rest (zo'n tien à vijftien procent) werkt veelal nog met lange staarten, waarbij in ieder geval de zoveeltallen per stuk worden afgenomen. Ook het 'herkennen' van de delingsstructuur in moeilijke gevallen gaat significant beter dan met de traditionele aanpak. Niet zo verwonderlijk, want er wordt nu veel meer met toepassingsproblemen gewerkt. Zoals aangeduid is de onderwijstijd aanmerkelijk korter.
Moet deze vorm van staartdelen, waarbij niet iedere leerling de standaard-eindvorm hoeft te bereiken, in het basispakket?
Het overgrote deel (meer dan negentig procent) van van de opleiders, begeleiders, ontwikkelaars en onderzoekers die tot nu toe op het voorstel van het nationale plan rekenen-wiskunde (4-12 jarigen) gereageerd hebben, antwoordt bevestigend. En ook in de drie nieuwste reken-wiskundemethoden wordt deze aanpak gevolgd.
Conclusie: de staartdeling behoort tot de basisvorming rekenen-wiskunde, zo mag men stellen. Maar dan wel de staartdeling volgens realistische snit.
Uit deze gevalstudie blijkt eens te meer dat eindtermen niet los gezien kunnen worden van de onderwijsaanpak!

Algemene typering van het realistische onderwijs
Uit het voorgaande voorbeeld zijn tal van algemene kenmerken van het realistische reken-wiskundeonderwijs af te leiden. We noemen: het sterk constructieve element; de geleidelijke invoering van meer formeel rekenen-wiskunde vanuit informele benaderingen die kinderen hanteren bij het oplossen van toepassingsproblemen; en de grote aandacht voor toepasbaarheid.
De eerste twee punten zullen in de volgende inhoudelijke beschrijvingen herhaaldelijk naar voren komen.

Maar aan de kwestie van de toepasbaarheid willen we nu apart aandacht besteden.

Om de beschrijving van het bedoelde contextrijke onderwijs meer reliëf te geven, beginnen we met een kenschets van *vorm*, *inhoud* en *functie* van de verschillende opgaventypen binnen het gangbare traditionele rekenonderwijs, dat als contextarm aangemerkt moet worden.
Welnu, dit rekenonderwijs bevat drie vormen van opgaven, te weten:
— 'kale' rekensommen als '5 × 7 = ..';
— aangeklede rekenopgaven van het type 'Anita koopt zeven filmkaartjes à fl 2,50; zij betaalt...';
— redactievraagstukken, zoals bijvoorbeeld 'Willem van Oranje stierf in 1584. Hij werd 51 jaar. Wanneer werd hij geboren?'
Inhoudelijk bezien zijn dit soort opgaven nogal schraal. De kale rekensommen laten zich eenvoudig in het gelid van uniforme rijtjes opstellen. De aangeklede rekenopgaven bevatten open termen ('filmkaartjes') die simpel door andere zijn te vervangen zonder dat de aard van de opgave wezenlijk verandert. En de redactievraagstukken zijn zo duidelijk in een vooropgezet rekenkundig kader geplaatst dat er geen ruimte wordt gelaten voor reële overwegingen bij het 'vertalen' van het probleem naar de wiskunde of omgekeerd via het oplossingsmodel naar de realiteit. Zo staat bij het genoemde probleem over Willem van Oranje in de betreffende methode kortweg als antwoord '1584 – 51 = 1533'!
Wat hun functie betreft zijn de aangeklede rekenopgaven en redactievraagstukken te kwalificeren als toepassingen-achteraf van hetgeen allereerst (meestal na een zeer korte concrete instap) via 'kale' sommen binnen het formele rekensysteem is aangeleerd. Niet alleen is het toepassingsgehalte ervan, zoals we juist vaststelden, nogal beperkt: de opgaven zijn geijkt, het oplossingsschema is pasklaar, en het schoolse karakter ervan laat geen redeneringen toe vanuit de (vaak zwakke) context van de betreffende opgaven. Maar ook als geheel beschouwd is de verzameling stereotype toepassingen van het traditionele rekenonderwijs ontoereikend. De veelzijdigheid van de reële verschijningsvormen van wiskundige begrippen en structuren wordt er namelijk meestal niet voldoende in tot uitdrukking gebracht. Of anders gezegd: de brede toepasbaarheid van rekenen-wiskunde wordt er onvoldoende in verzorgd, en dat begint al bij het onderwijzen van de basisoperaties in het aanvangsonderwijs.
Met het voorgaande zijn de drie typen opgaven zeker niet gediskwalificeerd. Ze vervullen ook in contextrijk onderwijs een functie als oefenopgaven en elementaire toepassingsproblemen – zij het dat de kinderen hun ervaringen binnen een bepaalde context die van invloed zijn op de

mentale voorstelling van de probleemsituatie, nu niet nadrukkelijk buiten spel hoeven te zetten. Maar wel willen we hier gezegd hebben, dat rekenonderwijs dat uitsluitend uit dit drietal opgaventypen met de genoemde beperkte functie bestaat, te weinig gericht is op toepasbaarheid, niet motiverend werkt en aan een ontstellende betekenisarmoede lijdt.

Contextrijk onderwijs bevat naast de eerdergenoemde opgaventypen ook zogenoemde contextproblemen, die zich qua vorm, inhoud en functie van deze traditionele sommen onderscheiden.
Contextproblemen kennen geen vaste vormgeving: ze kunnen in de klare rekentaal zijn gesteld of in de korte tekst van een redactiesom gevat; maar ook zijn uitgebeeld via een (toneel-)spel, voorgesteld door verhalen, knipsels, modellen, grafieken, of een samenstel van deze informatiedragers; en geclusterd in thema's of projecten
Stel nu dat een opgave de klassieke vorm van een redactiesom heeft, wat bestempelt hem dan toch tot contextopgave?

'Onze auto rijdt 1 op 10.
Hoeveel benzine gebruikt hij voor een tocht van 234 kilometer?'

Welnu, de wijze waarop dit probleem in het onderwijs wordt gebruikt, is bepalend voor het feit of het als contextopgave dient te worden aangemerkt. Het criterium daarbij is of de betreffende reële context al dan niet in de overwegingen en berekeningen wordt betrokken – net zoals bij het eerdergenoemde probleem over Willem van Oranje dus.
Of nog wat ruimer gesteld: in contextrijk onderwijs worden problemen waarin bijvoorbeeld de deling '234 ÷ 10' vervat ligt, zeer nauwkeurig onderzocht op de contextafhankelijkheid van het antwoord, dat al naar gelang van de reële probleemstelling kan luiden: ongeveer 23; of 20 tot 25; of 23,4; of 23; of 24; of 23 rest 4; .... In contextarm onderwijs daarentegen luidt het antwoord steevast 23 rest 4 (in de middenbouw), of 23,4 (in de bovenbouw) en wordt de context niet nader beschouwd.
Contextproblemen kunnen meerdere functies vervullen, namelijk die van:
- begripsvorming; ze verschaffen de kinderen in het begin van een leergang een natuurlijke een aansprekende toegang tot de wiskunde;
- modelvorming; ze kunnen houvast bieden bij het uitvoeren van formele operaties, procedures, notatiewijzen en regels (naast andere materiële en visuele modellen die een belangrijke steunfunctie voor het denken vervullen, zoals de abacus, stroken, tabellen, diagrammen e.d.);
- toepasbaarheid; ze leggen de realiteit als toepassingsgebied bloot;
- oefening van specifieke vaardigheden in toepassingssituaties.

Om bij het delingsvoorbeeld te blijven: een elementaire verdelingsopgave kan als startprobleem dienen om de staartdelingsprocedure te leren, hij kan omgekeerd als houvast gebruikt worden bij het berekenen van een kale opgave, hij kan als toepassing fungeren, en als specifieke oefenopgave in een toepassingssituatie.

We vatten samen: de onderwijskundige basisstelling van de contextrijke aanpak luidt dus kortweg, dat de toepasbaarheid van het reken-wiskundeonderwijs wordt verhoogd door bij het onderwijsleerproces uit te gaan van toepassingen i.c. contextproblemen, en ze niet slechts als sluitstuk in de vorm van toepassingen te laten optreden, zeker niet op de schrale wijze waarop dat veelal in het gangbare traditionele rekenonderwijs uit de periode 1950-1975 gebeurde.

De didactische consequenties van deze stellingname voor de opbouw van de leergangen en het verloop van de onderwijsleerprocessen zijn zeer verstrekkend, zoals uit het vervolg zal blijken.

Ter afsluiting enkele voorbeelden van contextrijk onderwijs:

1 Dagtochten en attracties.

Dagtocht 1
De Efteling

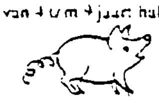
Inbegrepen:
a. treinreis retour 2e kl. naar 's-Hertogenbosch;
b. bus rit retour 's-Hertogenbosch-Kaatsheuvel;
c. toegang tot De Efteling incl. attracties.

Prijs: ƒ 24.00
kinderen van 4 t/m 9 jaar: halve prijs

Dagtocht 4
Flevohof

Inbegrepen:
a. treinreis retour 2e kl. naar Harderwijk;
b. retour Harderwijk-station Flevohof per bus;
c. toegang Flevohof;
d. kop koffie of glas limonade met gebak.

Prijs: ƒ 26.50
kinderen van 4 t/m 9 jaar: halve prijs



Dagtocht 8
Texel

Inbegrepen:
a. treinreis retour 2e kl. naar Den Helder;
b. retour stadsbusrit station-havenhoofd;
c. bootretour Den Helder-Texel;
d. dagkaart op de bussen op Texel.

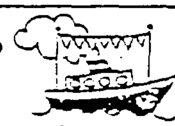
Prijs: ƒ 34.00
kinderen van 4 t/m 9 jaar: halve prijs

Dagtocht 14
Ouwehand Rhenen

Inbegrepen:
a. treinreis retour 2e kl. van Utrecht naar Rhenen;
b. toegang Ouwehand: dierenpark, dolfijnenshow, natuurbad, aquarium en monkie-rail;
c. kop koffie of glas limonade met gebak.

Prijs: ƒ 20.50
kinderen van 4 t/m 9 jaar: halve prijs

Dagtocht 39
Maastricht



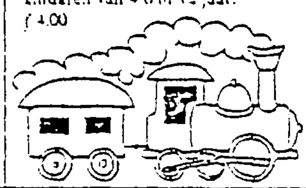
Inbegrepen:
a. treinreis retour 2e kl. naar Maastricht;
b. kop koffie met Limburgse vlaai in de stationsrestauratie;
c. rondvaart op de Maas;
d. bezoek en rondleiding door grotten Sint-Pietersberg;
e. bezoek aan St.-Servaas.

Prijs. ƒ 40.00
kinderen van 4 t/m 9 jaar: halve prijs

Attractie 38
't Boemeltje van Zuid-Beveland

Inbegrepen:
retour 2e kl. per stoomtram van Goes naar Oudelande.

Prijs: ƒ 7.75
kinderen van 4 t/m 12 jaar: ƒ 4.00

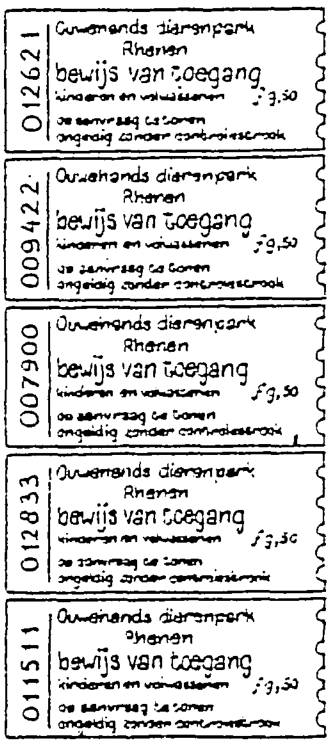


De familie Harmsen heeft in de vakantie deze zes dagtochten gemaakt.
Wat moesten ze telkens betalen?

Het gezin bestaat uit: vader, moeder, Ron van 5, Karin van 9 en Marcel van 11 jaar.

1 Entreekaartjes.

OUWEHAND



De dame achter de kassa noteert elke twee uur het nummer van het kaartje.

a Zet de nummers van de kaartjes in de goede volgorde.

b Wat was het nummer van het laatste kaartje van de vorige dag?

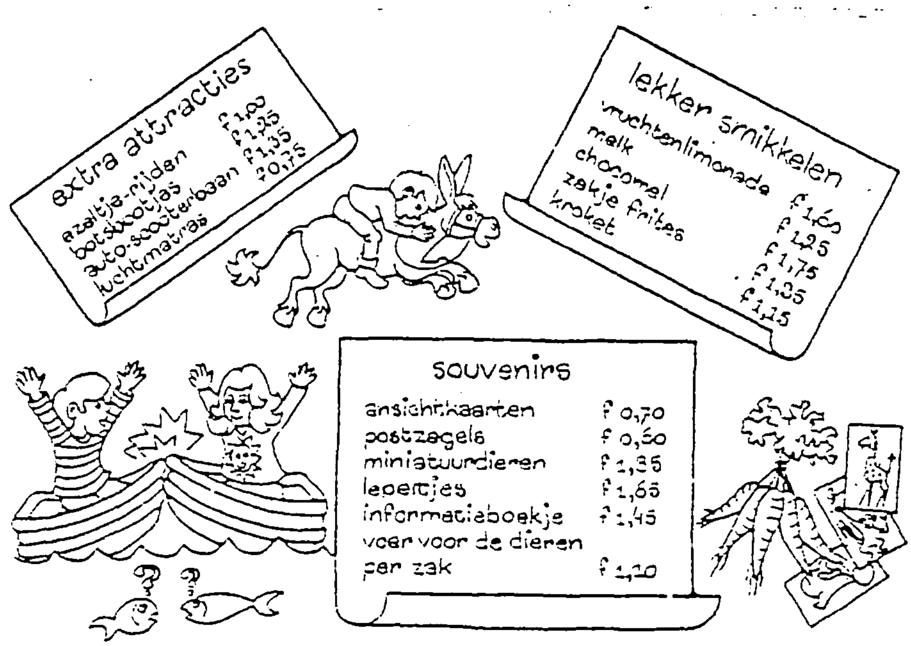
c Hoeveel mensen kwamen het dierenpark binnen
- tussen 9 en 11 uur?
- tussen 11 en 1 uur?
- tussen 1 en 3 uur?
- tussen 3 en 5 uur?

d Hoeveel mensen bezochten op deze dag het dierenpark?

★ e Aan het einde van elke dag wordt er nog een loterij gehouden met de nummers van de verkochte kaartjes. Vandaag vielen de prijzen op de nummers:

011995 | 010466 | 009985 | 008661 | 012004

Reken eens uit hoe laat ongeveer deze kaartjes werden verkocht.



a Je krijgt van je ouders f 10,– die je zelf mag besteden.
Wat doe je ermee? Wat houd je over?

b Doe zoveel mogelijk verschillende dingen met je tientje.

c Heb je aan twee tientjes genoeg om alles één keer te doen?

★ d Waar zou jij het liefst heengaan?
Reken uit hoeveel kilometer je met de trein moet reizen.
Wat kost dat? Zoek het op in een spoorboekje.
Koop een attractiekaartje. Hoeveel kost het?

3 Basisvaardigheden hoofdrekenen

Het is een eerste vereiste dat de leerlingen de tafels van de vier hoofdbewerkingen memoriseren. Ten tweede dienen de kinderen elementaire hoofdrekenopgaven vlot en inzichtelijk te kunnen berekenen. Deze betreffen het optellen en aftrekken 'onder de honderd' (duizend), vermenigvuldigingen als voortzettingen en combinaties van de tafels ('7 × 13') en het rekenen met 'nulien' (machten van 10). In het vigerende schriftelijke rekenonderwijs wordt het aanleren en onderhouden van deze basiskennis en -vaardigheden vaak niet voldoende verzorgd. De aloude didactiek voor het memoriseren en automatiseren zal bijgesteld dienen te worden.

Hoofdrekenen.

a Wat is het verschil?	b Wat staat er onder de vlekken?
ƒ 1,83 en ƒ 2,00	128 + = 300
ƒ 0,69 en ƒ 2,50	86 + 34 =
ƒ 3,12 en ƒ 2,85	117 − = 85
ƒ 1,75 en ƒ 2,05	− 8 = 998
ƒ 3,25 en ƒ 2,65	− 3 = 1499

c Handig rekenen.	★ d Hoeveel kwartjes?
4 × 25 =	ƒ 1,75
12 × 25 =	ƒ 12,25
20 × 25 =	ƒ 9,50
40 × 25 =	ƒ 24,75
400 × 25 =	ƒ 99,50

Tot omstreeks 1960 werd er in Nederland betrekkelijk veel aandacht aan het memoriseren van de tafels en het automatiseren van elementaire hoofdrekenopgaven geschonken. Na 1960 werden de tafellitanieën steeds minder gehoord en allengs verdween ook het mondelinge rekendictee. Rekenen werd meer en meer een schriftelijke aangelegenheid. Daardoor kon de onderwijsgevende steeds minder vat op het aanleren en onderhouden van de basiskennis en -vaardigheden krijgen. Met als gevolg dat in de afgelopen jaren de beheersing ervan bij een aanzienlijk deel van de leerlingen te wensen overlaat.

Om echter goede voortgang in het reken-wiskundeonderwijs te kunnen maken, is het noodzakelijk dat de kinderen zich de basiskennis eigen maken, en dit geldt ook als de zakrekenmachine een geïntegreerd onderdeel van het reken-wiskundeonderwijs vormt. Wat echter niet noodzakelijk is, zelfs niet wenselijk, dat is de louter mechanistische wijze van inslijpen zoals dat voorheen gebeurde.

