

Aantekeningen voor de cursus met Jan

Aantekeningen voor de cursus met Jan

JH

Oegstgeest, Amsterdam

The Netherlands

© 2015 tekst FF

© 2015 illustratie Ruud Hulshof

Fotografie omslag: nog onbekend

Vormgeving omslag: nog onbekend

ISBN

NUR

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written consent of the publisher.

De auteursinkomsten uit dit boek komen o.a. ten goede aan het orkest.

VOORWOORD

'I like functions of one variable'

Xavier Cabré addressing Abel prize winner Louis Nirenberg and a small group of analysts at Tor Vergata last June.

This pdf is under construction. Eerste 5 hoofdstukken min of meer af.

Op dit moment geef ik met Jan een college over Toegepaste Integraalrekening dat als het Analyse vak in het programma van Mastermath voor zij-instromers die leraar willen worden staat. Ongelukkige naamgeving die tot misverstanden heeft geleid. Doel van het programma is meer eerste-graadsbevoegde leraren in het VO te krijgen. Of het programma zich daarbij inhoudelijk dient te onderscheiden van de Masters of Education die het HBO als master wiskunde aanbiedt is een goede vraag.

Ik ben aan het schrijven voor deze cursus met Jan en doe dat in het format van het boekje 'Wiskunde in je Vingers' van Ronald en mijzelf. Niet alles dat ik hier schrijf zal in een nieuw boekje komen en ook niet alles zal in de cursus met Jan aan de orde komen. Relevant voor de cursus met Jan als voor- of achtergrondkennis zijn de hoofdstukken 3,4,6,7,8,10,11 uit het boekje met Ronald. De schrijfstijl in dat boekje, en in wat hieronder volgt is nadrukkelijk niet die van een academische wiskundige voor zijn wiskundestudenten. Op veel punten ben ik informeel en talig, zonder de wiskundige precisie uit het oog te verliezen. Het is mijn ambitie om zo veel mogelijk self-contained te schrijven. Ik refereer alleen naar het boekje met Ronald en voor de rest is het google maar. Daarnaast beveel ik van harte het dictaat van Bas Edixhoven en Theo van den Bogaart over Fundamenten aan, dat echter niet als noodzakelijke voorkennis voor ons vak moet worden gezien. Om twee redenen.

De eerste is dat het wat mij betreft niet nodig is als voorkennis voor wat we in deze cursus doen. Een nette invoering van de reële getalen hoef je niet per se gezien te hebben VOOR dat je echte analyse doet. Zie ook weer het boekje met Ronald. Hoofdstuk 1 begint wel met een overzicht dat voor iedereen die wat calculus gehad heeft een opstapje biedt naar de manier van wiskunde doen die we in dit vak presenteren. De tweede reden is dat dit vak nu, op verzoek van de programmadirectie in hetzelfde semester zit als het vak Fundamenten, dus het kan ook niet als voorkennis dienen. Een ander boek dat ik graag noem is het Basisboek Wiskunde van de bekendste vakdidacticus

van ons land (geschreven met Rob Bosch), en het Vervolgboek Wiskunde. Prachtig praktische boeken met veel sommen om weggezakte wiskunde op te halen, bestemd voor een beginnend student die ook wiskundevakken moet volgen of wiskunde nodig heeft bij zijn vakken. Zelf schreef ik eens

<http://www.few.vu.nl/~jhulshof/NOTES/anal.pdf>

dat wat fundamenteel van de analyse behandelt, uitgaande van de vraag of functies maxima hebben.

Wat ik in deze notes voor ogen heb is laten zien dat integraalrekening, en met name *integration by parts*, bepaald meer is dan het uitrekenen van getallen. Dat (niet het uitrekenen van getallen dus) doe ik zoveel mogelijk aan de hand van voorbeelden. Een eerste voorbeeld in deze aantekeningen is het op alle mogelijke manieren bekijken van een niet al te moeilijk probleem: het vinden van een primitieve van een primitieve van een gegeven functie waarbij die dubbele primitieve moet voldoen aan twee randvoorwaarden, bijvoorbeeld dat 'ie nul is in twee gegeven punten. Hoofdstuk 1 is hiertoe een introductie en geeft aanleiding voor wat daarna komt ten behoeve van de Fourierreksen die later aan de orde komen:

Twee hoofdstukken met een zo concreet mogelijke crash course over in-producten, eerst in het platte vlak en uiteindelijk in functieruimten. Maar met name ook in the one and only aftelbaar oneindige Hilbertruimte H , die bijvoorbeeld gezien kan worden als bestaande uit alle kolomvectoren (naar beneden doorlopend zonder eind) met eindige Pythagoras lengte. In de sectie met de titel French Connection doe ik daarbij recht aan de Franse school waarmee ik kennismakte dankzij mijn promotor Bert Peletier. Zelf ben ik wat dit betreft opgevoed in de school van Zaanen, de onvergetelijke Pay Huijsmans en Ben de Pagter, en ook daar kijk ik met veel genoegen op terug.

De Hilbertruimte excursie staat ten dienste van de Fouriertheorie die in dit vak aan de orde komt. Sectie 1.2 van het inleidende hoofdstuk zet hier alvast wat lijnen uit. We introduceren hier al de de interpretatie van functies als distributies, en ook de bijbehorende formulering van simpele randwaardeproblemen met behulp testfuncties en partieel integreren. De bijzondere eigenschappen van oplossingsoperatoren karakteriseren we in wat later komt dan ook met de eenvoudigste spectraalstelling die de stelling over diagonalisatie van symmetrische matrices generaliseert. Aardig is hoe de fundamentele vraag over het bestaan van maxima in inspirerende en abstraherende wiskundige contexten weer terugkomt.

Toegevoegd voor het moment wat extra uitleg over de Stirling formule. In Het derde hoofdstuk nu. In de cursus met Jan behandelt Jan zelf de formule van Stirling voor $n!$ (spreek uit n faculteit). Een vraag over die formule tijdens de voorbereiding van de reader die aan het boekje met Ronald voorafging was

uiteindelijk aanleiding voor een belangrijk deel van de stof in dat boekje, dat ook de centrale limiet stelling uit de kansrekening behandelt. De opmerkelijke integraalformule van Euler die als uitkomst $n!$ heeft is uitvoerig besproken in het boekje met Ronald, maar de wellicht eerst voor de hand liggende methode om grip op $n!$ te krijgen, te weten via

$$\ln(n!) = \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n,$$

geeft meteen een verband met numerieke integratie en de trapeziumregel, die met Taylor-benaderingen (door Jan) wordt bewezen.

Taylor-benaderingen kun je weer afleiden met integration by parts. Een kleine variatie op twee keer primitiveren geeft de benadering die je nodig hebt voor de trapeziumregel, met een formule voor de restterm in integraalvorm. Er zijn andere representaties voor de restterm, met name representaties waarin geen integraal maar een afgeleide in een mysterieus tussenpunt voorkomt. De bijbehorende wiskundige stelling is een wonderlijk ingenieuze variant op een stelling (van Rolle meen ik) die zegt dat een differentieerbare functies tussen twee nulpunten altijd een punt heeft waar de afgeleide nul is. Deze laatste stelling wordt besproken in Sectie 10.2 van het boekje met Ronald. De Taylor-variant is een verhaal apart dat misschien nog langs komt.

Een belangrijke toepassing van de Stelling van Taylor is te vinden in de analyse van de methode van Newton. Na het het schrijven van het boekje met Ronald en de eerste versie van deze notes werd ik gevraagd om een verhaal te houden over het werk van Nash, die samen met Nirenberg (hierboven genoemd) onlangs de Abelprijs kreeg en bij thuiskomst met zijn vrouw uit een verkeerd inhalende taxi geslingerd werd. Ik heb mij verdiept in een onderwerp dat al jaren op mijn TO DO lijstje stond. Het leek me niet onaardig om dat in deze notes op te nemen. Waarom? Omdat het zo fantastisch origineel en anders-intuïtief is. Ik begrijp het nu (en kan het een ietsje verbeteren). Hoe ver dat van de schoolstof af staat? Weet ik niet, maar hoeft niet ver te zijn. Anyway, Hoofdstuk 2 is nog niet klaar.

Euler's integraalformule kan los gezien worden van wat we nu complexe functietheorie noemen, en dat deden Ronald en ik dan ook in ons boekje, maar eigenlijk is de algemene methode waarmee het gedrag voor grote n wordt beschreven een bijzonder geval van een methode die bij uitstek tot de complexe analyse hoort. Functies in het complexe vlak komen nadrukkelijk aan de orde in het materiaal voor de cursus met Jan, maar misschien nog niet dit jaar. De bijbehorende methode heet de zadelpunt methode, en kan op een fraaie manier in verband gebracht worden met differentiaalvergelijkingen in het vlak. De Airy functie zal een voorbeeld blijken om veel van te leren. Maar daarvoor moeten we eerst nog Fourierreeksen en Fourierintegralen doen.

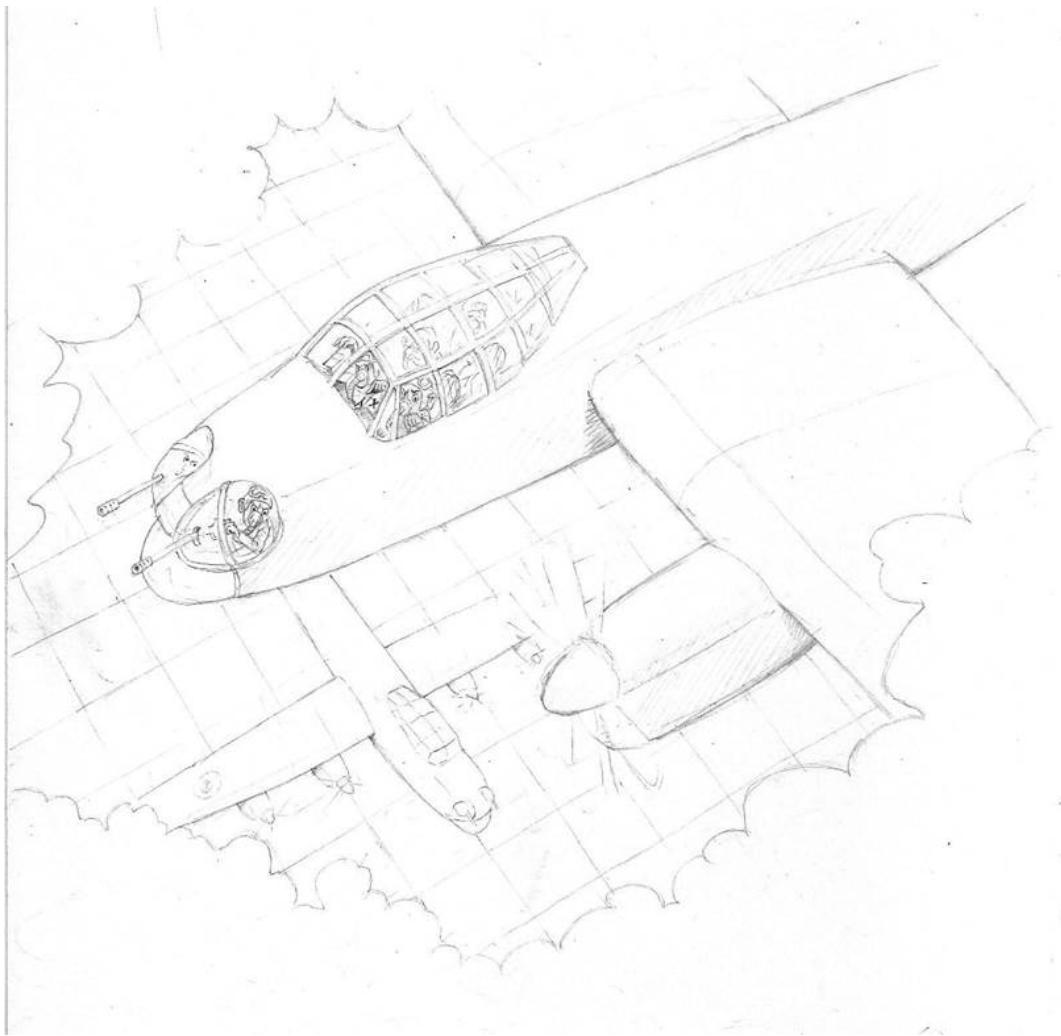
Meer volgt....

NB De hoofdstukken hebben steeds ook een stuk voor de subsecties!

Inhoudsopgave

1	Partieel integreren	12
1.1	Randwaardenproblemen en partieel integreren	15
1.2	Functies als lineaire functies van functies	19
2	Newton's method the hard way	24
2.1	Newton's method, standard proof of convergence	24
2.1.1	The optimal result	26
2.1.2	Suboptimal result	26
2.2	Alternative proof of convergence	27
2.2.1	The optimal alternative result	27
2.2.2	A suboptimal alternative result	28
2.2.3	A lousy alternative result	29
2.2.4	A much better suboptimal alternative result	29
2.3	Nash' modification of Newton's method	30
2.3.1	The modified scheme	31
2.3.2	The new error term	32
2.3.3	The system of inequalities	33
2.3.4	Estimating the increments	34
2.3.5	Estimating the error terms	35
2.3.6	Sufficient conditions for a convergence result	37
2.3.7	A sufficient condition on the initial value for convergence	38
2.3.8	The optimal choice of parameters	39
2.3.9	Continuity	41
3	Meer over de Stirling integraal	42
3.1	Makkelijke convergentiestellingen	48
3.2	Waarom is de volgende stap zo moeilijk?	50
3.3	Expansies in plaats van limieten	51
4	Terug naar het platte vlak	57
4.1	Punten en vectoren in het platte vlak	57
4.2	Kortste afstanden	60
4.3	Vlakke meetkunde met het inproduct	62
4.4	Projecteren op convexe verzamelingen	64
4.5	Andere inproducten en bilineaire vormen	66
4.6	Om te onthouden	69
4.7	Poolcoördinaten in het (complexe) vlak	70

5	De Hilbertruimte in	72
5.1	Standaardassenkruizen	73
5.2	Symmetrische matrices	75
5.3	Reële Hilbertruimten	76
5.4	De standaard Hilbertruimte	81
5.5	Riesz of geen Riesz?	84
5.6	Convergente deelrijen	89
5.7	Positieve eigenwaarden van wat?	90
5.8	The French Connection	94
6	Functies op de cirkel	95
6.1	Een Hilbert ruimte voor (periodieke) functies?	96
6.2	Standaard Hilbertruimten voor ‘functies’	100
6.3	Fourierreeksen	102
6.4	Convergentie van Fourierreeksen	107
6.5	Dat andere inproduct met afgeleiden	114
6.6	Blipfuncties	117
6.7	Intermezzo: out of Hilbertspace	119
7	Lebesgue’s Differentiatie Stelling	121
8	Olver	127
9	Airy scary	129



1 Partieel integreren

Partieel integreren is een techniek om integralen uit te rekenen, maar is veel meer dan dat, en in dit inleidende hoofdstuk willen we daar een eerste belangrijk voorbeeld van laten zien. We vatten daartoe onze kennis over integraalrekening (en differentiaalrekening) nu eerst kort samen¹.

De oppervlakte tussen de lijnen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ in het xy -vlak is bij afspraak gelijk aan 1 en integraalrekening kan beginnen met de observatie dat de oppervlakte tussen de lijnen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ en $y = x^2$ gelijk is aan $\frac{1}{3}$, bijvoorbeeld door naar een staafdiagram met staafjes ter breedte $\frac{1}{N}$ te kijken met $N \in \mathbb{N}$ steeds groter, en een rekenpartijtje waarin de som

$$1^2 + 2^2 + \dots + N^2 = \frac{N^3}{3} + \text{kleinere termen}$$

voorkomt. In [HM, hoofdstuk 6] wordt zo eerst de integraalrekening voor polynomen behandeld.

Algemener, als $I \subset \mathbb{R}$ een interval $[a, b]$ is en $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ een continue of monotone functie is dan is voor $a, b \in I$ de integraal²

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

eerst gedefinieerd als limiet van benaderende onder- en bovensommen, en vervolgens gelijk aan het verschil van de functiewaarden van F in $x = b$ en $x = a$, waarbij de primitieve functie F gedefinieerd is door de integraal zelve en de keuze van één a in I waarvoor we eisen dat $F(a) = 0$.

Voor monotone functies is dit makkelijk. Je ziet meteen dat iedere ondersom onder elke bovensom zit. Als je een staafdiagrammetje met staafjes van dezelfde breedte opschuift kiepert aan de ene kant van het interval er een staafje of en aan de andere kant komt er eentje bij zodat het verschil tussen boven- en ondersom gelijk is aan $|f(b) - f(a)|$ keer 1 gedeeld door het aantal staafjes. Hoe meer staafjes hoe kleiner het verschil en in de limiet $N \rightarrow \infty$ gaat het verschil naar nul. De kleinste bovengrens van alle ondersommen moet dus wel gelijk zijn aan de grootste ondergrens van alle bovensommen. Er zijn geen epsilons nodig om tot dit inzicht te komen.

Helaas³ hebben we die epsilons (en delta's) wel nodig⁴ voor het integreren

¹ En volgen daarbij de aanpak in het boekje Wiskunde in je Vingers [HM].

² Noem hierbij zachtjes de naam van Riemann.

³ Of gelukkig?

⁴ Meestal: voor alle $\epsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zodat iets geldt, $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$: iets.

van continue functies. Een functie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heet *uniform continu*⁵ als

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x_1 - x_2| \leq \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon,$$

waarbij $x_1, x_2 \in I$. Deze sterke⁶ uitspraak stelt je in staat om voor $I = [a, b]$ de boven- en ondersom dichter dan $\epsilon(b - a)$ bij elkaar te krijgen door $\frac{b-a}{N}$ kleiner dan δ te kiezen. Omdat ϵ willekeurig klein genomen kan worden is het dan net als bij monotone functies weer klaar, afgezien van een klein vervelend detail waar geen epsilons voor nodig zijn: je moet nog wel even zeker weten dat ook nu elke ondersom onder elke bovensom zit, een uitspraak die waar is voor elke begrensde functie, als de sommen via de kleinste bovengrenzen en grootste ondergrenzen op de deelintervalletjes gedefinieerd zijn.

In het algemeen kunnen we geen formule vinden voor de primitieve functie $F : I \rightarrow \mathbb{R}$. De functie

$$x \rightarrow \frac{1}{x}$$

bijvoorbeeld heeft op elke $[a, b] \subset (0, \infty)$ een primitieve functie die 0 is in $x = 1$, aangenomen dat $1 \in [a, b]$, maar een formule voor die primitieve hebben we niet. Wel een naam. Per definitie is

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{s} ds,$$

waarbij we de dummy integratie variabele veiligheidshalve niet x maar s noemen. De functie \ln is hiermee gedefinieerd op I en het is een kleine oefening om te laten zien dat $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ voor alle $a, b \in I$.

In elk punt $b \in I$ waarin f continu is geldt vervolgens dat

$$F'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b)$$

als limiet van het differentiequotient bestaat en gelijk is aan $f(b)$, een limiet die we in het geval dat F een polynoom is kunnen uitrekenen via het differentiequotient en een staartdeling, en het invullen van $x = b$ in het quotient.

Als $F(x)$ alleen maar als

$$F(x) = \int_a^x f(s) ds$$

gedefinieerd is dan schrijven we

$$F(x) = \int_a^x f(s) ds = \underbrace{\int_a^b f(s) ds}_{F(b)} + \int_b^x f(s) ds$$

⁵ Vergelijk dit met definitie van f continu in een vast punt.

⁶ Echt een stelling: f continu op $[a, b] \implies f$ uniform continu op $[a, b]$.

$$= F(b) + f(b)(x - b) + \underbrace{\int_b^x (f(s) - f(b)) ds}_{R(x;b)},$$

en bewijzen met de definitie van continuïteit van f in b dat

$$\frac{F(x) - F(b)}{x - b} - f(b) = \frac{R(x;b)}{b} \rightarrow 0$$

als $x \rightarrow b$, zo dat inderdaad $F'(b) = f(b)$ als limiet van het differentiequotient.

Eleganter is de schrijfwijze en definitie van differentieerbaarheid zonder differentiequotient maar met de lineaire benadering

$$F(x) = \underbrace{F(b) + f(b)(b - x)}_{\text{lineaire benadering}} + R(x;b)$$

waarin de restterm voldoet aan

$$R(x;b) = o(x - b) \quad \text{als } x \rightarrow b,$$

spreek uit R is kleine o van $x - b$, gedefinieerd als

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - b| \leq \delta \implies |R(x;b)| \leq \epsilon |x - b|.$$

Voor monomen kan dit ook natuurlijk, explicieter en zonder integralen, bijvoorbeeld

$$x^7 = b^7 + 7b^6(x - b) + \underbrace{(x^5 + 2x^4b + 3x^3b^2 + 4x^2b^3 + 5xb^4 + 6b^5)(x - b)^2}_{R(x;b)},$$

waarin

$$R(x;b) = O((x - b)^2) \quad \text{als } x \rightarrow b,$$

spreek uit R is grote O van $(x - b)^2$, gedefinieerd als

$$\exists M > 0 \exists \delta > 0 : |x - b| \leq \delta \implies |R(x;b)| \leq M(x - b)^2.$$

De primitieve functie F wordt ook wel de anti-afgeleide van F' genoemd. De anti-afgeleide P van een polynoom p is weer een polynoom, waarbij we kunnen afspreken dat we altijd $P(0) = 0$ nemen, en de afgeleide van een polynoom P is, via de staartdeling, ook weer een polynoom p . In het bijzonder hebben we

$$x \rightarrow x^n \xrightarrow{\text{anti-afgeleide}} x \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

en

$$x \rightarrow x^n \xrightarrow{\text{afgeleide}} x \rightarrow nx^{n-1},$$

en voor machtreeksen (polynomen van graad oneindig) zoals

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

gaat het binnen de convergentiestraal R , dus voor $|x| < R$, precies hetzelfde.

De convergentiestraal R is het omslagpunt voor de twee gevallen

$$|a_n| r^n \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq r < R \\ \infty & \text{als } R < r < \infty, \end{cases}$$

en hangt van de coëfficiënten af natuurlijk. In het geval dat $R = 0$ bestaat de machtreeks als som alleen voor $x = 0$ (maar kan in een andere interpretatie nog steeds betekenis hebben). De mooiste machtreeksen zijn die waarvoor $R = \infty$, bijvoorbeeld

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

maar ook

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

de meetkundige reeks met $R = 1$, mag er zijn.

Bij het nemen van afgeleiden en anti-afgeleiden verandert de convergentiestraal R van een machtreeks niet. Analyse reduceert⁷ voor zulke machtreeksen vaak tot algebra waarbij we ons weinig tot geen zorgen hoeven te maken of de formules die we opschrijven juist zijn. In de gaten houden wat R is volstaat, al wordt het wat lastiger als de door een machtreeks gedefiniëerde functie een groter definitiegebied heeft dan het interval $(-R, R)$ zelf, vooral als we ook naar inverse functies willen kijken en zeker willen weten dat bijvoorbeeld

$$\exp(\ln(x)) = x \quad \text{en} \quad \ln(\exp(x)) = x,$$

voor alle x in, respectievelijk, $(0, \infty)$ en \mathbb{R} .

1.1 Randwaardenproblemen en partieel integreren

Maar niet alle functies zijn zo mooi. In het algemeen verandert het nemen van de afgeleide of anti-afgeleide de eigenschappen van de functie en vandaar dat het gebruikelijk is om te werken met functieklassen als

$$C[a, b] = C^0[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ is continu in elke } x \in [a, b]\},$$

⁷ Zie Wiskunde in je Vingers, hoofdstuk 10.

en

$$C^k[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f^{(k)} \text{ bestaat in } C[a, b]\}$$

waarin $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, en $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Merk op dat voor $k \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$C^{k-1}[a, b] \xrightarrow{\text{anti-afgeleide}} C^k[a, b] \quad \text{en} \quad C^k[a, b] \xrightarrow{\text{afgeleide}} C^{k-1}[a, b].$$

Voor functies van één variabele gaan we met differentiëren en primitiveren heen en weer. In het bijzonder is voor gegeven $f \in C[0, 1]$ het randwaardeprobleem

$$-u''(x) = f(x) \quad (0 < x < 1); \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (1.1)$$

uniek oplosbaar in $C^2[0, 1]$ door $-f$ twee keer te primitiveren en de twee vrij integratieconstanten zo te kiezen dat de dubbele primitieve u in $x = 0$ en $x = 1$ gelijk is aan 0.

Het is instructief om dit even in detail te doen. Een keer primitiveren geeft

$$u'(x) = u'(0) - \underbrace{\int_0^x f(s) ds}_{F(x)},$$

met een nog onbepaalde $u'(0)$ en de primitieve van F van f die voldoet aan $F(0) = 0$, waarna nog een keer primitiveren geeft dat

$$u(x) = u'(0)x - \int_0^x F(s) ds,$$

$u'(0)$ nog steeds onbepaald, $\int_0^x F(s) ds$ de primitieve van F die 0 is in $x = 0$, en $u(1) = 0$ nog niet gebruikt.

Met de productregel van Leibniz is $F(s)$ te schrijven als

$$\begin{aligned} \underbrace{1}_{G'(s)} F(s) &= \underbrace{(s-a)'}_{G'(s)} F(s) = \underbrace{((s-a)F(s))'}_{G(s)} - \underbrace{(s-a)F'(s)}_{G(s)} \\ &= \underbrace{((s-a)F(s))'}_{(G(s)F(s))'} - \underbrace{(s-a)f(s)}_{G(s)F'(s)} \end{aligned}$$

(afgeleiden naar s), dus de primitieve van F in x is te schrijven als

$$\int_0^x F(s) ds = \underbrace{[(s-a)F(s)]_0^x - \int_0^x (s-a)f(s) ds}_{\text{kies } a=x} = \int_0^x (x-s)f(s) ds, \quad (1.2)$$

zo dat

$$u(x) = u'(0)x - \int_0^x (x-s)f(s) ds$$

en $x = 1$ invullen geeft dat

$$u'(0) = \int_0^1 (1-s)f(s) ds.$$

Zo volgt

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 (1-s)f(s) ds x - \int_0^x (x-s)f(s) ds \\ &= x \int_x^1 (1-s)f(s) ds + (1-x) \int_0^x sf(s) ds = \int_0^1 A(x,s)f(s) ds, \end{aligned}$$

in which

$$A(x,s) = \begin{cases} (1-x)s & \text{als } 0 \leq s \leq x \\ (1-s)x & \text{als } x \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

is the kernel in the solution operator that produces u in terms of f as

$$u(x) = \int_0^1 A(x,s)f(s) ds, \quad (1.4)$$

waarbij de notatie $u(x) = u_x$, $f(s) = f_s$, $A(x,y) = A_{xy}$ deze operator in de gedaante

$$u_x = \int_{s \in [0,1]} A_{xs} f_s$$

brengt en de analogie

$$\int_{s \in [0,1]} \leftrightarrow \sum_{s=\dots} \quad (1.5)$$

onmiskenbaar is, via $x \leftrightarrow i$ en $s \leftrightarrow j$. In het bijzonder zien we in deze analogie functies nu als vectoren en ruimten van functies als vectorruimten⁸.

De symmetrische kern A is te vergelijken met een symmetrische matrix A , en over symmetrische matrices hebben we bij Lineaire Algebra van alles geleerd. Merk ook op dat $A(x,s) > 0$ voor $x, s \in (0,1)$ en dat voor symmetrische matrices A_{ij} ook het begrip positiviteit⁹ bestaat, al is dat niet gedefinieerd in termen van de individuele entries van de matrix. Er zijn twee begrippen positiviteit, en die zijn niet hetzelfde.

⁸ Met de voor de hand liggende definities van som en scalair product.

⁹ Te weten: $Av \cdot v > 0$ tenzij $v = 0$.

De tussenstap (1.2) maakt gebruik van de regel

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

toegepast op (met $a \leftrightarrow 0$, $b \leftrightarrow x$, $x \leftrightarrow s$)

$$\underbrace{(FG)'(x)}_{(F(x)G(x))'} = \underbrace{F'(x)G(x) + F(x)G'(x)}_{F(x)'G(x)+F(x)G(x)'} \quad (1.6)$$

in de vorm

$$\int_a^b F(x)G'(x) dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F'(x)G(x) dx, \quad (1.7)$$

de bekende regel voor *integration by parts*.