Zo is het memoriseren van de tafels het resultaat van een proces van verdergaande verkorting van handig rekenen (via tellen, verkort tellen, structureren op basis van gememoriseerde kennis en inzicht in de getallenstructuur, herhaald verdubbelen en halveren, efficient gebruiken van eigenschappen van bewerkingen e.d.), met als laatste stap het volledig inprenten van tafeloptellingen, -aftrekkingen, -vermenigvuldigingen en -delingen.
En ook het 'automatische' hoofdrekenen - met opgaven als '43 + 39'; '85 − 58'; '10 × 23'; '7 × 12'; '15 × 8'; '100 × 28'; '7 × 253' (via 1400 + 350 + 21); '350 ÷ 10'; '50 × 75'; - staat aan het einde van een proces van steeds verder verkorten van handig rekenen op basis van kennis van tafels, begrip van eigenschappen en inzicht in het positiesysteem.

Eerlijk

Deelnemen is belangrijker dan winnen, heet het. Maar wat rest van de Olympische Spelen is de herinnering aan een paar onvergetelijke momenten en de statistiek. Los Angeles 1984 gaat de geschiedenis in als de Spelen van die vrouw die zwaikend de finish van de marathon haalde en de overweldigende overwinning van de Verenigde Staten.

Toen de Spelen werden ingesteld is ooit gezinspeeld op een eindklassement waarin de hoeveelheid medailles op zich minder belangrijk was dan een berekening volgens de *Gelijkschakelingsformule*. In deze formule waren verschillende factoren opgenomen, zoals grootte van het land, bevolkingscijfer, ontwikkeling, technische voorzieningen en dergelijke. De kansarmte van een land werd zwaar gewogen. Deze formule is nooit echt toegepast, want ook in de afweging van de factoren sloop allerlei willekeur.

De aldus verkregen klassering heeft wel enige tijd als schaduwklassement gefunctioneerd, maar is nooit in de officiële tabellen opgenomen. Toch is het wel eens aardig naar de gelijkschakelingsformule te kijken. Het kost nogal wat rekenwerk, laten we ons dus beperken tot Nederland. Dat heeft zo'n 14 miljoen inwoners, tegen de VS ruim drie miljard, twee honderd keer zoveel. De oppervlakte van Nederland is pakweg 40.000 vierkante meter, tegen de VS 33.000 vierkante *kilometer*, bijna duizend keer zoveel. Dit tegen elkaar afgewogen is de bevolkingscoëfficient van Nederland een vijfde van die der V.S.

Volkskrant 13.8.1984.

1,2,3,4,5.... vergissinkjes.

Voorts kan het inoefenen van de basiskennis en -vaardigheden gevarieerd gebeuren via rijtjes, tabellen, pijldiagrammen, machientjes e.d. en door middel van tal van spellen. Ook de zakrekenmachine kan daarbij zijn diensten bewijzen.
Zeker in de eindfase van het inprenten is programmatuur (courseware) zeer wel in staat de taak van de onderwijsgevende als trainer voor een

belangrijk deel over te nemen. Daarin kunnen de nadelen van het rekendictee (spanning, groepsdruk) worden ondervangen, en de voordelen ervan benut (snelheid, correctheid). Sterker: de programmatuur kan beter aan de individuele leerlingen worden aangepast dan met het veelal klassikale rekendictee ooit mogelijk was. De zojuist genoemde gevarieerde inkleding kan er eveneens in opgeslagen worden.
En wat tenslotte nog van belang is: dergelijke software-pakketten kunnen op verschillende niveaus en door de verschillende leergangen heen worden gebruikt. Voortgaande en voortdurende oefening is immers nodig, ook in de hogere leerjaren en dan vooral (aan-)gepaste oefening.
De onderwijsgevende en niet (alleen) het leerboek of courseware kan echter verantwoord onderwijs voor dit onderdeel waarborgen: de intentie van het willen inprenten dient uitdrukkelijk bij de leerling te worden opgewekt. En de onderwijsgevende dient er borg voor te staan dat de automatismen per saldo geleerd worden.
Ziehier een sterke accentuering van het basisrepertoire voor het rekenen, dat nauwkeurig in beheersingsdoelen beschreven kan worden. Maar ook de nieuwe didactische middelen moeten daarin betrokken te worden. Want inzicht dient de grondslag van de gememoriseerde basiskennis en de geautomatiseerde basisvaardigheden te vormen. Het beheersingsdoel is dus slechts het sluitstuk van een langlopend leerproces van structureren en verkorten. Vroeger echter werd deze leergang voornamelijk gekenmerkt door mechanisch inslijpen, en daar moeten we niet naar terugkeren.
Dus wel het oude beheersingsdoel; maar niet met de aloude heersingsmiddelen - dat is de nieuwe boodschap.

Samenvatting basisvaardigheden hoofdrekenen:
— tafels van vier basisoperaties gememoriseerd hebben;
— elementaire hoofdrekenopgaven vlot berekenen;
— volledig vertrouwd zijn met allerlei bewerkingen en structureringen in het getallengebied tot honderd;
— het automatisch kunnen rekenen met machten van tien ($\times$ 10; $\times$ 100; $\div$ 10; $\div$ 100; ...);
— het efficiënt gebruik maken van eigenschappen van bewerkingen bij elementaire opgaven als 7 $\times$ 12; 50 $\times$ 75; 2 + 88; 99 + 27; ...
— het kiezen van de juiste basisoperaties in elementaire contextsituaties, waaronder die van het geldrekenen.

4 Basisvaardigheden cijferen

Er kan aanzienlijk minder tijd aan cijferen worden besteed indien het direkte aanleren van de standaard-algoritmen wordt vervangen door het geleidelijk inkorten van rekenprocedures via handig rekenen. Dit voert bij het cijferend optellen en aftrekken tot de standaard-algoritmen, bij het vermenigvuldigen 'onder elkaar' tot een enigszins aangepast eindalgoritme (wat de notatievorm betreft), en bij het staartdelen tot een min of meer bijgestelde eindprocedure (zie voorbeeld onder 1).
We stellen voor om de aloude cijfermethodiek te vervangen door het zogenoemde geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering, dat op handig en steeds handiger rekenen is gebaseerd, en de einddoelen op overeenkomstige wijze aan te passen. Dit houdt in: anders cijferen, minder cijferen, en meer toepassingsgericht cijferen.

De traditionele leergangen voor cijferen, starten met eenvoudige 'kale' rekenopgaven, en vervolgen met een serie sommen die volgens opklimmende moeilijkheid zijn geordend. De mate van complexiteit hangt af van de grootte van de getallen, de benodigde inwisselhandelingen, het aantal nullen en nog enkele factoren. Steeds leren de kinderen per deelgeval de standaard-procedure uit te voeren, waarop ze dan in een volgend complexer geval kunnen voortbouwen. We noemen deze gangbare traditionele aanpak 'geïsoleerd cijferen volgens progressieve complicering'. We spreken van 'geïsoleerd' omdat dit cijferen losstaat van handig rekenen en toegepast rekenen. En de aanduiding 'progressieve complicering' slaat op de geschetste opbouw.
Daartegenover staat het zogenoemde 'geïntegreerde cijferen volgens progressieve schematisering'. Hierin is het cijferen niet afgeschermd van handig rekenen en het maken van toepassingen. Integendeel: het handige rekenen aan de hand van contextproblemen dient juist als start- en aangrijpingspunt voor het leren van de cijferprocedures. Volgens deze werkwijze wordt dus niet van meet af aan direkt op de standaard-procedures afgestevend, maar geschiedt het leren cijferen langs de geleidelijke weg van steeds verdergaande schematisering en verkorting van de rekenwijzen.
Dat gaat voor het cijferend optellen en aftrekken zo: de kinderen werken reeds in een vroeg stadium met relatief grote getallen en met inwisselen, respectievelijk lenen. Alleen voltrekken de berekeningen zich dan op een aangepast niveau van schematisering en verkorting. Dat wil zeggen: aanvankelijk gebruiken de kinderen bij het uitrekenen inwissel- en positiemateriaal (MAB, abacus of geld), dan nog slechts een positieschema, waarin de berekening nog niet geheel verkort (dus met een tussenstap voor het inwisselen of lenen) plaatsvindt, en tenslotte

hanteren zij de standaard-procedure met direkt inwisselen respectievelijk lenen. Hoe de fasen doorlopen worden, bepaalt de leerling in hoge mate zèlf. Dit levert een sterk gedifferentieerd beeld van de groep of klas op: de leerlingen werken weliswaar aan dezelfde problemen maar de verwerking geschiedt vaak op verschillende niveaus.
Het vermenigvuldigen 'onder elkaar' voltrekt zich op analoge wijze: eerst wordt de vermenigvuldiging opgevat als lange herhaalde optelling, dan worden de tafelprodukten gebruikt, vervolgens worden happen van tien termen afgesplitst (dit op basis van het handig rekenen met nullen, dat al eerder ter sprake kwam of nu via een eigen ontdekking opduikt), en die porties van tien worden dan later weer samengenomen, en zo voort tot de kinderen de oorspronkelijke lange optelling zo ver ingekort hebben dat ze bij de standaard-procedure zijn beland. De grondslag van de verkorting wordt gevormd door het op den duur kunnen uitvoeren van een opgave als '7 × 256 = ...' met direkt inwisselen. Gedurende de hele leergang vormt het oefenen hiervan de onderstroom.
Bij het staartdelen vindt iets dergelijks plaats: eerst is de staart heel lang, maar door steeds handiger herhaald aftrekken wordt hij stelselmatig verder gecoupeerd. En wel zo ver als ieder kind daarbij kan gaan. Voor de ene leerling zal dit tot de standaard-vorm voeren (met een wat andere notatiewijze dan de gangbare), terwijl de andere niet verder komt dan herhaald aftrekken met porties van honderd, tien en één. Maar ook de laatste werkwijze voert in principe naar de oplossing....
Op alle belangrijke knooppunten in de cijferleergangen staan contextproblemen als markering. Want deze geven de kinderen houvast bij het verkorten van de rekenprocedures. Omgekeerd kunnen ze steun bieden bij het maken van 'kale' opgaven. En ook verbinden ze het leren cijferen met het leren toepassen van de cijferprocedures, wat in de traditionele werkwijze grote problemen blijkt op te leveren.
Niet alleen de goede, maar vooral ook de zwakke leerlingen blijken van deze vorm van leren cijferen te profiteren.

Samenvatting basisvaardigheden cijferen:
— cijferend kunnen optellen volgens de standaardprocedure;
— cijferend kunnen aftrekken volgens de standaardprocedure;
— cijferend kunnen vermenigvuldigenn volgens de standaardprocedure, met eventueel een aangepaste notatiewijze;
— cijferend kunnen delen, informeel of volgens de (aangepaste) standaardprocedure;
— dit alles op basis van inzicht in het positiesysteem;
— en geintegreerd met het maken van elementaire toepassingen.

5 Basisvaardigheden hoofdrekenen-plus

Naast (elementair) hoofdrekenen maakt men in de rekendidactiek ook nog gewag van eigenschapsrekenen, handig rekenen, flexibel rekenen, gevarieerd rekenen, schattend rekenen en nog meer. We vatten dit alles samen in de term 'hoofdrekenen-plus'. De toevoeging 'plus' duidt aan dat naast het 'automatische' aspect nog tal van andere minder automatische, ofwel meer heuristische elementen in het hoofdrekenen betrokken kunnen worden, waarvan de bovenstaande naamaanduidingen een globale indicatie geven. Anders gezegd: hoofdrekenen-plus is minder regelgeleid, minder exact bepaald, minder 'schools' dan het elementaire hoofdrekenen, dat er de grondslag van vormt. Ondanks het feit dat het niet zo precies in termen van beheersingsdoelen te vatten is, zouden er toch veel meer onderwijsactiviteiten op gericht dienen te worden dan in het gangbare traditionele (hoofd-)rekenonderwijs gebeurt.

We bepalen ons hier tot drie belangrijke aspecten van hoofdrekenen-plus, namelijk handig, redenerend en schattend rekenen.
Bij *handig rekenen* maken de kinderen handig gebruik van een scala eigenschappen betreffende de basisoperaties, en dat alles op de grondslag van de eerder genoemde basiskennis en -vaardigheden. Het is echter niet de bedoeling dat ze een groot arsenaal aan verfijnde rekensnufjes leren, zoals dat in vroeger tijden wel op de zogenoemde opleidingsscholen gebeurde. Daarvoor is de persoonlijke, maatschappelijke en wiskundige relevantie van dat soort rekengymnastiek te gering. Wel moeten de kinderen elementaire eigenschappen als van verwisselen ($23 \times 2 = 2 \times 23$), verdelen ($8 \times 42 = 8 \times 40 + 8 \times 2$); verdubbelen; halveren; transformeren ($16 \times 48 = 8 \times 96 = 8 \times (100 - 4) = 800 - 32 = 768$) en het rekenen met 'nullen' passend kunnen gebruiken, al was het alleen maar om de rigiditeit van het louter automatische rekenen en cijferen zoveel mogelijk te kunnen tegengaan en een zuiver algoritmische houding ten opzichte van het rekenen te bezweren. Dit handige rekenen kan speels en gevarieerd beoefend worden. Allerlei spelletjes zoals 'cijfers en letters', 'bingo' e.d. en allerlei inkledingsvormen met pijldiagrammen, roosters, tabellen, machientjes, doolhoven, geheimschriften e.d. kunnen daarbij van dienst zijn.
Maar met die nieuwe oefenstofferingen kan ook een nieuw element in het hoofdrekenen gebracht worden, namelijk het *redenerend (hoofd)-rekenen*. Neem bijvoorbeeld de tabelopdracht (zie figuur). Er dient hier gerekend te worden. Maar niet zomaar: het 'eenvoudige' invulwerk kan pas plaatsvinden nadat enkele strategische punten bezet zijn. Om dit te bereiken moeten de kinderen proberen, redeneren, systematisch werken. Kortom, er is aan het (hoofd-)rekenwerk een strategisch element

toegevoegd, dat het tot redenerend (hoofd)-rekenen maakt.
Ook met behulp van pijldiagrammen, doolhoven, machientjes en andere vormen kan dit redeneerelement met het meer automatische rekenwerk worden verbonden.

x				
3	6		18	
				28
		25		
		30		42

Bepaal de rand- en binnengetallen

Schatten is een buitengewoon belangrijk didactisch middel om onder meer bepaalde rekenhandelingen (zoals het tellen, herhaald optellen en aftrekken, verhoudingsrekenen) te leren verkorten. Maar het kan ook een doel op zich zijn. Dat nu is bij het *schattend rekenen* het geval. Het gaat daarin om ten eerste het ruwweg bepalen van de uitkomst van een berekening, ten tweede om het globaal controleren van de uitkomst van een berekening qua juiste orde van grootte, en ten derde om het schattend rekenen op grond van niet-exact bepaalde of te bepalen gegevens, of combinaties van die drie elementen. Kortom, het betreft het passend omgaan metervaringsgegevens, bewerkingen, benaderingen, afrondingen, (on-)nauwkeurigheid en schattingen, in allerlei alledaagse toepassingssituaties. Dat dit niet altijd even eenvoudig is blijkt uit de verschillende knipselvoorbeelden van dit werkboek.
Bijbrengen van 'feeling voor getallen' is een van de onderliggende algemene doelen van rekenen-plus, dat inhoudt handig rekenen met hulp van eigenschappen, redenerend rekenen en schattend rekenen, en dat alles gestoeld op de basiskennis en -vaardigheden.
Introductie van meer hoofdrekenen-plus zou een pluspunt voor het reken-wiskundeonderwijs betekenen.
Samenvatting hoofdrekenen-plus:

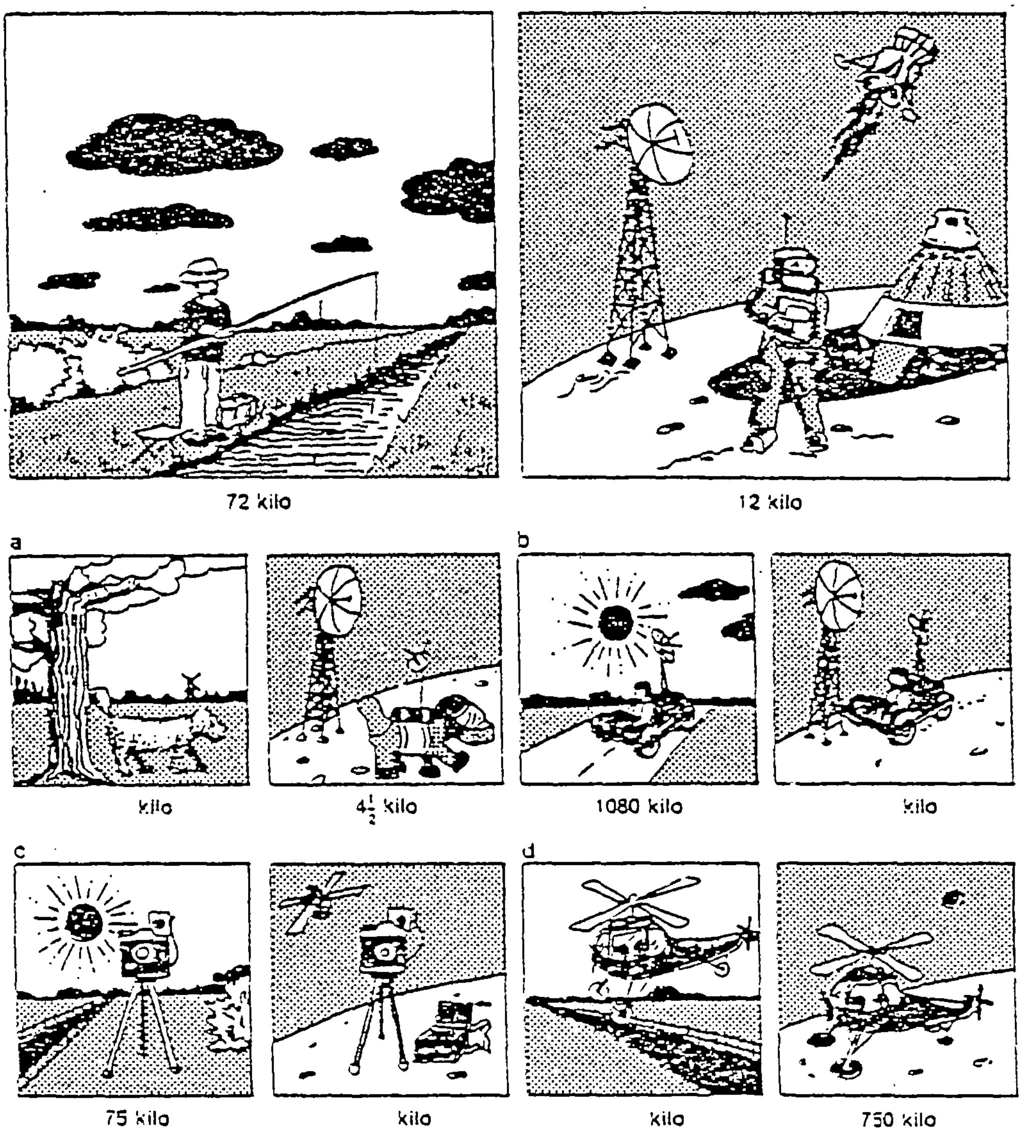
- schatten, vooral van vermenigvuldigen en delen, in al z'n facetten en in tal van toepassingssituaties;
- handig rekenen in al z'n facetten en in tal van toepassingssituaties;
- redenerend rekenen in al z'n facetten en in tal van toepassingssituaties;
- het kiezen van de juiste operaties in toepassingsproblemen, het uitvoeren van de benodigde berekeningen, zo mogelijk via informele methoden van schattend, redenerend en handig rekenen, zonder gebruik te maken van de zakrekenmachine;
- idem, maar nu met gebruik van de zakrekenmachine.