In (6.11) geven we aan welk subtiel onderscheid in de notatie gemaakt kan worden: de afgeleide van F' van F geevalueerd in x (of s) of $F(x)$ gedifferentieerd naar x (of $F(s)$ naar s). De uitdrukking (1.2) voor de tweede primitieve van f die in $x = 0$ de eerste en tweede primitieve gelijk aan 0 neemt is er een om te onthouden als

$$F_2(x) = \frac{1}{(2-1)!} \int_0^x (x-s)^{2-1} f(s) ds,$$

waarbij $2 = n$ de formule geeft voor de n -de primitieve $F_n(x)$, steeds met integraal van 0 tot x . Of we de formule voor $n = 3, 4, \dots$ zo goed raden is natuurlijk de vraag:

Opgave 1.1. Definieer

$$F(x) = F_1(x) = \int_0^x f(s) ds, \quad F_{n+1}(x) = \int_0^x F_n(s) ds \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

en laat met herhaald partieel integreren zoals in (1.2) zien dat

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-s)^{n-1} f(s) ds.$$

Hint: voor F_3 moet je 2 keer partieel integreren, voor F_4 3 keer, et cetera. En dan zie je wel hoe het gaat. Welke varianten op de regel voor het integreren van

$$gf = gF' = (gF)' - g'F$$

heb je nodig?

Opgave 1.2. De formule in Opgave 1.1 produceert de zoveelste primitieve van f als een gewone in plaats van een meervoudige integraal. Verander het schema nu in

$$F_0(x) = f(x), \quad F_n(x) = b_n + \int_0^x F_{n-1}(s) ds \quad (n = 1, 2, 3 \dots), \quad (1.8)$$

en geef weer een formule voor $F_n(x)$ zoals hierboven (met meer termen natuurlijk). Bij constructie is $F_n(0) = b_n$, $F_n'(0) = b_{n-1}$, $F_n''(0) = b_{n-2}$, \dots , en je ziet hier een Taylorbenadering van orde $n - 1$ staan voor een functie waarvan de eerste $n - 1$ afgeleiden in 0 gegeven zijn door b -tjes. Verifieer nu dat voor elke n keer continue differentieerbare functie gedefinieerd op een interval I dat 0 bevat voor $x \in I$ geldt dat

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds.$$

In de volgende subsectie gebruiken we partieel integreren op een andere manier om randwaardenproblemen als (1.1) te behandelen. Maar nu nog een voorbeeldje van een rijtje sommetje die ook als rijtje leerzaam zijn.

Opgave 1.3. Bereken

$$\int_0^\infty \exp(-x) dx, \quad \int_0^\infty x \exp(-x) dx, \quad \int_0^\infty x^2 \exp(-x) dx, \quad \int_0^\infty x^3 \exp(-x) dx,$$

en geef een integraalformule voor $n!$ uitroepeteken

1.2 Functies als lineaire functies van functies

Als we de vergelijking in (1.1) vermenigvuldigen met een functie $v \in C^1[0, 1]$ dan bestaat onder de aanname dat $u \in C^2[0, 1]$ en $f \in C^0[0, 1]$ beide integralen

$$-\int_0^1 u''(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

en kan de linkerkant partieel geïntegreerd worden. Het resultaat is

$$-[u'(x)v(x)]_0^1 + \underbrace{\int_0^1 u'(x)v'(x) dx}_{\text{symmetrisch in } u,v} = \underbrace{\int_0^1 f(x)v(x) dx}_{\text{symmetrisch in } f,v}, \quad (1.9)$$

waarbij de lelijke eerste term verdwijnt als we de extra aanname maken dat $v(0) = v(1) = 0$.

De oplossing $u \in C^2[0, 1]$ van (1.1) heeft dus de eigenschap dat $u(0) = u(1) = 0$ en

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad \forall v \in C_0^1[0, 1], \quad (1.10)$$

waarin

$$C_0^1[0, 1] = \{v \in C^1[0, 1] : v(0) = v(1) = 0\},$$

en de gelijkheid in (1.10) kan voor elke $u \in C_0^1[0, 1]$ geverifieerd worden. Kortom, we zouden dus kunnen afspreken om $u \in C_0^1[0, 1]$ een oplossing van (1.1) te noemen als aan (1.10) voldaan is.

Rechts in (1.10) zien we een integraal die via de analogie (1.5) te zien is als een inwendig product van f en v , dat we kunnen noteren als

$$f \cdot v = \int_0^1 f(x)v(x) dx, \quad (1.11)$$

waarmee (1.1) zich uiteindelijk herschrijft als

$$u \in C_0^1[0, 1], \quad \underbrace{u' \cdot v'}_{((u,v))} = \underbrace{f \cdot v}_{(f,v)} \quad \forall v \in C_0^1[0, 1], \quad (1.12)$$

een uitdrukking waarin twee inwendige producten voorkomen en $u \in C_0^1[0, 1]$ en $f \in C^0[0, 1]$ vast zijn, en $v \in C_0^1[0, 1]$ willekeurig.

Opgave 1.4. Waarom is $(u, v) \rightarrow u' \cdot v'$ wel een inproduct op $C_0^1[0, 1]$ en niet op $C^1[0, 1]$?

Opgave 1.5. Laat $L > 0$, bijvoorbeeld $L = 2\pi$ of $L = 1$. De vectorruimte van continue L -periodieke functies noemen we $C(\mathbb{R}_L) = C^0(\mathbb{R}_L)$, en de deelruimte van k keer ($k \in \mathbb{N}$) continu differentieerbare functies noemen we $C^k(\mathbb{R}_L)$. Voor welke $f \in C(\mathbb{R}_L)$ is de vergelijking $-u'' = f$ oplosbaar met u in $C^2(\mathbb{R}_L)$? Is de oplossing uniek? Hint: neem eerst $L = 1$ natuurlijk.

Opgave 1.6. Neem $L = 1$ en los de vergelijking $-u'' = f$ voor f continu, 1-periodiek met $\int_0^1 f(x) dx = 0$: geef een uitdrukking van de vorm (1.4) voor de oplossing u die

(ook) voldoet aan $\int_0^1 u(x) dx = 0$. Hint: zonder deze laatste conditie is de oplossing niet uniek bepaald en evenzo is de (wederom symmetrische!) kern $A(x, s)$ niet uniek bepaald. Maar wel onder de conditie dat $\int_0^1 A(x, s) dx = \int_0^1 A(x, s) ds = 0$.

Opgave 1.7. Laat

$$\bar{C}^k(\mathbb{R}_L) = \{u \in C^k(\mathbb{R}_L) : \int_0^L u(x) dx = 0\}$$

en geef een herformulering van $-u'' = f$ voor $f \in \bar{C}^0(\mathbb{R}_L)$ en $u \in \bar{C}^1(\mathbb{R}_L)$ zoals in (1.12).

Hopelijk is duidelijk dat de twee laatste opgaven kwa bewerkelijkheid nogal uiteenliepen. Formuleringen als in (1.12) gebaseerd op *integration by parts*, zonder dat het doel daarvan het uitrekenen van getallen is, bieden een ander en vaak algemener perspectief om eigenschappen van oplossingsoperatoren te begrijpen dan expliciete oplossingsmethoden gebaseerd op primitiveren. In wat volgt zullen we daartoe v als een variabele zien en

$$v \rightarrow ((u, v)) \quad \text{en} \quad f \rightarrow (f, v)$$

als dezelfde lineaire functie, maar anders gepresenteerd.

Lineaire functies en inproducten, hoe zit dat? Hoe weet je dat er bij f via dezelfde lineaire functie van v een u hoort? En kan dat algemener? Daarvoor gaan we in het volgende hoofdstuk terug naar de makkelijkste niet-flauwe inproductruimte die we kennen, het platte vlak. Dit hoofdstuk besluiten we met een paar opgaven die laten zien hoe intrinsiek de herformulering als (1.12) verbonden is met de eigenschappen van de oplossingsoperator

$$A : f \xrightarrow{\forall v((u,v))=(f,v)} u, \tag{1.13}$$

waarbij het van het specifieke probleem afhangt welke inproducten en welke functieruimten gedefinieerd moeten worden om een A te maken die in simpele gevallen samenvalt met expliciet uitgerekenende integraaloperatoren als in (1.4).

Opgave 1.8. Laat zien dat een solver als A in (1.13) de eigenschap heeft dat $((Au, v)) = ((u, Av))$ en $(Af, g) = (f, Ag)$ voor alle u, v en f, g in de nog te kiezen ruimten $V \subset H$ en H waarop de inproducten zijn gedefinieerd met de eigenschappen die we nodig hebben om alles precies te maken.

De operator A is dus symmetrisch¹⁰ met betrekking tot twee inproducten, waaronder het ‘gewone’ inproduct (1.11) dat in eerste instantie was opgeschreven onder verschillende aannames voor f en v .

Opgave 1.9. Gebruik de symmetrie van A om te laten zien dat eigenvectoren¹¹ van A bij verschillende eigenwaarden van A loodrecht op elkaar staan.

Opgave 1.10. Gebruik de vorige opgave en Opgave 1.7 om zonder rekenwerk te laten zien dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx \quad (m, n \in \mathbb{N}, m \neq 0)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

Natuurlijk wist je dit al, waarschijnlijk via $\exp(ix) = \cos nx + i \sin nx$ en de gebruikelijke rekenregeltjes gebaseerd op de somformules¹² voor $\cos(a+b)$ en $\sin(a+b)$ die niet meer tot de tegenwoordig zelden precies gerechtvaardigde basiskennis van de gemiddelde β -student horen. De functie \sin kan gedefinieerd worden als de unieke oplossing van het beginwaardeprobleem

$$u'' + u = 0; \quad u(0) = 0; \quad u'(0) = 1, \quad (1.14)$$

en \cos als de afgeleide van \sin . Alle eigenschappen van \cos en \sin , i.h.b. de somformules volgen uit deze definities en kunnen gebruikt worden voor de volgende opgave.

Opgave 1.11. Bepaal alle $\lambda > 0$ waarvoor $u'' + \lambda u = 0$ oplossingen van periode 2π heeft en bepaal alle even en oneven oplossingen voor die waarden λ .

De even oplossingen die je zo vindt zijn veelvouden van $c_1 : x \rightarrow \cos x$, $c_2 : x \rightarrow \cos 2x$, $c_3 : x \rightarrow \cos 3x$, \dots , en de oneven oplossingen zijn veelvouden van $s_1 : x \rightarrow \sin x$, $s_2 : x \rightarrow \sin 2x$, $s_3 : x \rightarrow \sin 3x$, \dots , en ieder tweetal

¹⁰ We praten nog niet over complexwaardige functies hier.

¹¹ $A\phi = \lambda\phi$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ϕ een (eigen)functie.

¹² Zie Wiskunde in je Vingers, sectie 10.4.

van deze functies staat loodrecht op elkaar, zoals we in Opgave 1.10 gezien hebben. En ze zijn gemiddeld alle maal nul, hetgeen betekent dat ze loodrecht staan op de functie $\mathbf{1} : x \rightarrow 1$, bijvoorbeeld

$$(\mathbf{1}, s_1) = \mathbf{1} \cdot s_1 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0.$$

Wat we in vervolg gaan doen is $1, c_1, c_2, c_3, \dots, s_1, s_2, s_3, \dots$ zien als vectoren die lijnen door de oorsprong¹³ definiëren. En die lijnen zien we als een assenkruis waarmee we een oneindig-dimensionale ruimte opspannen, een ruimte waarin we willen werken zoveel mogelijk als we dat in het platte vlak doen.

¹³ Die oorsprong is de nulfunctie $\mathbf{0} : x \rightarrow 0$.

2 Newton's method the hard way

In this section I will describe how Newton's method can be adapted in the case that the map

$$u \rightarrow u - f'(u)^{-1}f(u) \quad (1)$$

is not defined as a map from a Banach space X to itself. The resulting theorems are called HARD Implicit Function Theorems. My purpose here is to demystify the terminology and present a simple proof of convergence for a modification of Newton's method in such a case. Observe that a direct proof of the Inverse Function Theorem for a continuously differentiable function f amounts to solving the equation $f(u) = v$ for u given small v under the assumption that $f(0) = 0$, using the map

$$u \rightarrow u + f'(0)^{-1}(v - f(u)) \quad (2)$$

which is contractive if $f'(0)^{-1} : X \rightarrow X$ exists as a continuous linear map.

The proof of the Implicit Function Theorem for solving equations like $f(u, v) = 0$ in the form $u = u(v)$ if $f(0, 0) = 0$ and the partial derivative of f with respect to u is invertible in $(u, v) = (0, 0)$ is similar. To show that (2) produces a local solution $u = u(v)$ which is continuously differentiable the only regularity on f that has to be assumed is that $u \rightarrow f'(u)$ is continuous, as only $f'(u)$ is needed in the calculations and estimates. Newton's method, which employs a suitable inverse of $f'(u)$ for all u in some (say the unit) ball B in X , relies on Taylor's theorem with a quadratic remainder and therefore the assumption that also $u \rightarrow f''(u)$ be continuous is required.

2.1 Newton's method, standard proof of convergence

I will modify the treatment in [KP]¹ which begins with a somewhat alternative treatment of Newton's method in the standard case. So to warm up consider an equation of the form $f(u) = 0$ in which $f : B \rightarrow X$ is a twice continuously differentiable function defined on the open unit ball B in a Banach space X , with first and second order derivative satisfying bounds

$$\|f'(u)\| \leq M_1 \quad \text{and} \quad \|f''(u)\| \leq M_2 \quad \forall u \in B. \quad (3)$$

The general case of Banach spaces is really not that different from the case in which $X = \mathbb{R}$, which you may think of in what follows below. Simply take $B = (-1, 1)$ and replace all norms by absolute values.

¹ Krantz & Parks, The Implicit Function Theorem, Birkhäuser 2003.

What we need is that Taylor's theorem with a second order remainder,

$$f(u_n) = \underbrace{f(u_{n-1}) + f'(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})}_{\text{linear approximation}} + Q_f(u_{n-1}, u_n), \quad (4)$$

in which

$$\|Q_f(u_{n-1}, u_n)\| \leq \frac{M_2}{2} \|u_n - u_{n-1}\|^2, \quad (5)$$

applies to a sequence of iterates $u_n \in B$. For the standard Newton method one does not explicitly need the bound on $f'(u)$ in (3) which says that the linear map $f'(u) : X \rightarrow X$ satisfies

$$\|f'(u)v\| \leq M_1 \|v\| \quad \forall u \in B \quad \forall v \in X, \quad (6)$$

but a similar bound

$$\|L(u)\| \leq C \quad (7)$$

for maps $L(u)$, that act as right inverses of $f'(u)$ in the sense that

$$f'(u_{n-1})L(u_{n-1})f(u_{n-1}) = f(u_{n-1}), \quad (8)$$

is essential. Writing

$$p_n = \|u_n - u_{n-1}\| \quad \text{and} \quad q_n = \|f(u_n)\| \quad (9)$$

the Newton scheme

$$u_n = u_{n-1} - L(u_{n-1})f(u_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (10)$$

starting with $u_0 = 0$, then defines $u_n \in B$ as long as

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n < 1, \quad (11)$$

and the inequalities

$$p_n \leq Cq_{n-1} \quad \text{and} \quad q_n \leq \frac{1}{2}M_2p_n^2 \quad (12)$$

are immediate from (4,5,10). Note that (10) kills the linear approximation in (4). The inequalities in (12) are complemented by

$$q_0 = \|f(0)\| \quad \text{and} \quad p_1 \leq Cq_0 = C\|f(0)\|. \quad (13)$$

2.1.1 The optimal result

Clearly (12) and (13) combine as

$$p_n \leq \mu p_n^2 \quad \text{with} \quad \mu = \frac{1}{2}MC \quad \text{and} \quad p_1 \leq C\|f(0)\|, \quad (14)$$

and the condition to be stated is which $\bar{P} = \bar{P}(\mu)$ guarantees that the implication

$$C\|f(0)\| < \bar{P} \implies \sum_{n=1}^{\infty} p_n < 1 \quad (15)$$

holds. The larger \bar{P} the stronger the statement in the sense that larger $\|f(0)\|$ are allowed to obtain a solution $u = \bar{u} \in B$ of $f(u) = 0$ via (10) with $u_0 = 0$. Note that with $C\|f(0)\| \leq \bar{P}$ the same conclusion will hold if only one of all the inequalities in the estimates below is strict, which will inevitably be the case of course.

Obviously the smallest \bar{P} we can get follows from replacing the three inequalities in (14) and (15) by equalities. This leads to

$$p_n = \mu p_{n-1}^2 \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}; \quad p_1 = \bar{P}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1. \quad (16)$$

Via $\xi_n = p_n$ and $\xi_n = \xi_{n-1}^2$ this is easily seen to be equivalent to

$$\mu = G(\mu\bar{P}) \quad \text{with} \quad G(\xi) = \xi + \xi^2 + \xi^4 + \xi^8 + \xi^{16} + \dots \quad (17)$$

but this does not yield a simple formula for $\bar{P} = \bar{P}(\mu)$.

2.1.2 Suboptimal result

A rough estimate

$$G(\xi) < \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 + \xi^5 + \dots = \frac{\xi}{1-\xi} \quad (18)$$

leads to a simple but suboptimal formula:

$$\bar{P} = \frac{1}{1+\mu} \quad \text{or} \quad \mu = \frac{1}{\bar{P}} - 1. \quad (19)$$

2.2 Alternative proof of convergence

The alternative approach to (12) and (13) in [KP] is not to solve the corresponding system with equalities but to derive an estimate of the form

$$p_n \leq e^{-\gamma\lambda^n} \quad (20)$$

via induction starting from

$$p_1 \leq C\|f(0)\| < \bar{P} = e^{-\gamma\lambda}, \quad (21)$$

with choices of γ and λ that guarantee both

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma\lambda^n} \leq 1 \quad (22)$$

as well as that the induction step can be done via

$$p_{n-1} \leq e^{-\gamma\lambda^{n-1}} \implies p_n \leq \mu p_{n-1}^2 \leq \underbrace{\mu e^{-2\gamma\lambda^{n-1}}}_{\text{should hold for all } n \geq 1} \leq e^{-\gamma\lambda^n},$$

which is the case if

$$\ln \mu \leq \gamma\lambda^{n-1}(2 - \lambda) \quad \forall n \geq 1.$$

2.2.1 The optimal alternative result

For a given μ this is equivalent to

$$\ln \mu \leq \gamma\lambda(2 - \lambda) \quad \text{and} \quad \lambda \leq 2 \quad (23)$$

if we make the obvious restriction that γ and λ be positive. Conditions (21) and (23) suggest $\alpha = \gamma\lambda$ and λ as the more relevant parameter so we have to pick $\alpha > 0$ and $1 < \lambda \leq 2$ with

$$\ln \mu \leq \alpha(2 - \lambda), \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha\lambda^n} \leq 1 \quad \text{and} \quad \bar{P} = e^{-\alpha} \quad \text{maximal.} \quad (24)$$

For $\mu > 1$ the inequalities define a region in the first quadrant of the λ, α -plane bounded by the two curves given by

$$\ln \mu = \alpha(2 - \lambda) \quad \text{and} \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha\lambda^n} = 1, \quad (25)$$

which intersect in one point.

This point defines the minimal value of $\alpha = -\ln \bar{P}$ via

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha \lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{(2+\frac{\ln \mu}{\ln \bar{P}})^n}$$

if $\mu > 1$. The curve defined by

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{(2+\frac{\ln \mu}{\ln \bar{P}})^n} \quad \text{and} \quad \mu \geq 1 \quad (26)$$

hits the curve defined by (17) in $\mu = 1$ and lies below (17) of course, but above (19) in view of

$$\mu = \frac{1}{\bar{P}} - 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{(2+\frac{\ln \mu}{\ln \bar{P}})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{(1+\frac{\ln(1-\bar{P})}{\ln \bar{P}})^n} < \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{1+n\frac{\ln(1-\bar{P})}{\ln \bar{P}}}}_{\text{a geometric series}} = 1.$$

For $\mu \leq 0$ the optimal choice of \bar{P} via (24) is given by

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{2^n}.$$

2.2.2 A suboptimal alternative result

A more explicit formula is again obtained via a rough estimate

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma \lambda^n} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma(1+n(\lambda-1))}}_{\text{a geometric series}} = \frac{e^{-\gamma \lambda}}{1 - e^{-\gamma(\lambda-1)}} = \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{\gamma} e^{-\alpha}} \quad (27)$$

and replacing (24) by

$$\ln \mu \leq \alpha(2 - \lambda), \quad \lambda \geq \frac{\alpha}{\ln(e^\alpha - 1)} \quad \text{and} \quad \bar{P} = e^{-\alpha} \quad \text{maximal.}$$

This leads to

$$\mu = e^{\alpha(2-\lambda)} = \frac{1}{\bar{P}^{2-\lambda}} = \frac{1}{\bar{P}^{2+\frac{\ln \bar{P}}{\ln(\frac{1}{\bar{P}}-1)}}} = \bar{P}^{\frac{\ln(\bar{P})-2\ln(1-\bar{P})}{\ln(1-\bar{P})-\ln(\bar{P})}}$$

so that

$$1 \leq \mu = \frac{1}{\bar{P}^{2+\frac{\ln \bar{P}}{\ln(\frac{1}{\bar{P}}-1)}}} < \frac{1}{\bar{P}} - 1 \quad (28)$$

defines another curve with

$$\bar{P} \leq \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

which is below the three curves above, but to leading coincides with them in the limit $\mu \rightarrow \infty$ and $\bar{P} \rightarrow 0$.

2.2.3 A lousy alternative result

The even rougher estimate used in [KP] via

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma \lambda^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\gamma(\lambda-1)}$$

is to be avoided as at some point below the treatment of ill-behaved Newton's methods will show.

2.2.4 A much better suboptimal alternative result

Actually the first rough estimate above works better with α than with γ , as I only noticed May 21. Directly in terms of γ and λ we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma \lambda^n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma \lambda \lambda^{n-1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma \lambda (1+(n-1)(\lambda-1))} = \frac{e^{-\gamma \lambda}}{1 - e^{-\gamma \lambda (\lambda-1)}} \leq 1 \quad (29)$$

if

$$2 - \lambda \leq \frac{\ln(e^{\gamma \lambda} - 1)}{\gamma \lambda} = \frac{\ln(e^{\alpha} - 1)}{\alpha},$$

so that we arrive at

$$\ln \mu \leq \alpha(2 - \lambda), \quad \alpha(2 - \lambda) \leq \ln(e^{\alpha} - 1) \quad \text{and} \quad \bar{P} = e^{-\alpha} \quad \text{maximal.} \quad (30)$$

This is the optimal estimate using the Bernoulli type inequality

$$\lambda^n \geq 1 + n(\lambda - 1). \quad (31)$$

With equality in the final inequality in (29) we arrive at

$$\ln \mu \leq \ln(e^{\alpha} - 1) = \ln\left(\frac{1}{\bar{P}} - 1\right),$$

which for $\mu > 1$ coincides with (19) and we can forget about the annoying (28) above. Note that factoring out another λ in the exponent in (29) will and cannot help to improve this result, which says that if $\mu > 1$ the bound

$$\|f(0)\| \leq \frac{1}{C(\mu + 1)}$$

suffices.

This bound may be compared with the bound in [KP], where all constants are named M , for unclear reasons $M > 2$ is assumed, and the $\frac{1}{2}$ -coefficient in the Taylor-remainder term is omitted. Since $\mu = \frac{1}{2}CM$ our bounds looks similar to their bound $\|f(0)\| \leq M^{-5}$. In the next section the comparison will be a true pain, as [KP] have a formulation in which again all constants are called M with apparently $M > 1$, and the bound on some norm of $f(0)$ (the wrong norm actually) involving M^{-307} . Comparing to the lectures notes of Schwartz from 60 years ago this is hardly an improvement as Schwartz had M^{-202} (also for the wrong norm).

2.3 Nash' modification of Newton's method

Now that we have seen several small variants of the method to obtain convergence for Newton's method, we consider the problem of solving $f(u) = 0$ in $B \subset X$ in the case that $f : B \rightarrow Z$ and $L(u) : Z \rightarrow Y$ with X, Y and Z *different* Banach spaces that we assume to belong to a family of spaces denoted by C^k , which we think of as function spaces. Here k denotes the number of possibly fractional derivatives that elements $u \in C^k$ have. Think of k for X , l for Z and m for Y . The goal is to have conditions that guarantee the existence of a solution to $f(u) = 0$ with k -norm smaller than 1, provided $f(0)$ has a norm bounded by some power of M , where M is a universal bound for all constants related to the derivatives of f .

Both [KP] and Schwartz require a very strong norm of $f(0)$ to be bounded, but the treatment below will show that a bound on the l -norm suffices. It should be noted that [KP] more or less copied from Schwartz with some additional details explained. Both formulate a statement for the case that $k > l$, but give a not completely correct proof for the case that $k = l > m$ (without mentioning the difference). The main additional assumption is a natural affine bound for $\|L(u)f(u)\|_{\bar{m}}$ in terms of $\|u\|_{\bar{k}}$, for \bar{m} and \bar{k} sufficiently large and $\bar{k} - \bar{m} = k - m$. The ratio

$$N = \frac{\bar{k} - k}{k - m} \tag{32}$$

measures the required higher regularity of the Newton map for the modified scheme described below to still do the job.

Below the norms $u \rightarrow \|u\|_k$ on C^k are assumed to be monotone increasing in k and we assume that there are linear so-called smoothing operators $S(t)$ parametrized by $t \geq 1$ that satisfy

$$\|S(t)u\|_k \leq K_{kl}t^{k-l}\|u\|_l \quad \text{and} \quad \|(I - S(t))u\|_l \leq \frac{K^{kl}}{t^{k-l}}\|u\|_k \tag{33}$$

for all $k > l$ in a sufficiently large range as needed in the particular implementation of the modified Newton method presented next. Thus $S(t)$ maps C^l to C^k , with an estimate for the ratio between the norms that grows worse as $S(t)$ approaches the identity I for $t \rightarrow \infty$, when I is considered as the embedding $I : C^k \rightarrow C^l$. It is convenient to write the norms of $S(t)$ and $I - S(t)$ with subscripts indicating the norms used for u , $S(t)u$ and $(I - S(t))u$. Thus (33) says that

$$\|S(t)\|_{kl} \leq K_{kl} t^{k-l} \quad \text{and} \quad \|(I - S(t))\|_{lk} \leq \frac{K^{kl}}{t^{k-l}}. \quad (34)$$

Besides (34) we assume (now also) a bound M_1^{lk} on $\|f'(u)\|_{lk}$ and, as before, bounds M_2^{lk} on $\|f''(u)\|_{lk}$ and C_{ml} on $\|L(u)\|_{ml}$ for $\|u\|_k \leq 1$.

2.3.1 The modified scheme

The idea of Nash was to modify Newton's scheme into

$$u_n = u_{n-1} - S(t_{n-1})L(u_{n-1})f(u_{n-1}), \quad (35)$$

with a suitable choice of $t_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. In (35) the new factor $S_{n-1} = S(t_{n-1})$ maps $L(u_{n-1})f(u_{n-1})$ back to (the strict subset of smooth functions of) the original domain of f . This comes with a cost which is estimated using the norm of the smoothing operator S_{n-1} in the chain

$$u_{n-1} \in X = C^k \xrightarrow{f} Z = C^l \xrightarrow{L(u_{n-1})} Y = C^m \xrightarrow{S_{n-1}} u_n \in X = C^k.$$

Before we do so let's examine how (4) is modified when combined with (35). We have

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \underbrace{f(u_{n-1}) + f'(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})}_{\text{vanishes with (10)}} + Q_f(u_{n-1}, u_n) \\ &= \underbrace{f'(u_{n-1})(I - S_{n-1})L(u_{n-1})f(u_{n-1})}_{\text{because of (35)}} + Q_f(u_{n-1}, u_n), \end{aligned}$$

so that, with

$$p_n = \|u_n - u_{n-1}\|_k \quad \text{and} \quad q_n = \|f(u_n)\|_l,$$

the estimate

$$q_n \leq \underbrace{M_1^{lk} \|I - S_{n-1}\|_{km} \|L(u_{n-1})f(u_{n-1})\|_m}_{\text{new error like term}} + \frac{1}{2} M_2^{lk} p_n^2 \quad (36)$$

holds.

2.3.2 The new error term

The third factor in the error like term in (36) will have to be controlled using some assumption on the map

$$u \rightarrow L(u)f(u)$$

which was not needed in the case of (10) and that should guarantee that quadratic term in (36) will still allow us to establish a conclusion like (15). Clearly this is impossible if $m \leq k$ because we can only make $\|I - S_n\|_{km}$ small if $k < m$. Nash' solution was to replace m by a (much) larger \bar{m} and assume an otherwise natural affine estimate of the form

$$\|L(u)f(u)\|_{\bar{m}} \leq A_{\bar{m}\bar{k}}(1 + \|u\|_{\bar{k}}) \quad (37)$$

with

$$\bar{k} - \bar{m} = k - m,$$

which requires an additional estimate for

$$r_n = 1 + \|u_n\|_{\bar{k}} \quad (38)$$

to be used in combination with

$$q_n \leq M_1^{lk} \underbrace{\|I - S_{n-1}\|_{k\bar{m}}}_{\text{controlled by (34)}} r_{n-1} + \frac{1}{2} M_2^{lk} p_n^2 \quad (39)$$

and the estimate for p_n . Via (35) the latter now reads

$$p_n \leq \|S_{n-1}\|_{km} C_{ml} q_{n-1} \quad (40)$$

because $\|L(u_{n-1})f(u_{n-1})\|_m \leq C_{ml} q_{n-1}$.