6 Verhoudingen en procenten

'Verhoudingen' is één van de meest verwaarloosde en verschraalde onderwerpen van het traditionele rekenonderwijs. Op zich is het verschijnsel verhoudingen echter heel belangwekkend: het is nauw verbonden met de realiteit, aansprekend voor kinderen, en wiskundig en maatschappelijk relevant. Er zal derhalve veel meer aandacht aan moeten worden geschonken dan per traditie gebeurde, en ook de leerdoelen zullen dienovereenkomstig moeten worden aangepast.

'Bartjens' bepaalde zich tot het verstrekken van de regel van drie. 'Bouman en Van Zelm' schonk ruime aandacht aan het in schema zetten van elementaire koopmansproblemen en denkopgaven. In de jaren vijftig en zestig verkommerde het leerstofonderdeel tot stereotype, sterk geschematiseerde evenredigheidsopgaven. En de 'New Math' tenslotte schrapte het onderwerp zelfs geheel ten faveure van de breuken.
Toch ligt er op het terrein van de *verhoudingen* een schat van mogelijkheden voor contextrijk-realistisch reken-wiskundeonderwijs.
Verhoudingen zijn er in de eerste plaats om situaties te vergelijken. Dit vergelijken met al z'n consequenties (ordenen, verschil bepalen, correcties aanbrengen e.d.) zal dus een belangrijke plaats in de leergang moeten krijgen.
Om te beginnen biedt de waarnemingswerkelijkheid vele aangrijpingspunten, zoals bijvoorbeeld vergroten, verkleinen, (niet)-verhoudingsgetrouwe afbeeldingen in tekeningen, kaarten op schaal - die in de onderbouw als kwalitatieve aanloop tot het kwantitatieve opereren met verhoudingen kunnen dienen.
De overgang van het visuele naar het meer numerieke voltrekt zich geleidelijk vanaf de middenbouw van de basisschool. Modellen en schema's, zoals de tweezijdige getallenlijn, de strook, het stokschaduwmodel, de rechtlijnige grafiek, en de verhoudingstabel, vergemakkelijken zowel het doorzien van de numerieke relaties als de getalsmatige verwerking ervan. Verbanden tussen aantal en prijs, weg en duur, het samenstellen van recepten, mengsels e.d. worden nu onderzocht.
In de bovenbouw worden *procenten* geïntroduceerd; de verhoudingstabel speelt daarbij een kernrol met het doorrekenen van de gevolgen van het 'op de honderd stellen'. Voorts worden de toepassingen van verhoudingen uitgebreid naar (lineaire en niet-lineaire) verbanden tussen allerlei grootheden, en worden de berekeningen steeds meer geschematiseerd en verkort.
Verhoudingen zijn ook van belang in verband met breukverwekkende activiteiten - we komen daar in de volgende paragraaf nader op terug.

Kortom, ze vormen een belangrijk bindmiddel tussen de verschillende reken-wiskundegebieden onderling, en tussen die gebieden en de realiteit. En voorts anticipeert dit onderwerp op het vervolgonderwijs in wiskunde, natuurkunde, scheikunde, biologie en aardrijkskunde.
Vandaar: behandel 'verhoudingen' naar verhouding van hun grote belang.



e

op de aarde	72			720	1080		kilo
op de maan	12	6	24			750	kilo

Samenvatting verhoudingen en procenten:
- in contextopgaven, waarbij vergelijken centraal staat, gebruik maken van strook, verhoudingstabel of grafiek;
- in verschillende leerjaren, zeg vanaf het derde leerjaar.

toepassingsproblemen in verband met mengsels, eerlijke verdelingen, gelijkwaardige verdelingen, inwisselproblemen (metriek, muntstelsel, schaal) maken;

- idem met toepassingen betreffende gebonden grootheden (gewicht-prijs, aantal-prijs, weg-tijd, stok-schaduw, dichtheid, snelheid, etc.) eventueel met behulp van de verhoudingstabel;
- verhoudingen globaal kunnen berekenen en schatten, mede in verband met het tellen en berekenen van grote hoeveelheden;
- procenten als gestandaardiseerde maat in de zin van 'op honderd stellen' hanteren, mede in relatie met de verhoudingstabel;
- eenvoudige praktische procentberekeningen gesteld in de vorm van alledaagse probleemsituaties maken, vooral die met geld van doen hebben;
- verhoudingsproblemen die te maken hebben met meetkundige problemen van vergroten, verkleinen en schaal, en eventueel het affect van lineaire vergroting toepassen op oppervlakte en inhoud.

Met haar laatste discusworp bracht Ria Stalman op de valreep het Nederlandse goud-totaal op vijf. Andere triomfen waren er voor de zwemsters Jolanda de Rover (rugslag) en Petra van Staveren (schoolslag), de plankzeiler Stephan van den Berg en de vrouwen-hockeyploeg. De vrije slag-estafette en de roeizusters Hellemans zorgden voor zilver. Bronzen plakken gingen naar zwemster Annemarie Verstappen (tweemaal), Jolanda de Rover, kanovaarster Annemiek Derckx, de bokser Arnold van der Lijden en de roei-acht (vrouwen).

Ofschoon de definitieve cijfers nog niet bekend zijn staat vast dat de toeschouwersaantallen nog nimmer in de Olympische geschiedenis zo hoog zijn geweest. Naast de atletiek-séances behoorden de voetbalwedstrijden tot de grote trekpleisters.

De beiangstelling van de Nederlandse tv-kijkers voor de vele uitzenduren van Studio Sport zijn bekend van de week tot 5 augustus. Tot middernacht keken gemiddeld 1,4 miljoen mensen (kijkdichtheid twaalf percent). Het waarderingscijfer was 7,1. Van middernacht tot twee uur keken nog ruim een half miljoen mensen naar de Spelen, van twee tot vier 214.000. Na vier uur bleven gemiddeld ruim tachtigduizend mensen aan de buis zitten. De ontbijtshow van Koos Postema bracht het in de eerste week van de Spelen tot een kijkdichtheid van drie percent, oftewel 357.000 kijkers. Zij hadden een waardering van 7,3. Op de zondagochtend, toen de show later begon, keken tweemaal zoveel mensen.

Volkskrant 13 8 1984

Kloppen de kijkdichtheidspercentages bij de aantallen?

Hoeveel toeschouwers zijn er bij kijkdichtheid honderd procent?

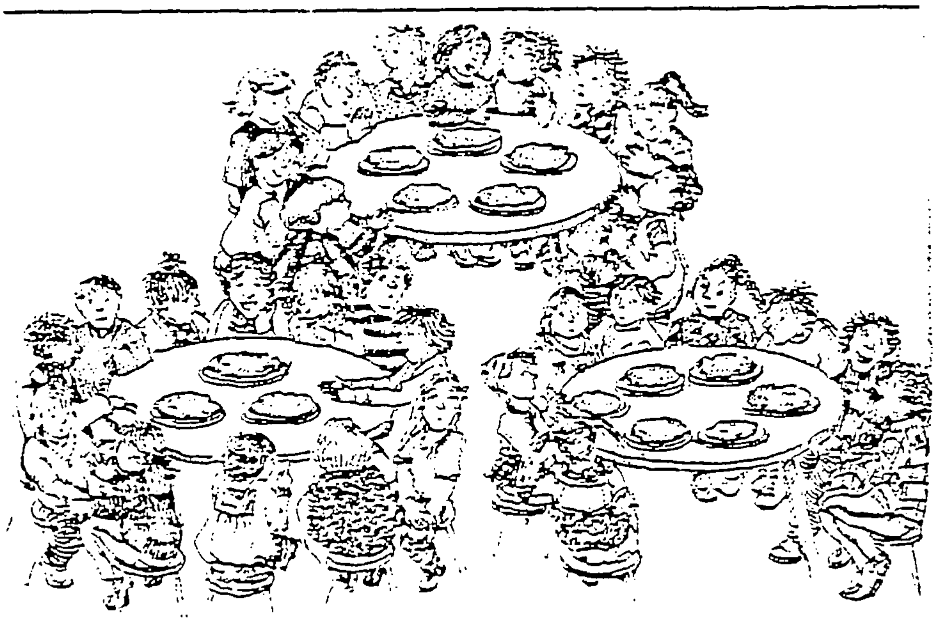
Waar zou dit 'vreemde' aantal vandaan komen?

7 Breuken en kommagetallen

De traditionele onderwijsaanpak van breuken en kommagetallen is formeel en vrijwel van meet af aan gericht op het opereren volgens nauw omschreven regels. Deze didactiek faalt ten aanzien van het overgrote deel van de kinderen volledig. Ze dient gewijzigd te worden in een veelzijdige en niet-formele werkwijze. Volgens deze worden meerdere contextrijke toegangen (via meten, eerlijk delen, gelijkwaardigheid van verdelingen, mengsels, e.d.) tot breuken en kommagetallen gekozen, en wordt het verstrekken van rekenrecepten zo lang mogelijk uitgesteld. Bijgevolg zullen ook de leerdoelen worden bijgesteld.

Via meten, verdelen, vergroten, afbeelden e.d. kunnen *breuken* worden 'voortgebracht'. Vanuit deze breukverwekkende activiteiten wordt de breuk geleidelijk als ordenings- en beschrijvingsmiddel benut om de resultaten van dit breken, eerlijk verdelen, meten en rekenen te beschrijven. De ontwikkeling van deze breukentaal grijpt aan op de taal die kinderen min of meer spontaan gebruiken (de helft, half, een kwart, de helft van een kwart). Vervolgens worden vanuit de realistische en informele toegangen de operaties met breuken geleerd. Of beter: vanaf het begin wordt met eenvoudige breuken geopereerd, maar dan informeel, niet routine-matig en nog (vaak) niet volgens de meest verkorte notatiewijze. Aldus gaan begripsverwerving en informeel opereren hand in hand.

1 Aan welke tafel zou jij het liefst zitten?



Modellen die een brug slaan tussen de breuk als ordeningsmiddel en de

formele bewerkingen ermee, zijn de getallenlijn, de strook, de cirkel, de rechthoek en de verhoudingstabel. De laatstgenoemde dient om de gelijkwaardigheid van breuken op te sporen, die de ingang vormt voor het optellen, aftrekken en delen van niet-gelijknamige breuken (in verbinding met verhoudingen).
Om het breukenkarakter van *kommagetallen* te benadrukken, worden ze vanuit het meten geïntroduceerd door middel van maatverandering (vergroting) van de eenheid. Een andere toegang vormt de niet opgaande (ver-)deling.
Bewerkingen met kommagetallen kunnen aangezet worden vanuit contextopgaven (waaronder die welke handelen over geld).
De komma-regels bij de basisbewerkingen dienen door de kinderen geleidelijk aan zelf ontdekt te worden: 'trucs' en regeltjes belemmeren de toepasbaarheid van het opereren met kommagetallen, die uitermate lastig blijkt te zijn. Herbewustmaking van de kenmerken van het tientallige positiesysteem is daartoe een belangrijk middel. En ook schatten en verkorten dragen bij tot de regelontdekking. Bij een en ander kan ook de zakrekenmachine een didactische en controlerende functie vervullen.
De enorme complexiteit van breuken en kommagetallen laat geen snelle formalisering en algoritmisering toe: dit leidt slechts tot schijnresultaten op korte termijn, behaald met kale rekenopgaven. Het didactische roer moet hier radikaal worden omgegooid.

1 Breuken vergelijken.

a Twee aardappelhandelaren staan naast elkaar op de markt.
's Morgens als de markt begint is hun voorraad aardappels evengroot. Aan het eind van de markt zegt koopman Arie: „Ik heb $\frac{3}{4}$-deel van mijn voorraad verkocht."
Koopman Berend zegt: „Ik heb $\frac{2}{3}$ deel verkocht."

Wie heeft het meest verkocht?
Maak voor beiden een rij gelijkwaardige breuken.

$\left|\frac{3}{4}\right|\frac{\cdot}{\cdot}\left|\frac{\cdot}{\cdot}\right|\frac{\cdot}{\cdot}$ $\quad$ $\left|\frac{2}{3}\right|\frac{\cdot}{\cdot}\left|\frac{\cdot}{\cdot}\right|\frac{\cdot}{\cdot}$

b Twee jongens zijn met een bal aan het gooien op een speelveld.
Jan gooit de bal tot $\frac{3}{5}$ deel van het speelveld.
Kees gooit de bal tot $\frac{2}{3}$ deel van het speelveld.

Wie gooit het verst?
Maak voor beiden een rij gelijkwaardige breuken.

$\left|\frac{3}{5}\right|\frac{\cdot}{\cdot}\left|\frac{\cdot}{\cdot}\right|\frac{\cdot}{\cdot}$ $\quad$ $\left|\frac{2}{3}\right|\frac{\cdot}{\cdot}\left|\frac{\cdot}{\cdot}\right|\frac{\cdot}{\cdot}$

c Vergelijk op dezelfde manier:

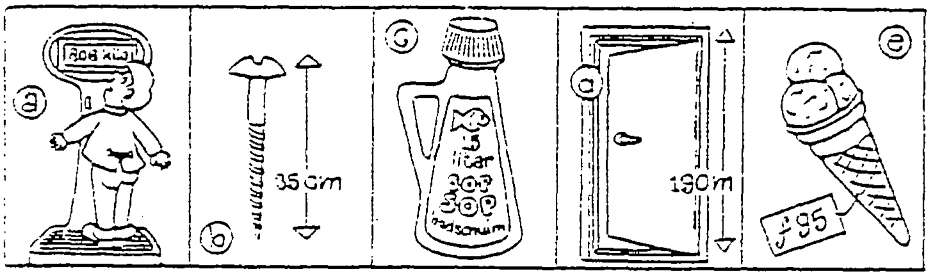
$\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{5}$	$\frac{5}{3}$ en $\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$ en $\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$ en $\frac{7}{9}$
$\frac{3}{4}$ en $\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$ en $\frac{4}{12}$	$\frac{5}{3}$ en $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$ en $\frac{5}{12}$

Samenvatting breuken en kommagetallen:
— de samenhang tussen kommagetal en breuk doorzien, dat wil zeggen,

dat bij elke breuk een kommagetal is aan te wijzen op de getallenlijn en omgekeerd, plus hiermee in verband schatten van de gelijkwaardigheid van een breuk en kommagetal;

- parate kennis hebben van de samenhang tussen de breuken $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{24}$ en $\frac{1}{60}$, en hun overeenkomstige kommagetallen; tevens het kennen van de breukentafels van deze getallen $5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ etc.;
- breuken aanduiden in natuurlijke samenhang met kommagetallen, meetgetallen en hoeveelheden;
- breuken ook aanduiden in de natuurlijke samenhang met verhoudingen;
- optellen en aftrekken van de breuken $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$ en $\frac{1}{60}$, samenhang met kommagetallen, en wel met contextproblemen;
- opgaven als 'zoveelste deel van...' berekenen, zoals bijvoorbeeld $\frac{2}{5}$ deel van 60, mede in verband met de bewerkingen $\times$ 2 en $\div$ 5;
- idem voor $1\frac{1}{2} \times 60$; $4\frac{1}{4} \times 80$...;
- deel van deel nemen in elementaire gevallen als 'de helft van de helft is...', 'de helft van een vijfde is...';
- breuken met behulp van een zakrekenmachine omzetten in decimale getallen en daarmee 'schattend' berekeningen maken;
- inzicht in kommagetallen demonstreren in verband met het positiesysteem, en dan vooral ten aanzien van het rekenen met $\times$ 10; $\times$ 100; $\div$ 10; $\div$ 100 etc.;
- inzicht in het breukkarakter van kommagetallen;
- optellen en aftrekken van kommagetallen in de context van het meten (onder andere geld);
- eenvoudige vermenigvuldigingen en delingen van kommagetallen uitvoeren met behulp van de zakrekenmachine, nadat eerst een schatting of berekening is gemaakt;
- en dit alles sterk gebonden aan praktische probleemsituaties.

3 De komma's zijn vergeten.



8 Meten

Er dient in het reken-wiskundeonderwijs meer aandacht dan voorheen aan meten besteed te worden. Dat houdt in: maatontwikkeling, instrumenteel en schattend meten, bepalen van passende eenheden bij bepaalde meetsituaties, rekenen met (afgeronde) grootheden, verwerking van meetgegevens in tabellen en grafieken - kortom aan het ontwikkelen van een 'gevoel' voor meten. En tevens betekent dit: niet starten met standaard-maten en formules; en geen algoritmisch, regelgeleid opereren in het metrieke stelsel, maar wel begripsmatige omgang met standaard-maten, mede aan de hand van praktische meetsituaties.

Bij meten hebben we te doen met grootheden als lengte, oppervlakte, inhoud, tijd, geld, gewicht, snelheid e.d. Deze zijn numeriek te vatten: we kunnen grootheden tellen, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Zo ontstaat de oppervlakte van een rechthoek door lengte en breedte te vermenigvuldigen, en de gemiddelde snelheid van een rit berekenen we door, ruwweg gesproken, de afgelegde weg te delen door de tijd. De bijbehorende maateenheden zijn in dit geval de samengestelde grootheden '$m \times m$' (m^2) en '$km \div uur$' (km/u). Door dergelijke bewerkingen worden uit de oorspronkelijke grootheden nieuwe grootheden gevormd, die op hun beurt weer numeriek zijn te vatten. In het traditionele rekenen werd dan ook veelvuldig met de getallen van tijd, geld, lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht gerekend. Maar dan vooral op de algoritmische werkwijze, zoals gewoonlijk binnen het metrieke stelsel gebeurde.

Sean Kelly blijft 7,3 centimeter achter

Van onze verslaggever

VILLEFRANCHE — Zelden zal een renner met zo weinig verschil een tijdrit hebben gewonnen als zaterdag in Villefranche-en-Beaujolais Laurent Fignon. Na 51 kilometer bleek de gele truidrager 48duizendste van een seconde sneller te zijn geweest dan Sean Kelly. Rekenkundigen wisten te vertellen dat Fignon met een voorsprong van 7,3 centimeter op de Ier was geëindigd.

Volkskrant 23.7.1984.

Een foutje van de rekenmeester. Kan gebeuren.

Hoe ontstaan? Juiste antwoord.

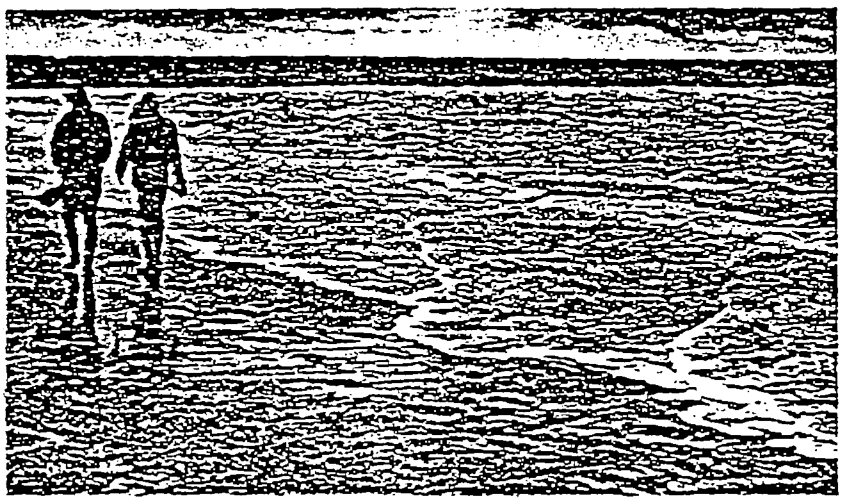
Deze vulling van het meten nu is onbevredigend, zelfs didactisch onverantwoord te noemen. Ten eerste omdat het werken met grootheden in beginsel onafhankelijk is van de numerieke opvatting: we kunnen grootheden vergelijken, ordenen en samenstellen, zonder dat een maateenheid is ingevoerd. Sterker, voor elementaire maatontwikkeling is een dergelijke kwalitatieve instap, leidend tot de invoering van een standaard-maat via een nog-niet-maat en een natuurlijke maat, zelfs geboden. En ten tweede zijn in het gebied van het meten vele belangrijke wiskundige activiteiten mogelijk die buiten de sfeer van het routinematige 'metrieke' rekenen liggen, zoals het bepalen van een meetstrategie via indirekt meten en schatten: het schattend rekenen in relatie tot meten; de ontwikkelingen van een 'objectieve' maateenheid voor bijvoorbeeld kijkdichtheid, hoek, leessnelheid, windkracht e.d. en voor 'subjectieve' maten bij sporten als schoonspringen, kunstrijden, etc.; de betekenis van (on)-nauwkeurigheden en fouten zoals de schatfout, de meetfout, de afrondingsfout en eventueel een eerste verkenning van de consequenties daarvan voor de uitkomst van het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen: het uitvoeren van metingen in onderzoekjes en proeven; het tabelleren en grafisch verwerken van gegevens; het opsporen van relaties tussen grootheden; het integreren van reken-wiskunde met andere 'vakken' (zoals natuuronderwijs) en de verbinding met meetkunde, waarschijnlijkheid en statistiek.
Met name ook de verwerking van numerieke gegevens in tabellen en grafieken (pictogram, staafdiagram, lijndiagram, histogram) eventueel in verbinding met gemiddelde, plus omgekeerd het interpreteren van tabellen en grafieken (interpoleren, extrapoleren), vormen een belangrijk onderdeel van meten.
Algemeen geldt dat meten mede de grondslag van het reken-wiskundeonderwijs dient te vormen: het biedt een natuurlijke toegang tot het rekenen (groter, kleiner, gelijk, de introductie van de getallenlijn, etc.) en het levert modellen (getallenlijn bijvoorbeeld) en contextproblemen ten behoeve van begripsvorming en toepasbaarheid die een breed gebied bestrijken, en het is van belang voor het omgaan met gangbare maten, het gebruik van meetinstrumenten, en het rekenen van alledag.
Het Engelse SMP-project heeft dit accent op meten voorbeeldig geconcretiseerd. We kunnen ons daarop in Nederland oriënteren. Enkele van de nieuwste reken-wiskundemethoden in Nederland hebben ons trouwens in dit opzicht ook heel wat te bieden.

Samenvatting meten:

- tijd, klokkijken: gewone en digitale klok; tijdsintervallen berekenen, samenhang uren, minuten, seconden;

- tabellen lezen en samenstellen;
- eenvoudige grafieken samenstellen naar aanleiding van meetgegevens en het lezen en interpreteren van grafieken (staafdiagrammen, sectordiagrammen);
- kunnen hanteren van eenvoudige instrumenten (liniaal, meetlint, kli-kwiel, weegschaal, ...) en het maken van contextopgaven;
- geldrekenen in verband met alledaagse situaties: winkelen, vrije-tijd en huishoudelijk rekenen;
- grafiek maken, lezen en interpreteren in verband met temperatuur; afstand-tijd-snelheid, e.d.;
- lengte, oppervlakte, inhoud (plus de relaties ertussen), gewichtsbepalingen in samenhang met het metrieke stelsel: mm, cm, m, km, ml, cl, l (dm^3), gram, kilogram en uitbreidingen ervan via de zakagenda;
- de meest voorkomende maten binden aan betekenisvolle, voorstelbare alledaagse situaties;
- eenvoudige samengestelde grootheden als km/u, aantal inwoners per km^2;
- eenvoudige statistische proefjes, het begrip gemiddelde;
- het maken en lezen van visuele schalen op kaarten en plattegronden;
- het lezen van eenvoudige stroomdiagrammen.

EB EN VLOED



► Meet met behulp van een kaart de lengte van de kustlijn van hoek van holland tot den helder. Het verschil in breedte van het strand bij eb en vloed is gemiddeld 100 meter.
Hoeveel wordt het noord-zuidhollandse kustoppervlak kleiner bij vloed?
En hoeveel wordt de kustlengte kleiner?

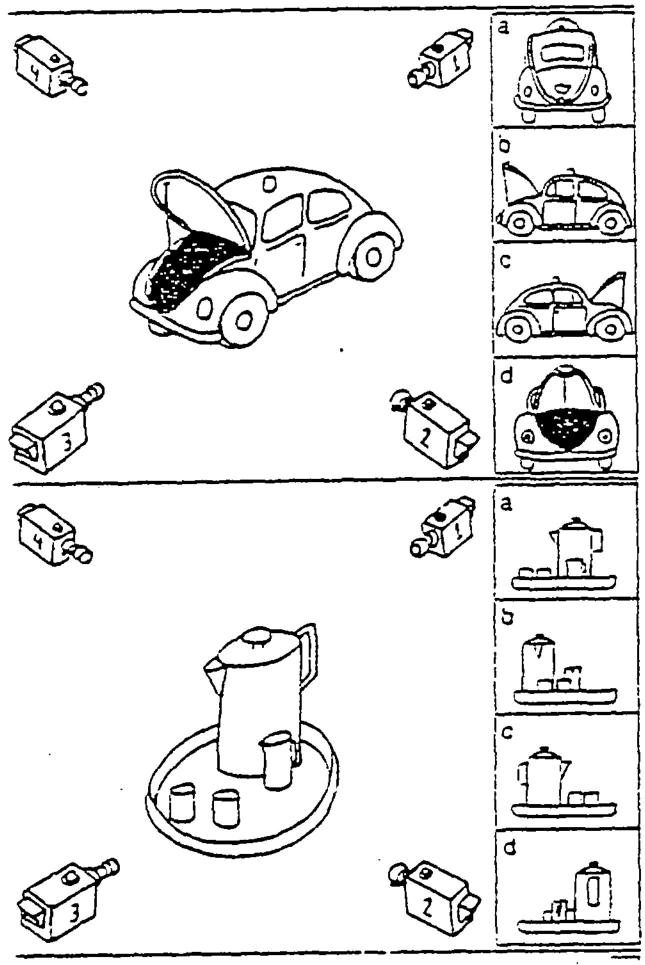
9 Meetkunde

Meetkunde is een rijke bron voor wiskundige activiteiten. Het gebied bevat zoveel aspecten dat er zeer verschillend tegenaan gekeken kan worden. Voorkeur verdient een niet-formele, niet-structuralistische aanpak. Positief gesteld: context-rijk, realiteitsgebonden, onderzoeksgericht, ruimteverkennend meetkundeonderwijs dat aansluit bij de geëigende onderwerpen uit de leerstofgebieden van rekenen en meten, dient een volwaardige plaats in het reken-wiskundeonderwijs te krijgen.

Ongeveer honderd jaar geleden werd meetkunde (vormleer) uit het programma van de lagere school geschrapt. Het behoorde daarna (vrijwel) uitsluitend tot het domein van het voortgezet onderwijs, en het werd geassocieerd met Euclides en beschouwd als hèt voorbeeld van een deductief systeem. Vanaf de jaren zestig echter steeg in de vaktijdschriften de belangstelling voor meetkunde op de basisschool vrijwel even snel als de interesse voor de meetkunde in het voortgezet onderwijs daalde. Maar over de precieze praktische inrichting van het meetkundeonderwijs op de basisschool bestaat internationaal bezien weinig overeenstemming. Eigenlijk net zo weinig als over het reken-wiskundeonderwijs, alleen is het daar niet zo duidelijk als bij de meetkunde. Blijkbaar maakt geen onderdeel uit het reken-wiskundeonderwijs de verschillen in basisopvattingen en globale theorieën zo duidelijk zichtbaar als juist het meetkundeonderwijs.... Vraag iemand hoe hij of zij zich het meetkundeonderwijs op de basisschool voorstelt en je leert daaruit de basisopvattingen over reken-wiskundeonderwijs als geheel kennen!
In de formeel-mechanistische opvatting verschijnt meetkunde uitsluitend als kale vormleer: herkennen en benoemen van vlakke en ruimtelijke figuren, en daaraan voorafgaand het aanleren van geïsoleerde ruimtelijke begrippen als links-rechts, onder-boven, voor-achter, e.d. en dat alles vanaf getekende objecten op papier.
De formeel-structuralistische uitwerking bestaat voornamelijk uit het naar 'beneden' vertalen van de meetkunde uit het voortgezette onderwijs: benoemen van elementaire meetkundige objecten (punt, lijn, vlak, vlakke figuren), het metend opsporen van eigenschappen, introductie van hoeken en hoekmeting, transformaties (symmetrie, schuiven, draaien, spiegelen), het samenstellen van afbeeldingen, het rekenen met vectoren, en het stellen van enkele topologische begrippen als binnen, buiten, tussen, mede in verband met de Venn-diagrammen uit de verzamelingenleer. Een benaderingswijze die nauwelijks uit het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs geweerd hoeft te worden, om de eenvoudige reden dat de zogenaamde New Math-aanpak hier geen wortel heeft geschoten.

Ten derde is er een meer empiristische benadering van meetkunde, waarin het accent wordt geplaatst op het vormaspect, het ontwerpen van vlakvullingen, allerlei opdrachten voor het spijkerbord, het construeren van figuren met passer en liniaal, het maken van blokkenbouwsels, de behandeling van congruentie en gelijkvormigheid in verband met schaal, vergroten en verkleinen. Hoewel er in deze aanpak bruikbare elementen zitten, is hij toch beperkt.
Wij stellen hier, aansluitend op wat er reeds in Nederland is ontwikkeld, een realistisch georiënteerd meetkundeonderwijs voor, waarin primair wordt uitgegaan van 'natuurlijke' fenomenen van het ruimtelijk waarnemen. Via probleemstellingen voortkomend uit de ons omringende wereld worden bepaalde meetkundige vaardigheden en noties uitgelokt en ontwikkeld. Aanvankelijk gaat het daarbij meer om kijken en proberen (kijkdoos, foto's, lokaliseren, licht en schaduw, blokkenbouwsels) dan om redeneren en rekenen (zoals bij aanzichten, verhoudingen, perspectief, kubus, uitslagen van ruimtefiguren, mogelijkheden van bouwsels voor vierkubus-huisjes).
Elementaire meetkundige entiteiten als punt, lijn en vlak worden niet vooraf gedefinieerd maar ontstaan uit activiteiten rond licht en schaduw (lichtbron, viseren, mogelijke schaduwvormen, projecties). Kortom, de analogie met de contextrijke geïntegreerde werkwijze met als dragend beginsel het principe van de geleidelijk voortschrijdende mathematisering, dat men in verschillende van de besproken onderwerpen aantreft, dringt zich hier op. Dit in tegenstelling tot de formele werkwijzen die uitgaan van geïsoleerde fenomenen en daarop voortbouwen volgens het principe van de toenemende complicering.
Wellicht is er geen onderdeel naast het meten, dat zozeer de vorming van een wiskundige attitude kan bevorderen als juist dergelijk realistisch meetkundeonderwijs. Het start bij de waarnemingswerkelijkheid en lokt via zeer zeer motiverende probleemstellingen onderzoek uit waarin een grote veelzijdigheid van wiskundige aspecten wordt aangesproken, zoals het visualiseren, het gebruiken van meetkundige modellen, het ruimtelijk oriënteren en redeneren, het reflecteren op het eigen handelen, het toepassen van meetkundige kennis en inzichten op praktische en puzzle-matige problemen, en dat alles in samenhang met vrijwel alle onderwerpen uit de gebieden van rekenen en meten die hiervoor genoemd werden.
Vandaar dat we meetkunde de belangrijke plaats willen geven die het krachtens haar wiskundige rijkdom toekomt.

Welk plaatje hoort bij de camera?



Samenvatting meetkunde:

- 'ruimtelijk' redeneren in verband met aanzichten van blokkenbouwsels;
- het maken van aanzichten van bouwsels;
- ruimtelijke oriëntatie naar aanleiding van panoramische kaarten en gewone kaarten;
- ruimtelijke oriëntatie naar aanleiding van foto's;
- maken en lezen van plattegronden;
- effecten nagaan van schaduwwerking van de zon;
- idem van de lamp;
- het benutten van visualiseringen;
- eerste noties van richting en hoek (eventueel via Logo);
- plaatsbepaling door middel van coördinaten;
- tal van activiteiten met spiegels, constructies, vergrotingen en verkleiningen etc.

10 Vergelijking oud en nieuw

Het traditionele rekenonderwijs van de lagere school bevatte in grote lijnen de volgende onderwerpen voor de verschillende leerjaren.

Klas 1: Introductie van de natuurlijke getallen 1 t/m 20. Structureren - optellen - aftrekken.

Klas 2: Getallen 20 t/m 100. Vermenigvuldigen.

Klas 3: Getallen 10 t/m 1000. Delen - delen met rest - begin van cijferen - redactiesommen.

Klas 4: Getallen groter dan 1000 - staartdelingen - introductie van breuken - redactiesommen.

Klas 5: Operaties met breuken - kommagetallen - cijferen - procenten - vraagstukken - ontbinden in factoren.

Klas 6: Breuken - evenredigheidsvraagstukken - vreemde valuta - gemene delers en veelvouden.

Naast deze onderwerpen vonden ook minder getalgerichte activiteiten plaats. We noemen: klokkijken, metriek stelsel, lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud, tijdrekening, temperatuur, bruto, tarra en netto.
Ten opzichte van dit rekenonderwijs dat nog in ongeveer de helft van de Nederlandse scholen wordt gegeven, staat het reken-wiskundeonderwijs zoals hier globaal beschreven dat in de andere helft gepraktiseerd wordt.
In vergelijking met het traditionele rekenen wordt in het reken-wiskundeonderwijs minder aandacht besteed aan het regelgeleide formele rekenen, hetgeen met name tot uitdrukking komt bij het cijferen, het breukrekenen, metriek stelsel, meten, kommagetallen en procenten. Of beter gezegd: deze onderwerpen worden geheel anders aangepakt. Het sterkst komt dit tot uitdrukking in het onderwerp verhoudingen.
Voorts wordt meer accent gelegd op onderwerpen als grafieken en maatontwikkeling.
Nieuw zijn onderwerpen als combinatoriek, statistiek en vooral meetkunde.
De verschillen in onderwerpen zijn echter slechts oppervlaktekenmerken. Daaronder gaan zeer fundamentele verschillen in didactiek en zowel materiële en formele doelen van de basisvorming schuil waarover we in het nu volgende expliciet zullen schrijven, maar die ook in de voorgaande deelbeschrijvingen reeds duidelijk zichtbaar werden.