The additional estimate needed for r_n also follows from (35). In view of

$$\|u_n - u_{n-1}\|_{\bar{k}} \leq \|S_{n-1}\|_{\bar{k}\bar{m}} \|L(u_{n-1})f(u_{n-1})\|_{\bar{m}} \leq \|S_{n-1}\|_{\bar{k}\bar{m}} A_{\bar{m}\bar{k}} (1 + \|u_{n-1}\|_{\bar{k}})$$

we have

$$1 \leq r_n \leq 1 + A_{\bar{m}\bar{k}} \sum_{j=1}^n \|S_{j-1}\|_{\bar{k}\bar{m}} r_{j-1}. \quad (41)$$

The ‘‘error’’ terms accumulate but can be kept under control as we shall see below.

The system of inequalities (40,39,41) and initial inequalities for q_0 , $r_0 = 1$ and r_1 allows again estimates of the form (20), provided $\bar{k} - k = \bar{m} - m$ is

sufficiently large in terms of (32). The idea is to get the first term in (39) controlled by the right hand side of

$$p_n^2 \leq e^{-2\gamma\lambda^n}$$

in the induction argument, so that the norm $\|S_n\|_{km}$ in (40) can be chosen not too large so as still to have (20) with n if it already holds with $n-1$. To do so we need a control on $\|S_{n-1}\|_{km}$ of the same form and this is established by setting

$$t_{n-1} = e^{\beta\lambda^{n-1}} \quad (42)$$

with $\beta > 0$ to be chosen in terms of γ . Note that this gives λ^n in the exponents of the exponential bounds for S_n and $I - S_n$.

Here we choose to keep λ as a parameter in a range as large as possible, like we did in the analysis of (10). Clearly we can only complete the argument if we also specify a bound on r_n to be established in the course of the argument, and this bound has to be of the same form as the bound chosen for S_n . Thus we look for a proof that

$$p_n \leq e^{-\gamma\lambda^n} \quad \text{and} \quad r_n \leq e^{\delta\lambda^n} \quad (43)$$

with $\delta > 0$. We note that the proof presented in [KP] the choice $\delta = \gamma$ and $\lambda = \frac{3}{2}$ dates back to Schwartz's lecture notes. As we shall see below this is not quite the optimal choice.

2.3.3 The system of inequalities

With (42) we have the system of inequalities

$$p_n \leq K_{km} e^{(k-m)\beta\lambda^{n-1}} C_{ml} q_{n-1}; \quad (44)$$

$$q_n \leq M_1^{lk} K^{k\bar{m}} e^{(k-\bar{m})\beta\lambda^{n-1}} A_{\bar{m}\bar{k}} \underbrace{r_{n-1}}_{\leq e^{\delta\lambda^{n-1}}} + \frac{1}{2} M_2^{lk} \underbrace{p_n^2}_{\leq e^{-2\gamma\lambda^n}}; \quad (45)$$

$$1 \leq r_n \leq 1 + \underbrace{A_{\bar{m}\bar{k}} K_{\bar{k}\bar{m}}}_{\mu_3} \sum_{j=1}^n e^{(k-\bar{m})\beta\lambda^{j-1}} \underbrace{r_{j-1}}_{\leq e^{\delta\lambda^{j-1}}}, \quad (46)$$

and we aim for a proof of (43) via induction, using the underbraced estimates in the three inequalities above as induction hypothesis. In (45) the estimate of the first term is controlled by the estimate of the second term if

$$e^{(k-\bar{m})\beta\lambda^{n-1}} e^{\delta\lambda^{n-1}} \leq e^{-2\gamma\lambda^n},$$

requiring

$$(\bar{m} - k)\beta \geq \delta + 2\gamma\lambda, \quad (47)$$

which says that in the λ, β -plane we must be above a line that comes down as \bar{m} is increased.

Combining the first two inequalities we arrive at

$$p_n \leq e^{(k-m)\beta\lambda^{n-1}} (\mu_1 e^{(k-\bar{m})\beta\lambda^{n-2}} r_{n-2} + \mu_2 p_{n-1}^2) \quad r_n \leq 1 + \mu_3 \sum_{j=0}^{n-1} e^{(\bar{k}-\bar{m})\beta\lambda^j} r_j, \quad (48)$$

the constants μ_{123} given by

$$\mu_1 = \underbrace{K_{km}C_{ml}}_C M_1^{lk} \underbrace{K^{k\bar{m}}A_{\bar{m}\bar{k}}}_A, \quad \mu_2 = \frac{1}{2} \underbrace{K_{km}C_{ml}}_C M_2^{lk}, \quad \mu_3 = \underbrace{K_{\bar{k}\bar{m}}A_{\bar{m}\bar{k}}}_{\bar{A}}. \quad (49)$$

2.3.4 Estimating the increments

Under the assumption that (47) holds, the induction hypotheses for p_{n-1} and r_{n-2} produce the desired inequality for p_n from (48) if

$$(\mu_1 + \mu_2)e^{(k-m)\beta\lambda^{n-1}} e^{-2\gamma\lambda^{n-1}} \leq e^{-\gamma\lambda^n}.$$

Thus we must have

$$\ln(\mu_1 + \mu_2) \leq -(k-m)\beta\lambda^{n-1} + 2\gamma\lambda^{n-1} - \gamma\lambda^n$$

for all $n \geq 2$. As in the case of the standard Newton scheme, this leads to

$$\ln(\mu_1 + \mu_2) \leq \lambda(\gamma(2-\lambda) - (k-m)\beta) \quad \text{with} \quad (k-m)\beta \leq \gamma(2-\lambda), \quad (50)$$

a sharp upper bound for β that we need to stay away from if we don't want to impose that $\mu_1 + \mu_2 \leq 1$.

As sufficient condition for

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n < 1$$

we can use the optimal condition found using Bernoulli's inequality, namely

$$\lambda\gamma(2-\lambda) \leq \ln(e^{\gamma\lambda} - 1). \quad (51)$$

2.3.5 Estimating the error terms

For the inductive construction of the upper bound for r_n we set

$$b = (\bar{k} - \bar{m})\beta = (k - m)\beta > 0 \quad (52)$$

and conclude from the inequality in (48) that (shifting the index)

$$r_n \leq 1 + \mu_3 \sum_{j=0}^{n-1} e^{b\lambda^j} r_j \leq 1 + \mu_3 \sum_{j=0}^{n-1} e^{b\lambda^j} e^{\delta\lambda^j}$$

in view of the induction assumption for (all) smaller n . Thus we need the inequality

$$1 + \mu_3 \sum_{j=0}^{n-1} e^{(b+\delta)\lambda^j} \leq e^{\delta\lambda^n} \quad (53)$$

for all $n \geq 2$. Recall that we start with $r_0 = 1 \leq e^\delta$ and

$$1 \leq r_1 \leq e^{\delta\lambda} \quad (\text{and also } p_1 \leq e^{\gamma\lambda} \text{ of course}) \quad (54)$$

via a smallness assumptions on q_0 still to be discussed.

Dividing by the right hand side, (53) is equivalent to

$$e^{-\delta\lambda^n} + \mu_3(e^{(b+\delta-\delta\lambda)\lambda^{n-1}} + e^{-\delta\lambda^n} \sum_{j=0}^{n-2} e^{(b+\delta)\lambda^j}) \leq 1 \quad (55)$$

in which we have separated the probably dominant term with $j = n-1$ from the sum. Neglecting the sum in (55) a sufficient (and in any case necessary) condition for the induction step to work for all $n \geq 2$ would be that

$$\ln \mu_3 + (b + \delta - \delta\lambda)\lambda^{n-1} \leq 0 \quad \text{with} \quad b \leq \delta(\lambda - 1), \quad (56)$$

so that in particular we now need to impose two inequalities on b , namely

$$b < \delta(\lambda - 1) \quad \text{and} \quad b < \gamma(2 - \lambda), \quad (57)$$

the latter being the (strict) inequality from (50).

These two bounds severely restrict the bound in (47), which in terms of b becomes

$$\frac{\bar{m} - k}{k - m} b \geq \delta + 2\gamma\lambda, \quad (58)$$

and this does not really depend on how we turn the necessary condition (56) into a sufficient condition, which we do next, rewriting it as

$$e^{-\delta\lambda^n} + \mu_3(e^{(b+\delta-\delta\lambda)\lambda^{n-1}} + \sum_{j=0}^{n-2} e^{(b+\delta-\delta\lambda^{n-j})\lambda^j}) \leq 1.$$

In view of (57) and using Bernoulli's inequality (31) the left hand side is smaller than

$$\begin{aligned} e^{-\delta\lambda^2} + \mu_3(e^{(b+\delta-\delta\lambda)\lambda} + \sum_{j=0}^{n-2} e^{(b+\delta-\delta\lambda^2)\lambda^j}) &< \\ e^{-\delta\lambda^2} + \mu_3(e^{(b+\delta-\delta\lambda)\lambda} + \sum_{j=0}^{\infty} e^{(b+\delta-\delta\lambda^2)(1+j(\lambda-1))}) &< \\ e^{-\delta\lambda^2} + \mu_3(e^{(b+\delta-\delta\lambda)\lambda} + \frac{e^{b+\delta-\delta\lambda^2}}{1 - e^{(\lambda-1)(b+\delta-\delta\lambda^2)}}) &, \end{aligned}$$

in which we used that $b + \delta - \delta\lambda^2 < b + \delta - \delta\lambda < 0$. Thus we arrive at

$$e^{-\delta\lambda^2} + \mu_3 e^{(b+\delta-\delta\lambda)\lambda} \left(1 + \frac{e^{-(b+\delta)(\lambda-1)}}{1 - e^{(\lambda-1)(b+\delta-\delta\lambda^2)}}\right) \leq 1 \quad (59)$$

Note that the first term on the right hand side of (31) is essential here. Without this first term the numerator, which is the first term ($j = 0$) in the geometric series, would be 1 and we be stuck, as there would be no way to get a statement without an a priori bound on μ_3 . We note that in [KP] the proof is without the 1 in (31) but an accidental mistake of computing the series with $j = 1$ as the first term “allows” to conclude. Technically speaking that proof is incorrect².

The quickest way to finish is to estimate the sum of the geometric series by a fixed constant, rewriting it as

$$\frac{e^{-s}}{1 - e^{s-S}} = \frac{e^S}{e^s(e^S - e^s)}$$

with

$$s = (b + \delta)(\lambda - 1) \leq \delta\lambda(\lambda - 1) = s_0 < S = \delta\lambda^2(\lambda - 1).$$

Provided

$$2e^{s_0} \leq e^S \quad \text{or} \quad \ln 2 \leq \delta\lambda(\lambda - 1)^2,$$

² And it is not a proof of the theorem actually stated.

this expression is monotone decreasing in s on $[0, s_0]$ and thus

$$\frac{e^{-(b+\delta)(\lambda-1)}}{1 - e^{(\lambda-1)(b+\delta-\delta\lambda^2)}} \leq \frac{1}{1 - e^{-\delta(\lambda-1)\lambda^2}} \leq 2.$$

We conclude that

$$e^{-\delta\lambda^2} + 3\mu_3 e^{(b+\delta-\delta\lambda)\lambda} \leq 1 \quad \text{suffices if} \quad \ln 2 \leq \delta\lambda(\lambda-1)^2, \quad (60)$$

and the first inequality in (60) certainly holds if it holds with the first exponential replaced by the larger second exponential. Thus we arrive at

$$\ln(1 + 3\mu_3) \leq \lambda(\delta(\lambda-1) - b) \quad \text{and} \quad \ln 2 \leq \delta\lambda(\lambda-1)^2 \quad (61)$$

as the final condition needed.

2.3.6 Sufficient conditions for a convergence result

Summing up, with the condition on q_0 still to be imposed we arrive at

$$\lambda\gamma(2-\lambda) \leq \ln(e^{\gamma\lambda} - 1), \quad (62)$$

$$\ln 2 \leq \delta\lambda(\lambda-1)^2, \quad (63)$$

$$(\bar{m} - k)\beta \geq \delta + 2\gamma\lambda, \quad (64)$$

$$(k - m)\beta < \gamma(2 - \lambda) \quad \text{and} \quad (\bar{k} - \bar{m})\beta < \delta(\lambda - 1) \quad (65)$$

as conditions on the parameters that we still have to choose.

The first inequality, (62), is to have the sum of the increments, and thereby the solution, bounded by 1 in the l -norm. Of course it can be replaced by just asking that

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma\lambda^n} \leq 1.$$

The second, (63), was a technical condition to bound the sum of the geometric series in (59) by 2. The third, (64), allows to bound the error term in estimate (45) for q_n by the bound on p_n^2 that has to be established. It involves the choice of sufficiently large \bar{m} and \bar{k} with $\bar{k} - \bar{m} = k - m$.

The last two conditions are strict inequalities that have to be chosen sufficiently strict depending on the constants related to f , to allow for an inductive proof of the desired estimates (43) for p_n and r_n . Thus, given μ_1, μ_2, μ_3 , we need to choose $1 < \lambda < 2$ and $\gamma, \beta, \delta > 0$ such that

$$\lambda(\gamma(2-\lambda) - (m-k)\beta) \geq \ln(\mu_1 + \mu_2); \quad (66)$$

$$\lambda(\delta(\lambda - 1) - (\bar{m} - \bar{k})\beta) \geq \ln(1 + 3\mu_3). \quad (67)$$

After a simultaneous rescaling of γ, β, δ , this is always possible once the first 5 conditions are satisfied. The inequalities in (65) being strict is essential for convergence of Nash' modified Newton scheme.

Of course we still have to formulate the necessary sufficient bound on $q_0 = \|f(0)\|_l$, given the constants in (49) and the choice of parameters above. Recall that

$$\mu_1 + \mu_2 = \underbrace{K_{km}C_{ml}}_C (M_1^{lk} \underbrace{K^{k\bar{m}} A_{\bar{m}\bar{k}}}_A + \frac{1}{2}M_2^{lk}) = C(M_1A + \frac{1}{2}M_2)$$

and

$$\mu_3 = K_{\bar{k}\bar{m}}A_{\bar{m}\bar{k}} = \bar{A},$$

with C, M_1, M_2, A, \bar{A} constants related to f and the smoothing operators. From here on we drop the superscripts from the bounds M_1 and M_2 on the first and second derivative of $f : C^k \rightarrow C^l$.

2.3.7 A sufficient condition on the initial value for convergence

Finally we examine the initial inequalities we need. For p_1 we need, since $u_0 = 0$, that

$$p_1 = \|u_1\|_k = \|S_0\|_{km} \|L(0)\|_{ml} \|f(0)\|_l \leq e^{(k-m)\beta} \underbrace{K_{km}C_{ml}}_C \|f(0)\|_l \leq e^{-\gamma\lambda},$$

while via

$$\|u_1\|_{\bar{k}} \leq \|S(0)\|_{\bar{k}m} \|L(0)\|_{ml} \|f(0)\|_l \leq K_{\bar{k}m} e^{(\bar{k}-m)\beta} C_{ml} \|f(0)\|_l \leq e^{\delta\lambda}$$

we need

$$1 + \underbrace{K_{\bar{k}m}C_{ml}}_{\bar{C}} e^{(\bar{k}-m)\beta} \|f(0)\|_l \leq e^{\delta\lambda}$$

for r_1 . Thus

$$Cq_0 \leq e^{-(k-m)\beta} e^{-\gamma\lambda} \quad \text{and} \quad \bar{C}q_0 \leq e^{-(\bar{k}-m)\beta} (e^{\delta\lambda} - 1) \quad (68)$$

are sufficient conditions on

$$q_0 = \|f(0)\|_l$$

to have a solution of $f(u) = 0$ with $\|u\|_k < 1$, once the parameters have been chosen according to Section 2.3.6 to make the induction steps work in the proof of the desired estimates (43) for p_n and r_n .

2.3.8 The optimal choice of parameters

At this point we compare (66) and (67) to (23). The strict inequalities in (65) are really strict in the sense that the gaps have to be taken sufficiently large large given the explicit constants related to f and $S(t)$. The other two inequalities are not strict. Recalling that $k - m = \bar{k} - \bar{m}$, the coefficient

$$\frac{\bar{m} - k}{k - m} = \frac{\bar{m} - m}{k - m} - 1 = \frac{\bar{m} - m}{\bar{k} - \bar{m}} - 1 = \frac{\bar{k} - k}{k - m} - 1 = N - 1 \quad (69)$$

has to be sufficiently large for the set of allowable b , as defined by (52), to be nonempty. Note that in Nash' strategy to get around the ill-posedness of Newton's method, (32) is the natural definition of N as the ratio of the required increase of smoothness by $\bar{k} - k$ to the loss of smoothness by $m - k$ in $u \rightarrow L(u)f(u)$.

The minimal largeness condition on N is obtained by taking the right hand sides of the inequalities in (65) equal to one another, so as to maximize the allowable upper bound for β . Thus we choose $1 < \lambda < 2$ such that

$$\gamma(2 - \lambda) = \delta(\lambda - 1) \quad \text{whence} \quad \lambda = \frac{2\gamma + \delta}{\gamma + \delta} \quad (70)$$

and (64,65) become

$$\frac{4\gamma^2 + 3\gamma\delta + \delta^2}{\gamma + \delta} \leq (N - 1)b < (N - 1)\frac{\gamma\delta}{\gamma + \delta} \quad (71)$$

for

$$b = (k - m)\beta = (\bar{k} - \bar{m})\beta$$

in terms of γ, δ, N , subject to (62,63) which reduce to

$$e^{\frac{2\gamma+\delta}{\gamma+\delta}\frac{\delta}{\gamma+\delta}} + 1 \leq e^{\gamma\frac{2\gamma+\delta}{\gamma+\delta}} \quad \text{and} \quad \ln 2 \leq \delta \frac{2\gamma + \delta}{\gamma + \delta} \left(\frac{\gamma}{\gamma + \delta} \right)^2. \quad (72)$$

In particular (71) requires

$$N > \frac{4\gamma}{\delta} + 4 + \frac{\delta}{\gamma} \geq 8, \quad (73)$$

the minimum 8 being realised by

$$\delta = 2\gamma. \quad (74)$$

The further choice of parameters depends on the constants which are as indicated in (49), at the end of Section 2.3.6 and in (68):

$$C = K_{km}C_{ml}; \quad \bar{C} = K_{\bar{k}\bar{m}}C_{m\bar{l}}; \quad A = K^{k\bar{m}}A_{\bar{m}\bar{k}}; \quad \bar{A} = K_{\bar{k}\bar{m}}A_{\bar{m}\bar{k}}; \quad (75)$$

$$\mu_1 + \mu_2 = C(M_1 A + \frac{1}{2}M_2); \quad \mu_3 = \bar{A}. \quad (76)$$

We collect these constants in one single constant Θ as

$$\Theta = \frac{3}{4} \max(\ln C + \ln(M_1 A + \frac{1}{2}M_2), \ln(1 + 3\bar{A})) \quad (77)$$

and, depending on N , the remaining parameters γ, b have to be chosen to control these constants via

$$\Theta \leq \frac{2\gamma}{3} - b \quad (78)$$

and

$$\frac{14\gamma}{3} \leq (N-1)b < \frac{2\gamma}{3}(N-1), \quad e^{\frac{8}{9}} + 1 \leq e^{\frac{4\gamma}{3}}, \quad \ln 2 \leq \frac{8\gamma}{27}, \quad (79)$$

which is (71,72) with $\delta = 2\gamma$. The last inequality now implies the one preceding it.

For the initial condition q_0 we arrive via (70) at

$$\begin{aligned} Cq_0 &\leq e^{-\gamma \frac{2\gamma+\delta}{\gamma+\delta}} e^{-b} \quad \text{and} \quad \bar{C}q_0 \leq (e^{\delta \frac{2\gamma+\delta}{\gamma+\delta}} - 1)e^{-(\bar{k}-m)\beta} = \\ &(e^{\delta \frac{2\gamma+\delta}{\gamma+\delta}} - 1)e^{-(\bar{k}-\bar{m})\beta} e^{-(\bar{m}-m)\beta} = (e^{\delta \frac{2\gamma+\delta}{\gamma+\delta}} - 1)e^{-(N+1)b}, \end{aligned}$$

so that with $\delta = 2\gamma$ the conditions on q_0 reduce to

$$Cq_0 \leq e^{-\frac{4\gamma}{3}} e^{-b} \quad \text{and} \quad \bar{C}q_0 \leq (e^{\frac{8\gamma}{3}} - 1)e^{-(N+1)b}. \quad (80)$$

Setting

$$\rho = \frac{2\gamma}{3}$$

we arrive at

$$\Theta \leq \rho - b, \quad 7\rho \leq (N-1)b, \quad \rho \geq \frac{9}{4} \ln 2,$$

$$\ln C + \ln q_0 \leq -2\rho - b, \quad \ln \bar{C} + \ln q_0 \leq \ln 80 - (N+1)b,$$

as sufficient conditions. Note that we have used the lower bound for ρ to relax the bound on $\bar{C}q_0$.

Choosing

$$N > 8 \quad \text{and} \quad \rho = \frac{N-1}{7}b$$

and using the last lower bound for ρ we arrive at

$$b \geq \max\left(\frac{63}{4} \frac{\ln 2}{N-1}, \frac{7\Theta}{N-8}\right) \quad \text{and} \quad q_0 \leq \min\left(\frac{1}{C} e^{-\frac{2N+5}{7N}b}, \frac{80}{\bar{C}} e^{-(N-1)b}\right) \quad (81)$$

as sufficient conditions, to be used as: given Θ choose $N > 8$ and $b = (k-m)\beta$ sufficiently large to make the condition on q_0 follow and thereby obtain a solution of $f(u) = 0$ with $\|u\|_k < 1$.

2.3.9 Continuity

Given the constants related to f and the smoothing operators we constructed a solution in the open unit k -ball, that is, with $\|u\|_k < 1$. We did not prove or state that the solution is unique, but it is well defined as the limit of an explicitly constructed sequence shown to be convergent if $\|f(0)\|_k$ is sufficiently small. The following issue relates to the continuity of the inverse function of f , if it were to exist, since we should naturally also ask for a condition $\|f(0)\|_k$ guaranteeing the constructed solution to have $\|u\|_k \leq \varepsilon$. This only changes the condition on the sum of the increments and leads to

$$\gamma\lambda(2 - \lambda) \leq \ln\left(e^{\gamma\lambda} - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

leading to

$$\Theta \leq \frac{2\gamma}{3} - b, \quad \frac{14\gamma}{3} \leq (N-1)b < \frac{2\gamma}{3}(N-1), \quad e^{\frac{8}{9}} + \frac{1}{\varepsilon} \leq e^{\frac{4\gamma}{3}}, \quad \ln 2 \leq \frac{8\gamma}{27},$$

in stead of (78,79). The conditions on γ rewrite as

$$\gamma \geq \max\left(\frac{3}{4} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon} + e^{\frac{8}{9}}\right), 2^{\frac{27}{8}}\right) \sim \varepsilon^{-\frac{3}{4}}$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$. This forces a larger choice of b and thereby via (80) a smaller (exponentially small in terms of ε in fact) bound on q_0 for the Nash scheme to converge within the ball of k -radius ε , as was to be expected of course. The fact that the limit u is a solution of $f(u) = 0$ is immediate from (45).

Note that for the standard Newton method the constructed solution of $f(u) = 0$ will have $\|u\| < \varepsilon$ if we take equalities in (30) and replace the -1 by $-\frac{1}{\varepsilon}$. The upper bound \bar{P} than has to be replaced by $\bar{P}_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{1+\mu\varepsilon}$ and the condition on q_0 becomes $q_0 \leq C\bar{P}_\varepsilon$.

3 Meer over de Stirling integraal

Dit hoofdstukje bouwt verder op Hoofdstuk 8 in het boekje met Ronald en vult het materiaal van Jan aan. De functie $\Psi : (-1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ met formulevoorschrift

$$\Psi(x) = x - \ln(1 + x) \quad (3.1)$$

definieerde via

$$\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \exp(-n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}}))ds \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}s^2)ds \quad (3.2)$$

de laatste stap in de asymptotische formule voor $n!$ en daarbij maakten we gebruik van twee convergentiestellingen voor het verwisselen van integraal en limiet.

De oorspronkelijke integraal voor $n!$ is na schuiven en schalen dus herleid tot een integraal waar nog steeds n als parameter in zit maar die wel een limiet heeft voor $n \rightarrow \infty$. De verticale schaling gaf een factor $(\frac{n}{e})^n$ en de horizontale schaling de factor \sqrt{n} . Daarna hoeft alleen de limiet nog genomen te worden om de eerste term in de expansie voor $n!$ te krijgen.

De methode van Laplace heeft dat limietbegrip echter niet nodig. Bij functies expliciet gedefinieerd door machtreeksen is het limietbegrip (laat staan epsilons en delta's) niet nodig in de calculus. Benaderingen worden precies gemaakt via expliciete foutafschattingen. Helaas worden wiskundigen zo niet meer opgevoed. Het grote O-symbol heeft het verloren van de Griekse letters.

Ook ondergetekende is wat dit betreft verkeerd opgevoed en dat is te zien aan wat hieronder volgt. Een poging op zoek naar een volledig begrip en implementatie met limieten van de methode van Laplace begint optimistisch maar faalt vervolgens jammerlijk. Het boekje met Ronald, dat wat calculus betreft een alternatief biedt dat geschikter is voor een beta-breed publiek, zal in een volgende versie dit punt nog nadrukkelijker maken. De laatste sectie van dit hoofdstuk behandelt het handwerk van het schatten zo expliciet mogelijk. Zie ook het voorwerk in Hoofdstuk 1 voor de eerste sectie.

De convergentiestellingen die we gebruikten behoren tot het domein van de integraaltheorie van Lebesgue. Op het moment dat je zo'n stelling gebruikt vertrouw je op de stelling en gooi je alle informatie weg die niet expliciet in de voorwaarden van de stelling zit. Voor het begrip is het daarom wellicht instructief om eerst zoveel mogelijk informatie te gebruiken. Daartoe herschrijven we de integraal nog wat verder.

We hadden al gezien dat voor $s < 0$ de integrand in het linkerlid van (3.2) stijgt naar de integrand in het rechterlid (op een steeds groter wordend

integratie-interval), en voor $s > 0$ daalt naar de integrand in het rechterlid. Als we wat beter kijken dan zien we dat de integraal bestaat uit drie stukken, van $s = -\sqrt{n}$ tot $s = 0$, van $s = 0$ tot $s = \sqrt{n}$, en van $s = \sqrt{n}$ tot $s = \infty$. In termen van

$$x = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (3.3)$$

is de laatste onderverdeling ($-1 < x \leq 0$, $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq x < \infty$) natuurlijk omdat voor $x = 1$ de reeksontwikkeling voor

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

nog net wel geldig is¹, maar voor $x > 1$ niet meer.

Voor $x > 1$ schrijven we

$$\ln(1+x) = \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \dots,$$

een ontwikkeling die in het bijzonder geldig is voor $x \rightarrow \infty$!² en wat we hier ook zien is dat er meer is in het leven dan machtreksen alleen. De $\ln(x)$ is niet weg te denken uit het rechterlid, hoe graag je het ook zou willen. Enerzijds zien we hier dat ‘machtreksen’ niet alle functies maken, en anderzijds zijn er ook machtreksen zijn waar niks uitkomt, maar die wel betekenis hebben. De formule voor $n!$ is een mooi maar moeilijk voorbeeld om dit te onderzoeken³, maar een makkelijker voorbeeld is

$$\int_n^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx = e^{-n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} - \frac{6}{n^4} + \frac{24}{n^5} + O\left(\frac{1}{n^6}\right) \right)$$

als $n \rightarrow \infty$, een formule die je met partieel integreren stap voor stap ontdekt, maar die met als rechterlid

$$e^{-n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} - \frac{6}{n^4} + \frac{24}{n^5} + \dots \right)$$

geen betekenis heeft. De functie

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^\infty \frac{1}{s} e^{-s} ds e^{\frac{1}{x}}$$

heeft zo een ‘Taylorreeks’

$$x - x^2 + 2x^3 - 6x^4 + 24x^5 + \dots$$

¹ Wishful thinking: rechterlid bestaat voor $x = 1$, dus zal wel gelijk zijn aan $\ln(2)$.

² Lees: uitroepteken. We zijn nog steeds bezig met $\infty!$ punt

³ En onderzoekend leren daar gaat het om.

die voor geen enkele $x > 0$ convergeert.