11 Overzicht doelen en differentiatie

Inleiding

We beschouwen het voorgaande allereerst vanuit:

- de materiele waarden,
- en de formele waarden,

die aan de basisvorming rekenen-wiskunde kunnen worden toegekend.

Daarna wordt de kwestie van de communale en differentiële doelen besproken.

En tenslotte besteden we in verband hiermee aandacht aan de differentiatie-problematiek. Daarbij worden zowel de organisatorische als de didactische aspecten in beschouwing genomen.

Dit overzicht vormt de afsluiting van het gedeelte over de inhoud en bedoeling van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool.

Materiële waarde van de basisvorming

Het materiële deel van de basisvorming bestaat uit de vaardigheden die de leerlingen aan het eind van de basisschool hebben verworven. En wel speciaal de inhoudelijke waarde ervan voor het vervolgonderwijs, voor het leven van alledag, de leefwereld en het werken in de beroepswereld als onderdeel daarvan.

Vanuit dit materiële gezichtspunt beschouwd zou men het voorgaande over de basisvorming als volgt kunnen samenvatten.

Er zal meer dan voorheen nadruk op (haalbare) toepassingen gelegd moeten worden, en veel minder op die onderdelen uit het traditionele rekenen die voor een aanzienlijk deel van de leerlingen onhaalbaar zijn. Dit geldt temeer als we daarbij de toepasbaarheid betrekken, zoals bij het breukrekenen, de procenten, de metriek en het cijferen met tientallige breuken. Ook zou meer aandacht besteed moeten worden aan de basisvaardigheden, verhoudingen, kommagetallen, meten en meetkunde, en in het algemeen op de toepasbaarheid ervan in reële probleemsituaties.

Dit betekent voor de totale groep van leerlingen enerzijds dat er minder onderwijstijd aan het formele rekenen (breuken, metriek) wordt besteed, en anderzijds dat er hogere eisen aan het maken van toepassingen worden gesteld. Het wordt dus belangrijker geacht dat een leerling met eenvoudige breuken kan omgaan op een manier die voor haar of hem inzichtelijk, zinvol en toepasbaar is, dan dat die leerling onbegrepen trucjes (zo die al geleerd worden) kan toepassen op betekenisloze breukenopgaven, en die foefjes dan vaak weer snel vergeet of ze door elkaar haalt. (Dit geldt overigens niet voor alle leerlingen, maar daarover straks meer als ze de differentiële doelen bespreken.)

Overigens houdt deze accentuering van de mogelijke toepasbaarheid materieel beschouwd niet in dat slechts die activiteiten zinvol zouden zijn welke slechts hun neerslag in beheersingsdoelen of leerdoelen zouden vinden. Kortom, het onderwijsaanbod is ruimer dan men uit de samenvattende doelen van het slot van ieder van de voorgaande paragrafen kan afleiden. Er zijn nu eenmaal activiteiten die leerlingen (eens) gedaan moeten hebben zonder dat deze direct voor alle leerlingen hun neerslag in beheersing van kennis, vaardigheden of inzichten vinden. (Om een meer concreet overzicht van het reguliere onderwijsaanbod te krijgen, kan met het beste de allernieuwste reken-wiskundemethoden raadplegen.)

Deze ruime interpretatie van het onderwijsaanbod wordt mede ontleend aan het formele doel van rekenen-wiskunde. Daarover nu meer.

Formele waarde van de basisvorming

Het formele deel van de basisvorming bestaat uit de persoonlijkheidsvormende en sociale waarden.

In het mechanistische rekenonderwijs zoals zich dat thans nog in Nederland manifesteert, wordt de vormende waarde grotendeels buiten de vakinhoud gesteld en binnen de werkvormen getrokken. Dit was (en is) vooral ook bij de zogenoemde vernieuwingsscholen het geval. Zelfstandig werken, voortgang in eigen tempo, werken op eigen niveau, voortgaan in eigen verantwoordelijkheid, dat alles maakt de vormende waarde van het mechanistisch rekenonderwijs uit. Kortom, de vormende waarde manifesteert zich hier als 'werkvormende' waarde, dus los van de vakinhoud. En binnen die keuze niet ten onrechte, omdat er van de mechanistische aanpak niets (denk-)vormends kan uitgaan — een zichzelf vervullende profetie.

In de realistische opvatting en uitwerking wordt rekenen-wiskunde niet allereerst als een leerstofvak beschouwd maar veeleer als een menselijke activiteit die op iedere leeftijd en op ieder niveau tot volwaardige wiskundige denkprestaties en produkten kan leiden. Deze opvatting staat in schrille tegenstelling tot de zojuist genoemde 'lege' werkvormende visie op rekenen. Enkele voorbeelden van wiskundige prestaties van verschillende niveaus:

- tellen, verkort tellen, handig rekenen;
- optelsommetjes maken met twee getallen waar acht uitkomt, bewijzen dat je ze allemaal hebt via systematisch ordenen;
- aftreksommen maken waar acht uitkomt en ontdekken dat er ontelbaar veel mogelijkheden zijn;
- systematiek in de gesproken en geschreven telrij ontdekken;
- ontdekken dat je de staartdeling zelf kunt ontwikkelen;
- $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\neq\frac{2}{5}$ want $\frac{2}{5}$ is minder dan $\frac{1}{2}$;

- 'gespiegelde' vierkuberhuisjes zijn niet hetzelfde;
- de relatie omtrek-oppervlakte: het eiland waar je het langst over doet om er omheen te varen, hoeft nog niet het grootst te zijn;
- je moet je bij het lezen van een afstand-tijdgrafiek niet laten misleiden door het kaart-weg-idee, maar kijken wat de grafiek betekent;
- kostprijs plus 18%, dat rekenen we direkt uit op de rekenmachine door de kostprijs te vermenigvuldigen met 1,18.

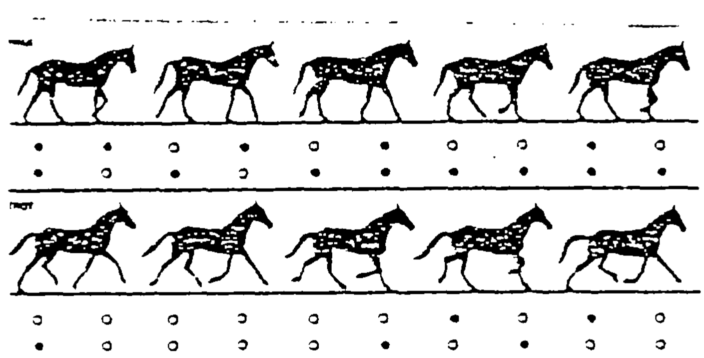
En zo zouden vele honderden, ja duizenden voorbeelden van mogelijke, zinvolle en volwaardige wiskundige activiteiten opgesomd kunnen worden die tot het reken-wiskundeonderwijs (kunnen) behoren.
Bekijkt men de nieuwste reken/wiskundemethoden en het onderwijs dat aan de hand daarvan wordt gegeven als bedoeld – en welke grotendeels het nationale-plan-voorstel dekken – dan is het inderdaad mogelijk om op talrijke plaatsen aan te wijzen, dat leerlingen gelegenheid hebben om te argumenteren, verschillende strategieën te bedenken, schema's en denkmodellen te benutten, een bewijs te leveren, een regel te ontdekken, zich helder uit te drukken, te reflecteren op hun eigen denk- en handelwijzen, plezier aan onderzoek te beleven. Ook de zojuist genoemde voorbeelden dragen dergelijke mogelijkheden in zich. En vergelijkt men daarmee wat het traditionele mechanistische rekenonderwijs in dit opzicht heeft te bieden, dan zal men een 'vormende' wereld van verschil ontdekken.
Met betrekking tot de *sociale waarde* kan iets dergelijks worden opgemerkt. Het reken-wiskundeonderwijs, zoals hier voorgestaan, biedt door de accentuering van de empirische activiteiten, het onderzoekskarakter, de rijke probleemstellingen, thema's en projecten, mogelijkheden de sociale betekenis te verzorgen. Deze kan bestaan in het onderling overleggen, het argumenteren en discussiëren, het naar elkaar luisteren; het samenwerken; het op waarde schatten van andermans meningen, het verdelen van taken en het elkaar iets uitleggen e.d.
Evenals bij het voorgaande over de persoonlijke waarde kan dit element van de basisvorming het best worden weergegeven via legio concrete voorbeelden waaruit blijkt dat dit aspect in het reken-wiskundeonderwijs permanent wordt verzorgd, en dan geformuleerd in termen van 'de kinderen krijgen de gelegenheid (geboden) tot...'
Bekijkt men de nieuwste reken/wiskundemethoden onder dit opzicht, dan valt op dat het onderwijs daarin zodanig in een differentiatiesysteem georganiseerd is, dat de leerlingen samen kunnen optrekken. Er zijn talrijke mogelijkheden tot onderwijs waarin ruimte is voor individueel werken, maar ook voor samenwerken in groepsverband – we komen hierop straks terug.
Samengevat kan men zeggen, dat het reken-wiskundeonderwijs zoals dat

in dit voorstel is bedoeld, en wat in grote lijnen overeenkomt met hetgeen in de nieuwste realistische reken/wiskundemethoden is neergelegd, een formele waarde aan de basisvorming kan geven, in die zin dat het kan bijdragen aan het algemene doel van de persoonlijke ontwikkeling en van de sociale betekenis: Men kan, anders gezegd, met talloze concrete voorbeelden aanwijzen en aantonen dat aan dit aspect permanent aandacht wordt geschonken. In de traditionele mechanistische rekenmethoden echter wordt er vrijwel geen gelegenheid geboden om via de inhoud van het rekenonderwijs dit formele aspect te verzorgen: dergelijk onderwijs is sterk regelgericht en solitair van opzet. Dus zowel ten aanzien van de materiële als de formele waarden zijn er grote accentverschillen met het traditionele rekenonderwijs te constateren, hetgeen zich zoals we gezien hebben ook vertaalt in leerstofinhouden.

Communale en differentiële doelen

Wat in het voorgaande beschreven werd, is zoals eerder gezegd, bedoeld als gemeenschappelijk deel van de basisvorming, dus voor (vrijwel) alle leerlingen.

Naast deze communale doelen moeten ook nog differentiële doelen worden onderscheiden – waarover we niet schreven. Duidelijk is dat voor een deel van de kinderen – zeg zo'n tien à twintig procent – ook doelen binnen het meer formele deel van rekenen-wiskunde gesteld kunnen en moeten worden. Hierbij valt onder meer te denken aan het formele breukrekenen (vermenigvuldigen en delen van breuken), het opereren binnen het metriek stelsel, het rekenen in andere talstelsels, het oplossen van allerlei redeneerproblemen, en vooral niet te vergeten het gestructureerd programmeren met Logo e.d.



Probeer het loop- en drafpatroon voort te zetten.
Hoeveel mogelijke afdrukpatronen zijn er?
Probeer een notatiewijze voor die patronen te verzinnen.

Uit onderzoek is komen vast te staan dat er tussen elfjarigen enorme verschillen bestaan: sommigen presteren op het niveau van achtjarigen. De eerstgenoemde groep is dan al duidelijk toe aan het meer formeel-structurele aspect van de wiskundige activiteit, die in het voortgezet onderwijs een plaats krijgt. Er zal dus in het onderwijs zo gedifferentieerd moeten worden dat aan het werk en het prestatieniveau van de genoemde uitersten recht gedaan kan worden.

Differentiatie in het onderwijs

Hoe is deze differentiatie in doelen te rijmen met het gezamenlijk optrekken van de leerlingen?

De geschetste opzet van rekenen-wiskunde kan het best gerealiseerd worden met het systeem van interne differentiatie; ook wel differentiatie binnen klasseverband genoemd. Daarbij wordt de onderwijs-inhoud opgedeeld in min of meer afgeronde blokken die enkele weken van onderwijstijd vergen. De kinderen van een leerjaar of stamgroep starten steeds gezamenlijk met zo'n blok en trekken grotendeels samen op. Binnen elk blok zijn vervolgens mogelijkheden tot differentiatie naar leerstof, niveau en tempo ingebouwd die sterk vanuit de inhoud van het onderwijs worden bepaald. Hier liggen dus de mogelijkheden tot het genoemde onderscheid in doelen.

Dit differentiatiemodel kan op verschillende manieren worden uitgewerkt – de nieuwste reken-wiskundemethoden bieden een staalkaart van mogelijkheden.

Duidelijk zal echter zijn dat het realistisch onderwijs niet strookt met een sterk geïndividualiseerd onderwijs dat vrijwel louter bestaat uit schriftelijke instructie en individuele sommenmakerij. Anders gezegd: er dient ruimte te zijn voor uitleg, overleg, discussie, samenwerking en nabespreking. Kortom voor interactie tussen onderwijsgevende en leerling en tussen leerlingen onderling, en voor samenwerking in groepsverband.

Negatief geformuleerd houdt dit in dat het onderwijs niet uitsluitend uit het individueel doorwerken van leerboekjes dient te bestaan, zoals dat in het mechanistische rekenonderwijs regel is geworden. Dus: geen uitsluitend solitaire sommenmakerij maar ook interactief onderwijs binnen een systeem van interne differentiatie.

12. Condities

Inleiding

Het hiervoor beschreven reken-wiskundeonderwijs kenmerkt zich door z'n onderzoeksgerichte en realiteitsgebonden aanpak.

Deze kan zich echter pas in de onderwijspraktijk vastzetten indien aan een aantal voorwwaarden is voldaan.

De condities hebben betrekking op:

— spullen i.c. methoden, courseware en toetsen;

— mensen i.c. opleiding, nascholing en begeleiding.

De belangrijkste algemene conditie is de reeds eerdergenoemde infrastructuur. Hierbinnen is veel overleg tussen onderwijsgevenden, opleiders, begeleiders, ontwikkelaars en onderzoekers. Er zijn verenigingen (NVORWO en NVvWL) die goede contacten onderhouden. Er zijn werkgroepen en er zijn op geregelde tijden werkbijeenkomsten. Binnen deze structuur kan veel van het navolgende gecoördineerd gerealiseerd en geëvalueerd worden.

Tot slot van deze inleiding nog dit: voor het realiseren van de basisvorming als hier voorgesteld, zal globaal gesteld aan het geheel van voorwaarden moeten worden voldaan. Veel daarvan kan vanuit het onderwijsveld, in ruime zin genomen, voor een belangrijk deel zelf worden gerealiseerd. Voor enkele onderdelen is men echter aangewezen op algemeen onderwijsbeleid.

Methoden

Eén van de meest noodzakelijke voorwaarden is dat er geëigend materiaal in de vorm van schoolboeken, handleidingen, additionele spullen en courseware (programmatuur) voorhanden moet zijn. De reken/wiskundemethode vormt de ruggegraat van al dat materiaal. Een methode bepaalt grotendeels het deelschoolwerkplan voor rekenen-wiskunde.

Aan deze voorwaarde is ten dele voldaan: er zijn enkele methoden die aan het hier voorgestelde plan voldoen. Men kan zeggen, dat ons voorstel juist op grond van een analyse van die methoden tot stand is gekomen. Het werkelijke verband ligt in de ideeën-vorming welke in de jaren zeventig heeft plaatsgehad.

Verschillende 'realistische' methoden hebben een ontwikkelingstijd van tien jaren achter de rug. De waardering van deskundigen uit binnen- en buitenland voor deze programma's is over het algemeen hoog. Uiteraard zullen deze methoden in de toekomst nadere bijstelling behoeven naar aanleiding van verdere maatschappelijke en onderwijskundige ontwikkelingen. In het bijzonder betreft dit ontwikkelingen op het gebied van de

zakrekenmachine en het computerondersteund onderwijs.
Overigens is de gedachte dat het geschetste realistische onderwijs niet geschikt zou zijn voor kinderen met taalproblemen, leerproblemen of kinderen uit kansarme milieus, bepaald onjuist. Enkele programma's zijn juist met het oog op deze kinderen ontwikkeld.
Wel is het zo; dat er meer aangepaste methoden-delen en remediërende programma's en materialen ontwikkeld zouden moeten worden voor, zeg, de tien procent van de kinderen waarvan verwacht kan worden dat ze het gehele programma van de basisvorming rekenen-wiskunde waarschijnlijk niet zullen kunnen volgen. (Goede additionele spullen voor begaafde kinderen zijn wel voorhanden.) In vele gevallen is het thans nog zo in het reken-wiskundeonderwijs dat de kinderen met de meeste leerproblemen ook met het meest dorre mechanistische rekenen worden geconfronteerd.