Maar goed, die integraal in (3.2) dus. Kunnen we hem herschrijven op zo'n manier dat we meer dan alleen de limiet kunnen nemen zonder de methode van Laplace te gebruiken? Na substitutie van $s = x\sqrt{n} = \lambda x$ ligt het voor de hand hem op te hakken in $|x| < 1$ en $x > 1$. Het stuk met $|x| < 1$ herschrijven we straks tot $0 \leq x < 1$ maar het stuk $x > 1$ bekijken we nu eerst. Dat stuk van de integraal was

$$\int_{\sqrt{n}}^{\infty} \exp(-n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}})) ds \quad (3.4)$$

en die integraal begrijpen we het best door helemaal terug te keren op het pad dat we gegaan zijn. Met

$$\lambda = \sqrt{n}, \quad \Psi(\frac{s}{\lambda}) = \frac{s}{\lambda} - \ln(1 + \frac{s}{\lambda})$$

is het staartstuk (3.4) via (3.3) gelijk aan

$$s_{\lambda} = \int_{\lambda}^{\infty} \exp(-\lambda^2\Psi(\frac{s}{\lambda})) ds = \lambda \int_1^{\infty} \exp(-\lambda^2(x - \ln(1 + x))) dx,$$

hetgeen natuurlijk (op een factor na) correspondeert met het staartstuk

$$S_n = \int_{2n}^{\infty} e^{-x} x^n dx$$

in de oorspronkelijke integraal

$$\begin{aligned} n! &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_0^{\infty} e^{-x+n} \left(\frac{x}{n}\right)^n dx \\ &= \left(\frac{n}{e}\right)^n \underbrace{\int_{-n}^{\infty} e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx}_{s_n} \end{aligned}$$

Via herhaald terug⁴ partieel integreren zien we dat het staartstuk

$$\begin{aligned} \lambda s_{\lambda} &= s_n = \int_n^{\infty} e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx = \\ &= \left[-e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right]_n^{\infty} + \int_n^{\infty} e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} dx = \end{aligned}$$

⁴ Denk aan de afleiding van de integraal voor $n!$ punt

$$\begin{aligned}
& \frac{2^n}{e^n} + \left[-e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \right]_n^\infty + \frac{n-1}{n} \int_n^\infty e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-2} dx = \\
& \frac{2^n}{e^n} + \frac{2^{n-1}}{e^n} + \frac{n-1}{n} \left[-e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-2} \right]_n^\infty + \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \int_n^\infty e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-3} dx = \\
& \frac{2^n}{e^n} + \frac{2^{n-1}}{e^n} + \frac{n-1}{n} \frac{2^{n-2}}{e^n} + \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \frac{2^{n-3}}{e^n} + \dots = \\
& \frac{2^n}{e^n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \right),
\end{aligned}$$

een eindige som is met $n - 1$ termen, die doet denken aan de uitwerking van de rente op rente formule in Hoofdstuk 4 van het boekje met Ronald voor $e_n(a)$ met $a = \frac{1}{2}$, alleen zonder de steeds groter worden faculteiten in de noemers.

Opgave 3.1. Laat zien dat

$$s_n \sim 2 \frac{2^n}{e^n}$$

als $n \rightarrow \infty$, veel en veel kleiner dan de asymptotiek

$$\int_n^\infty e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx \sim \sqrt{2\pi n}$$

die we eerder vonden.

Opgave 3.2. Een natuurlijke vraag is dan: wat is de volgende term in de expansie voor s_n ? Het voorbeeld hierboven met $\int_n^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx$ laat zien wat voor resultaten en methoden je hier kunt verwachten.

Het staartstuk is dus nog een bron van vermaak, maar merk op dat alle termen natuurlijk veel kleiner zijn dan de (volgende) termen in de expansie

$$\int_n^\infty e^{-x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx \sim \sqrt{2\pi n},$$

en het ligt dus voor de hand om eerst deze integraal beter te bekijken. Met $\lambda = \sqrt{n}$ gaat het om

$$S_\lambda = \int_{-\lambda}^\lambda \exp(-\lambda^2 \Psi(\frac{s}{\lambda})) ds = \lambda \int_{-1}^1 \exp(-\lambda^2(x - \ln(1+x))) dx,$$

wat we herschrijven tot een integraal waarin s van $s = 0$ tot $s = \lambda$ loopt, of x van $x = 0$ tot $x = 1$. We gebruiken de reeksontwikkelingen die voor $|x| < 1$ gelden en vinden dat

$$\begin{aligned}
S_\lambda &= \lambda \int_{-1}^1 e^{\lambda^2(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \dots)} dx = \\
&\lambda \int_0^1 e^{\lambda^2(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \dots)} dx + \lambda \int_0^1 e^{\lambda^2(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \dots)} dx = \\
&\lambda \int_0^1 e^{-\lambda^2(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \dots)} \left(e^{\lambda^2(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots)} + e^{-\lambda^2(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots)} \right) dx = \\
2\lambda \int_0^1 \exp\left(-\lambda^2\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \dots\right)\right) \cosh\left(\lambda^2\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots\right)\right) dx = \\
2 \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4\lambda^2} - \frac{s^6}{6\lambda^4} - \dots\right) \cosh\left(\frac{s^3}{3\lambda} + \frac{s^5}{5\lambda^3} + \dots\right) ds = \\
S_\lambda &= \int_0^\lambda 2 \exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right) \exp\left(-s^2 P\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right) \cosh\left(s^2 Q\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right) ds, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

waarin

$$P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \dots \quad \text{en} \quad Q(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{7}x^5 + \dots$$

natuurlijk terug te brengen zijn tot expliciete formules. Het is instructief om dat zelf te doen.

Opgave 3.3. Bereken eerst $P'(x)$ en $Q'(x)$ door de machtreksen voor $P(x)$ en $Q(x)$ term voor term te differentiëren en de zo verkregen meetkundige reeksen te sommeren. Bepaal vervolgens $P(x)$ en $Q(x)$ door de primitieve te nemen. Je moet krijgen dat

$$P(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \ln(1-x^2) \quad \text{en} \quad Q(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

In de integrand van de s -integraal voor S_λ zien we nu drie factoren, één zonder λ , en twee met. Het is weer instructief om deze twee factoren apart en samen te bekijken.

Opgave 3.4. Je ziet natuurlijk meteen aan de machtreeksen dat $P(x)$ en $Q(x)$ monotoon stijgend zijn in x . De monotonie van $s^2P(\frac{s}{\lambda})$ en $s^2Q(\frac{s}{\lambda})$ in λ is ook evident. De \exp met λ in (3.5) is dus stijgend in λ en de \cosh is dalend. Laat zien dat het product van de twee dalend is in λ .

Samen met het staartstuk,

$$s_\lambda = \int_\lambda^\infty \exp\left(-\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3\lambda^2} - \frac{s^4}{4\lambda} + \dots\right) ds,$$

waarin de integrand ook dalend is⁵ hebben we nu dat

$$(\lambda^2)! = \left(\frac{\lambda^2}{e}\right)^{\lambda^2} \lambda (S_\lambda + s_\lambda),$$

waarin

$$S_\lambda \sim \sqrt{2\pi} \quad \text{en} \quad s_\lambda \sim \frac{2^{\lambda^2+1}}{\lambda e^{\lambda^2}}$$

als $\lambda \rightarrow \infty$. Opgeteld zijn S_λ en s_λ te schrijven als één integraal met een integrand die voor $0 \leq s < \lambda$ en $s > \lambda$ apart gedefinieerd is:

$$\begin{aligned} S_\lambda + s_\lambda &= \int_0^\lambda 2 \exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right) \exp\left(-s^2P\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right) \cosh\left(s^2Q\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right) ds \\ &+ \int_\lambda^\infty \exp\left(-n\Psi\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right) ds = \int_0^\infty F(s, \lambda) ds, \end{aligned}$$

met

$$F(s, \lambda) = \begin{cases} 2 \exp\left(-\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4\lambda^2} - \dots\right) \cosh\left(\frac{s^3}{3\lambda} + \frac{s^5}{5\lambda^3} + \dots\right) & \text{als } 0 \leq s < \lambda; \\ \exp\left(-\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3\lambda} - \dots\right) & \text{als } \lambda < s < \infty, \end{cases}$$

Opgave 3.5. Laat zien dat $F(s, \lambda)$ ook dalend is in s .

Jan Wiegerinck noemde een keer⁶ een versie van de monotone convergentiestelling voor Riemann integralen die hij ergens gelezen had en toen viel bij mij een kwartje. Binnen de klasse van wat ik maar even dubbelmonotone⁷ rijen functies noem zijn zulke stellingen net zo makkelijk als de definitie van de Riemann integraal zelf (voor monotone functies). Integraalrekening zo moeilijk mogelijk (Hoofdstuk 7 van het boekje met Ronald) is daarvoor niet nodig.

⁵ Zie Hoofdstuk 8.

⁶ Vrijdagmiddag 2 oktober 2015.

⁷ Monotoon in n en in x .

3.1 Makkelijke convergentiestellingen

In Hoofdstuk 1 (zie ook Hoofdstuk 6 van het boekje met Ronald) hebben we gezien dat monotone functies integreerbaar zijn over begrensde intervallen, hoe lelijk ze ook zijn. We benaderden de integraal van zo'n f over $[a, b]$ simpelweg met

$$h(f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b)), \quad \text{met } h = \frac{b-a}{N}.$$

Hoe groter N , hoe dichter de benadering bij de integraal zit. Zonder de eerste term is dit een ondersom of bovensom, en zonder de laatste term ook, maar dan andersom. Die ene term maakt in de limiet niets uit en die limiet is per definitie $\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)dx$, met in de notatie een dummy variabele die elke naam mag hebben, x , s , whatever⁸.

Wat gebeurt er als we limiet nemen van zulke integralen? De integralen hierboven zijn een mooi voorbeeld. De functies $f_\lambda : s \rightarrow F(s, \lambda)$ gedefinieerd door de formule boven Opgave (3.5) hebben de eigenschap dat ze strict positief en monotoon dalend zijn in $s \in [0, \infty)$ maar ook in $\lambda \in [0, \infty)$. Strict dalend zelfs. En de integraal

$$\int_0^\infty F(s, \lambda) ds$$

bestaat als positief getal voor elke $\lambda > 0$, in ieder geval voor $\lambda = \sqrt{n}$, want het is nog steeds op een factor na de $n!$ waarmee we zijn begonnen. Bovendien weten we wat de puntsgewijze limiet is:

$$F(s, \lambda) \downarrow \exp(-\frac{1}{2}s^2) \quad \text{als } \lambda \uparrow \infty.$$

Wat hebben we nu nodig om te concluderen dat

$$\int_0^\infty F(s, \lambda) ds \downarrow \int_0^\infty \exp(-\frac{1}{2}s^2) ds \quad \text{als } \lambda \uparrow \infty? \quad (3.6)$$

Let op, er staan twee uitspraken (3.6), te weten

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \implies \int_0^\infty F(s, \lambda_1) ds > \int_0^\infty F(s, \lambda_2) ds, \quad (3.7)$$

en

$$\int_0^\infty F(s, \lambda) ds \rightarrow \int_0^\infty \exp(-\frac{1}{2}s^2) ds \quad \text{als } \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

⁸ Maar liever niet a of b , of f .

De eerste is minder vanzelfsprekend dan het lijkt want stiekem gaat het hier over het verschil van twee integralen van monotoon dalende functies en het zijn ook nog eens oneigenlijke integralen, gedefinieerd via bijvoorbeeld een limietovergang als $\int_0^b f(x)dx \rightarrow \int_0^\infty f(x)dx$ als $b \rightarrow \infty$. Bovendien is de notatie een mogelijk bron van verwarring omdat stricte ongelijkheden in limietovergangen soms niet meer strict zijn. Daarom is het praktischer om af te spreken dat we de notatie met de \uparrow in dit jargon opvatten als

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \implies \int_0^\infty F(s, \lambda_1) ds \geq \int_0^\infty F(s, \lambda_2) ds. \quad (3.9)$$

Opgave 3.6. We bekijken nu eerst het geval van eindige intervallen $[a, b]$ en integralen van rijen functies $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$\forall x \in [a, b] \quad 1 \leq n_1 \leq n_2 \implies f_{n_1}(x) \leq f_{n_2}(x),$$

en

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a \leq x_1 \leq x_2 \leq b \implies f_n(x_1) \leq f_n(x_2).$$

Neem aan dat zo'n rij f_n begrensd is. Bewijs rechtstreeks vanuit de definitie met onder- en bovensommen van de integraal voor monotone functies dat

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx,$$

waarbij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Er zijn nog drie versies van deze stelling. Welke drie?

Merk op dat we niets aannamen over het teken van $f_n(x)$. In de volgende opgave doen we dat wel.

Opgave 3.7. We bekijken nu het geval van het interval $[0, \infty)$ en integralen van rijen functies $f_n : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ met

$$\forall x \in [0, \infty) \quad 1 \leq n_1 \leq n_2 \implies f_{n_1}(x) \geq f_{n_2}(x),$$

en

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \implies f_n(x_1) \geq f_n(x_2).$$

Neem aan dat

$$\int_0^\infty f_1(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f_1(x)dx$$

bestaat. Bewijs rechtstreeks vanuit de definities dat dan

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x)dx,$$

waarbij

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Van deze stelling zijn er geen drie versies omdat positieve monotoon stijgende functies niet integreerbaar zijn op $[0, \infty)$ en ook omdat het geval f_n stijgend echt anders is.

Opgave 3.8. Formuleer een bruikbare stelling als in Opgave 3.7 voor rijen functies met

$$\forall x \in [0, \infty) \quad 1 \leq n_1 \leq n_2 \implies f_{n_1}(x) \leq f_{n_2}(x),$$

en

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \implies f_n(x_1) \geq f_n(x_2).$$

Opgave 3.7 is voldoende om te concluderen dat (3.6) juist is maar voor het expliciet maken en bewijzen van de volgende termen in de expansie van $n!$ zijn de convergentiestellingen minder bruikbaar.

3.2 Waarom is de volgende stap zo moeilijk?

De asymptotiek van $n!$ wordt in eerste instantie bepaald door S_λ en de cosh in de integrand is te schrijven als een machtreeks in zijn argument. Er geldt

$$\begin{aligned} \cosh\left(s^2 Q\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right) &= 1 + \frac{1}{2!} \left(s^2 Q\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(s^2 Q\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right)^4 + \dots = \\ &2 + 2A_6(\lambda)s^6 + 2A_8(\lambda)s^8 + 2A_{10}(\lambda)s^{10} + \dots \end{aligned}$$

met coëfficiënten die je via uitwerken stapje voor stapje aanvankelijk eenvoudig vindt, maar je ziet dat je flink moet sorteren als je verder gaat. Omdat het allemaal positieve termen zijn maakt de volgorde van sommeren sowieso niet uit.

Opgave 3.9. Bepaal $A_6(\lambda)$ en $A_8(\lambda)$ en leg uit waarom alle volgende coëfficiënten polynomen in $\frac{1}{\lambda}$ zijn.

De integrand is voor $0 \leq s < \lambda$ dus een som van oneindig veel positieve termen, te weten

$$2 \exp\left(-\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4\lambda^2} - \dots\right) + 2A_6(\lambda)s^6 \exp\left(-\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4\lambda^2} - \dots\right) + \dots,$$

en zou⁹ dus gelijk moeten zijn aan de som van de aparte integralen, te beginnen met twee keer de integraal

$$\int_0^\lambda \exp\left(-s^2\left(\frac{1}{2} + P\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right)\right) ds = \int_0^\lambda \exp\left(-\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4\lambda^2} - \frac{s^6}{6\lambda^4} - \dots\right) ds. \quad (3.10)$$

Dit is dus de eerste integraal om een expansie voor $\lambda \rightarrow \infty$ van op te schrijven, want makkelijker dan deze wordt het niet. Maar of we iets opgeschoten zijn is maar zeer de vraag. Want als we door hebben hoe we de expansie van (3.10) vinden voor $\lambda \rightarrow \infty$ dan rest nog de expansie van

$$\begin{aligned} & \int_0^\lambda 2 \sum_{k=3}^{\infty} A_{3k}(\lambda) s^{3k} \exp\left(-s^2\left(\frac{1}{2} + P\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right)\right) ds \quad (3.11) \\ &= 2 \sum_{k=3}^{\infty} \int_0^\lambda A_{3k}(\lambda) s^{3k} \exp\left(-s^2\left(\frac{1}{2} + P\left(\frac{s}{\lambda}\right)\right)\right) ds, \end{aligned}$$

als we zeker weten dat som en integraal hier zo voor vaste λ verwisseld mogen worden VOOR dat we $\lambda \rightarrow \infty$ bekijken. Merk echter op dat afgezien van de voorfactor $A_{3k}(\lambda)$ alle integralen van de vorm

$$\int_0^\lambda s^{3k} \exp\left(-\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4\lambda^2} - \dots\right) ds$$

zijn en we voor elk van deze integralen weer terug zijn bij af.....

3.3 Expansies in plaats van limieten

We hebben gezien dat

$$n! \left(\frac{e}{n}\right)^n = \int_{-n}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} dx$$

dus¹⁰

$$(n-1)! \left(\frac{e}{n}\right)^n = \int_{-1}^{\infty} e^{n(\ln(1+u)-u)} du = \int_{-1}^{\infty} e^{n\phi(u)} du. \quad (3.12)$$

⁹ Via de stellingen in Hoofdstuk 7.

¹⁰ Zie je nu al meteen dat dit via $x = nu$ gaat?

Met

$$\phi(u) = \ln(1+u) - u, \quad \phi'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 = -u + u^2 - \frac{u^3}{1+u},$$

zien we dat

$$\phi(u) = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \int_0^u \frac{s^3}{1+s} ds = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + R_4(u),$$

met

$$-\frac{u^4}{(1-\delta)} \leq R_4(u) \leq -\frac{u^4}{4(1+\delta)} \quad \text{als } |u| \leq \delta < 1. \quad (3.13)$$

We schrijven

$$R_4(u) = O(u^4) \quad (u \rightarrow 0),$$

maar daarin is de precieze informatie uit (3.13) weggegooid.

Opgave 3.10. Laat zien dat de vierde orde ontwikkeling van $\phi(u)$ gegeven wordt door

$$\phi(u) = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \underbrace{\frac{1}{4}u^4 + R_5(u)}_{R_3(u)}, \quad R_5(u) = O(u^5) \quad (u \rightarrow 0),$$

i.e.

$$\exists M, \delta > 0 \quad |u| \leq \delta \implies |R_5(u)| \leq M|u^5|,$$

en maak deze uitspraak net zo precies als (3.13), zowel voor $R_5(u)$ als $R_3(u)$.

De integrand in (3.12) is met bijvoorbeeld Opgave 3.10 gelijk aan

$$e^{n(-\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + R_5(u))} = e^{-\frac{n}{2}u^2} e^{n(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + R_5(u))}$$

en bij het uitwerken van de tweede factor kunnen we

$$R_3(u) = \frac{1}{3}u^3 + R_4(u) = \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + R_5(u) \quad (3.14)$$

schrijven, al naar gelang hoeveel termen we nodig hebben. Het gelijkteken is echter misleidend als¹¹ we schrijven

$$\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + O(u^5) = \frac{1}{3}u^3 + O(u^4) = O(u^3) \quad (u \rightarrow 0).$$

¹¹ Dat doen we dus we vaak...

Met de O -symbolen kunnen we de expansie echt alleen maar gebruiken voor $u \rightarrow 0$ en hoe lager de orde, hoe minder informatie.

Evenzo wordt bijvoorbeeld

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \rho_3(t), \quad \rho_3(t) = O(t^3) \quad (t \rightarrow 0)$$

verbasterd tot

$$1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^3) = 1 + t + O(t^2) = 1 + O(t) = O(1),$$

voor $t \rightarrow 0$. Je gebruikt wat je nodig hebt voor wat je doet. Met

$$t = nR_3(u)$$

gaat het er om hoe de integraal

$$J_n = \int_{-1}^{\infty} e^{n\phi(u)} du = \int_{-1}^{\infty} e^{\frac{n}{2}u^2} \underbrace{e^{nR_3(u)}}_{e^t} du \quad (3.15)$$

van n afhangt¹².

De eerste term in de expansie van (3.15) hebben we al uitgerekend met de limiet in (3.2). Als we behalve een foutafschatting ook een volgende term willen krijgen dan is alleen $R_3(u)$ natuurlijk niet voldoende. En omdat we aan het eind van Sectie 3.2 vastliepen met integralen waar alleen maar even machten in voorkomen, moet de volgende term die relevant is wel van een even macht komen. We kiezen daarom voor het rechterlid in (3.14) en schrijven

$$e^{nR_3(u)} = 1 + n\left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + R_5(u)\right) + \frac{n^2}{2}\left(\frac{1}{3}u^3 + R_4(u)\right)^2 + \rho_3(nR_3(u)),$$

waarin we precies weten wat R_3, R_4, R_5 zijn. Uitwerken geeft dat met de eerste factor erbij de integrand gelijk is aan

$$e^{\frac{n}{2}u^2} e^{nR_3(u)} = e^{\frac{n}{2}u^2} \left(1 + \frac{n}{3}u^3 - \frac{n}{4}u^4 + TROEP\right)$$

met uitgewerkte maar nog niet gesorteerde

$$TROEP = n \underbrace{R_5(u)}_{O(u^5)} + n^2 \left(\frac{1}{18}u^6 + \underbrace{\frac{1}{3}u^3 R_4(u)}_{O(u^7)} + \underbrace{\frac{1}{2}R_4(u)^2}_{O(u^8)=O(u^7)} \right) + \underbrace{\rho_3(nR_3(u))}_{O((nR_3(u))^3=O(n^3u^9))},$$

¹² Misschien ten overvloede, de integraal J_n hangt alleen van n af.

waarin de laatste term

$$\rho_3(nR_3(u)) = O(n^3u^9) \neq O(n^3)O(u^9)$$

de toelichting behoeft dat de schrijfwijze de toevoeging moet hebben:

$$\text{als } nR_3(u) \rightarrow 0, \text{ hetgeen zeker het geval is als } nu^3 \rightarrow 0.$$

De integrand is dus te schrijven als

$$e^{-\frac{n}{2}u^2} \left(1 + \frac{n}{3}u^3 - \frac{n}{4}u^4 + nO(u^5) + \frac{1}{18}n^2u^6 + n^2O(u^7) + O(n^3u^9) \right) \quad (3.16)$$

maar de ordening naar n en u loopt door elkaar. Het is ook niet zo duidelijk of je termen met O achteraan moet zetten voor het begrip. De precieze vorm van de expansie is ook weggegooid met het vervangen van R_3, R_4, R_5, ρ_3 door O -tjes. Geen van de termen kan worden weggelaten en de expansie is geldig voor

$$u \rightarrow 0 \text{ met tegelijkertijd } nu^3 \rightarrow 0,$$

hetgeen $n \rightarrow \infty$ toelaat met

$$n = o\left(\frac{1}{u^3}\right) \text{ als } u \rightarrow 0,$$

of

$$u = o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right) \text{ als } n \rightarrow \infty.$$

Om de integraal van (3.16) uit te werken schalen we natuurlijk weer zo dat de voorfactor de normale verdeling geeft. Met

$$u = \frac{x}{\sqrt{n}} = xn^{-\frac{1}{2}}$$

krijgen we dat $J_n =$

$$n^{-\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(1 + \frac{x^3}{3n^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^4}{4n} + nO\left(\frac{x^5}{n^{\frac{5}{2}}}\right) + \frac{x^6}{18n} + n^2O\left(\frac{x^7}{n^{\frac{7}{2}}}\right) + O\left(\frac{x^9}{n^{\frac{9}{2}}}\right) \right) dx$$

net nog op een regel past, maar helaas geen betekenis heeft omdat de expansie van de geschaalde integrand alleen goed is voor

$$x = n^{\frac{1}{2}}u = n^{\frac{1}{2}}o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right) = o(n^{\frac{1}{6}}) \text{ als } n \rightarrow \infty,$$

en dat komt niet eens in de buurt van $x = -\sqrt{n}$, laat staan van $x = \infty$. Wel zien we dat de term met 18 in de noemer uit de troep gevist moet worden en dat vervolgens voor $\delta_n \rightarrow 0$ de integraal van $-\delta_n$ tot δ_n gelijk is aan

$$J_n^{loc} = \int_{-\delta_n}^{\delta_n} e^{n\phi(u)} du = n^{-\frac{1}{2}} \int_{-\delta_n\sqrt{n}}^{\delta_n\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(1 + \frac{x^3}{3n^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^4}{4n} + \frac{x^6}{18n} \right) dx$$

$$+ n^{-\frac{1}{2}} \int_{-\delta_n\sqrt{n}}^{\delta_n\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(nO\left(\frac{x^5}{n^{\frac{5}{2}}}\right) + n^2O\left(\frac{x^7}{n^{\frac{7}{2}}}\right) + O\left(\frac{x^9}{n^{\frac{9}{2}}}\right) \right) dx \quad (3.17)$$

$$= n^{-\frac{1}{2}} \int_{-\delta_n\sqrt{n}}^{\delta_n\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(1 - \frac{x^4}{4n} + \frac{x^6}{18n} \right) dx + R_n^{loc}.$$

$$= n^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(1 - \frac{x^4}{4n} + \frac{x^6}{18n} \right) dx}_{\sqrt{2\pi}(1+\frac{1}{12n})} \quad (3.18)$$

$$- \underbrace{2n^{-\frac{1}{2}} \int_{\delta_n\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(1 - \frac{x^4}{4n} + \frac{x^6}{18n} \right) dx}_{S_n^{loc}} + R_n^{loc},$$

waarin R_n^{loc} wordt gegeven door (3.17) en afgeschat kan worden met

$$|R_n^{loc}| \leq Mn^{-\frac{1}{2}} \int_{-\delta_n\sqrt{n}}^{\delta_n\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(\frac{|x|^5}{n^{\frac{5}{2}}} + \frac{|x|^7}{n^{\frac{7}{2}}} + \frac{|x|^9}{n^{\frac{9}{2}}} \right) dx$$

$$\leq \frac{2M}{n^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} (x^5 + x^7 + x^9) dx = \frac{\tilde{M}}{n^2}$$

met een \tilde{M} die je zo precies kunt bepalen als je hem niet nodig hebt.

Belangrijker is dat hier duidelijk is dat het nog wat handiger had gekund. De derdemachten van x geven geen bijdrage, maar ook de vijfdemachten niet. Dus met een extra term in de expansie vis je uit de troep ook nog x^5 en x^7 termen die meedoen met de juiste orde in de u -expansie maar die toch nul geven. Zo schuift de orde in de fout nog eentje op en verschijnt tegelijkertijd een volgende term in (3.18).

Opgave 3.11. Berekenen die volgende term. Hint: hij komt van de u^6 in de eerste orde term van de exp. Is dit de enige term die erbijkomt? Hint: kijk nog even hoe de term met 18 boven uit de troep gevist werd.

Wat nog rest is het afschatten van het staartstuk S_n^{loc} en de twee staartstukken in de originele integraal, te weten

$$J_n^{links} = \int_{-1}^{-\delta_n} e^{n\phi(u)} du \quad \text{en} \quad J_n^{rechts} = \int_{\delta_n}^{\infty} e^{n\phi(u)} du,$$

en die moeten natuurlijk veel kleiner zijn, maar waarschijnlijk weer groter dan wat we in Opgave 3.2 voor niks hebben uitgerekend.

Opgave 3.12. Laat van deze drie staartstukken zien dat ze veel kleiner zijn dan de termen in (3.18) als $n \rightarrow \infty$ en bewijs dat inderdaad

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

als $n \rightarrow \infty$. Kies daartoe $\delta_n \rightarrow 0$ met $\delta_n \sqrt{n} \rightarrow \infty$.

4 Terug naar het platte vlak

In dit hoofdstuk verzamelen we op informele wijze onze basiskennis over het platte vlak, met in ons achterhoofd de gedachte dat we later niet in twee maar in meer dimensies willen denken en werken: $3, 4, \dots$, tot en met aftelbaar oneindig. Bij het schrijven van dit hoofdstuk zijn we er niet van uitgegaan dat de lezer hoofdstuk 1 al gelezen heeft en we beginnen in taal die hopelijk ook aansluit bij de schoolles, en nemen we soms ook dat perspectief als het gaat om wat we met inproducten van vectoren formuleren. Wie voor de klas staat of gaat staan heeft daar wellicht profijt van. De meeste opgaven zijn bedoeld als onderdeel van de uitleg. Convexe en gesloten deelverzamelingen, Cauchyrijen, en projecties zijn de belangrijkste begrippen die langskomen.

4.1 Punten en vectoren in het platte vlak

Opgave 4.1. Neem pen en blanco papier en teken een xy -vlak¹³.

Zo, nu kunnen we aan de slag. Met en in een plat vlak waarin elk punt P gegeven is door 2 reële coördinaten, zeg $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$. De assen labelen we met x en y . Het punt P is dus het punt met $x = a$ en $y = b$. We nummeren in deze notatie dus met het alfabet en zolang we in het vlak zitten is dat geen probleem. Ook in de 3-dimensionale ruimte kunnen we met 3 assen en $x = a, y = b, z = c$ prima uit de voeten maar vanaf dimensie 4 is het alfabet op als we beginnen bij x .