Computerondersteund onderwijs
Onderzoek naar het functioneren van programmatuur is vooral voor het reken-wiskundeonderwijs van bijzonder gewicht, omdat op den duur een groot deel van de leerstof in principe met courseware overdekt kan worden. Of dit een wenselijke toestand zou zijn, valt om verschillende redenen in hoge mate te worden betwijfeld. Nu reeds is zichtbaar dat de thans verschijnende pakketten grotendeels geënt zijn op een strikt mechanistische aanpak. Evenals bij de methoden kan men beducht zijn voor een 'ongerecenseerde' verspreiding van dergelijk materiaal, zoals bijvoorbeeld in 1970 dreigde te gebeuren met de zogenoemde nieuwe wiskunde op de basisschool. Alleen betreft het nu niet 'New Math' als wel 'New Mech' – een aanpak die zich zo makkelijk laat programmeren.
Toch lijken er ook voor computerondersteund realistisch reken-wiskundeonderwijs mogelijkheden te liggen. Vooralsnog dient gedacht te worden aan het oefenen van de basisvaardigheden, aan het leren cijferen volgens progressieve schematisering, aan gevarieerd rekenen en aan verhoudingen, procenten, grafieken en allerlei denkspelletjes.
Buiten dit gebruik, waarin de computer steeds het leerproces binnen de genoemde onderwerpen ondersteunt, zou de leerling ook de kans moeten krijgen zelf de computer opdrachten te geven. Gedacht kan worden aan het onder andere op het scherm brengen van figuren via intoetsen van eenvoudige Nederlandse woorden en het dynamisch gebruiken van die figuren. Alle schildpadmeetkunde die in LOGO mogelijk is, kan in principe ook binnen zo'n systeem worden uitgevoerd, terwijl het weglaten van geavanceerde procedures uit LOGO het mogelijk maakt de instap tot het rekenen in deze programmeeromgeving eenvoudiger te maken.
Ziehier in vogelvlucht drie belangrijke aspecten van ontwikkeling en

onderzoek rondom de computer. Duidelijk is dat slechts een goed doordachte en geleidelijke ontwikkeling op den duur tot didactisch verantwoorde en bij methoden passende courseware zal leiden. Deskundigen zijn van mening dat het overgrote deel van hetgeen thans (internationaal) aan software wordt ontwikkeld voor rekenen-wiskunde niets anders is dan sof-ware.

Toetsontwikkeling

Vanuit evaluatie-oogpunt is er in het kader van de basisvorming behoefte aan:

— toetsen per programma of methode;
— toetsen per leerjaar;
— eindopbrengst-peiling;

Vanuit innovatie-oogpunt is er behoefte aan:

— een bronnenboek met voorbeeldopgaven die een concreter beeld van de doelstellingen kunnen geven.

Weinu, de nieuwste reken-wiskundemethoden bevatten toetsen. Ze kunnen ook uitstekend als bronnen voor het samenstellen van een bronnenboek dienen. Ook wordt er in de handleidingen van verschillende methoden aandacht besteed aan het evalueren van de proceskanten van het leren, zoals flexibel rekengedrag, groeiend inzicht en wiskundige attitude.

Er zal in de eindtoetsen ten behoeve van de basisvorming meer dan tot nu toe, een duidelijker onderscheid gemaakt moeten worden in de schoolkeuzeprocedure en de eindopbrengsttoets i.c. de peiling die er toe dient om vast te stellen wat de leerlingen hebben geleerd.

Wat de Cito-eindtoets in verband met de schoolkeuzeprocedure betreft, signaleerden we dat de gangbare toetsen niet meer goed bij de nieuwere methoden passen. Het Cito gaat thans werken aan een alternatieve eindtoets.

Daarnaast zal het Cito in de komende jaren toetsen gaan ontwikkelen die de eindopbrengst van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool peilen.

Een en ander zal bijdragen tot een verdere verduidelijking van hetgeen met de basisvorming rekenen-wiskunde wordt beoogd.

De genoemde toetsontwikkeling zal in nauw overleg met de NVORWO plaatsvinden en passen binnen de genoemde infrastructuur van personen en instanties die zich op het terrein van het reken-wiskundeonderwijs bewegen.

Opleiding

We komen thans tot de spil van het feitelijke onderwijs: de

basisschoolleraar. De grondslag van degelijk vakmanschap zal in de opleiding gelegd moeten worden. Daar zal de aanstaande leraar vakinhoudelijke en vakdidactische know-how moeten opdoen.
Zowel op de gebieden van micro-didactische als macro-didactische onderwijsleerprocessen en leergangen wordt het nodige vakmanschap gevraagd. Een adequate Pabo-opleiding zou de (aanstaande) onderwijsgevende hierbij de nodige steun moeten bieden. En over de meer organisatorische doordenking van interactief en gedifferentieerd onderwijs schreven we reeds – daarvoor geldt ook dat dit aspect in de opleiding aan de orde zou moeten komen.
Naast vaardigheid zal zij/hij zich een houding moeten verwerven, waardoor men zelf allerlei reken-wiskundige opgaven, zoals die in de nieuwere methoden staan, kan aanpakken om er daarna een zinvolle onderwijssituatie bij te creëren. Vooral het verwerven van zo'n positieve attitude is in de opleiding van cruciaal belang. Er bestaat voor de opleiding een goed programma. Er is geen vakdidactisch gebied van de opleiding waar zoveel ontwikkeling is gepleegd als juist ten aanzien van 'Rekenen/Wiskunde en Didactiek' op de Pabo.
De opleiders zelf hebben vanaf 1971 volop de gelegenheid gehad - en deze faciliteiten zijn er nu nog - zich van deze ontwikkelingen via conferenties, publicaties en studiegroepen op de hoogte te stellen. Hiervan is ook in ruime mate gebruik gemaakt. Men kan wat de opleiders betreft dan ook van een uitgelezen corps spreken. Het grote probleem is echter dat tijdens de totstandkoming van de nieuwe Pabo (1984) er op de meeste opleidingsinstituten bij het samenstellen van het 'Instellings Werk Plan' te weinig uren voor het vak reken-wiskunde en didactiek zijn uitgetrokken. Eenvijfde deel van het basisschoolprogramma wordt aan rekenen-wiskunde besteed, dus evenveel als aan taal. Op grond van een in het voorjaar 1984 uitgevoerde enquête blijkt dat op circa twintig procent van de Pabo's de minimumtabel (160 uur voor de gehele opleiding) wordt gehanteerd, hetgeen inhoudt: één lesuur per week gedurende vier jaar. Dit is in sommige gevallen evenveel als voor finger painting...

Nascholing en begeleiding
Om tot homogenisering van het reken-wiskundeonderwijs als hier bedoeld te geraken, dient aan ontwikkeling en uitvoering van zogenoemde 6 × 2-cursussen ten behoeve van methodenkeuze en/of methodenbegeleiding voorrang te worden verleend. Als vervolg daarop, maar desgewenst ook los ervan, kan een meer specifieke begeleiding per school of voor scholenkoppels worden gegeven, die speciaal gericht is op het werken met een bepaalde nieuwe methode.

Het ware te wensen dat elke onderwijsgevende ook na de opleiding door middel van nascholing haar/zijn deskundigheid verder zou kunnen uitbouwen.
Net als bij het opleidingsonderwijs is gedurende de jaren zeventig op het gebied van de nascholing voor basisschoolleraren ruime ervaring opgedaan. Als één van de belangrijkste conclusies is daaruit naar voren gekomen dat relatief korte (zes maal twee uur) op de praktijk gerichte cursussen het meeste effect sorteren. Deze werden door de Pabo in samenwerking met onderwijsbegeleidingsdiensten verzorgd.
De nieuwe cursussen gericht op methodenoriëntatie, -keuze en -begeleiding zouden op korte termijn ontwikkeld moeten worden. Lokaal zijn daartoe hier en daar reeds initiatieven ondernomen, nationaal is de (leerplan)-ontwikkeling nog niet op gang gekomen.

Slotsom

Het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool verkeert anno 1985 in een overgangsfase. De condities om tot een nieuwe vulling van de basisvorming te komen zijn gunstig te noemen voor zover het de ontwikkeling van spullen (methoden, courseware, toetsen) betreft. Maar de voorwaarden in de personele sfeer (opleiding en nascholing) zijn beslist onvoldoende.
Stel U de loopbaan van een Pabo-student voor. Traditioneel rekenonderwijs op de basisschool (mavo) havo zonder wiskundepakket, een boterzachte Pabo-opleiding met één uur 'wiskunde en didactiek' per week per leerjaar (totaal zeg dertig lesuren per jaar – dus als geheel niet veel meer dan honderd), zonder dat er eisen gesteld kunnen worden aan het niveau.... En zo'n student zou een vijfde leerjaar basisschool krijgen toegewezen. Wel, omtrent zo'n situatie zouden treurige annecdotes verteld kunnen worden. De krantelezers hebben ervan gesmuld. Kortom, het Pabo-onderwijs is een nationale schande aan het worden.
De mogelijkheden om rekenen-wiskunde als speerpunt-nascholing te benutten, zijn aanwezig. Vooralsnog komt het leesonderwijs als eerste in aanmerking voor een landelijke nascholing. Laten we hopen dat direkt daarna rekenen-wiskunde volgt. Dit mede om een meer homogene instroom naar het voortgezet onderwijs te garanderen dan thans het geval is.

II BASISVORMING TWEEDE FASE (12-15 jarigen)

1 Inleiding

We starten met enkele citaten uit de SLO-pgOLM publikatie 'Thematisch wiskundeonderwijs' (1983) waarin de experimenten op de middenschool in beeld worden gebracht.

> 'In deze publikatie kunnen we niet veel meer doen dan - naast het voorbeeldthema - enige aanzetten te geven van overwegingen ten behoeve van planning en constructie van thematisch wiskundeonderwijs.
> We zien thematisch wiskundeonderwijs als een mogelijke uitwerking van middenschooldoelstellingen, zoals ze in het ELM zijn geformuleerd.' (pag.17)
> 'In het ELM is gesteld dat vele punten uit het ELM nadere uitwerking behoeven, én omdat onderdelen (nog) niet ingevuld zijn én omdat voorbeeld - cq overzichtsuitwerkingen op schoolwerkplanniveau gewenst zijn.
> Daarom zullen modelpublikaties op onderscheidbare deelterreinen worden gemaakt. In deze publikaties kan met behulp van beschrijvingen in termen van schoolwerkplan-categorieën, waaronder met name werkvormen, leerlingen-groepering en differentiatie een beeld gegeven worden van (mogelijke) varianten van middenschoolonderwijs.' (pag.36)
> 'Het belangrijkste knelpunt - de noodzaak leerlingen op te leiden voor een bestaand, rigoreus examen dat niet beantwoordt aan de wensen van de samenleving - (....) is met thematische voorbeelden niet opgeheven.' (pag.60)

In deze fragmenten is de stand van zaken van het experimentele leerplan middenschool voldoende duidelijk getekend.
Hoe is het mogelijk dat men na jaren experimenteren niet verder gekomen is dan tot hetgeen zojuist werd aangeduid?
In de volgende paragraaf schrijven we kort over de huidige stand van zaken en de achtergronden ervan.
Daarna doen we een voorstel voor een gefaseerd ontwikkelingsonderzoek om uit de impasse te komen.
En tot besluit wordt een indicatie van de veranderingen gegeven die vanuit het basisonderwijs gezien noodzakelijk zijn.

2 Situatieschets

Leerplanontwikkeling

Gelijktijdig met de effectuering van de Mammoetwet verschenen in 1968 nieuwe wiskundeleerplannen voor Vwo, Havo, Mavo en Lbo, samen kort aangeduid als 'moderne wiskunde'. 'Modern' sloeg daarbij echter voornamelijk op de leerstof, de taal en de systematiek van de wiskunde en niet zozeer op de didactiek c.q. het wiskunde*onderwijs*.
Treffend in de schoolwiskunde vanaf die tijd is het veelvuldig gebruik van formele taalelementen ontleend aan logica en verzamelingen.
Voorts is kenmerkend dat elk leerplan door verdunning uit het hogere is afgeleid. Een gevolg van een en ander is dat met name in de wiskunde van het Mavo/Lbo een formele taal wordt gebruikt die veel te zwaar blijkt te zijn in verhouding tot het gewicht van de wiskunde-inhoud. De wiskunde-taal is met andere woorden niet alleen een jargon dat voor deze leerlingen moeilijk te bevatten is, maar ze blijkt ook niet functioneel en operationeel te zijn bij toepassingen in andere vakken.

Reeds in het begin van de jaren zeventig werd door het IOWO opgemerkt dat met name het wiskundeonderwijs op Mavo-Lbo een andere vulling behoefde.
Voor alle duidelijkheid moet gezegd worden dat het standpunt van de CMLW (Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde) niet goed in het toentertijd vigerende onderwijs tot uitdrukking was gekomen.
Toen de genoemde commissie haar eindrapport over Mavo/Lbo uitbracht, stond de locomotief reeds op de rails. Via het experiment van de Landelijke Pedagogische Centra, waarin de zogenoemde (bewerkte) Schotse methode een kernrol vervulde, was het Mavo-onderwijs door de overhaaste invoering van moderne wiskunde in 1968 welhaast gedwongen voor die methode te kiezen.
Welnu, gedurende periode 1974-1979 werd op het toenmalige IOWO met een andere aanpak van het Mavo-Lbo-onderwijs geëxperimenteerd. Dit onderwijs lag in de lijn van het Wiskobasproject en het latere Hewetproject: minder formele wiskunde, grote aandacht voor de informele werkwijze van kinderen, meer gerichtheid op toepasbare wiskunde via contextrijk onderwijs. In 1979 was materiaal voor een 'uitgelijnd' schoolwerkplan van 1½ leerjaar beschikbaar. En daarbij is het gebleven.
Na de opheffing van het IOWO is de SLO zich op de uitwerking van deelonderwerpen zoals die van 'grafieken en functies' gaan concentreren. Het werken in kleine heterogene groepen werd mede tot onderwerp van studie genomen. Het werken aan een totaal-plan op schoolboek-niveau werd echter niet opgevat.

Het laatstgenoemde gebeurde op de experimentele middenscholen door de schoolteams zelf. Het resultaat is bekend: geen eenheid, geen totaalplan. En dat kon ook niet. Centrale ondersteuning is bij een dergelijk gigantisch karwei onontbeerlijk.
Daarbij komt dan nog dat de bestaande examens een consequente voortzetting van de eerder aangeduide nieuwe aanpak niet mogelijk maakten.. Na twee à drie jaren moest men 'door de bocht' in de richting van de vigerende Lbo- en Mavo-examens.

Methodenontwikkeling

In de schoolboeken van het voortgezet onderwijs is vanaf omstreeks 1980 een steeds verdergaande diversiteit te constateren. Niet alleen het bekende onderscheid naar schoolsoort is dan een bepalende factor. Maar ook de visie op wiskundeonderwijs blijkt vanaf toen een duidelijk stempel op de verschillende methoden te drukken. Zo vinden we naast betrekkelijk formele Mavo-methoden minder formele, toepassingsgerichte Vwo-boeken. En omgekeerd naast meer toepassingsgerichte Lbo-methoden tamelijk formele Havo-methoden. Daarbij blijken de toepassingsgerichte, contextrijke methoden sterk te zijn beinvloed door het IOWO-werk, terwijl de meer formele methoden in de lijn van de leerplanuitwerkingen uit 1968 liggen.
Voor de Lbo-Mavo-boeken is het genoemde onderscheid overigens in de hogere leerjaren minder scherp omdat ook daarin de bocht naar de bestaande examens moet worden genomen. En vooral voor het Mavo-examen betekent dit nogal een ommezwaai.
Toch kan men het geheel van de bestaande methoden globaal overziende, niet tot een andere conclusie komen dan dat de programma's voor het wiskundeonderwijs voor 12-15 jarigen zeer sterk uiteenlopen en weinig op elkaar zijn afgestemd. Als er op landelijk niveau verder niets wordt ondernomen, zal de situatie onder invloed van de veranderingen in de onderbouw (basisonderwijs) en de bovenbouw van Havo/Vwo in de nabije toekomst alleen nog maar onoverzichtelijker worden. Een vlotte doorstroming van de ene naar de andere school(-soort) wordt daardoor sterk belemmerd.
Kortom, de methodenontwikkeling behoeft gemeenschappelijke oriëntatiepunten en die ontbreken thans grotendeels.

3 Voorstel ontwikkelingsonderzoek basisvorming

Uitgangspunten

Als uitgangspunten voor de ontwikkeling en realisering van de voortgezet basisvorming rekenen-wiskunde noemen we:

- een gedifferentieerd onderwijs op (tenminste) twee niveaus na een gemeenschappelijke startperiode in het eerste jaar;
- een voorbeeld-uitwerking van die basisvorming tot op schoolboekniveau of een samenstel van beschrijvingen en verwijzingen naar reeds bestaande spullen dat hiermee vergelijkbaar is;
- een tweesporige strategie van ontwikkelingsonderzoek waarin vrijwel tegelijkertijd de herverkaveling van het huidige voortgezet onderwijs en de constructie van het experimentele voortgezet basisonderwijs worden aangepakt.

Voor het basisonderwijs hebben we gekozen voor het samen optrekken van de leerlingen per leerjaar binnen een systeem van interne differentiatie. De nadruk ligt hier op de gemeenschappelijke einddoelen. Wel worden ook mogelijkheden voor differentiële doelen opengelaten. Met name geldt dit voor enkele betrekkelijk formele onderwerpen als talstelsels, breuken, metriek stelsel e.d. Of en in hoeverre deze gemeenschappelijkheid valt te realiseren zal in de komende tijd moeten blijken. Zeker is dat er in het traditionele rekenonderwijs na het vierde leerjaar van de lagere school niet veel van terecht is gekomen. In de door ons voorgestelde werkwijze en inhoud ligt de nadruk op de gemeenschappelijkheid van de onderwerpen met daarbinnen eventueel gedifferentieerde verwerkingsmogelijkheden, zoals bijvoorbeeld de staartdeling. Voor het voortgezette basisonderwijs stellen we ook een gemeenschappelijke voortzetting van het reken-wiskundeonderwijs van de basisschool voor. Daarnaast zouden we ook ruimte willen laten voor een meer formeel programma-deel van het wiskundeonderwijs dat niet door alle leerlingen gevolgd zal kunnen worden. Maar in of na het eerste leerjaar voortgezette basisvorming zal er naar onze mening in ieder geval gedifferentieerd moeten worden in niveaus. In die verschillende stromen zullen de onderwerpen grotendeels dezelfde kunnen zijn, maar als geheel is dit niet noodzakelijk. Met name niet waar het onderwerpen uit de meer formele wiskunde betreft. Daarnaast kan er differentiatie zijn naar tempo plus naar de mate van verwerking (procesdifferentiatie). Dit voorstel sluit overigens aan bij wat er in het vermaarde Cockroft-rapport over differentiële programma's wordt geschreven (Verenigd Koninkrijk) als ook in de bekende 'An agenda for action' (Verenigde Staten). Uit eerder aangehaald Nederlands onderzoek (Pelgrum, 1983) blijkt trouwens ook zonneklaar dat de prestatieniveaus in het huidige voortgezette onderwijs enorm verschillen. Op grond daarvan lijkt het niet haalbaar en ook niet wenselijk om na de eerste fase van de basisvorming een langere periode van gemeenschappelijk wiskundeonderwijs voor alle leerlingen in te bouwen. De genoemde tweesporige strategie van ontwikkelingsonderzoek is ook op de gedachte van een gedifferentieerd uitgewerkte voortgezette basisvorming geënt. We zullen deze strategie nu kort beschrijven.

Ontwikkelingsonderzoek op twee sporen

Het eerste spoor is dat van de herverkaveling van het bestaande onderwijs voor 12-16 jarigen. We bespreken eerst de noodzaak tot en de inrichting van de herverkaveling in de onderscheiden schoolsoorten. De argumenten voor herverkaveling van het wiskundeonderwijs zijn in het voorgaande vrijwel alle aangeduid. We sommen ze nog eens op.

Ten eerste is de bestaande onvrede met de vigerende Mavo-Lbo-leerplannen die formeel en weinig toepassingsgericht zijn een reden tot een meer algemene herverkaveling.

De tweede reden is gelegen in de invoering van een nieuw eindexamenprogramma voor het Vwo, de zogenaamde Hewet. Door de gerichtheid op toepassingen uit het dagelijks leven en vakken als biologie, aardrijkskunde en economie heeft de 'nieuwe' wiskunde op het Vwo (wiskunde A) een ander karakter gekregen. Thans (1985) is een commissie ingesteld die advies moet uitbrengen over de wenselijkheid en mogelijkheid om op het Havo eveneens een A-achtige wiskunde in te voeren naast een wiskunde B-programma. Deze invoering nu van de 'A-achtige' wiskunde binnen enkele jaren op het Havo, noodzaakt tot herverkaveling van de onderbouw-wiskunde van Havo/Vwo en van het examenprogramma Mavo, teneinde een goede aansluiting op de bovenbouw te waarborgen. Of beter gezegd: met het nieuwe zicht op de wenselijkheid en realiseerbaarheid van de bovenbouwprogramma's komen ook de bestaande onderbouwprogramma's in een ander licht te staan.

Ten derde vragen, zoals eerder opgemerkt, ook de jongste ontwikkelingen op het gebied van rekenen-wiskunde op de basisschool om een aanpassing van het voortgezette wiskundeonderwijs.

Ten vierde noodzaakt de opmars van de micro-electronica om het wiskundeonderwijs in de leeftijdsgroep van twaalf tot zestien onder de loep te nemen. Het beschikbaar zijn van de zakrekenmachine, de zakcomputer en de microcomputer biedt nieuwe mogelijkheden voor het wiskundeonderwijs, die in een nieuw programma twaalf tot zestien gehonoreerd zouden moeten worden. Evenzeer zouden dreigende gevaren moeten worden bezworen. Met name course-ware-ontwikkeling die

gestoeld is op betrekkelijk eenvoudige programmeerbare concepties van formeel-mechanistisch wiskundeonderwijs, zou op z'n minst moeten worden afgeremd, terwijl de ontegenzeggenlijk grote mogelijkheden voor course-ware van op toepasbaarheid gericht wiskundeonderwijs dienen te worden gestimuleerd. Een nieuw onderbouwprogramma wiskunde twaalf tot zestien zou mede deze functie kunnen vervullen.
Om te komen tot voorstellen voor een grotere homogenisering van het onderbouwprogramma Havo/Vwo zou ontwikkelingsonderzoek moeten worden gedaan dat enigszins vergelijkbaar is met wat er thans in het basisonderwijs en met de Hewet gebeurt. Daarbij moeten uiteraard bestaande methoden, IOWO-pakketten, SLO-publikaties, nieuwe courseware e.d. in het onderzoek worden betrokken. Gelet op de urgentie van deze herverkaveling zou op korte termijn met dit onderzoek moeten worden begonnen. Het moet mogelijk zijn om met twee ervaren medewerkers een dergelijk project in drie jaar te voltooien.
De examenprogramma's Mavo (Lbo) zullen door de ontwikkelingen Havo/Vwo in een geïsoleerde positie geraken. Dat dit een slechte zaak is voor de doorstroming Mavo-Havo lijdt geen twijfel. Bijgevolg zal met het zojuist beschreven onderzoek ook het examenprogramma van de Mavo (en wellicht dat van het Lbo) in studie moeten worden genomen. Een vraag die opkomt is, of er op het Mavo net als op de Havo en het Vwo een keus moet zijn uit verschillend geaarde wiskundeprogramma's of dat er één wiskundeprogramma zou moeten komen met zowel A- als B-componenten. In beide gevallen is sprake van herverkaveling.
Het spoor van het herverkavelingsonderzoek richt zich op het oplossen van problemen-op-korte-termijn. Daarnaast is er het tweede spoor van het constructie-probleem ten behoeve van het voortgezet basisonderwijs dat zich over wat langere termijn zal uitstrekken. Ons voorstel komt er nu op neer dat eerst de herverkaveling op korte termijn wordt aangepakt. Dit ontwikkelingsonderzoek kan echter tegelijkertijd voor een belangrijk deel als vooronderzoek van het voortgezet basisonderwijs dienen. Immers bij de herverkaveling gaat het ook om programma's die bij leerlingen een houding helpen ontwikkelen welke gericht is op gestructureerd probleemoplossen, dus op toepasbare kennis, vaardigheden en inzichten. Onderwerpen als rekenen, informele meetkunde, grafieken, meten e.d. zullen daarin een plaats krijgen. Voor het voortgezet basisonderwijs zullen echter soortgelijke programma's ontwikkeld moeten worden. Het ene kan derhalve mede ten dienste van het andere gebeuren. Realisering van deze ideeën vraagt om ontwikkelingsonderzoek gecombineerd met nascholing en geconcretiseerd tot het schoolboekniveau: de opzet van het Hewet-project kan als modelaanpak fungeren.

4 Indicatie voor mogelijke inhoudelijke veranderingen

Als gevolg van de traditionele indeling 'rekenen op de basisschool – wiskunde in het voortgezet onderwijs' valt een duidelijke discontinuïteit waar te nemen in de leerstoflijn rekenen-wiskunde, met uitzondering van het Lbo en in mindere mate het Mavo. In feite gaat men er in het voortgezet onderwijs van uit dat het rekenen in het basisonderwijs is afgesloten, gekend wordt en toegepast kan worden. In de wiskundelessen van het voortgezet onderwijs wordt er veelal niet expliciet meer op teruggekomen. Wel wordt er een beroep op de rekenkennis gedaan bij de vakken als natuurkunde, handelsrekenen, aardrijkskunde, scheikunde en technisch tekenen. De klaagzangen over de gebrekkige rekenvaardigheid komen dan ook veelal uit deze hoek.

Ter afronding van de basisvorming rekenen-wiskunde zouden wij hierbij enkele suggesties aan de hand willen doen. Daarbij dient in aanmerking genomen te worden dat het hier vooral gaat om het grootste deel van de leerlingen, die thans naar LBO of MAVO doorstromen. Bij deze suggesties zijn de voornaamste overwegingen dat deze leerlingen weinig gebaat zijn met abstracte inleidingen in de wiskunde, en dat zij met een wat ander onderwijs een zinvol reken/wiskundeprogramma zouden kunnen afwerken, waaraan zij in hun verdere schoolloopbaan en leven ook werkelijk iets hebben.

Voor de goede orde zij hier vermeld dat een overzicht van de leerstofonderwerpen binnen de verschillende schooltypen verkregen kan worden door raadpleging van de rijksleerplannen van de betreffende scholen. De invulling van die leerplannen gebeurt door de scholen zelf. Binnen de scholen van één type kunnen de programma's dan ook vrij sterk verschillen. En tussen de scholen van verschillende typen zijn de verschillen vaak zeer groot, zoals moge blijken uit onder meer de leerboeken en (ten dele) de examens.

In de volgende opsomming worden de elementen van de basisvorming uit de eerste fase meegenomen.

Voor het gedeelte van het *werken met getallen* beoogt de basisvorming naar ons inzicht het volgende.

Beheersing van de basisvaardigheden c.q. de tafels voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Het gebruik maken van elementaire eigenschappen van bewerkingen zoals bijvoorbeeld $7 \times 12 = (7 \times 10) + (7 \times 2)$. Het kunnen maken van eenvoudige berekeningen met gehele getallen in toepassingssituaties, zoals bijvoorbeeld het temperatuursverschil tussen $-5°$ en $+8°$. Het kiezen van de juiste operaties in elementaire contextsituaties. Het maken van eenvoudige berekeningen uit het hoofd of op papier met behulp van formele en informele methoden, en berekeningen met grote getallen met behulp van de zakrekenmachine.

Dit houdt ook in dat de leerlingen voor optellen en aftrekken de standaardprocedures van het cijferen 'onder elkaar' dienen te kennen en voor vermenigvuldigen en staartdelen enigszins aangepaste eindprocedures. Een en ander veronderstelt overigens inzicht in het positiesysteem. Dit inzicht komt ook van pas bij het rekenen met 'nullen' en het rekenen met kommagetallen. In het laatste geval gaat het vooral ook om het gebruik van decimale getallen in praktische situaties, dus bij meten, geldrekenen e.d. Ook met kommagetallen dienen optellingen, aftrekkingen en eenvoudige vermenigvuldigingen en delingen gemaakt te kunnen worden, al dan niet met hulp van de zakrekenmachine. De relatie tussen kommagetal en breuk dient aandacht te krijgen. Eenvoudige breuken, zoals eerder vermeld, dienen onderwerp van onderzoek en berekening te zijn. Vooral ook opgaven als 'het zoveelste deel van ...' in verband met praktische situaties zijn van belang voor de basisvorming voor zover het breuken betreft.
Wat het communale element betreft zouden we vooral die verbinding met alledaagse probleemsituaties willen accentueren, zoals bijvoorbeeld tot uitdrukking komt in het praktische geldrekenen. Als differentiële doelen die voor zeg ruwweg eenderde deel van de leerlingen gelden, zouden we wat het voorgaande aangaat, een sterke uitbreiding willen geven naar het formele rekenen met natuurlijke getallen, gehele getallen, breuken, kommagetallen en wortels, plus toepassingen ervan.

Voor *verhoudingen en procenten* geldt evenzeer dat er een verbreding en verdieping plaatsvindt van hetgeen in de eerste fase op gang is gebracht. Het scala van toepassingen wordt uitgebreid. Een kernvraag blijft echter 'Wat is de beste 'koop'?' Toepassingsproblemen betreffen mengsels, eerlijke verdelingen, muntstelsels, verbanden tussen grootheden, schaal e.d. Het 'op de honderd stellen' kan daarbij als vergelijkingsstrategie fungeren. Procenten dienen voor het overige in de context van alledaagse probleemsituaties gesteld te worden die met name ook met geldrekening van doen hebben.
Voor meer differentiële doeleinden zijn 'verhoudingen en procenten' bruikbaar bij onder meer gelijkvormigheid, (exponentiële) groei, grafieken en functies.

Ook het *meten* zoals eerder beschreven, dient in de tweede fase te worden voortgezet. Dat wil zeggen dat maatontwikkeling, schattend en 'echt' meten, het bepalen van passende grootheden en het verwerken en aflezen van meetgegevens uit grafieken onderwerp van onderwijs zijn. Voorts dient aandacht besteed te worden aan de verbanden tussen gangbare grootheden van lengte, gewicht, oppervlakte en inhoud. Tenslotte

noemen we apart de ontwikkeling van een maat voor hoeken (meetkunde) die in de tweede fase nadrukkelijk op het programma dient te staan, plus wellicht één of meerdere centrummaten voor statistisch onderzoek (gemiddelde, mediaan, ...).
Het meer formeel opereren in metrieke stelsels kan onderwerp voor differentiële doeleinden zijn. Dit geldt evenzeer voor het ontwikkelen van maten voor weinig gangbare grootheden als dichtheid, levensverwachting, compactheid e.d.
Meetkunde dat in de eerste fase ruime aandacht krijgt, althans volgens ons ontwerp en ook in de nieuwe methoden, met activiteiten rond bouwsels, foto's, licht en schaduw, coördinaten, werken met spiegels, het herkennen en benoemen van figuren en nog meer, kan in de tweede fase worden voortgezet met een verdere verkenning van ruimtelijke vormen: regelmatige figuren, vloerbedekkingen, verpakkingen, eigenschappen van figuren, analyse van kubus, cirkel, bol, het maken van bouwplaten, roostermeetkunde, symmetrie, gelijkvormigheid, de stelling van Pythagoras, vectoren, en goniometrie. Meer nog dan bij andere onderdelen van het wiskundeonderwijs geldt echter dat een opsomming van onderwerpen niet de kern vermag te onthullen van wat met het meetkundeonderwijs in de basisvorming wordt beoogd. In het voorgaande hebben we daarover reeds het een en ander opgemerkt. Voor een verdere toelichting op de meetkunde verwijzen we naar de literatuur die in noot 9 is opgesomd.

Overige onderwerpen die naar onze mening in het basisvormende wiskundeonderwijs betrokken dienen te worden zijn: (combinatorische) telproblemen, het werken met formules, het rekenen met machten, het oplossen van vergelijkingen, letterrekenen (merkwaardige produkten), machientjes, functies.... Op voorhand is niet te zeggen wat op deze terreinen tot de communale en differentiële doelen gerekend kan en mag worden.
Zeker is wel dat bij het voorgaande de zakrekenmachine een belangrijke rol zal kunnen spelen. Verantwoord gebruik van dit hulpmiddel zal een aparte plaats in voortgezet rekenen-wiskunde dienen in te nemen. Tenslotte zal ook een andere kennismaking via eenvoudige programmeerproblemen kunnen plaatsvinden.
We laten het bij deze globale indicatie van mogelijke inhouden en we beklemtonen nog eens dat slechts een 'voorbeeldige' uitwerking tot op schoolboekniveau binnen een projectaanpak tot een toereikende vaststelling en aanwijzing kan leiden van de basisvorming rekenen-wiskunde.

III SAMENVATTING

De voorgaande beschouwing over de basisvorming rekenen-wiskunde steunt op reële ontwikkelingen in het onderwijs zelf en op ervaringen met vergelijkbare veranderingen in het reken-wiskundeonderwijs van de afgelopen jaren.

Vaststelling van de basisvorming dient ingebed te zijn in een project van onderwijsontwikkeling. Deze leidt tot een concrete uitwerking op het schoolboekniveau. Een dergelijke (experimentele) methode kan als voorbeeld dienen voor verdere methodenontwikkeling via educatieve uitgeverijen.

Onderwijsontwikkeling is echter meer dan louter leerboek-ontwikkeling. Het gaat primair om het concretiseren van een visie op onderwijs i.c. rekenen-wiskunde. Nascholing, begeleiding e.d. spelen daarbij evenzeer een kernrol.

In het basisonderwijs is dit proces van onderwijsontwikkeling in een eindstadium beland. Onder verwijzing naar concrete leergangen konden we hier dan ook tot een omschrijving van de basisvorming in z'n eerste fase komen. We steunen daarbij op onderzoek dat de vakgroep OW & OC verricht om na te gaan of we in Nederland tot een (informeel) nationaal plan voor reken-wiskundeonderwijs kunnen komen.

In trefwoorden ziet die basisvorming in het voorstel er als volgt uit:

- in algemene zin meer aandacht voor toepasbaarheid;
- meer nadruk op het beheersen van de basisvaardigheden (tafels) en het elementaire hoofdrekenen;
- minder tijd aan cijferen besteden en de einddoelen zodanig aanpassen dat het cijferen goeddeels als een vorm van handig rekenen kan worden aangeleerd;
- veel aandacht schenken aan handig rekenen en schattend rekenen en aan het bijbrengen van feeling voor getallen;
- meer aandacht voor verhoudingen, want deze vormen een belangrijk bindmiddel tussen de verschillende gebieden van reken-wiskundeonderwijs, en tussen die gebieden en de realiteit;
- een minder formele aanpak van breuken en kommagetallen en een bijstelling van de bestaande leerdoelen in de zin van een vereenvoudiging (althans wat de communale doelstellingen aangaat);
- meer aandacht voor meten in de zin van maatontwikkeling, schatten, rekenen met grootheden, verwerking van meetgegevens, en minder voor het regelgericht opereren in het metriek stelsel;
- meer accent op meetkundige activiteiten.

Als belangrijke condities om dergelijk reken-wiskundeonderwijs te realiseren werden genoemd:

- de ontwikkeling van methoden, courseware en toetsen;
- een passende inhoudelijke vulling van opleiding, begeleiding en nascholing.

Aan de voorwaarden van de spullen is grotendeels voldaan, aan die van de scholing niet. Met name het Pabo-onderwijs is beneden de maat met zegge en schrijve één lesuur per week (minimumtabel) voor rekenen-wiskunde.

Ten aanzien van de voortgezette basisvorming zijn we slechts in zeer globale zin tot inhoudelijke uitspraken gekomen. Wel werd een nauwkeurige schets gegeven van ontwikkelingsonderzoek dat hier gedaan moet worden. We maakten een onderscheid tussen problemen op korte en op lange termijn. Het voorstel is om een tweesporen-onderzoek te starten. Het ene is gericht op herverkaveling van het wiskundeonderwijs in Lbo/Mavo/Havo/Vwo op korte termijn. Het andere oriënteert zich op de ontwikkelingen van rekenen-wiskunde in het toekomstige voortgezet basisonderwijs.