Op enig moment zullen we dus liever vanaf het begin met $x_1 = a_1$ en $x_2 = a_2$ willen werken. Een punt P gegeven door $x_1 = a_1$ en $x_2 = a_2$ kunnen we dan gewoon x noemen, soms dik gedrukt als \mathbf{x} , hetgeen met pen en papier weer vervelend is. Daarom ook vaak de notatie $\underline{x} = (x_1, x_2)$ voor een willekeurig, onbekend of variabel punt in het vlak, en vaak $\underline{a} = (a_1, a_2)$ voor een gegeven (vast) punt¹⁴ in het vlak. De assen zijn dan de x_1 -as en de x_2 -as.

De punten $(1, 0)$ en $(0, 1)$ markeren we door er een 1 bij te zetten waarmee de schaalverdeling op de assen vast ligt. Beide punten zien we als liggend op afstand 1 tot de oorsprong $(0, 0)$, zonder fysische eenheid¹⁵. Het punt $(1, 1)$ heeft met Pythagoras dan afstand $\sqrt{2}$ tot $(0, 0)$.

¹³ Suggestie: x -as horizontaal naar rechts, y -as verticaal omhoog.

¹⁴ Dat we ook weer kunnen variëren natuurlijk.

¹⁵In de schoolpraktijk wordt vaak 1 cm als afstand tussen $(0, 0)$ en $(1, 0)$ aangehouden.

Van een punt kun je een vector maken. In de tekening door een lijntje te trekken van de oorsprong $O = (0, 0)$ naar een punt $\underline{a} = (a_1, a_2)$ met een pijlkopje in \underline{a} . Het pijltje associëren we met de vector

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

en de lengte van het pijltje is met Pythagoras weer gelijk aan $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Correspondentie met de tekening of niet, de (Euclidische) norm van \underline{a} en \vec{a} is bij afspraak gelijk aan en genoteerd als

$$|\underline{a}| = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

en voldoet aan de driehoeksongelijkheid. Er geldt voor alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ dat

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|,$$

het derde axioma voor de eigenschappen waar normen aan moeten voldoen.

Opgave 4.2. De eerste twee norm-axioma's zijn $|\vec{a}| > 0$ als \vec{a} niet de nulvector is en $|t\vec{a}| = |t||\vec{a}|$ voor $t \in \mathbb{R}$ en $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Verifieer dat de Euclidische norm aan de norm-axioma's voldoet.

We *denken* aan \vec{a} als een pijltje dat we op kunnen schuiven¹⁶ zodat de staart in een ander punt komt te liggen. Bijvoorbeeld in het punt \underline{b} , zodat de kop van het pijltje in het punt

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

komt te liggen, waarbij we dan de vector

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

hebben. De vector \vec{a} ligt dan met zijn staart in \underline{b} en met zijn kop in \underline{c} . Dat kan natuurlijk ook andersom, met de staart van \vec{b} in \underline{a} en de kop van \vec{b} in \underline{c} . De afstand tussen \underline{c} en \underline{b} is dus de lengte van het pijltje $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$: de norm van de vector $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$.

We switchen regelmatig heen en weer tussen rij- en kolomnotatie en tussen punten en vectoren, al naar gelang het zo uitkomt. Een in de tijd bewegend

¹⁶ In het *platte* vlak geen probleem maar google op Gauss en kromming.

punt \underline{x} heeft op elk moment een snelheid \vec{v} die we ons vanwege de fysische interpretatie het liefst met de staart in \underline{x} voorstellen. En als het handig is dan zien we \underline{x} ook als \vec{x} . Bijvoorbeeld in

$$\vec{x} = \vec{s} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + tv_1 \\ s_2 + tv_2 \end{pmatrix},$$

de formule¹⁷ voor een punt dat beweegt over een rechte lijn l door het punt \underline{s} met snelheidsvector \vec{v} .

Opgave 4.3. De lijn l door $\underline{s} \in \mathbb{R}^2$ met richtingsvector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ kan ook gegeven worden door een vergelijking van de vorm

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c$$

voor de punten $\underline{x} = (x_1, x_2)$ op de lijn l . Voor welke lijnen kan dat met $c = 1$? Bepaal voor die lijnen de bijbehorende a_1 en a_2 .

Naast de vectoroptelling is in de vectorvoorstelling van een rechte lijn met steunvector \vec{s} en richtingsvector \vec{v} ook de scalaire vermenigvuldiging gebruikt. Voor iedere $t \in \mathbb{R}$ en $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ is $t\vec{v}$ gedefinieerd zoals je zou verwachten. De formule voor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ gaat via $\vec{c} = \vec{x}$, $\vec{a} = \vec{s}$ en $\vec{b} = t\vec{v}$ over in de vectorvoorstelling van de lijn, waarin \vec{x} de met t variërende vector is bij het punt \underline{x} .

In de formules mogen alle punten in het platte vlak voorkomen. En alle punten dat zijn alle punten van de vorm $\underline{x} = (x_1, x_2)$ met $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Het platte vlak past daarmee weliswaar niet in ons universum maar gelukkig wel in ons hoofd, waar het de naam \mathbb{R}^2 gekregen heeft, met de 2 van 2-dimensionaal.

Ieder element uit de verzameling \mathbb{R}^2 wordt gegeven door een geordend reëel getallenpaar dat we aan kunnen geven met de letters die we willen, en met de notatie die we willen. Nummerend met het alfabet of met indices 1 en 2, achter elkaar of boven elkaar als

$$v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$$

geschreven, of eventueel ook als

$$v_1 + iv_2,$$

¹⁷ Vectorvoorstelling van een lijn.

als maar duidelijk is dat v_1 de eerste, en v_2 de twee coördinaat is. De laatste twee vormen suggereren alvast de correspondentie

$$1 \leftrightarrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i \leftrightarrow \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en de representatie van de complexe getallen \mathbb{C} als het (complexe) vlak \mathbb{R}^2 met een wat rare notatie¹⁸.

4.2 Kortste afstanden

De kortste verbinding tussen twee punten in het vlak is de rechte lijn. In welk vlak? In het vlak dat we in ons hoofd hebben via de introductie van \mathbb{R}^2 in Sectie 4.1. Welke punten? Iedere \underline{a} en \underline{b} in die \mathbb{R}^2 . Welke rechte lijn? Geen rechte lijn, maar het lijnstuk

$$\{t\underline{a} + (1-t)\underline{b} : 0 \leq t \leq 1\},$$

een stuk van de rechte lijn door steunvector \underline{b} met richtingsvector $\vec{a} - \vec{b}$.

Er zijn geen andere paden van \underline{b} naar \underline{a} met een kortere afgelegde weg, een in het dagelijks leven op het Groningse platte land geboren uitspraak over *alle* paden van \underline{b} naar \underline{a} , waarin twee begrippen voorkomen die wiskundig gezien hier nog niet eens gedefinieerd¹⁹ zijn. Maar die kortste afgelegde weg moet natuurlijk wel gelijk zijn aan wat we de afstand tussen \underline{a} en \underline{b} noemen. Kortom, kortste afstanden gaan hier niet nog even niet over de weg van \underline{a} naar \underline{b} . Er is maar een afstand tussen \underline{a} en \underline{b} en dat is

$$d(\underline{a}, \underline{b}) = |\underline{a} - \underline{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = |\vec{a} - \vec{b}|,$$

de lengte van de vector $\vec{a} - \vec{b}$.

Over de kortste afstand tussen \underline{a} en \underline{b} hoeven we het dus in het platte vlak niet te hebben. Daar is een formule voor die we als vanzelfsprekend zien. En die formule definieert een afstandsbelegrip dat voldoet aan axioma's: de axioma's van een metriek²⁰.

Maar wat is de kortste afstand tussen een niet-lege deelverzameling A van \mathbb{R}^2 en een punt \underline{b} ? Met andere woorden, als de functie $f_b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt door

$$f_b(\underline{x}) = d(\underline{x}, \underline{b}) = |\vec{x} - \vec{b}|,$$

¹⁸ En extra algebra gebaseerd op de afspraak dat i keer i is $i^2 = -1$.

¹⁹ Om welke twee begrippen gaat het?

²⁰ Wat is een metriek? Zoek op.

wat kun je dan zeggen over de waardenverzameling

$$W = \{f_{\underline{b}}(\underline{x}) : \underline{x} \in A\}?$$

Heeft deze deelverzameling van \mathbb{R} een kleinste element?

Wel, de waardenverzameling W is niet leeg en naar beneden begrensd door 0. Op grond van de axioma's (of eigenschappen) van de reële getallen heeft W dus een grootste ondergrens²¹ d die we vanaf nu de afstand van \underline{b} to A noemen:

$$d = d(\underline{b}, A) = \inf W = \inf_{\underline{x} \in A} d(\underline{x}, \underline{b}).$$

Dus ook als de kleinste waarde niet bestaat, of als we dat niet a priori weten, is zo de afstand d tussen \underline{b} en A wiskundig gedefinieerd. Of d nu wordt aangenomen door $d(\underline{x}, \underline{b})$ voor een \underline{x} in W of niet.

De wiskundige definitie vertelt ons dat voor iedere²² positieve gehele n er een $\underline{x}_n \in A$ is met

$$d(\underline{b}, A) \leq d(\underline{b}, \underline{x}_n) < d(\underline{b}, A) + \frac{1}{n},$$

want iedere n waarvoor zo'n \underline{x} niet bestaat zou een grotere ondergrens voor W zijn. Of je de wiskundige de afstand d ook echt kan vinden als horende bij een $\underline{a} \in A$ via $d = d(\underline{a}, \underline{b})$ is maar de vraag natuurlijk.

Een strategie om aan de kleinste waarde d te komen is om de rij \underline{x}_n convergent te kiezen. Als dat kan dan heeft de rij een limiet \underline{a} . Als vervolgens blijkt dat \underline{a} in A ligt volgt hopelijk ook dat $d(\underline{b}, A) = d(\underline{b}, \underline{a})$. En blijft vervolgens nog de vraag of het punt in A waarin de kleinste afstand aangenomen wordt uniek is. Het gaat dus om twee zaken. Het vinden van convergerende minimaliserende rijen in A en daarna de vraag om daar altijd dezelfde limiet bij hoort.

Maar soms kun je d meteen uitrekenen. Hoewel?

Opgave 4.4. Wat is de kortste afstand tussen $\underline{a} = (1, 1)$ en de lijn met vergelijking $3x_1 + x_2 = 1$?

Opgave 4.5. De kortste afstand tussen $\underline{a} = (1, 1)$ en de deelverzameling $E \subset \mathbb{R}^2$ gegeven door $9x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ is niet zo eenvoudig uit te rekenen. Probeer het maar. Maar is het punt in E met minimale afstand tot \underline{a} uniek denk je? Waarom? Maak een plaatje.

²¹ Ander woord: infimum.

²² We mijden hier de $\epsilon > 0$, for all practical purposes is $\frac{1}{n}$ net zo goed.

Opgave 4.6. Reflecteer²³ op wat het begrip loodrecht met het begrip afstand te maken heeft.

Opgave 4.7. Teken voor verschillende (reële) waarden van a en b in je xy -vlak de vectoren²⁴

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

en reflecteer op het begrip loodrecht. Kun je andere paren vectoren in het vlak bedenken waarop het begrip loodrecht van toepassing is?

Opgave 4.8. Een deelverzameling $K \subset \mathbb{R}^2$ heet convex als met elk tweetal punten \underline{a} en \underline{b} in K ook het lijnstuk

$$\{t\underline{a} + (1-t)\underline{b} : 0 \leq t \leq 1\}$$

dat \underline{a} en \underline{b} verbindt in K ligt. Kunnen er twee punten in K zijn die $f_O(\underline{x}) = |\underline{x}|$ minimaliseren op K ? Maak een plaatje dat je helpt om de vraag te beantwoorden.

4.3 Vlakke meetkunde met het inproduct

Bij het maken van deze opgaven heb je ongetwijfeld rechte hoeken en driehoeken getekend en de (Stelling van) Pythagoras weer gebruikt, en wellicht al het inwendige product van vectoren gebruikt. Het *standaard inwendige produkt* in \mathbb{R}^2 wordt gedefinieerd door

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + cy,$$

hetgeen voor elke keuze van de 2-vectoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

een reëel getal definieert, dat vastgelegd wordt door de vier reële getallen a, b, x, y . De opgaven hebben je overtuigd dat twee vectoren in \mathbb{R}^2 loodrecht op elkaar staan precies dan als hun inwendig produkt nul is.

²³ Minimum op de rand, denk ook aan multiplicatoren van Lagrange.

²⁴ Al of niet met de staart in de oorsprong O .

Loodrecht is hier een begrip dat je buiten de wiskunde kende en nu in de wiskunde van betekenis hebt voorzien, en wel in het abstracte platte vlak in je hoofd, en de meetkunde die je daarin hebt leren bedrijven, al of niet gebruikmakend van twee onderling loodrecht voorgestelde coördinaatassen, gemarkeerd met 0 en 1.

De afstand van $(0, 0)$ tot $\underline{a} = (a_1, a_2)$ is met Pythagoras gelijk aan $\sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$, de wortel uit het inwendige produkt van de bijbehorende vector \vec{a} met zichzelf. Zo hebben we de begrippen afstand en loodrecht die we uit de dagelijkse werkelijkheid kennen in verband gebracht met het standaard inwendig produkt in \mathbb{R}^2 , ons model voor het platte vlak. Dit verband zit stevig tussen onze oren, wat het verder ook moge betekenen. Wiskundige uitspraken doen we vanaf nu in termen van \mathbb{R}^2 met zijn vectoroptelling en het standaard inwendige produkt.

Opgave 4.9. Bewijs dat $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$, met andere woorden, dat

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Hint: breng alles naar de rechterkant, doe de algebra en herken het kwadraat. Doe vervolgens ook

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2),$$

en overtuig jezelf ervan dat (even wat combinatoriek)

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2$$

de som is van $\frac{n(n-1)}{2}$ kwadraten.

Opgave 4.10. Teken twee vectoren \vec{a} en \vec{b} waarvoor $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ en schuif een van de twee vectoren op en wel zó dat de kop van deze ene vector in de staart van de andere vector ligt (en een rechthoekige driehoek ontstaat). Werk $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ uit tot de bekende formule voor $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ en $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Opgave 4.11. Leid met Opgave 4.9 en Opgave 4.10 nog een keer af dat de norm aan de driehoeksongelijkheid $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ voldoet, ook voor $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$.

Opgave 4.12. Teken twee vectoren \vec{a} en \vec{b} waarvoor niet per se $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ en schuif een van de twee op zó dat de kop van deze ene in de staart van de ander vector ligt (en een driehoek ontstaat). Werk $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ en doe hetzelfde voor \vec{a} en $-\vec{b}$. Beide uitdrukkingen bevatten $\vec{a} \cdot \vec{b}$ maar na sommatie vallen deze kruistermen weg. Formuleer wat bekend staat als de parallelogramwet.

Opgave 4.13. Een elegant bewijs van de Stelling van Pythagoras zonder vectoren maar met bijvoorbeeld vierkanten heeft iedereen wel eens gezien natuurlijk. Zie bijvoorbeeld

<http://www.few.vu.nl/~jhulshof/RVB.mov>

Is er ook zo'n elegant bewijs²⁵ van de parallelogramwet?

4.4 Projecteren op convexe verzamelingen

Vlakke en Euclidische meetkunde betreffen tamelijk expliciete zaken. Denk aan lijnen, vlakken etc. Teken een lijn in het vlak en doe wat. Het plaatje is altijd hetzelfde. Projecteren op een lijn, iedereen kan het. Bij projecteren op convexe verzamelingen gaat over een veel grotere klasse van verzamelingen maar met de algebra van het inproduct is goed te begrijpen hoe dat gaat. Die algebra is niet beperkt tot het platte vlak. Maar nu eerst even wel.

Opgave 4.14. Als $\underline{b} \in \mathbb{R}^2$ en $K \subset \mathbb{R}^2$ niet leeg en convex is, dan heeft iedere minimaliserende rij $\underline{x}_n \in K$ met $d(\underline{x}_n, \underline{b}) \rightarrow d$ de eigenschap dat

$$d(\underline{x}_n, \underline{x}_m) \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad m, n \rightarrow \infty$$

en dat kun je algemeen bewijzen. Neem zonder beperking der algemeenheid $\underline{b} = O$ en $d(\underline{x}_n, O)$ dalend, en laat dit zien door voor $m > n$ met de parallelogramwet $|\underline{x}_n - \underline{x}_m|^2$ af te schatten op $\epsilon_n = 4(d + \frac{1}{n})^2 - d^2$. Hint: je hebt alleen nodig dat het midden van elk lijnstuk tussen twee punten in K weer in K zit ($t = \frac{1}{2}$ in de definitie).

Onze meetkundige kennis is in de opgaven hierboven in uitspraken over vectoren en inwendige produkten vertaald, met als opmerkelijk conclusie het resultaat in Opgave 4.14 dat zegt dat de minimaliserende rij een Cauchyrij²⁶

²⁵ Vast wel, maar ik heb het zelf nog nooit gezien.

²⁶ Wat was dat ook al weer?

is. Net als in \mathbb{R} zijn in \mathbb{R}^2 Cauchyrijen convergent. De limiet \underline{a} , waarvoor geldt dat

$$d(\underline{x}_n, \underline{a}) \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad n \rightarrow \infty,$$

hoeft natuurlijk niet per se in A te liggen, maar doet dat wel als A gesloten is.

Opgave 4.15. $A \subset \mathbb{R}^2$ heet gesloten als iedere convergente rij x_n in A ook zijn limiet in A heeft. Als A niet gesloten is dan zijn er dus convergente rijen in A waarvan de limiet niet in A ligt. Bewijs dat de afsluiting \overline{A} , dat is A verenigd met al die limieten, altijd gesloten is.

Opgave 4.16. Voor iedere niet-lege convexe $K \subset \mathbb{R}^2$ en voor iedere $b \in \mathbb{R}^2$ bestaat er een $a \in \overline{K}$ met $d(b, \underline{a}) = d(\underline{b}, K)$. Bewijs dit met de voorafgaande resultaten en laat zien dat \underline{a} uniek is. Concludeer dat $\underline{b} \rightarrow \underline{a}$ een afbeelding $P_K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{K}$ definieert. Laat ook zien $(P_K(\underline{a}) - \underline{a}) \cdot (\underline{x} - P_K(\underline{a})) \geq 0$ voor alle $\underline{x} \in K$ en maak een plaatje om de betekenis van deze uitspraak meetkundig te begrijpen.

Opgave 4.17. Laat zien dat de afbeelding P_K een contractie is in de zin dat voor alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$ geldt dat $d(P_K(\underline{x}), P_K(\underline{y})) \leq d(\underline{x}, \underline{y})$. Hint: deze is lastig, spelen met het inproduct, te leuk om voor te zeggen. Let op, voor variabele punten in K heb je nu een andere letter nodig.

Opgave 4.18. Pas de vorige opgave toe op het geval $K = l$, met l de lijn door \underline{s} met richtingsvector \vec{v} en geef een formule voor P_l . Hint: waarom wordt de ongelijkheid in Opgave 4.17 nu een gelijkheid voor alle $\underline{x} \in l$? Gebruik dit en reken $P_l(\underline{b})$ gewoon uit voor gegeven \underline{b} .

Opgave 4.19. Neem in de vorige opgave $\underline{s} = O$ en laat zien dat de nulverzameling

$$N(P_l) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : P_l(\underline{x}) = \underline{0}\}$$

van P_l weer een lijn is, zeg lijn m , en dat m en l loodrecht op elkaar staan in dat vlak in je hoofd.

4.5 Andere inproducten en bilineaire vormen

Het standaard inwendig produkt van

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

is een voorbeeld van een bilineaire functie, ook wel bilineaire vorm genoemd. Zulke *bilineaire vormen* $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zijn altijd te schrijven als

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$

dit vanwege wat je in de volgende opgave nu uitwerkt.

Opgave 4.20. Laat zien dat als $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ voldoet aan

$$B(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = B(\vec{x}_1, \vec{y}) + B(\vec{x}_2, \vec{y});$$

$$B(\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = B(\vec{x}, \vec{y}_1) + B(\vec{x}, \vec{y}_2);$$

$$B(t\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{x}, t\vec{y}) = tB(\vec{x}, \vec{y}),$$

voor alle $t \in \mathbb{R}$ en $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathbb{R}^2$, dat B gegeven wordt door²⁷

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}x_iy_j,$$

en dat $B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{y}, \vec{x})$ voor alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ gelijkwaardig is met $a_{ij} = a_{ji}$ voor alle $i, j \in \{1, 2\}$.

Kortom, $B(\vec{x}, \vec{y})$ is van de vorm

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = A\vec{x} \cdot \vec{y},$$

waarbij $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding is gegeven is door

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

en de symmetrie van B equivalent is met de symmetrie van de lineaire afbeelding A en de bijbehorende matrix (a_{ij}) :

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{y}, \vec{x}) \Leftrightarrow A\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot A\vec{y} \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

²⁷ Let op: x_i en y_j zijn nu componenten van \vec{x} en \vec{y} .

Een symmetrische bilineaire vorm definieert een inwendig produkt als de bijbehorende kwadratische vorm positief definitief is, dat wil zeggen

$$A\vec{x} \cdot \vec{x} > 0 \quad \text{als} \quad \vec{x} \neq \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

en in dat geval heet A zelf ook positief²⁸ definitief²⁹. Voorlopig zullen we in de notatie geen onderscheid maken tussen A als lineaire afbeelding en A als matrix. We schrijven dus ook

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

en spreken over ook positief definitieve (symmetrische) matrices.

Kwadratische vormen zijn homogene polynomen van graad twee in de variabelen. Een kwadratische vorm $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt dus gegeven door

$$Q(\vec{x}) = Q(\underline{x}) = Q(x_1, x_2) = q_{11}x_1^2 + q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2 = \sum_{1 \leq i \leq j=2}^2 q_{ij}x_ix_j$$

en is altijd te schrijven als $Q(x_1, x_2) = B(\vec{x}, \vec{x}) = A\vec{x} \cdot \vec{x}$, met

$$a_{ii} = q_{ii} \quad \text{en} \quad a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}q_{ij} \quad (i < j).$$

Omdat

$$m = \min_{|\underline{x}| \leq 1} Q(\underline{x}) = \min_{|\underline{x}|=1} Q(\underline{x}) \quad \text{en} \quad M = \max_{|\underline{x}| \leq 1} Q(\underline{x}) = \max_{|\underline{x}|=1} Q(\underline{x})$$

bestaan als (op de rand aangenomen³⁰) minimum en maximum van Q op de gesloten disk gegeven door

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1,$$

definieert een symmetrische A dus een (niet-standaard) inwendig produkt als $m > 0$.

Opgave 4.21. Neem aan dat $0 \leq m \leq M$. Laat zien dat

$$m \vec{x} \cdot \vec{x} \leq A\vec{x} \cdot \vec{x} \leq M \vec{x} \cdot \vec{x}$$

voor alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Wat kun je zeggen zonder de aanname op de tekens van m en M ?

²⁸ Echt iets anders dan $a_{ij} > 0$ voor $i, j = 1, 2$.

²⁹ Impliciet is A dus symmetrisch verondersteld.

³⁰ Mini- en maximaliserende rijen $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots$ kunnen convergent gekozen worden.

De rand van de disk is een cirkel die kunnen we parametriseren met

$$x_1 = \cos(t) \quad \text{en} \quad x_2 = \sin(t),$$

waarin de functies \cos en \sin uniek gedefinieerd zijn door bijvoorbeeld³¹

$$\cos t = \cos(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$$

$$\sin t = \sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots,$$

met³² $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$.

Opgave 4.22. Bereken het maximum M en het minimum m van de functie $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$q(t) = Q(\cos t, \sin t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Hint, herschrijf als $q(t) = a \cos^2 t + b \cos t \sin t + c \sin^2 t$, neem eerst $b \neq 0$ en herleid $q'(t) = 0$ tot een vierkantsvergelijking voor $\tan t$. Verifieer dat in de *minimizers*

$$A \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

geldt, en in de *maximizers*

$$A \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Deze opgave laat zien dat m en M de twee reële eigenwaarden zijn van de symmetrische matrix A . In het geval dat A positief definit is nummeren we deze eigenwaarden $\lambda_1 = M \geq \lambda_2 = m > 0$. Je ziet³³ dat de bijbehorende eigenvectoren loodrecht staan. In het geval dat $M = m$ zijn alle vectoren eigenvectoren en kunnen ze loodrecht gekozen worden, \vec{e}_1 en \vec{e}_2 bijvoorbeeld.

³¹ Zie [HM, hoofdstuk 10].

³² De twee differentiaalvergelijkingen en beginvoorwaarden definiëren \sin en \cos .

³³ Misschien niet meteen.

Opgave 4.23. Bewijs direct, dus zonder cosinussen en sinussen, dat voor elke symmetrische (hier nog twee bij twee) matrix A geldt dat het maximum μ van de *absolute waarde* van de bijbehorende kwadratische vorm Q op $|\vec{x}| = 1$ wordt aangenomen in een eigenvector, en dat iedere *maximizer* een eigenvector is, bij μ of bij $-\mu$ (of bij allebei in bijzonder gevallen).

Opgave 4.24. De eigenvector in Opgave 4.23 bij $\lambda_1 = \pm\mu$ noemen we \vec{v}_1 . De lijn door O met richtingsvector \vec{v}_1 noemen we l_1 . Pas nu Opgave 4.19 toe³⁴ op $l = l_1$ en noem $m = l_2$. Laat zien dat A deze l_2 op zichzelf afbeeldt.

4.6 Om te onthouden

Symmetrische twee bij twee matrices komen met paren onderling loodrechte lijnen die we, zo we willen, als nieuwe coördinaatassen kunnen gebruiken. Met in die lijnen (eigen)vectoren \vec{v}_1 en \vec{v}_2 die onderling loodrecht staan en lengte 1 hebben,

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 1 \quad \text{en} \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0,$$

bij eigenwaarden λ_1 en λ_2 ,

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 \quad \text{en} \quad A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2.$$

In het bijzondere geval dat A een diagonaalmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

is, krijgen we als eigenvectoren de standaardbasisvectoren \vec{e}_1 en \vec{e}_2 .

Het andere belangrijke resultaat is dat we op (gesloten) convexe verzamelingen kunnen projecteren, Opgave 4.17. Niet benadrukt nog is wat de essentie was van het bewijs dat je in Opgave 4.23 hebt gegeven. Waar het resultaat in Opgave 4.17 via Opgave 4.14 en een convergente minimaliserende rij tot stand kwam, is in Opgave 4.23 een maximaliserende rij *niet* automatisch convergent en moet eerst een convergente deelrij genomen worden. En iedere begrensde rij in \mathbb{R}^2 heeft zo'n convergente deelrij. Alles wat we hier behandeld hebben gaat dus door voor \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^4 , \dots , met een kleine aanpassing bij Opgave 4.19. Pas in \mathbb{R}^∞ gaat het een beetje anders.

³⁴ De notaties \underline{x} en \vec{x} liepen al door elkaar heen, liever $x = \underline{x} = \vec{x}$ vanaf nu?

4.7 Poolcoördinaten in het (complexe) vlak

We besluiten dit hoofdstuk met een korte herhaling van \mathbb{R}^2 gezien als de verzameling van complexe getallen \mathbb{C} . Het punt $(1, 0)$ zien we als het getal 1 en het punt $(0, 1)$ als het imaginaire getal i . We introduceren \mathbb{C} door de correspondentie

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \leftrightarrow \quad z = x + yi = x + iy \in \mathbb{C}$$

met in \mathbb{C} de gebruikelijke rekenoperaties: de complexe optelling en de complexe vermenigvuldiging. Die krijg je door te rekenen met uitdrukkingen als $z = x + iy$ en $c = a + bi$ alsof het eerstegraads polynomen in i zijn, met de afspraak dat $i^2 = -1$. De rollen van i en $-i$ zijn daarbij uitwisselbaar want ook $(-i)^2 = 1$. De coëfficiënten x, y, a, b zijn zelf reëel, en x en a heten de reële delen van respectievelijk z en c . De *imaginaire* delen zijn y en b en zijn net zo reëel als de reële delen.

We gaan ervan uit dat de lezer vertrouwd³⁵ is met deze complexe getallen en het waarom van de notatie en correspondentie

$$(\cos(t), \sin(t)) \quad \leftrightarrow \quad \exp(it) = \cos(t) + i \sin(t)$$

voor het over de eenheidscirkel bewegende punt $(\cos(t), \sin(t))$.

Die eenheidscirkel wordt gegeven door $|z| = 1$, waarbij de absolute waarde van $z = x + iy$ per definitie gelijk is aan

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

meestal r genoemd. Voor elke $r > 0$ doorloopt het punt

$$(r \cos(t), r \sin(t)) \quad \leftrightarrow \quad r \exp(it) = r(\cos(t) + i \sin(t))$$

een cirkel met straal r in het al of niet complexe vlak, en de (tijd) t is *per definitie* de hoek in radialen die de met dit punt corresponderende vector maakt met de positieve x -as. Ieder punt in het vlak wordt zo gegeven door een r en een t , en elke 2-vector is van de vorm

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \text{het } \textit{scalaire} \text{ product van } r \text{ en } \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Behalve de oorsprong heeft ieder punt \underline{x} en iedere vector \vec{x} een unieke r en een unieke t , waarbij je moet afspreken dat de t -waarden module 2π worden gerekend. En 2π per definitie het reële getal is waarvoor deze laatste karakterisatie correct is. In (tijd) $t = 2\pi$ ga je de cirkel rond.

³⁵ Zie anders eventueel [HM, hoofdstuk 11].

Met behulp van deze *poolcoördinaten* volgt voor

$$\vec{c} = p \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{x} = r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

dat

$$\vec{c} \cdot \vec{x} = pr(\cos(s)\cos(t) + \sin(s)\sin(t)) = pr \cos(s - t),$$

het product van de twee lengten en de cosinus van wat de *ingesloten hoek* wordt genoemd. Is die hoek gelijk aan $\pm \frac{\pi}{2}$ dan is het inproduct nul en staan de vectoren loodrecht op elkaar.

Opgave 4.25. De complexe afbeelding $z \rightarrow \frac{1}{z}$ laat zich in rechthoekige coördinaten x, y en in poolcoördinaten r en t bestuderen. Verifieer dat deze afbeelding de samenstelling is van $z \rightarrow \bar{z}$, een spiegeling in de x -as, en een andere afbeelding die spiegeling in de eenheidscirkel wordt genoemd, gegeven door $r \rightarrow \frac{1}{r}$. Construeer gegeven een punt binnen de cirkel zijn spiegelbeeld in de cirkel met behulp van een bij het gegeven punt geschikt gekozen raaklijn aan de cirkel.

Opgave 4.26. Merk op dat de uitkomst voor het *inwendig* product te vergelijken is met het gewone *complexe* product van de met de vectoren \vec{c} en \vec{x} corresponderende c en z . Verifieer dat voor

$$c = p \exp(is) \quad \text{en} \quad z = r \exp(it)$$

geldt dat

$$cz = p(\cos(s) + i \sin(s))r(\cos(t) + i \sin(t)) = pr(\cos(s + t) + i \sin(s + t)),$$

en bepaal het reële deel van $c\bar{z}$, waarin $\bar{z} = x - iy$ de complex geconjugeerde is van $z = x + iy$.

5 De Hilbertruimte in

Met $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots$ kunnen we algebraïsch precies hetzelfde doen als wat we in Hoofdstuk 4 deden met \mathbb{R}^2 . Typografisch wat lastig omdat we 2-vectoren gewoon met het LaTeX-commando (backslash) *choose* voor binomiaalcoëfficiënten maakten en nu echt *array* nodig hebben, maar verder geen wezenlijk verschil. In \mathbb{R}^3 bijvoorbeeld met

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz \quad \text{of} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 a_i x_i,$$

in \mathbb{R}^{42} met

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = \sum_{i=1}^{42} a_i x_i \quad \text{voor} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{42} \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{42} \end{pmatrix},$$

en tenslotte in \mathbb{R}^∞ , met

$$a \cdot x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \quad \text{voor} \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

waarbij we de pijltjes boven a en x in \vec{a} en \vec{x} maar hebben weggelaten. Punten of vectoren, we maken het onderscheid in de notatie tussen x als \vec{x} en \underline{x} steeds vaker alleen als het echt nodig is¹.

De laatste uitdrukking definieert $a \cdot x$ soms wel en soms niet, want zonder restricties op $a, x \in \mathbb{R}^\infty$ kan het met

$$a \cdot x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x_i$$

alle kanten op. En het wordt nog spannender als we de $i \in \mathbb{N}$ in vervangen door bijvoorbeeld $t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ of² $t \in [-\pi, \pi]$. In zulke gevallen is ook \sum aan vervanging toe. Overaftelbare³ sommen gaan niet werken en sommeren moet hier dus wel integreren worden, wat anders? Met de notatie

¹ Als we niet meer recht kunnen praten wat krom is en rechte pijltjes niet passen.

² Denk ook aan de poolcoördinaten in het platte vlak.

³ Waarom niet?

$t \rightarrow a_t = a(t)$ en $t \rightarrow x_t = x(t)$ voor functies $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt een voor de hand liggend inwendig produkt van de functies a en x nu gedefinieerd met behulp van de formule

$$a \cdot x = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)x(t)dt,$$

waarin *alle* $a(t)$ en $x(t)$ waarden gelijkwaardig voorkomen maar, paradoxaal wellicht, individueel geen invloed hebben op de uitkomst van de integraal die $a \cdot x$ definieert. Ook met die uitkomst kan het, bijvoorbeeld voor continue functies, alle kanten op, net als met $a \cdot x$ voor $a, x \in \mathbb{R}^\infty$.

Voor 2π -periodieke continue functies heeft deze integraalformule geen betekenis maar de formule

$$a \cdot x = \int_{-\pi}^{\pi} a(t)x(t)dt$$

vaak wel, het standaard inwendig produkt waarmee we werken in het geval van 2π -periodieke functies a en x , (goed) gedefinieerd voor continue functies als gewone Riemann integraal⁴.

Opgave 5.1. Voor $n = 1, 2, 3, \dots$ zijn de 2π -periodieke functies c_n en s_n gedefinieerd door $c_n(t) = \cos(nt)$ en $s_n(t) = \sin(nt)$. Bereken nog eens $c_n \cdot c_m$, $c_n \cdot s_m$, $s_n \cdot s_m$, voor $m, n = 1, 2, 3, \dots$.

Je ziet het niet meteen, maar al deze cosinussen en sinussen staan “loodrecht” op elkaar, en ze hebben ook allemaal dezelfde “lengte”, de wortel uit het inprodukt van de functie met zichzelf.

Opgave 5.2. Er is nog een functie die loodrecht staat op al deze cosinussen en sinussen. Welke functie?

5.1 Standaardassenkruizen

Tja⁵, wat zijn dat? In het vlak waar we mee begonnen zijn wordt het assenkruis gevormd door 2 lijnen: de x -as door de oorsprong O en het punt $(1, 0)$ en de y -as door O en het punt $(0, 1)$, of wellicht liever de x_1 -as en de x_2 -as.

⁴ En later via een subtiel proces voor nog veel meer functies.

⁵ Een vraag voor de woensdagmiddag wellicht.

Een punt dat zich over zo'n as beweegt heeft een lange weg te gaan en kwam van ver. De x -as wordt geparametriseerd door $(x, y) = (t, 0)$, en de y -as door $(x, y) = (0, t)$, met bijbehorende snelheidsvectoren⁶

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die samen de standaardbasis van \mathbb{R}^2 als vectorruimte vormen.

Evenzo bestaat in \mathbb{R}^3 het standaardassenkruis uit 3 lijnen, de x - of x_1 -as, de y - of x_2 -as, en de z - of x_3 -as, met bijbehorende vectoren⁷

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die samen de standaardbasis van \mathbb{R}^3 genoemd worden. Drie vectoren met lengte 1 die onderling loodrecht staan.

En, we zouden het bijna vergeten, standaard of niet, een basis vormen ze. Iedere vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ is vanzelfsprekend uniek te schrijven als

$$\vec{v} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Precies zoals in \mathbb{R}^2 waar iedere \vec{v} van de vorm

$$\vec{v} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

is, met een unieke correspondentie

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad (v_1, v_2) = \underline{v},$$

waarin links en rechts v_1 en v_2 *hetzelfde* zijn.

De vectoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hebben lengte 1 en staan onderling loodrecht. In termen van het *standaard inwendig produkt*:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1 \quad \text{en} \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0.$$

⁶ In de wiskundeles meestal richtingsvectoren genoemd.

⁷ Snelheidsvectoren, richtingsvectoren, het zijn maar woorden.

Met de gebruikelijke rekenregels volgt nu dat

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_1 = (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_1 = v_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = v_1;$$

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_2 = (v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 = v_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + v_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = v_2,$$

en

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 = \sum_{i=1}^2 (\vec{v} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i$$

voor vectoren $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. In iedere \mathbb{R}^n met n positief en geheel gaat het hetzelfde,

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n (\vec{v} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i,$$

en pas in \mathbb{R}^∞ wordt het wat lastiger.

5.2 Symmetrische matrices

Net als in de twee-dimensionale context heeft iedere symmetrische $n \times n$ matrix

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

(een basis van) eigenvectoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ met

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j, \end{cases}$$

bij (reële) eigenwaarden

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n,$$

die gemaakt worden door Opgave 4.23 herhaald toe te passen. Dit geeft in ieder stap zowel een nieuwe λ_k als een nieuwe \vec{v}_k via

$$|\lambda_k| = \max_{\substack{\vec{v} \cdot \vec{v} \leq 1 \\ \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = \dots = \vec{v} \cdot \vec{v}_{k-1} = 0}} |A\vec{v} \cdot \vec{v}|,$$

waarbij $k = 1, \dots, n$.

Details van deze constructie komen aan de orde in de context van de standaard aftelbaar oneindig-dimensionale Hilbertruimte die we in \mathbb{R}^∞ maken. *Daarvóór* komen we *voor het eerst* over abstracte Hilbertruimten⁸ H te praten die we zo snel mogelijk gelijk⁹ praten aan het standaardvoorbeeld

⁸ Inproduct ruimten waarin Cauchy rijtjes convergent zijn.

⁹ Lees: isomorf.

in \mathbb{R}^∞ , onder de aanname van separabiliteit van H : het bestaan van een rij x_1, x_2, x_3, \dots in H die als limieten van zijn convergente deelrijen *alle* elementen in H heeft.

Kortom, in termen van de dimensie van onze ruimten maken we in één keer de stap van $n = 2$ en concreet (\mathbb{R}^2) naar $n = \infty$ en abstract (niet concreet). Let wel, dat kan *alleen* voor ruimten met een inwendig produkt.

5.3 Reële Hilbertruimten

Een reële Hilbertruimte H is een vectorruimte over \mathbb{R} die naast de vectoroptelling en scalaire vemenigvuldiging ook een inwendig produkt

$$(x, y) \in H \times H \rightarrow (x, y)_H = x \cdot y$$

heeft, met de standaardrekenregels, en de eigenschap dat alle Cauchyrijtjes (dat zijn rijtjes waarvoor

$$(x_n - x_m) \cdot (x_n - x_m) \rightarrow 0$$

als $m, n \rightarrow \infty$) in H ook convergent zijn met limiet $\bar{x} \in H$ (i.e.

$$(x_n - \bar{x}) \cdot (x_n - \bar{x}) \rightarrow 0$$

als $n \rightarrow \infty$).

De norm wordt gegeven door $|x|_H^2 = (x, x)_H = x \cdot x$ en de onderlinge afstand van bijvoorbeeld x_n en x_m is

$$d_H(x_n, x_m) = |x_n - x_m|_H = \sqrt{(x_n - x_m) \cdot (x_n - x_m)},$$

waarin $d_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ de *metriek* is op H . De subscript H laten we voortaan weg, tenzij dat verwarring geeft.

Opgave 5.3. Formuleer en bewijs de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz¹⁰ (inclusief de karakterisatie van het geval van gelijkheid), bewijs de driehoeksongelijkheid, en formuleer en bewijs nog een keer Pythagoras en de parallellogramwet. Hint: overschrijven uit willekeurig Lineaire Algebra boek. Formuleer ook de axioma's voor metrische ruimten en bewijs deze voor d .

¹⁰ De ongelijkheid in Opgave 4.9.

Opgave 5.4. Laat H een Hilbertruimte zijn, $K \subset H$ een gesloten convexe verzameling, en $a \in H$. Bewijs dat er een unieke $p \in K$ is die de afstand $d(a, K)$ van a tot K realiseert middels

$$|p - a| = \inf_{x \in K} |x - a| = d(a, K)$$

en laat zien dat $(p - a) \cdot (x - p) \geq 0$ voor alle $x \in K$. Hint: geef eerst de definities van gesloten, convex en afstand, en gebruik daarna de parallellogramwet, net zoals in Opgave 4.14. Bewijs ook dat de afbeelding $P_K : H \rightarrow K$ gedefinieerd door $P_K(a) = p$ de eigenschap heeft dat $|P_K(a) - P_K(b)| \leq |a - b|$ voor alle $a, b \in H$.

Opgave 5.5. Laat H een Hilbertruimte zijn, $L \subset H$ een gesloten lineaire deelruimte. Bewijs dat $P_L : H \rightarrow L$ lineair is en dat

$$M = N(P_L) = \{x \in H : P_L(x) = 0\} = L^\perp = \{x \in H : x \cdot y = 0 \forall y \in L\}^{11},$$

de kern of nulruimte van P_L , ook een gesloten lineaire deelruimte is met $M \cap L = \{0\}$. Laat zien dat $M + L = H$ en concludeer dat $L \oplus M = H$: iedere $x \in H$ is uniek te schrijven als $x = p + q$ met $p \in L$ en $q \in M$.

De uitspraak over het bestaan van p in Opgave 5.4 is natuurlijk equivalent met de uitspraak over het bestaan van het minimum van

$$(x - a) \cdot (x - a) = x \cdot x - 2a \cdot x + a \cdot a,$$

en daarmee dus equivalent met een uitspraak over minima op K van wat je parabolische functies zou kunnen noemen:

Opgave 5.6. Laat H een Hilbertruimte zijn, $K \subset H$ een gesloten convexe verzameling. Dan neemt voor iedere $b \in H$ de kwadratische uitdrukking¹²

$$|x|^2 + b \cdot x$$

op K in precies één punt een minimum¹³ aan.

¹¹ $x \cdot y = 0$ voor alle y in L wordt kort geschreven als: $x \cdot y = 0 \forall y \in L$.

¹² Het kwadratische stuk kan algemener, het lineaire stuk niet!

¹³ K is i.h.a. niet begrens, laat staan rijcompact (iets met convergente deelrijen).

Let op de eerste voetnoot in Opgave 5.6. Het standaardinproduct in \mathbb{R}^2 geeft via

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + cy = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{matrix notatie}}$$

een representatie van de lineaire functie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow ax + cy = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{matrix notatie}}$$

en omgekeerd is iedere lineaire¹⁴ functie van deze vorm. De correspondentie

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

is evident bijtief en lineair. Links staat een 2-vector, rechts een 1 bij 2 matrix waarmee een lineaire afbeelding van \mathbb{R}^2 naar \mathbb{R} gemaakt wordt.

In een willekeurige Hilbertruimte is er a priori geen matrixnotatie voor het maken van lineaire afbeeldingen. Welke lineaire afbeeldingen hebben we op zo'n Hilbertruimte H als van H verder niets gegeven is, behalve dan dat het een H is? Wel, in ieder geval is voor elke $y \in H$ de afbeelding $\phi_y : H \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door¹⁵

$$x \rightarrow y \cdot x = \phi_y(x) = \phi_y x = \langle \phi_y, x \rangle .$$

Kijk even goed, in de 1 na laatste notatie hebben we de haken weggelaten, zoals vaker bij lineaire afbeeldingen¹⁶, en in de laatste staan ϕ_y en x zo te zien *gelijkwaardig* tussen strange brackets¹⁷, waarbij net als in $y \cdot x$ de rollen van de tegenspelers verwisseld kunnen worden. Dualiteit heet dat met een mooi woord.

Voorlopig gebruiken we de notatie die het meest op de schoolnotatie lijkt. Een functie f van x , in dit geval ϕ_y , maak je expliciet¹⁸ via $f(x)$, in dit geval $\phi_y(x) = y \cdot x$. Dat lijkt expliciet maar is het natuurlijk niet echt als we niet zeggen wat H is. Expliciet of niet, uit de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz volgt nu dat

$$|\phi_y(x)| = |y \cdot x| \leq |y||x|$$

¹⁴ De constante functie is NIET lineair, tenzij de constante nul is.

¹⁵ Meteen maar met drie notaties.

¹⁶ en bij cos, sin, tan, ...

¹⁷ Tussen bra en ket, zoals fysici soms zeggen.

¹⁸ Of niet, en dat veroorzaakt vaak veel verwarring.

en dus ook, *vanwege de lineairiteit*, dat

$$|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| = |y \cdot (x_1 - x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \text{met} \quad L = |y|.$$

Een reëelwaardige functie f op een vectorruimte met een norm, die voldoet aan

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

voor alle x_1 en x_2 in die genormeerde vectorruimte, heet *Lipschitz continu*. Een mooi begrip, dat differentiaalrekening noch epsilons en delta's nodig heeft.

Opgave 5.7. Als zo'n (niet per se lineaire) functie een L heeft dan heeft hij ook een kleinste L . Bewijs dit. Hint: denk aan grootste ondergrenzen (infima).

Die kleinste L is dus voor alle Lipschitz continue functies op onze genormeerde ruimte (laten we die X noemen) gedefinieerd. Daar hoort een zijstapje bij:

Opgave 5.8. Voor elke genormeerde ruimte X vormen de Lipschitz continue functies $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ een vectorruimte $Lip(X)$ met de vectorbewerkingen gedefinieerd door

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{en} \quad (tf)(x) = tf(x).$$

Voor elke f is de kleinste L zoals boven per definitie een soort norm van f , die we noteren met $L = [f]_{Lip}$. Waarom definieert

$$f \rightarrow [f]_{Lip}$$

geen norm op $Lip(X)$? En waarom wel op

$$Lip_0(X) = \{f \in Lip(X) : f(0) = 0\}?$$

Bewijs dat met deze norm elke Cauchyrij $f_n \in Lip_0(X)$ convergent is. Hint: bewijs dit eerst voor $X = \mathbb{R}$ en schrijf je bewijs nog een keer over voor $X = X$.

Klein probleempje is natuurlijk dat er misschien maar weinig van die al of niet lineaire Lipschitz functies op X zijn, als je verder niks van X weet. Maar op H is dat probleempje er niet. Elke $y \in H$ geeft je een ϕ_y in $Lip_0(H)$ die nog lineair is ook, en je ziet meteen wat de kleinste L is: op zijn hoogst $|y|$ en kleiner kan niet, vul maar $x = y$ in. Dat betekent dat we met $y \rightarrow \phi_y$ een afbeelding

$$\Phi := H \rightarrow Lip_0(H)$$

hebben, en het beeld van Φ is bevat in H^* , de (genormeerde) ruimte van Lipschitz continue *lineaire* functies $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, en Φ is zelf weer lineair¹⁹:

¹⁹ Nu maar eens de axioma's noemen en verifiëren.

Opgave 5.9. Verifieer dat $\Phi : H \rightarrow H^*$ voldoet aan

$$\Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2) \quad \text{en} \quad \Phi(tx) = t\Phi(x)$$

voor alle $t \in \mathbb{R}$ en $x, x_1, x_2 \in H$, en dat $[\Phi(x)]_{Lip} = |x|$.

De vraag nu is of Φ surjectief is: is elke $f \in H^*$ van de vorm ϕ_y ? Bekijk daartoe²⁰

$$N_f = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

Opgave 5.10. Bewijs dat $N_f \subset H$ een gesloten lineaire deelruimte is.

In het bijzonder bestaat nu dankzij Opgave 5.5 de projectie

$$P_{N_f} : H \rightarrow N,$$

ook weer een lineaire afbeelding, en in de volgende opgave gaat het om de nulruimte van deze projectie op de nulruimte van f .

Opgave 5.11. Bewijs dat $M = N(P_{N_f})$ een gesloten lineaire deelruimte is die gegeven wordt door $M = \{te : t \in \mathbb{R}\}$ waarin $e \in N_f^\perp$ met $|e| = 1$. Laat zien dat f een veelvoud is van ϕ_e : $f(x) = f(e)e \cdot x$.

Opgave 5.12. Leg uit waarom met het resultaat in Opgave 5.11 de afbeelding $\Phi : H \rightarrow H^*$ een lineaire isometrie is.

Lineaire isometriën zijn de mooiste continue afbeeldingen die er bestaan. De inverse van Φ wordt de Riesz representatie van H^* genoemd, en via deze isometrie erft H^* ook het inwendig produkt van H : de reële Hilbertruimten H en H^* zijn als Hilbertruimten hetzelfde, al is het in concrete situaties niet altijd even handig om hier de nadruk op te leggen.

Het resultaat geldt zonder enige verdere restrictie op H en het is ook niet nodig om aan te nemen dat H separabel is. We noteren de inverse van Φ als

$$R_H,$$

met de ruimte H als subscript aan $R = \Phi^{-1}$ gehangen. Het domein van R_H is zo de deelruimte

$$H^* \subsetneq Lip_0(H).$$

²⁰ We schrijven nu N_f i.p.v. $N(f)$, t.b.v. het onderscheid tussen f en P_L .

Opgave 5.13. Gebruik Opgave 5.4 om aan te tonen dat er plenty niet-lineaire functies in $Lip_0(H)$ zijn.

5.4 De standaard Hilbertruimte

De wat informeel geïntroduceerde ruimte \mathbb{R}^∞ bestaat uit alle functies $f, x, a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, hoe je ze ook wil noemen²¹. We kunnen deze functies zien als kolomvectoren \vec{f} met daarin de waarden van f , al protesteert LaTeX daarbij zo te zien een beetje. Helemaal op dezelfde hoogte lukt typografisch niet,

$$f = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \vec{f},$$

en ook voor functies $f, x, a : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ oogt

$$f = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \vec{f}$$

niet echt lekker.

Wiskundig gezien praten we de facto over functies $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij A hier een *discrete* verzameling is, en de verzameling van deze functies wordt ook wel genoteerd als \mathbb{R}^A . Als je $n \in \mathbb{N}$ gedefinieerd hebt als een wat rare verzameling, via²²

$$1 = \{\emptyset\}, 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, 3 = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$$

of zoiets, dan is de notatie voor \mathbb{R}^A consistent²³ met die voor \mathbb{R}^n .

Elke $f \in \mathbb{R}^A$ heeft als Pythagoras norm

$$|f| = \sqrt{\sum_{a \in A} |f(a)|^2},$$

hetgeen voor $A = \{1, 2, 3\}$ overeenkomt met de Euclidische lengte

$$\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$$

²¹ Het zijn er meer dan 26.

²² Ik schuif wat ik naïef in Halmos las wellicht eentje op, boekje niet bij de hand.

²³ Let wel, $0 = \emptyset$ doet niet mee.

van de vector \vec{f} hierboven.

Het ligt voor de hand om \mathbb{R}^A en \mathbb{R}^B als dezelfde ruimte te zien als er een bijectie bestaat tussen A en B . Voor eindige verzamelingen A is de Pythagoras norm natuurlijk op heel \mathbb{R}^A gedefinieerd, maar als A oneindig veel elementen bevat²⁴ dan is dat niet meer het geval.

Opgave 5.14. Stel dat A overaftelbaar is en $f \in \mathbb{R}^A$ eindige Pythagorasnorm heeft. Bewijs dat de verzameling

$$\{a \in A : f(a) \neq 0\}$$

aftelbaar is en ga na dat het in de somnotatie dan niet nodig is de volgorde van sommeren vast te leggen²⁵.

In het licht van deze opgave beperken we de aandacht voor oneindige A tot aftelbare A en die zijn allemaal bijectief met \mathbb{N} . We kunnen de functiewaarden van elementen $x, f, \dots \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dan op wat voor manier dan ook weer (niet allemaal) opschrijven, genummerd als $f(n)$ of x_n met $n = 1, 2, \dots$, in bijvoorbeeld een kolomvector of rijvector met puntjes.

Onze standaard aftelbaar oneindig-dimensionale Hilbertruimte is nu

$$l^{(2)} = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\},$$

spreek uit: (*kleine*) *el twee*. Er is ook een *grote el twee*, namelijk de verzameling van kwadratisch integreerbare meetbare functies op een maatruimte, bijvoorbeeld²⁶ \mathbb{R} , voorzien van de gewone (Lebesque) lengtemaat²⁷. Die *el twee* wordt genoteerd met

$$L^2(\mathbb{R}),$$

strict genomen geen functieruimte maar een ruimte van equivalentieklassen. We zeggen dat een (meetbare) functie f en een andere (meetbare) functie g equivalent zijn, notatie $f \sim g$, als de verzameling waarop ze verschillen (uitwendige) maat NUL heeft, en met f bedoelen we stiekem $[f]$, de equivalentieklasse van alle g waarvoor $g \sim f$.

De inwendige produkten zijn, respectievelijk,

$$x \cdot y = (x, y)_{l^{(2)}} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \text{en} \quad f \cdot g = (f, g)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx,$$

²⁴ We zeggen dan gemakshalve dat A oneindig is.

²⁵ Dit heet onvoorwaardelijke convergentie.

²⁶ Ander voorbeeld: \mathbb{R} modulo 2π , de facto de eenheidscirkel in \mathbb{R}^2 .

²⁷ Zie "Wiskunde in je vingers" van H&M voor snelle intro maattheorie.

waarbij de integraalnotatie bij (niet ieders) voorkeur hetzelfde gekozen wordt als die van de Riemann integraal.

Opgave 5.15. Bewijs dat $l^{(2)}$ volledig is. Dat wil zeggen, laat zien dat Cauchy rijtjes in $l^{(2)}$ convergent zijn met limiet in $l^{(2)}$.

Als we \mathbb{N} zien als maatruimte voorzien van de telmaat dan wordt kleine l weer groot. En met recht, want iedere separabele Hilbertruimte H is met $l^{(2)}$ te identificeren²⁸. Hoe gaat dat? Wel, neem een rijtje a_1, a_2, a_2, \dots in H dat als limietpunten alle elementen van H heeft. Zet

$$e_1 = \frac{1}{|a_1|} a_1$$

als $a_1 \neq 0$ maar gooi a_1 weg als $a_1 = 0$. Hernummer in dat geval de rij en herhaal deze stap, net zolang²⁹ tot je een $a_1 \neq 0$ hebt. Stel vervolgens

$$y_2 = a_2 - (a_2, e_1)e_1 \quad \text{en} \quad e_2 = \frac{1}{|y_2|} y_2$$

als $y_2 \neq 0$, maar gooi a_2 weg als $y_2 = 0$ en hernummer in dat geval weer de rij. Herhaal deze stap, net zolang tot je een $y_2 \neq 0$ hebt en daarmee ook een e_2 . Stel vervolgens

$$y_3 = a_3 - (a_3, e_2)e_2 - (a_3, e_1)e_1 \quad \text{en} \quad e_3 = \frac{1}{|y_3|} y_3,$$

als $y_3 \neq 0$, maar \dots , enzovoorts. Dit produceert een rij e_1, e_2, e_3, \dots van vectoren waarvoor

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij},$$

en deze vectoren spannen een lineaire deelruimte op in H .

Opgave 5.16. Bewijs dat

$$H = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\},$$

waarmee H dus met de standaard Hilbertruimte $l^{(2)}$ geïdentificeerd kan worden.

²⁸ Indien gewenst.

²⁹ Nou ja, als er geen dubbelen in de rij voorkomen dan...

5.5 Riesz of geen Riesz?

In alle Hilbertruimten is de Riesz representatiestelling van toepassing, en dus in het bijzonder ook in $l^{(2)}$.

Opgave 5.17. Geef een rechtstreeks bewijs voor de representatiestelling van Riesz voor het geval dat $H = l^{(2)}$.

Onze standaard Hilbertruimte is $H = l^{(2)} = L^2(\mathbb{N})$ met op \mathbb{N} de telmaat, maar er zijn ook andere maten op \mathbb{N} . Ieder rijtje positieve getallen³⁰

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

(hernummerd om het rijtje monotoon te maken) definieert een maat op \mathbb{N} door aan het n -de element van \mathbb{N} maat λ_n toe te kennen. De bijbehorende integraal van het produkt van twee functies $x, y : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ is dan

$$((x, y)) = (x, y)_V = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n y_n,$$

een inwendig produkt op een deelruimte V van onze standaard $H = l^{(2)}$, die niet gesloten is in H in het geval dat $\lambda_n \rightarrow \infty$.

Opgave 5.18. Waarom niet? Laat zien dat V met $((\cdot, \cdot))$ een Hilbertruimte is, en dat $V = H$ dan en slechts dan als λ_n een *begrensd* monotoon rijtje positieve getallen is.