Naar onze mening zou de uitkomst van het herverkavelingsonderzoek mede ten dienste kunnen komen aan het VBaO-onderzoek. In ieder geval dient snel met herverkavelingsonderzoek te worden gestart. Ontwikkelingen in enerzijds het basisonderwijs en anderzijds de bovenbouw van Havo/Vwo nopen tot bijstelling en structurering van het wiskundeonderwijs in de leeftijdsgroep van twaalf tot zestien jaar. Met een kleine projectgroep van top-ontwerpers en -onderzoekers kan zowel het een als het ander voortvarend worden aangepakt.

Als voorbeeld van een dergelijke efficiënte werkwijze noemden we onder meer het Hewetproject dat gericht is op de herverkaveling van het wiskundeonderwijs in de bovenbouw van het Vwo. Hoe het niet moet, laten de ontwikkeling van het Mavo-leerplan omstreeks 1968 en later de middenschoolexperimenten zien.

Kortom, we menen op het terrein van het reken-wiskundeonderwijs in Nederland thans vrij nauwkeurig te weten hoe de onderwijsontwikkeling bij projecten als die van het VBaO dient te worden aangepakt.

De hoofdvraag 'Wat moet een leerling aan het eind van de basisvorming op het specifieke vak-leergebied rekenen-wiskunde aan kennis en inzicht hebben verworven?', kan echter pas aan het einde van het ontwikkelingsonderzoek worden beantwoord. In een verklaring vooraf hebben we deze stellingname toegelicht.

AANTEKENINGEN

Zie voor omschrijvingen van eindtermen de SLO-publikatie:

— Brink, G.J. van den: Eindtermen en leerplanontwikkeling. Een voorstel voor het gebruik van de term eindterm in leerplanontwikkeling, in *'Studies in leerplanontwikkeling 1'*, Enschede, SLO, 1984.

De huiver voor onderwijsontwikkeling als afgeleide van eindtermen- of toetsontwikkeling blijkt uit het invloedrijke Amerikaanse rapport:

— N.C.T.M.: *An agenda for action*, Reston, NCTM, 1980.

I Basisvorming eerste fase

1 Inleiding

— Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen: *Verder na de basisschool. Nota ter voorbereiding van een wet inzake de opzet en inhoud van een nieuw stelsel van vervolgonderwijs, 's-Gravenhage, Staatsuitgeverij, 1982.*

— *Pelgrum, W.J., T. Eggen en T. Plomp: Tweede wiskundeproject. Analyses van uitkomsten: leerstofaanbod en resultaten*, Enschede, 1984.

— Geldens, M.: Innoverend onderwijs in een veranderde maatschappij, in *'Symposion Bedrijfskunde'*, 's-Gravenhage, Staatsdrukkerij, pag.7-47.

— Hart, K. (ed.): *Children's understanding of mathematics, 11-16*, London: Murray, 1981.

— Carpenter, T.P.: Calculators in testing situations: results and implications from National Assessment, in *'The Arithmetic Teacher'*, jrg 29, 1981, pag.34-37.

— SLO-pgLOB: *Wat krijgen ze op de basisschool? Deel 'Taal en Wiskunde'*, Enschede, SLO, 1984.

— Treffers, A. en E. de Moor: *Tien voor de basisvorming rekenen-wiskunde. Op weg naar een nationaal plan voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool en het gebruik van de computer daarbinnen (werkboek)*, Utrecht, OW & OC, 1984.

2 Algemene typering rekenen-wiskunde

Zie voor onderzoeksgegevens van de staartdeling:

— Foxman, D.D. (ed.): *Mathematical Development, London, HMSO, 1980.*

— *Rengerink, J.: De staartdeling, Utrecht, VOU en OW & OC, 1983.*

— *Radatz, H.: Fehleranalysen im Mathematik-Unterricht*, Braunschweig, Vieweg, 1980.

— Dekker, A., H. ter Heege en A. Treffers: *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*, Utrecht, OW & OC, 1981.

Zie voor een eerste oriëntatie op dit soort onderwijs:

— Goffree, F. en H. ter Heege: Rekenen-wiskunde als menselijke activiteit, in *'School'*, jrg 7, maart 1984, pag.28-50.
— Freudenthal, H.: *Appels en peren - wiskunde en psychologie*, Apeldoorn, Van Walraven, 1984, pag.44-54.

3 Basisvaardigheden hoofdrekenen

Zie voor een algemene oriëntatie op dit onderwerp:

— Suydam, M.N. en R.E. Reijs: *Developing Computational Skills*, Reston, NCTM, 1978.
— Heege, H. ter: Het leren van de tafels van vermenigvuldiging, in *'Willem Bartjens'*, jrg 3 nr 1, 1983, pag.18-23.
— Moor, E. de: *Pluspunt-handboek*, NOT-tv, pag.36-39.

4 Basisvaardigheden cijferen

Zie voor een algemene oriëntatie op dit onderwerp:

— Jong, R. de : *De abakus*, Utrecht, IOWO (thans uitgave OW & OC), 1977.
— Treffers, A. (ed.): *Cijferend vermenigvuldigen en delen*, Utrecht, IOWO, 1979.
— Dekker, A., H. ter Heege en A. Treffers: *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*, Utrecht, OW & OC, 1981.
— Hutton, J.: Memoirs of a math teacher, in *'Mathematics Teaching'*, nr 81, 1979, pag.8-12.
— Walther, G.: Acquiring mathematical knowledge, in *'Mathematics Teaching'*, nr 101, 1982, pag.10.12.

5 Basisvaardigheden hoofdrekenen-plus

— Freudenthal, H.: Ga eens even schatten, in *'Willem Bartjens'*, jrg 2 nr 4, 1983, pag.186-191.
— Streefland, L.: Van Erathostenes tot Cito-toets, in *'Nieuwe Wiskrant'*, jrg 1 nr 1, 1981, pag.34-41.
— Moor, E. de: *Gevarieerd Rekenen, Utrecht, IOWO, 1980.*
— *Levin, J.A.: Estimation techniques for arithmetic: everyday math and mathematics instruction, in 'Educational Studies in Mathematics'*, vol 12, 1981, pag.421-435.
— Plunkett, S.: Decomposition and all that rot, in *'Mathematics in School'*, jrg 8, 1979, pag.2-5.

6 Verhoudingen en procenten

— Streefland, L.: Verhoudingen per traditie, in *'Willem Bartjens'*, jrg 1 nr 3, 1982, pag.150-160.

— Streefland, L.: Verhoudingen en Operatoir Rekenen, in *'Willem Bartjens'*, jrg 3 nr 2, 1984, pag.126–132.
— Andelfinger, B.: *Didaktischer Informationsdienst Mathematik. Thema: Proportion*, Neuss, LCLW, 1981.
— Freudenthal, H.: *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren (deel I)*, Utrecht, OW & OC, 1984, pag.191-225.

7 Breuken en kommagetallen

— Streefland, L.: *Aanzet tot een nieuwe breukendidactiek volgens Wiskobas*, Utrecht, OW & OC, 1983.
— Behr, M.J. e.a.: Rational-number concepts, in *'Acquisition of Mathematics Concepts and Processes'* - R. Lesh and M. Landau (eds.) - New York: Academic Press, 1983, pag.264–344.
— Silvey, L. en J.R. Smart: *Mathematics for the middle grades (5-9)*, Reston, NCTM, 1982.
— Bell, A., E. Fischbein en B. Greer: Choice of operation in verbal arithmetic problems: the effects of number size, problemstructure and context, in *'Educational Studies in Mathematics'*, vol 15, 1984, pag.129–149.

8 Meten

— Heege, H. ter en E. de Moor: *Oppervlakte(1). Handleiding en werkboek*, Utrecht, IOWO, 1977.
— Jong, R. de (ed.): *Oppervlakte(2). Handleiding en werkboek*, Utrecht, IOWO, 1978.
— Dogger, A.: *Oppervlakte bij Wiskobas en inzichtverwervend handelen*, Utrecht, OW & OC, 1982.
— Gribling, S.: Meten in methoden, in *'Panamacursusboek 2'*, pag.63–73.

9 Meetkunde

— Goddijn, A. en G. Schoemaker: Meetkunde, vroeger en nu, in *'Panamacursusboek 2'*, pag.78–90.
— Moor, E. de: Meetkunde in basisschool-methoden, in *'Panamacursusboek 2'*, pag.73–78.
— Gravemeijer, K. en J.M. Kraemer: *Met het oog op ruimte - een meetkundige oriëntatie*, Tilburg, Zwijsen, 1985.
— Bishop, A.J.: Zinvol meetkunde-onderwijs, in *'Nieuwe Wiskrant'*, jrg 3 nr 2, 1983, pag.3–7.

10 Overzicht doelen en differentiatie

Zie voor beschouwing over doelstellingen:

— Treffers, A.: *Wiskobas doelgericht*, Utrecht, IOWO, 1978.

Zie omtrent differentiatie:

— Klukhuhn, W.: Methodenkeuze en schoolorganisatie, in *'Panamacursusboek 2'*, pag.136-157.

— Gravemeijer, K.: Differentiëren en leren. Gedachten over differentiatie en hoe deze uitgewerkt kunnen worden, in *'Willem Bartjens'*, jrg 2 nr 4, 1983, pag.160-165.

— Goffree, F.: *Wiskunde en didactiek (deel 3)*, Groningen, Wolters-Noordhoff, 1985, hoofdstuk 4.

— Goddijn, A.J. en G. Schoemaker: De huizermaat, in *'Nieuwe Wiskrant'*, jrg 2 nr 1, 1982, pag.3-16.

11 Condities

Zie over methoden:

— Jong, R. de, E. de Moor, L. Streefland en A. Treffers: *Almanak, rekenwiskundemethoden 1984*, Utrecht, OW & OC, 1984.

Zie voor het opleidingsonderwijs:

— Goffree, F.: *Wiskunde en didactiek (deel 1, 2 en 3)*, Groningen, Wolters-Noordhoff, 1982-1985.

Zie voor algemene informatie:

'Panamapost' (uitgave SOL, Utrecht).

II Basisonderwijs tweede fase (12-15 jarigen)

1 Inleiding

— SLO'pgOLM: Thematisch wiskunde-onderwijs, in *'Middenschool in beeld'*, Enschede, SLO, 1983.

2 Situatieschets

Een uitgebreide situatieschets van de leerplanontwikkeling in de periode 1960-1975 is gegeven door E.J. Wijdeveld in een intern IOWO-manuscript.

3 Voorstel ontwikkelingsonderzoek basisvorming

Belangrijke buitenlandse rapporten zijn:

— Cockroft, W.H.: *Mathematics counts*, London, HMSO, 1982.

— N.C.T.M.: *An agenda for action*, Reston, NCTM, 1980.

Gegevens over het Hewetproject kan men aantreffen in:

— *'Nieuwe Wiskrant'* (uitgave OW & OC), via bijdragen van J. de Lange, M. Kindt, H. Verhage e.a.

4 Indicatie van mogelijke inhoudelijke veranderingen

Wat de doorgaande lijn met het basisonderwijs betreft:

— Querelle, W.M.G.: BOVO en de praktijk, in *'Nieuwe Wiskrant'*, jrg 3 nr 2, 1984, pag.7-8.

— Goffree, F. em J. ter Pelle: Voortgezet rekenen in de brugklas, in *'Nieuwe Wiskrant'*, jrg 3 nr 1, 1983, pag.3-12.

— Moor, E.W.A. de: Wiskundeonderwijs 10 tot 14, in *'Nieuwe Wiskrant'*, jrg 3 nr 1, 1983, pag.26-33.

— Moor, E.W.A. de: BOVO, in *'Nieuwe Wiskrant'*, jrg 1 nr 4, 1982, pag.29-31.

— Pelle, J. ter: *Rekening houden met ...*, Enschede, SLO, 1983.

— Sweers, W.: *Rekenen en wiskunde ter overbrugging*, Tilburg, Zwijsen, 1983.

Verder is van belang het tijdschrift:

— *'Euclides'* (orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, uitgave Wolters-Noordhoff, Groningen).

En voorts uiteraard allerlei wiskundemethoden. De bestudering en analyse daarvan vergt ons inziens een apart onderzoek.

Tenslotte: we hebben in het onderhavige plan knipsels uit boeken en methoden gebruikt. Om een niet-gerechtvaardigde bevoordeling van bepaalde methoden te vermijden, hebben we de expliciete verwijzingen hier derhalve weggelaten. Voor een uitgebreide analyse verwijzen we naar de eerder geciteerde 'Almanak' voorzover het de basisschool aangaat.

PUBLIKATIES IN SAMENHANG MET WRR-RAPPORT nr. 27 BASISVORMING IN HET ONDERWIJS

In het kader van het project Basisvorming in het onderwijs zijn tot nu toe verschenen in de reeks "Voorstudies en achtergronden" van de WRR:

V45. J.F. Vos, P. de Koning, S. Blom: Onderwijs op de tweesprong; over de inrichting van basisvorming in de eerste fase van het voortgezet onderwijs
(ISBN 90 12 04745 5)

V49. T.H.A. van der Voort, M. Beishuizen: Massamedia en basisvorming
(ISBN 90 12 05181 9)

V51. E.F.L. Smeets, Th.J.M.N. Buis: Leraren over de eerste fase van het voortgezet onderwijs
(ISBN 90 12 05201 7)

Deze publikaties zijn verkrijgbaar bij de boekhandel en via de Staatsuitgeverij, Christoffel Plantijnstraat 1, Postbus 20014, 2500 EA 's-Gravenhage, tel. 070-789911

In de reeks "Werkdocumenten Basisvorming in het onderwijs" (WB) van de WRR zijn tot nu toe verschenen:

WB1. H.S. Verduin-Muller, R. van der Vaart: Aardrijkskunde
(ISBN 90 346 0660 0)

WB2. A.J. Treffers: Biologie
(ISBN 90 346 0661 9)

WB3. G. Berghuis, A.J. Bielderman, W.G. Jansen: Economie
(ISBN 90 346 0662 7)

WB4. C.G. van der Kooij, F.W.P. Dijkstra, W.P. Blockmans: Geschiedenis, staatsinrichting en maatschappijleer (drie delen in één band)
(ISBN 90 346 0663 5)

WB5. F. Jansen: Nederlandse taal
(ISBN 90 346 0664 3)

WB6. J.H. Raat: Natuurkunde
(ISBN 90 346 0665 1)

WB7. F. van der Blij, A. Treffers: Rekenen-wiskunde
(ISBN 90 346 0666 X)

WB8. G. Casimir, G. Wieggers: Verzorging
(ISBN 90 346 0667 8)

WB9. T.J.M. van Els, W.N. de Jong: Moderne vreemde talen
(ISBN 90 346 0668 6)

WB10. E.M.C. Ploegmakers-Verstegen: Algemene technieken
(ISBN 90 346 0716 X)

WB11. I. Stolwijk, G. Dinsbach, L. Melis, J. Ligtvoet, P. Parren: Beeldende vorming
(ISBN 90 346 0717 8)

WB12. R. Westerhof, O. Loopstra: Lichamelijke opvoeding
(ISBN 90 346 0724 0)

WB13. J. van Lieshout, J. van Rossem: Muziek
(ISBN 90 346 0725 9)

WB14. A.H. Verdonk, W.M. de Jong: Scheikunde
(ISBN 90 346 0726 7)

WB15. G.M. van Trier, H.A.M. Frissen: Bibliotheken en basisvorming
(ISBN 90 346 0669 4)

WB16. B.P.M. Creemers, J. Schaveling: Verhoging van onderwijseffectiviteit
(ISBN 90 346 0670 8)

WB17. Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling (CITO): Periodiek peilingsonderzoek in de basisvorming
(ISBN 90 346 0671 6)

WB18. P.W.C. Akkermans: Regelgeving over algemene basisvorming
(ISBN 90 346 0718 6)

WB19. C.F.M. van Lieshout, A.W. Smitsman: Ontwikkeling, onderricht en leren; ontwikkelingspsychologische achtergronden van het onderwijsaanbod in het funderend onderwijs
(ISBN 90 346 0719 4)

WB20. C.F.M. van Lieshout, E. Wardenaar: Onderwijsdifferentiatie en computergebruik voor beheer en evaluatie van onderwijs
(ISBN 90 346 0720 8)

WB21. C.F. van Parreren: Leer- en ontwikkelingspsychologische aspecten van de basisvorming
(ISBN 90 346 0727 5)

Verkoopprijs f 10,-- per Werkdocument. Exemplaren van deze uitgaven zijn uitsluitend te bestellen door vooruitbetaling op giro 751, ten name van Distributiecentrum Overheidspublikaties DOP, Postbus 20014, 2500 EA 's-Gravenhage, onder vermelding van het ISBN-nummer en het aantal gewenste exemplaren.

<u>In het kader van het WRR-project Basisvorming in het onderwijs zijn de volgende studies nog te verwachten</u>:

J. Moonen: Toepassing van computersystemen in het onderwijs

G.J. van den Brink e.a.: Over basisvorming en leergebieden

D.B.P. Kallen in samenwerking met P. Rutgrink: Kwaliteit en inhoud van het voortgezet basisonderwijs: een internationale discussie

A.L. Heinink, H. Riddersma, J. Braaksma: Basisvorming in het buitenland

S.C. de Hoo, E. van Luijk, in samenwerking met H. Böttcher, J. Steenkamp: Zin en onzin van voortgezet basisonderwijs; reacties op de nota Verder na de Basisschool

R. Bronnenman-Helmers, J. Geurts, A.C. Glebbeek, E. van Imhoff, Th. Mensen, F. Meijers, K. Vijlbrief: Preadviezen over de relatie algemene basisvorming en beroepsopleiding