Kortom $V \subset H$, en de norm op V wordt gegeven door

$$|x|_V = \|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n^2},$$

waarmee

$$\|x\|^2 \geq \lambda_1 |x|^2$$

voor alle $x \in V$. Hierin is

$$|x| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$$

³⁰ De letter λ wordt doorgaans gebruikt voor eigenwaarden.

de gewone norm van x , een x die immers ook in H zit. De afbeelding³¹

$$i : x \in V \rightarrow x \in H$$

is lineair en continu. Er geldt immers voor alle $x \in V \subset H$ dat

$$\underbrace{\|i(x)\|}_{x \in V} = \underbrace{|x|}_{x \in H} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \underbrace{\|x\|}_{x \in V},$$

en

$$\|i\| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$$

is de norm van i : de kleinste constante C waarmee geldt dat

$$|i(x)| \leq C\|x\|$$

voor alle $x \in V$. De notatie met i maakt onderscheid tussen x als $x \in V$ en x als $x \in H$. De afbeelding $i : V \rightarrow H$ stuurt $x \in V$ naar zichzelf, maar dan opgevat als $x \in H$, en heeft daarom een paar vanzelfsprekende eigenschappen.

Opgave 5.19. Ga na dat deze i injectief is en dat als $i(V) = V$ niet gelijk is aan H wel geldt dat $\overline{i(V)} = \overline{V} = H$.

Als $\overline{V} = H$ dan zeggen we dat V *dicht* ligt in H . Dat is hier dus altijd het geval, trivialeerwijs ook als $V = H$. Met de Riesz representatiestelling (Opgave 5.12) is iedere continue lineaire functie $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ van de vorm

$$F(x) = (f, x)$$

met $f = R_H(F)$, en uiteraard is $F(x) = (f, x)$ ook gedefinieerd voor $x \in V$. De afbeelding

$$F \circ i : x \in V \xrightarrow{i} x \in H \xrightarrow{F} (f, x) \in \mathbb{R}$$

is zo continu en lineair, en dus vanwege de Riesz representatiestelling, toegepast nu op V , te representeren met een $u = R_V(F \circ i) \in V$, waarvoor nu geldt dat

$$F(x) = (f, x) = ((u, x)) \quad \forall x \in V.$$

Met andere woorden, de afbeelding

$$V \ni x \xrightarrow{f \in H} (f, x)_H$$

³¹ i is hier niet die wortel uit -1 maar de inbedding van V in H .

is precies dezelfde afbeelding als

$$V \ni x \xrightarrow{u \in V} (u, x)_V$$

(maar anders gerepresenteerd).

Opgave 5.20. Neem aan dat $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2, \dots$ een onbegrensd rij is. Waarom is niet elke continue lineaire $G : V \rightarrow \mathbb{R}$ van de vorm $F(x) = (f, x)$ met $f \in H$?

Het is voor een lineaire functie op V dan³² dus makkelijker om continu te zijn met betrekking tot de norm op V dan met betrekking tot de norm op H : er zijn dus *meer* continue lineaire functies op V dan de functies

$$x \in V \rightarrow (y, x)_H \in \mathbb{R}.$$

Als we er voor kiezen om H^* met H te *identificeren* via R_H , dan is

$$V \subsetneq H = H^* \subsetneq V^*,$$

hetgeen dan niet meer spoort met een identificatie van V^* en V via R_V . Het is één van de twee (of geen van beide), maar niet allebei.

Hoe het ook zij, de afbeelding

$$B : f \in H \xrightarrow{R_H^{-1}} \underbrace{F \in H^* \xrightarrow{i^*} F \circ i \in V^*}_{i^*(F) = F \circ i} \xrightarrow{R_V} u \in V,$$

is lineair en continu, omdat de eerste en de derde schakel in deze keten allebei een isometrie zijn, en de middelste schakel i^* , die de geadjungeerde van i heet, continu is.

Opgave 5.21. Voor lineaire afbeeldingen tussen genormeerde ruimten is continuïteit equivalent met wat begrenstheid wordt genoemd. Een lineaire afbeelding $T : X \rightarrow Y$ heet begrensd als er een constante C is waarvoor geldt dat³³

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$$

voor alle $x \in X$. Bewijs dit, en ook dat de kleinste C waarvoor dit geldt bestaat. Die kleinste C is per definitie de norm $\|T\|$ van T , en komt voor lineaire afbeeldingen overeen met wat we eerder $[\]_{Lip}$ genoemd hebben bij reëlewaardige functies, zie Opgave 5.8.

³² Als $\lambda_n \rightarrow \infty$.

³³ Met notatie $T(x) = Tx$.

In het bijzonder is een begrensde lineaire T niet begrensd op X maar wel op

$$B_X = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\},$$

de gesloten eenheidsbol op X .

Opgave 5.22. Bewijs dat $i^* : H^* \rightarrow V^*$ lineair en continu (begrensd) is.

Interessant is dat als V en H Hilbertruimten zijn en $i : V \rightarrow H$ een *injectieve* continue lineaire afbeelding is met $i(V) \subsetneq \overline{i(V)} = H$, het verhaal vaak precies hetzelfde is. Het is leerzaam om te kijken hoe de injectiviteit van i en het dicht liggen van het beeld van i dan een rol spelen.

Opgave 5.23. Neem nu aan dat H en V Hilbertruimten zijn en dat $i : V \rightarrow H$ lineair en begrensd is. Bewijs dat $B : H \rightarrow V$ gedefinieerd door $f \in H \rightarrow u = Bf \in V$ en

$$(u, x)_V = (f, i(x))_H$$

voor alle $x \in H$ goed gedefinieerd is als lineaire begrensde afbeelding

$$B = R_V \circ i^* \circ (R_H)^{-1},$$

en laat zien dat

$$\|B\| = \|i^*\| = \|i\|.$$

Hint: de eerste gelijkheid volgt omdat de eerste en de derde schakel in B isometrisch zijn, het gaat dus om de tweede gelijkheid. Dat $\|i^*\| \leq \|i\|$ volgt rechtstreeks uit de definities. Om $\|i^*\| \geq \|i\|$ te laten zien moet je de definitie van $\|i\|$ gebruiken door een rij $x_n \in V$ te nemen met $\|x_n\|_V = 1$ en $\|i(x_n)\| \rightarrow \|i\|$, en bij die $y_n = i(x_n)$ elementen F_n uit H^* met $\|F_n\|_{H^*} = 1$ and $F_n(y_n) = \|y_n\|_H$.

Opgave 5.24. Bewijs ook dat B injectief is als de afsluiting $\overline{i(V)}$ van $i(V)$ in H gelijk is aan H , dus als $\overline{i(V)} = H$. Hint: het gaat dus om de tweede equivalentie in B injectief $\iff i^*$ injectief $\iff \overline{i(V)} = H$. De eerste is vanzelfsprekend om dat de andere twee factoren in B isometrisch zijn.

Opgave 5.25. Neem alleen aan dat H en V Hilbertruimten zijn en dat $i : V \rightarrow H$ lineair en begrensd is. Laat $B : H \rightarrow V$ gedefinieerd zijn via Opgave 5.23 door $f \in H \rightarrow u = Bf \in V$ en

$$(u, x)_V = (f, i(x))_H.$$

Laat zien dat

$$N(i) = \{x \in V : i(x) = 0\} = (B(H))^\perp.$$

In het bijzonder ligt het beeld van B dicht in V precies dan als i injectief is.

Opgave 5.26. Neem aan dat $i : V \rightarrow H$ lineair en begrensd is. Bewijs dat

$$A_0 = i \circ B : H \rightarrow H$$

symmetrisch is, i.e.

$$(A_0 f_1, f_2)_H = (f_1, A_0 f_2)_H$$

voor alle $f_1, f_2 \in H$, en

$$(A_0 f, f)_H \geq 0$$

voor alle $f \in H$. Welke conditie op $i : V \rightarrow H$ garandeert

$$(A_0 f, f)_H > 0 \quad \text{voor } f \neq 0 \in H?$$

Hint: voor het antwoord op de vraag neem $x = u = Bf$ in de definitie van B in Opgave 5.23 en gebruik Opgave 5.24.

Opgave 5.27. Neem aan dat $i : V \rightarrow H$ lineair en begrensd is. Bewijs dat

$$A_1 = B \circ i : V \rightarrow V$$

symmetrisch is, i.e.

$$(A_1 u_1, u_2)_V = (u_1, A_1 u_2)_V$$

voor alle $u_1, u_2 \in V$, en

$$(A_1 v, v)_V \geq 0$$

voor alle $v \in H$. Welke conditie op $i : V \rightarrow H$ garandeert

$$(A_1 v, v)_V > 0 \quad \text{voor } v \neq 0 \in V?$$

Hint: voor het antwoord op de vraag neem $f = i(v)$ en $u = Bf$ in Opgave 5.23.

Opgave 5.28. Laat zien dat

$$\frac{(A_0 f, f)_H}{(f, f)_H} = \frac{(Bf, Bf)_H}{(f, f)_H} \quad \text{en} \quad \frac{(A_1 v, v)_V}{(v, v)_V} = \frac{(i(v), i(v))_H}{(v, v)_V}$$

en concludeer dat beide quotiënten *dezelfde* suprema hebben. Hint: de suprema van de rechterleden zijn normen.

5.6 Convergente deelrijen

In het concrete voorbeeld dat $V \subset H = l^{(2)}$ gedefinieerd is via een (onbegrensde) rij

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

kunnen we subscripten wel weglaten en zien we A zowel als $A : V \rightarrow V$ en $A : H \rightarrow H$. Vanwege de aanname dat

$$\lambda_n \rightarrow \infty$$

heeft $i : V \rightarrow H$ nu een bijzondere eigenschap.

Opgave 5.29. Als x_1, x_2, x_3, \dots een begrensde rij in V is dan heeft x_1, x_2, x_3, \dots een convergente deelrij in H .

Met ander woorden, als $|x_n|_V = \|x_n\|$ begrensd is dan is er een $x \in H$ zodanig dat

$$|x_{n_k} - x| \rightarrow 0$$

als $k \rightarrow \infty$, voor tenminste één rij indices

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Deze conclusie kan *niet* getrokken worden voor een rij die alleen begrensd is in de H -norm. Immers, de basisvectoren e_1, e_2, \dots staan onderling loodrecht en hebben lengte 1. Bijgevolg is (voor $i \neq j$)

$$|e_i - e_j|^2 = (e_i - e_j, e_i - e_j) = (e_i, e_i) + (e_j, e_j) = 2$$

en heeft de rij e_1, e_2, \dots geen enkele convergente deelrij. Wel is het zo dat voor elke $y \in H$ geldt dat $(y, e_i) \rightarrow 0 = (y, 0)$. De rij e_1, e_2, \dots heet daarom *zwak* convergent met limiet $0 \in H$.

Opgave 5.30. Laat x_1, x_2, \dots een begrensde rij zijn in de standaard Hilbertruimte $H = l^{(2)}$. Dan heeft x_1, x_2, \dots *wel* een *zwak* convergente deelrij, i.e. er is een rij indices $n_1 < n_2 < \dots$ en een $a \in H$ zodanig dat

$$(y, x_{n_k}) \rightarrow (y, a)$$

als $k \rightarrow \infty$ voor elke $y \in H$. Notatie:

$$x_{n_k} \rightharpoonup a \quad \text{als } k \rightarrow \infty.$$

Hint: in \mathbb{R} heeft iedere begrensde rij een convergente deelrij. Gebruik een *diagonaalargument* om te laten zien dat er een rij indices $n_1 < n_2 < \dots$ is waarvoor

$$a_j = \lim_{k \rightarrow \infty} (e_j, x_{n_k})$$

als limiet in \mathbb{R} bestaat voor iedere $j \in \mathbb{N}$, en laat zien dat

$$a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \in H$$

de zwakke limiet is van de rij x_{n_1}, x_{n_2}, \dots .

Opgave 5.31. Bewijs dat in iedere separabele Hilbertruimte elke begrensde rij een zwak convergente deelrij heeft. Hint: gebruik een basis van H om H isometrisch met \mathbb{R}^n of $l^{(2)}$ te maken en Opgave 5.30.

Opgave 5.32. Bewijs dat in iedere Hilbertruimte, separabel of niet, elke begrensde rij een zwak convergente deelrij heeft. Hint: laat L de kleinste gesloten deelruimte van H zijn die de hele rij bevat, schrijf $H = L \oplus L^\perp$ en gebruik het resultaat in Opgave 5.32 voor L .

5.7 Positieve eigenwaarden van wat?

De naam van een stelling past niet altijd in een kopje. Voor welke positief definitie symmetrische lineaire afbeeldingen $A : H \rightarrow H$ hebben we een uitspraak over positieve eigenwaarden met eigenvectoren die een orthonormale basis vormen van H ? De extra eigenschap die we nodig hebben is *kompaktheid*, en dat begrip formuleren we *eerst in termen van rijen*. Een verzameling K in een ruimte voorzien van een metriek heet *rijkompakt* als iedere rij in K door elementen uit de rij weg te laten³⁴ convergent gemaakt kan worden met limiet in K .

In de vorige subsectie hebben we gezien dat de gesloten eenheidsbol

$$B \subset H = l^{(2)}$$

niet rijkompakt is. Immers, de rij e_1, e_2, \dots heeft geen convergente deelrij. Terwijl de rij wel *zwak convergent* is met limiet 0. Maar onder de aanname dat de rij

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

³⁴ Think of cheating experimentalists.

de eigenschap heeft dat $\lambda_n \rightarrow \infty$ liet Opgave 5.29 zien dat voor de door deze rij gedefinieerde V in Opgave 5.18 geldt dat de *lineaire afbeelding*

$$i : V \rightarrow H = l^{(2)}$$

kompakt is in de volgende zin: als x_1, x_2, x_3, \dots een begrensde rij is in V dan heeft de rij $i(x_1), i(x_2), i(x_3), \dots$ een convergente deelrij in H .

Opgave 5.33. Neem aan dat $i : V \rightarrow H$ zoals in Opgave 5.23 *kompakt* is. Laat zien dat $A_0 = i \circ B : H \rightarrow H$ en $A_1 = B \circ i : V \rightarrow V$ ook *kompakt* zijn: iedere begrensde rij *originelen* wordt na weglaten van voldoende veel rijelementen afgebeeld op een convergente rij.

Elke lineaire, injectieve, begrensde³⁵ en *kompakte*

$$i : V \rightarrow H \quad \text{met} \quad \overline{i(V)} = H$$

definieert nu dus via Opgaven 5.23, 5.26 en 5.27 twee³⁶ *strict positief definitie* symmetrische *kompakte* begrensde lineaire afbeeldingen $A_0 : H \rightarrow H$ en $A_1 : V \rightarrow V$, door respectievelijk de eerste en de laatste schakel in

$$V \xrightarrow{i} H \xrightarrow{(R_H)^{-1}} H^* \xrightarrow{i^*} V^* \xrightarrow{R_V} V \xrightarrow{i} H$$

weg te laten.

Opgave 5.34. Laat H een Hilbertruimte zijn en $A : H \rightarrow H$ lineair, *kompakt*, symmetrisch en *positief strict definitie*. Bewijs dat

$$\mu_1 = \sup_{0 \neq x \in H} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

als *strict positief maximum* bestaat, en dat iedere het quotiënt maximaliserende x een *eigenvector* is van A bij deze (*eigenwaarde*) $\mu_1 > 0$. Hint: μ_1 wordt benaderd door (Ax_n, x_n) met $(x_n, x_n) = 1$ waarbij de rij x_n *zwak convergent* met limiet x kan worden gekozen, en, vanwege de *kompaktheid* van A , de rij Ax_n *convergent* met limiet y .

³⁵ Dit eisen is niet meer nodig, volgt uit *kompaktheid* i , ga na!

³⁶ Het past ook niet op 1 regel.

Er is een eleganter bewijs van de stelling in Opgave 5.34 waarbij het begrip zwakke convergentie niet wordt gebruikt. Als $A : H \rightarrow H$ een symmetrische continue lineaire afbeelding is, dan is $|(Ax, x)| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2$ en bestaan dus

$$M = \sup_{0 \neq x \in H} \frac{|(Ax, x)|}{(x, x)}, \quad M_+ = \sup_{0 \neq x \in H} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}, \quad M_- = \inf_{0 \neq x \in H} \frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

en M , het maximum van $|M_+|$ en $|M_-|$, voldoet dus aan $M \leq \|A\|$. Via de parallelogramwettruc volgt ook de omgekeerde ongelijkheid. Voor $x, y \in H$ geldt dat

$$(Ax, y) = \frac{1}{4}(A(x+y), x+y) - \frac{1}{4}(A(x-y), x-y) \leq \frac{1}{4}(M_+ \|x+y\|^2 - M_- \|x-y\|^2)$$

en dus dat

$$|A(x, y)| \leq \frac{M}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \frac{M}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Opgave 5.35. Neem aan dat $A : H \rightarrow H$ lineair is en dat voor alle $x, y \in H$ geldt dat

$$|(Ax, y)| \leq \frac{M}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Bewijs dat dan ook voor alle $x, y \in H$ geldt dat

$$|(Ax, y)| \leq M \|x\| \|y\|,$$

en dat dus $M = \|A\|$. Hint: pas voor $a > 0$ de ongelijkheid toe op $\frac{x}{a}$ en ay en minimaliseer het rechterlid.

Opgave 5.36. Neem aan dat $A : H \rightarrow H$ een symmetrische continue lineaire afbeelding is en dat er een rij $x_n \in H$ is met $\|x_n\| = 1$ en $(Ax_n, x_n) \rightarrow \|A\| = M$ waarvoor de rij beelden Ax_n convergent is. Bewijs dat de limiet een eigenvector is bij eigenwaarde M . Hint: laat zien dat $Ax_n - Mx_n \rightarrow 0$.

Opgave 5.37. De spectraalstelling voor $A : H \rightarrow H$ kompakt, strict positief definit, symmetrisch en lineair: bewijs dat H een orthonormale basis heeft van eigenvectoren

$$\phi_1, \phi_2, \dots$$

van A bij eigenwaarden (*uniquely identified as*

$$\mu_n = \max\{(Ax, x) : x \in H, (x, x) = 1, (x, \phi_j) = 0 \text{ voor } 1 \leq j < n\},$$

voor $n = 1, 2, \dots$. Dit zijn ze! Hoe je er ook verder aankomt.

Opgave 5.38. Kun je een voorbeeld bedenken van de stelling in Opgave 5.37 met een niet-separabele Hilbertruimte? Hint: zoja, heel knap? Zonee, heel goed! Waarom niet?

Opgave 5.39. Kun je een voorbeeld bedenken van de stelling in Opgave 5.37 met een separabele Hilbertruimte? Hint: hoe zijn we hierboven eigenlijk begonnen met λ 's?

Wellicht wat cryptisch, maar dat scherpt de geest. Het springende punt is dat we in \mathbb{R}^∞ zijn begonnen op basis van de voor de hand liggende standaardbasis, die de prachtige eigenschap heeft dat

$$e_i \cdot e_j = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

en vervolgens een ander inproduct hebben geïntroduceerd aan de hand van dezelfde standaardbasis en een rijtje λ 's. De twee operatoren A_0 en A_1 hebben (*simultaan*) precies de e -tjes van de standaardbasis als eigenvectoren bij wat we μ -tjes genoemd hebben.

Opgave 5.40. Voor de μ -tjes en de λ -tjes geldt

$$\lambda_n \mu_n = 1,$$

en dat moet je wel even begrijpen nu!

Zijn er minder flauwe voorbeelden? Ja! Begin maar met een $i : V \rightarrow H$ met een concrete $V \subset H$ met $\bar{V} = H$ die niet al van te voren in \mathbb{R}^∞ lagen (maar uiteindelijk via hun coördinaten weer wel in \mathbb{R}^∞ te leggen zijn als je de basis van eigenvectoren eenmaal hebt). Nodig is de restrictie tot $V \subset H$ zeker niet. In alle gevallen zijn er twee symmetrische afbeeldingen waarvan het spectrum kan worden bepaald, $A_0 : H \rightarrow H$ en $A_1 : V \rightarrow V$, of we nu de extra aannamen³⁷ op i hebben gemaakt of niet. Net als tussen de normen (zie Opgave 5.28) is er een verband tussen de eigenwaarden en eigenvectoren.

³⁷ Injectiviteit van i en dichtheid van (het beeld van) i .

Opgave 5.41. Als f een eigenvector is van A_0 bij eigenwaarde λ wat is dan een eigenvector van A_1 bij dezelfde λ ? Als u een eigenvector is van A_1 bij eigenwaarde λ wat is dan een eigenvector van A_0 bij dezelfde λ ? Hint: bekijk een langer stuk van de keten

$$V \xrightarrow{i} H \xrightarrow{(R_H)^{-1}} H^* \xrightarrow{i^*} V^* \xrightarrow{R_V} V \xrightarrow{i} H \xrightarrow{(R_H)^{-1}} H^* \xrightarrow{i^*} V^* \xrightarrow{R_V} V \xrightarrow{i} H \xrightarrow{(R_H)^{-1}}$$

en neem aan dat een $f \in H$ of een $u \in V$ op een λ -veelvoud van zichzelf terecht komt na 4 stapjes in de keten. In beide gevallen zou de eigenvector die je vindt bij de andere A de nulvector kunnen zijn. Welke conditie op i voorkomt dat?

Bij het toepassen van Opgave 5.37 kunnen we dus kiezen voor A_0 of A_1 .

5.8 The French Connection

Het tripel

$$V \subset H = H^* \subset V^*$$

met V en H Hilbertruimten, en $i : V \rightarrow H$ kompakt en $V = i(V)$ dicht in H is het standaardframework dat in de Franse school voor partiële differentiaalvergelijkingen is ontwikkeld, zie bijvoorbeeld het originele franstalige boekje van Brézis over functionaalanalyse. Een grote klasse van concrete eigenwaardenproblemen³⁸ reduceert in abstracto tot een en hetzelfde probleem.

De eerste toepassing is die waarin cosinussen sinussen verschijnen als eigenfuncties van de oplossingsoperator voor het probleem

$$-u'' = f,$$

waarin we voor f en u nu eerst 2π -periodieke functies nemen. In het volgende hoofdstuk beperken we ons daarbij aanvankelijk tot functies die gemiddeld nul zijn, en zijn

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} fg \quad \text{en} \quad ((u, v)) = \int_{-\pi}^{\pi} u'v'$$

de twee inproducten die de rol van (f, g) en overnemen $((u, v))$ in de concrete voorbeelden hierboven, en zullen we die concrete voorbeelden weer terug zien komen uit de abstractie.

³⁸ Denk aan de frequenties van een trillend (muziek)instrument.

6 Functies op de cirkel

Als we afspreken dat twee getallen in \mathbb{R} eigenlijk hetzelfde zijn als ze een geheel veelvoud van 2π verschillen dan maken \mathbb{R} en 2π de verzameling $\mathbb{R}_{2\pi}$, een verzameling waarin op natuurlijke manier de optelling is gedefinieerd. Dat gaat net als in \mathbb{Z}_n , de verzameling die we krijgen uit de verzameling \mathbb{Z} van gehele getallen en een vast getal $n \in \mathbb{N}$, door af te spreken dat twee gehele getallen gelijk zijn als ze een geheel veelvoud van n verschillen. Zoals vaak

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

wordt geschreven, met $0 = n$, kunnen we ook

$$\mathbb{R}_{2\pi} = [0, 2\pi)$$

schrijven, maar we geven er de voorkeur om $\mathbb{R}_{2\pi}$ in de schrijfwijze te laten corresponderen met $[-\pi, \pi)$, waarbij $-\pi = \pi$. Deze π is hier een positief reëel getal, waarvoor we op enig moment de π die we van de cirkel kennen zullen nemen, *maar dat hoeft nu nog even niet*. Net als \mathbb{Z}_n is $\mathbb{R}_{2\pi}$ met de voor de hand liggende optelling een commutatieve groep¹.

Functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodiek zijn kunnen we ook opvatten als functies $f : \mathbb{R}_{2\pi} \rightarrow \mathbb{R}$, en omgekeerd. De verzameling van continue 2π -periodieke functies noemen we

$$C(\mathbb{R}_{2\pi}).$$

Ieder tweetal functies gedefinieerd op dezelfde verzameling, dus ook f en g in $C(\mathbb{R}_{2\pi})$, kunnen we bij elkaar optellen² middels

$$x \xrightarrow{f+g} f(x) + g(x)$$

als definitie van $f + g \in C(\mathbb{R}_{2\pi})$. Met

$$x \xrightarrow{tf} tf(x)$$

voor $t \in \mathbb{R}$ en $f \in C(\mathbb{R}_{2\pi})$ is ook de scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd en zo is $C(\mathbb{R}_{2\pi})$ een vectorruimte³ over \mathbb{R} , waarop

$$f \cdot g = (f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

¹ Google: Abelian group.

² Evenzo is natuurlijk ook fg gedefinieerd via $x \xrightarrow{fg} f(x)g(x)$.

³ En met de vermenigvuldiging een algebra.

een inwendig produkt⁴ definieert, maar $C(\mathbb{R}_{2\pi})$ is met dit integraalprodukt geen Hilbertruimte, zoals de volgende opgave laat zien.

Opgave 6.1. De zaagtandfunctie Z wordt gedefinieerd door

$$Z(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{als } x \in (0, \pi] ; \\ -x - \pi & \text{als } x \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

en door $Z(0) = 0$. Met deze keuze voor $Z(0)$ behoort Z tot $\mathcal{G}(\mathbb{R}_{2\pi})$, de ruimte⁵ van functies $f : \mathbb{R}_{2\pi} \rightarrow \mathbb{R}$ die continu zijn in iedere $x \in \mathbb{R}_{2\pi}$, behalve eventueel in $x = 0$, maar waarvoor wel geldt dat

$$f(0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \downarrow 0} f(x) + \lim_{x \uparrow 0} f(x) \right),$$

waarbij linker- en rechterlimiet dus allebei bestaan. Op $\mathcal{G}(\mathbb{R}_{2\pi})$ is $(f, g) \rightarrow f \cdot g$ ook een inprodukt. Teken de grafieken van een rij functies Z_1, Z_2, \dots in $C(\mathbb{R}_{2\pi})$ waarvoor geldt dat $(Z_n - Z, Z_n - Z) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.

De rij Z_1, Z_2, \dots is convergent in $\mathcal{G}(\mathbb{R}_{2\pi})$ met betrekking tot de inproduktnorm

$$f \rightarrow |f| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

omdat $|Z_n - Z| \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$, en dus is de rij Z_1, Z_2, \dots ook een Cauchyrij in $C(\mathbb{R}_{2\pi})$ met die inproduktnorm, die echter in $C(\mathbb{R}_{2\pi})$ geen limiet heeft⁶. Om van $C(\mathbb{R}_{2\pi})$ met de inproduktnorm een Hilbertruimte te maken, die we de naam

$$L^2(\mathbb{R}_{2\pi})$$

willen geven, moeten we alle limieten van Cauchyrijtjes aan $C(\mathbb{R}_{2\pi})$ toevoegen, maar hoe doe je dat?

6.1 Een Hilbert ruimte voor (periodieke) functies?

De abstracte constructie van een Hilbertruimte H uit $C(\mathbb{R}_{2\pi})$ met zijn inprodukt is dat je een 2-Cauchyrijtje f_1, f_2, \dots , een rijtje waarvoor geldt dat

$$|f_n - f_m|_2 \rightarrow 0$$

⁴ Let op, met $(f, g) \dot{\rightarrow} f \cdot g = (f, g)$ is de haakjesnotatie soms verwarrend.

⁵ De notatie \mathcal{G} is alleen voor nu even.

⁶ Waarom niet?

als $m, n \rightarrow \infty$, ziet als een benadering van een functie f in de te construeren H . Dit is analoog aan de vertrouwde gewoonte om decimale of binaire ontwikkelingen te zien als benaderingen van reële getalen, waarbij verschillende ontwikkelingen hetzelfde reële getal kunnen maken. Bij die reële getallen denk je doorgaans aan punten op een getallenlijn, al hoeft dat natuurlijk niet: als je het jezelf moeilijk wil maken kan de abstracte constructie van \mathbb{R} prima zonder.

De standaardvisualisatie van een functie is de grafiek van die functie, in het geval $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een deelverzameling G van

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

met de eigenschap dat

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists_1 y \in \mathbb{R} : (x, y) \in G.$$

In deze notatie is \forall *short* voor *voor alle*, en staat \exists_1 voor *er is precies één*⁷. Die ene y in de uitspraak wordt in deze context bij afspraak genoteerd als $f(x)$, en daarmee is de formele definitie van een grafiek in \mathbb{R}^2 de facto equivalent met de definitie van een functie van \mathbb{R} naar \mathbb{R} . Omdat \mathbb{R}^2 als vlak in ons hoofd past, en de grafiek G van $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daar weer een deelverzameling van is, zien we de grafiek G van f nu in het platte xy -vlak als de verzameling gegeven door $y = f(x)$.

Het ligt voor de hand om de abstracte constructie van H uit $C(\mathbb{R}_{2\pi})$ te zien als gebeurende in het platte vlak \mathbb{R}^2 , waarbij de grafiek G van een functie $f : \mathbb{R}_{2\pi} \rightarrow \mathbb{R}$ dus de eigenschap moet hebben dat

$$\frac{x_1 - x_2}{2\pi} \in \mathbb{Z} \implies f(x_1) = f(x_2),$$

hetgeen overeenkomt met het oprolbaar⁸ zijn van het oneindige platte vlak tot een cylinder waarin de grafiek G keurig over zichzelf heen ligt.

Met of zonder voorstelling, twee verschillende 2-Cauchyrijtjes f_1, f_2, \dots en g_1, g_2, \dots in $C(\mathbb{R}_{2\pi})$ moeten hetzelfde element uit de te maken H zijn als geldt dat

$$|f_n - g_n| \rightarrow 0$$

voor $n \rightarrow \infty$. Opgave 6.1 laat bijvoorbeeld zien dat de zaagtandfunctie Z in de te maken H moet zitten, maar niet iedereen zal dezelfde rij Z_1, Z_2, \dots als grafieken getekend hebben. Het is goed om dat nog wat preciezer te bekijken.

⁷ \exists staat voor *er bestaat een*.

⁸Stel je de problemen bij het oprollen even voor....

Opgave 6.2. Maak Opgave 6.1 nog een keer maar anders. Teken de grafieken van een rij functies $\tilde{Z}_n \in C(\mathbb{R}_{2\pi})$ waarvoor geldt dat $(\tilde{Z}_n - Z, \tilde{Z}_n - Z) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Kies de rij functies $\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \dots$ nu zo dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $\tilde{Z}_n(0) = 1$.

Opgave 6.3. Maak Opgave 6.2 maar nu met $\tilde{Z}_n(0) = 0$.

Opgave 6.4. Maak Opgave 6.3 maar nu met $\tilde{Z}_n(0) = 2$.

Opgave 6.5. Maak Opgave 6.3 maar nu met $\tilde{Z}_n(0) = n$.

Opgave 6.6. Laat in Opgaven 6.2,6.3,6.4,6.5 hierboven zien dat $|Z_n - \tilde{Z}_n| \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$, waarbij Z_n is als in Opgave 6.2.

Wat deze opgaven laten zien is dat functies in H geen gewone functies kunnen zijn. Abstract gezien zouden alle benaderende rijen dezelfde $Z : \mathbb{R}_{2\pi} \rightarrow \mathbb{R}$ moeten maken, maar dat lijkt via de opgaven hierboven te leiden tot de conclusie dat

$$0 = Z(0) = 1$$

en meer verwarring. Soortgelijke spelletjes kunnen we spelen met de nulfunctie

$$x \xrightarrow{0} 0$$

zelf.

Opgave 6.7. Maak een rij functies f_1, f_2, \dots in $C(\mathbb{R}_{2\pi})$ waarvoor geldt dat $f_n(0) = 1$ en $|f_n| = |f_n - \mathbf{0}| \rightarrow 0$.

Iedere rij echte functies f_n die we gebruiken om een f in H te maken kan veranderd worden in een rij \tilde{f}_n die in een gegeven punt gek gedrag vertoont, zoals convergeren naar een ‘verkeerde’ limiet, maar wel de eigenschap heeft dat $|f_n - \tilde{f}_n| \rightarrow 0$. We moeten kennelijk af van het idee dat een functie in elk punt gedefinieerd is. In sommige punten is dat wellicht een artefact, zoals in Opgave 6.7, maar bij functies als Z is er echt een keuze die gemaakt moet

worden. Of niet, als we afspreken dat functies niet per se in elk punt van hun definitiegebied gedefinieerd hoeven zijn. Let op, met Z zitten ook alle verschoven zaagtandfuncties Z_p (met $p \in \mathbb{R}$)

$$x \xrightarrow{Z_p} Z(x - p)$$

in H , en daarmee ook een grote klasse van functies van de vorm

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_{p_n},$$

waarbij p_1, p_2, \dots een willekeurige rij punten in \mathbb{R} mag zijn, en elke p_n een probleempunt is voor wat betreft de definitie van $S(p_n)$.

Opgave 6.8. Neem aan dat H geconstrueerd is zoals hierboven beschreven. Neem aan dat p_1, p_2, \dots en a_1, a_2, \dots rijen in \mathbb{R} zijn, en dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Waarom moet gelden dat $S \in H$? Hint: laat eerst zien dat S een begrensde functie is.

Kortom, behalve de mooie periodieke functies

$$x \xrightarrow{c_n} \cos nx$$

en

$$x \xrightarrow{s_n} \sin nx$$

($n \in \mathbb{N}$), waarvan we ook sommen van de vorm

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n s_n \tag{6.1}$$

kunnen nemen, met coëfficiënten als in Opgave 6.8, moeten er in de H die we zoeken een heleboel lelijke functies zitten. Daarbij moeten evident verschillende functies soms (of vaak) als element van H als dezelfde functie gezien worden. Waarom? Omdat twee Cauchyrijen f_1, f_2, \dots en $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots$ in $C(\mathbb{R}_{2\pi})$ met de eigenschap dat $f_n - \tilde{f}_n \rightarrow 0$ dezelfde f in H moeten maken, en we in de voorbeelden gezien hebben dat bijvoorbeeld $f_n(0)$ en $\tilde{f}_n(0)$ verschillende of helemaal geen limieten kunnen hebben.

Opgave 6.9. Maak een Cauchyrij f_1, f_2, \dots die naar de nulfunctie $\mathbf{0}$ convergeert in de inproductnorm maar waarvoor de rij $f_1(x), f_2(x), \dots$ niet convergeert, welke $x \in \mathbb{R}_{2\pi}$ je ook kiest.

De vraag is dus niet alleen welke functie je kiest als de meest natuurlijke functie binnen een equivalentieklasse van functies die in H niet van elkaar te onderscheiden zijn, maar ook hoe je überhaupt aan zo'n functie komt als f in H gedefinieerd is via een Cauchyrij f_1, f_2, \dots in $C(\mathbb{R}_{2\pi})$.

6.2 Standaard Hilbertruimten voor 'functies'

In wat volgt maken we enerzijds precies welke functies f op te vatten zijn als $f \in H$ en anderzijds waarom we die functies nog wel als functies zien. Iedere $f \in H$ moet daartoe voor bijna⁹ alle $x \in \mathbb{R}_{2\pi}$ een natuurlijke waarde hebben, waarbij het gedrag van f in de buurt van elk zulk een x leidend moet zijn¹⁰. Voor de zaagtand Z leidt dit bij het gelijkwegenvan wat $Z(x)$ is voor $x < 0$ en $x > 0$ onherroepelijk tot $Z(0) = 0$ als de natuurlijke keuze voor $Z(0)$, het gemiddelde van de linker- en rechterlimiet. Maar of zulke limieten voor iedere f in de H die we maken altijd in genoeg punten bestaan is (zeker a priori) niet zo duidelijk.

Hoe het ook zij, de waarde van $f \in H$ in $\pi = -\pi \in S$ doet er niet toe. Voor iedere $a \in \mathbb{R}$ en iedere functie $f : (a - \pi, a + \pi)$ die we toe willen laten in H na periodieke uitbreiding van f tot $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is het niet belangrijk of en hoe $f(a - \pi)$ en $f(a + \pi)$ gedefinieerd zijn. In het bijzonder is de functie \tilde{Z} gedefinieerd

$$x \in (0, 2\pi) \xrightarrow{\tilde{Z}} \pi - x$$

na periodieke uitbreiding tot $Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in H gelijk aan de Z uit Opgave 6.1. Waar bij de functies c_n en s_n het periodiek uitbreiden vanzelf gaat, is het bij functies als Z vervelend om de formules überhaupt op te schrijven.

De functie Z heeft in ieder geheel veelvoud van 2π een sprong. De eveneens oneven blokfunctie $blok \in H$, gedefinieerd door

$$blok(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in (0, \pi) ; \\ -1 & \text{als } x \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

heeft in ieder geheel veelvoud van π een sprong. De even *kartelrandfunctie*

⁹ Wat *bijna* betekent is de hamvraag.

¹⁰ Waarom eigenlijk? Wel, we zijn uitgegaan van continue functies.

$Ka \in H$ daarentegen, gedefinieerd door

$$Ka(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{als } x \in (0, \pi) ; \\ \frac{\pi}{2} + x & \text{als } x \in [-\pi, 0), \end{cases}$$

heeft geen sprongen als we de definitie van Ka uitbreiden met $Ka(2\pi n) = \frac{\pi}{2}$ in de gehele veelvouden $2\pi n$ van 2π ($n \in \mathbb{Z}$). Al deze functies zijn instructief als voorbeeld bij de vraag of ze te schrijven zijn als een oneindige som van de vorm (6.1). Met name de zaagtand is een bron van leerzaam vermaak zoals we zullen zien.

Opgave 6.10. Schets de grafieken van Z , *blok*, Ka , en ook van $c_1 = \cos$ en $s_1 = \sin$.

Ga nog eens na dat de functies

$$\frac{c_n}{\sqrt{\pi}}, \frac{s_n}{\sqrt{\pi}} \quad (n \in \mathbb{N}), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

een orthonormaal stelsel vormen, en dat H dus alle ‘functies’ f van de vorm

$$f = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{c_n}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{s_n}{\sqrt{\pi}} \quad (6.2)$$

zou moeten bevatten, meestal geschreven als

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n s_n),$$

als de (net iets andere) rijtjes van coëfficiënten a_n en b_n maar kwadratisch sommeerbaar zijn.

De vraag of je zo alle f in H krijgt kan beginnen met de vraag of de oneven functies Z en *blok* te schrijven zijn als

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n s_n,$$

en de even functie Ka als

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n.$$

De sommen moeten hierbij convergent zijn in de 2-norm die hoort bij het standaard inproduct

$$f \cdot g = (f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

Ons doel is te laten zien dat iedere f in H inderdaad van de vorm (6.2) met

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty,$$

en een karakterisatie van H als $L^2(\mathbb{R}_{2\pi})$ die los staat van de specifieke keuze die we met (6.2) maken.

6.3 Fourierreeksen

De functie

$$f_7(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7}$$

is periodiek met periode 2π . Op het interval $(-\pi, \pi)$ ligt de grafiek van f_7 vlakbij de grafiek van de oneven functie $f(x) = \frac{1}{2}x$. Kennelijk is

$$\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}, \quad (6.3)$$

maar alleen voor $-\pi < x < \pi$.

Opgave 6.11. Er is een verband met machtrekken: het rechterlid in (6.3) is het imaginaire deel van

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \zeta^k, \quad \zeta = e^{ix}.$$

Bepaal de som van deze machtreks voor $|\zeta| < 1$. Hint: differentieer naar ζ , sommeer en primitiveer.

Opgave 6.12. Volgens de complexe versie van het criterium van Leibniz convergeert de machtreks in in Opgave 6.11 voor alle ζ met $|\zeta| = 1$ behalve $\zeta = -1$. Aangenomen dat de somfunctie die je in Opgave 6.11 hebt gevonden ook geldig is voor alle ζ met $|\zeta| = 1$ waar de reeks convergeert, verifieer (6.3). Op de complexe versie van het criterium van Leibniz en de aanname komen we nog terug in Sectie ??.

De reeks in (6.3) heet een Fouriersinusreeks. Maken we van de “minnen” plussen dan vinden we dat de grafiek van de functie

$$h_7(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7}$$

op het interval $(0, 2\pi)$ vlakbij de grafiek van de functie $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ ligt.

De functie

$$g_7(x) = \cos x - \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} - \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 5x}{25} - \frac{\cos 6x}{36} + \frac{\cos 7x}{49}$$

heeft een grafiek op het interval $(-\pi, \pi)$ vlakbij de grafiek van de even functie

$$g(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$$

ligt. Kennelijk is

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Het rechterlid, inclusief de constante term, heet een Fouriercosinusreeks. Invullen van $x = 0$ geeft

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots$$

We zullen zien dat bij even 2π -periodieke functies Fouriercosinusreeksen horen, en bij oneven 2π -periodieke functies Fouriersinusreeksen. Omdat elke functie te splitsen is in een even en een oneven functie,

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

hoort zo bij een algemene 2π -periodieke functie de som van een Fouriercosinusreeks en een Fouriersinusreeks. Zo'n som heet een Fourierreeks. Schrijven we de cosinussen en sinussen uit in complexe e-machten,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

dan wordt een algemene Fourierreeks een reeks van de vorm

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (6.4)$$

Uiteindelijk zullen we er voor kiezen om met de complexe vorm te werken, het linkerlid in (6.4) dus, een Laurentreeks in $\zeta = e^{ix}$.

Uit de Cauchy integraal formules hebben we Laurentreeksen van de vorm

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k \quad (6.5)$$

zien verschijnen voor complex differentieerbare functies $f(\zeta)$ op een annulus

$$\{\zeta \in \mathbb{C} : R_1 < |\zeta| < R_2\},$$

waarbij het plusstuk

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k$$

convergent is voor $|\zeta| < R_2$ en het minstuk

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \zeta^{-k}$$

convergent is voor $|\zeta| > R_1$. Als $R_1 = 0$ dan heeft $f(\zeta)$ in $\zeta = 0$ een al dan niet ophefbare singulariteit. Omgekeerd, als we met een willekeurige Laurentreeks van de vorm (6.5) beginnen dan zijn er bijbehorende R_1 en R_2 zodat het plusstuk convergeert naar een complex differentieerbare functie op $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < R_2\}$ en het minstuk naar een complex differentieerbare functie op $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > R_1\}$. A priori kunnen zowel R_1 als R_2 ook 0 of ∞ zijn, en in het algemeen kan R_1 groter of kleiner zijn dan R_2 . Laurentreeksen die verschijnen als Fourierreeksen van 2π -periodieke functies $f(x)$ via $\zeta = e^{ix}$ hebben meestal $R_1 = R_2 = 1$. In het vervolg zullen we zulke 2π -periodieke functies zien als functies $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$.

Fourierreeksen gaan terug tot Daniel Bernouilli, die de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

voor bijvoorbeeld $0 < x < \pi$ en met randvoorwaarde $u = 0$ voor $x = 0$ en $x = \pi$, met Fouriersinusreeksen probeerde op te lossen. Later was Fourier de eerste die voor een gegeven functie f de coëfficiënten in integralen wist uit te drukken, toen hij Fouriersinusreeksen gebruikte om de warmtevergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

op te lossen.

Tegenwoordig zien we de functies

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots,$$

en

$$\dots, e^{-3ix}, e^{-2ix}, e^{-ix}, e^{0ix} = 1, e^{ix}, e^{i2x}, e^{3ix}, \dots$$

als orthonormale bases in een (Hilbert)ruimte van functies, en de Fouriercoëfficiënten als coördinaten ten opzichte van deze basis. Voor een grote klasse van functies $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ zijn de Fouriercoëfficiënten a_k , b_k en c_k als coördinaten van f ten opzichte van deze bases gedefinieerd. De N -de partiële som van de Fourierreeks van f is

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (6.6)$$

met Fouriercoëfficiënten

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad (6.7)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx. \quad (6.8)$$

Het volgende programma is bedoeld om vertrouwd te raken met Fourierreeksen. Gebruik Maple/Mathematica voor de plotjes. De integralen kun je beter met de hand doen.

Opgave 6.13. Bereken $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx$ en $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx$ voor gehele m en n .

Opgave 6.14. Laat $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = 1$ en kies een 2π -periodieke uitbreiding $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die even is (i.e. $f(x) = f(-x)$). Bereken alle Fouriercoëfficiënten a_n en b_n .

Opgave 6.15. Laat $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = 1$ en kies een 2π -periodieke uitbreiding $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die oneven is (i.e. $f(x) = -f(-x)$).

1. Bereken alle Fouriercoëfficiënten a_n en b_n .
2. Plot f en $S_N f$ (voor een aantal waarden van N) in een grafiek.
3. Onderzoek numeriek wat er gebeurt met de grootte en plaats van het maximum van $S_N f$ als $N \rightarrow \infty$.
4. Vereenvoudig $S_N f$ in $x = \frac{\pi}{2}$. Vergelijk dit met $f(\frac{\pi}{2})$. Van welke gewone reeks is, aangenomen dat $S_N f(\frac{\pi}{2})$ naar $f(\frac{\pi}{2})$ convergeert, nu de som te bepalen?
5. Idem voor $x = \frac{\pi}{4}$.

Opgave 6.16. Laat $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = \sin x$. Kies een even 2π -periodieke uitbreiding $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Bereken alle Fouriercoëfficiënten a_n en b_n .

1. Bereken alle Fouriercoëfficiënten a_n en b_n .
2. Plot f en $S_N f$ (voor een aantal waarden van N) in een grafiek.
3. Vereenvoudig $S_N f$ in $x = 0$. Vergelijk dit met $f(0)$. Van welke gewone reeks is, aangenomen dat $S_N f(0)$ naar $f(0)$ convergeert, nu de som te bepalen?
4. Idem voor $x = \frac{\pi}{2}$.
5. Idem voor $x = \frac{\pi}{4}$.

Opgave 6.17. Laat $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = \cos x$ en kies een oneven 2π -periodieke uitbreiding $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Bereken alle Fouriercoëfficiënten a_n en b_n en plot f en $S_N f$ (voor een aantal waarden van N) in een grafiek.
2. Vergelijk het gedrag bij $x = 0$ voor N groot met dat in som 6.15.
3. Neem nu de oneven 2π -periodieke uitbreiding $f(x) = 1 - \cos x$ (het verschil van de functie in som 6.15 en de functie in deze som). Onderzoek numeriek het gedrag van $S_N f$ bij $x = 0$ voor N .

Opgave 6.18. Laat $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = \pi - x$ en kies een oneven 2π -periodieke uitbreiding $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Bereken alle Fouriercoëfficiënten a_n en b_n en plot f en $S_N f$ (voor een aantal waarden van N) in een grafiek.
2. Differentieer $S_N f(x)$ naar x en noem de afgeleide $d_N(x)$. Zijn er waarden van x waarvoor $d_N(x)$ convergeert als $N \rightarrow \infty$?

Opgave 6.19. Laat $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door $f(x) = x(\pi - x)$ en kies een oneven 2π -periodieke uitbreiding $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Bereken alle Fouriercoëfficiënten a_n en b_n en plot f en $S_N f$ (voor een aantal waarden van N) in een grafiek.
2. Vereenvoudig $S_N f$ in $x = \frac{\pi}{2}$. Vergelijk dit met $f(\frac{\pi}{2})$. Van welke gewone reeks is, aangenomen dat $S_N f(x)$ naar $f(x)$ convergeert, nu de som te bepalen?
3. Differentieer $S_N f(x)$ naar x en noem de afgeleide $g_N(x)$. Laat zien dat $g_N(x)$ op \mathbb{R} uniform convergeert naar een limietfunctie.
4. Bepaal die limietfunctie numeriek.
5. Vergelijk $g_N(0)$ met zijn limietwaarde. Welke som van welke gewone reeks vinden we nu?

6.4 Convergentie van Fourierreeksen

Bij de vraag of, en in welke zin, de Fourierreeks convergeert, en ook als limiet f heeft, m.a.w. of

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

speelt het begrip convolutie een belangrijke rol.

Opgave 6.20. Laat zien dat

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(x-y) dy,$$

de convolutie van de functies D_n en f op $(-\pi, \pi)$, waarbij

$$D_N(x) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} = \sum_{k=-N}^N e^{ikx}. \quad (6.9)$$

Maak plotjes van D_N voor een aantal waarden van N .

De functie D_N heet de Dirichlet kern. Voor grote N concentreert deze functie zich bij 0 met een steeds smallere piek waarvan de oppervlakte naar 2π gaat. Dat is de reden dat $S_N f(x)$ naar $f(x)$ convergeert als f voldoende netjes is. Omdat D_N voor grotere N steeds meer tekenwisselingen heeft is dit lastig om te bewijzen. Het gemiddelde van D_0, \dots, D_N ,

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} (D_0(x) + \dots + D_N(x)) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2 \frac{(N+1)x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}, \quad (6.10)$$

is een veel mooiere functie. Geen tekenwisselingen, integraal 2π , en gepiekt in 0.

Opgave 6.21. Leidt de laatste gelijkheid in (6.10) door

$$\sin \frac{x}{2} + \dots + \sin \frac{(N+1)x}{2}$$

als imaginair deel van een eindige meetkundige reeks te schrijven. Verifieer ook dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = 2\pi,$$

en dat $F_N(x) \rightarrow 0$ als $N \rightarrow \infty$ behalve in veelvouden van 2π . Preciezer:

$$0 < \delta \leq x \leq \pi \implies 0 \leq F_N(x) \leq \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Voor vaste δ is de bovengrens klein te maken door N groot te maken. Merk op dat $F_N(x)$ even en 2π periodiek is. Maak plotjes van F_N voor een aantal waarden van N .

Als een rij getallen a_n convergeert naar een limiet A , dan convergeren ook de gemiddelden

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

naar A . De laatste limiet kan ook bestaan als de rij a_n zelf niet convergeert. Als we de rij a_n gebruiken om een A te benaderen dan kunnen we dus net zo goed eerst naar de gemiddelden kijken. Dat is het idee achter de Cesarosommen:

Opgave 6.22. Definieer

$$\sigma_N f = \frac{1}{N+1}(S_0 f + S_1 f + \cdots + S_N f),$$

de Cesarosommen van f . Laat zien dat

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(y) f(x-y) dy.$$

Opgave 6.23. Laat f een integreerbare (lees: begrensde stuksgewijs continue) 2π -periodieke functie zijn. Laat zien dat dan

$$\sigma_N f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(y) (f(x-y) - f(x)) dy$$

Opgave 6.24. Laat f een integreerbare 2π -periodieke functie zijn, met $|f(x)| \leq M$ voor alle x , waarbij $M \geq 0$ vast is. Neem aan dat voor x vast en $|y| \leq \delta$ geldt dat $|f(x-y) - f(x)| \leq \epsilon$. Laat zien dat dan

$$|\sigma_N f(x) - f(x)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(y) |f(x-y) - f(x)| dy \leq \epsilon + \frac{2M}{N+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Hint: splits de integraal in 3 integralen.

Opgave 6.25. Laat f een 2π -periodieke continue functie zijn. Dan is f uniform continu en begrensd. Waarom? Bewijs dat $\sigma_N f$ uniform naar f convergeert als $N \rightarrow \infty$.

Opgave 6.26. Laat f een 2π -periodieke begrensde stuksgewijs continue functie zijn met de eigenschap dat in elk punt de linker en de rechterlimiet bestaan. Bewijs dat voor elke x de rij $\sigma_N f(x)$ convergeert als $N \rightarrow \infty$. Wat is de limiet? Hint: splits de integraal in 4 integralen.

Opgave 6.27. Laat $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ 2 keer continu differentieerbaar zijn met $f(\pm\pi) = f'(\pm\pi) = f''(\pm\pi) = 0$. Bewijs dat f in elk punt de som van zijn (uniform convergente) Fourierreeks is. Hint: laat met partieel integreren en schatten zien dat de Fouriercoëfficiënten a_n en b_n sommeerbare rijen vormen.

Opgave 6.25 laat zien dat in de ruimte van continue functies 2π -periodieke functies voorzien van de maximumnorm

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

geldt dat de Cesarosommen van f naar f convergeren: $\|\sigma_N f - f\|_\infty \rightarrow 0$ als $N \rightarrow \infty$. Maar hoe zit het met $S_N f$ zelf? Daartoe is een andere norm veel geschikter. Bij lineaire algebra of topologie zijn ongetwijfeld verschillende normen van 2-vectoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ behandeld, bijvoorbeeld

$$\|x\|_\infty = \max(x_1, x_2), \quad \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|, \quad \|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Als we in de laatste norm elke 2 door p vervangen (niet de subscript!) dan krijgen we de p -norm. De p -norm is een norm als $p \geq 1$. Je kunt er mee rederen zoals je dat gewend bent bij de absolute waarde. De normaxioma's zijn, voor vectoren x en y , en scalairen λ :

$$\|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|; \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Alleen de 2-norm is een inproduct norm. Met $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2$ geldt

$$\|x\|_2^2 = x \cdot x.$$

Om ook voor functies de 2-norm in te voeren maken we eerst een inproduct. Hieronder zijn f en g steeds 2π -periodieke stuksgewijs continue functies $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. We doen dus alles eerst nog reeel. Met stuksgewijs continu bedoelen we dat op elk begrens interval er slechts eindig veel punten zijn waar de functie niet continu is en dat in die punten linker- en rechterlimieten bestaan. De integraal

$$f \cdot g = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \tag{6.11}$$

heet het inproduct van de functies f en g . We zien f en g als vectoren. Voor elke x zou je dan $f(x)$ en $g(x)$ als coördinaten van f en g kunnen

zien. Daar heb er dan wel heel veel van, voor elke x één van f en één van g . Overeenkomstige coördinaten vermenigvuldigen en sommeren gaat niet, maar integreren wel. Vandaar de inproductnotatie. Omdat we alles nog reeel doen kunnen we nu gebruik maken van onze intuïtie voor gewone reële vectorruimten en inproducten daarop.

Als $f \cdot g = 0$ dan zeggen we dat f en g *loodrecht op elkaar* staan. De 2-norm van f wordt gedefinieerd door

$$\|f\|_2 = \sqrt{f \cdot f}, \quad (6.12)$$

zeg maar de lengte van f gezien als vector. Er geldt de volgende implicatie (Pythagoras)

$$f \cdot g = 0 \quad \Rightarrow \quad \|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2. \quad (6.13)$$

Hieronder schrijven we

$$S_N g(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^N (c_k \cos kx + d_k \sin kx), \quad (6.14)$$

dus f heeft reële Fouriercoëfficiënten a_k en b_k , en g heeft reële Fouriercoëfficiënten c_k en d_k . Je kunt nu het volgende programma afwerken.

Opgave 6.28. De Cauchy-Schwartz ongelijkheid zegt dat $|f \cdot g| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

1. Bewijs deze ongelijkheid voor functies f en g met $\|f\|_2 = \|g\|_2 = 1$ door $0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 dx = \dots$ uit te werken.
2. Bewijs de Cauchy-Schwartz ongelijkheid. Hint: pas onderdeel 1 toe op $f(x)/\|f\|_2$ en $g(x)/\|g\|_2$.
3. Bewijs de driehoeksongelijkheid voor de 2-norm

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2. \quad (6.15)$$

Opgave 6.29. Laat zien dat

$$\|S_N f\|_2^2 = \pi \left(\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

Opgave 6.30. Laat zien dat

$$S_N f \cdot S_N g = \pi \left(\frac{1}{2} a_0 c_0 + \sum_{k=1}^N (a_k c_k + b_k d_k) \right)$$

Opgave 6.31. Definieer $R_N f = f - S_N f$ en, met

$$\sigma_N f = \frac{1}{N+1} (S_0 f + S_1 f + \cdots + S_N f),$$

ook $\rho_N f = f - \sigma_N f$.

1. Laat zien dat $R_N f \cdot S_N f = 0$.
2. Laat zien dat $R_N f \cdot \sigma_N f = 0$.
3. Laat zien dat

$$\|S_N f\|_2^2 + \|R_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2,$$

zodat $\|S_N f\|_2 \leq \|f\|_2$, en dat (Bessel's ongelijkheid)

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx. \quad (6.16)$$

4. Laat zien dat

$$\|R_N f\|_2^2 + \|\sigma_N f - S_N f\|_2^2 = \|\rho_N f\|_2^2.$$

5. In Opgave 6.25 is bewezen dat als f continu en 2π -periodiek is dat dan $\sigma_N f \rightarrow f$ uniform op \mathbb{R} als $N \rightarrow \infty$. Bewijs dat in dat geval ook $\|R_N f\|_2 \rightarrow 0$ en dat dus (gelijkheid van Parseval)

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx. \quad (6.17)$$

Hint: gebruik onderdeel 4.

6. Laat zien dat

$$\begin{aligned} f \cdot g &= (S_N f + R_N f) \cdot (S_N g + R_N g) \\ &= S_N f \cdot S_N g + R_N f \cdot R_N g. \end{aligned}$$

7. Bewijs dat als f en g continu en 2π -periodiek zijn, dat

$$\frac{1}{2} a_0 c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k + b_k d_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx = \frac{1}{\pi} f \cdot g. \quad (6.18)$$

Hint: gebruik onderdeel 6, som 6.30 en pas de Cauchy-Schwartz ongelijkheid toe op $R_N f \cdot R_N g$.

Opgave 6.32. In deze som laten we zien dat de gelijkheid van Parseval (6.17) ook geldt voor 2π -periodieke stuksgewijs continue functies. Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zo'n functie zijn. Hint: laat zien dat er een rij 2π -periodieke continue functies $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bestaat met

$$\|f_k - f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f_k(x) - f(x))^2 dx \rightarrow 0$$

als $k \rightarrow \infty$. Als f discontinu is in x_0 , vervang $f(x)$ dan op het interval $(x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k})$ door een lineaire functie, zó dat de nieuwe functie f_k continu is en lineair op $(x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k})$.

Opgave 6.33. Bewijs de gelijkheid van Parseval (6.17) voor f . Hint: de gelijkheid van Parseval is equivalent met $\|R_N f\|_2 \rightarrow 0$. Schrijf

$$R_N f = f - f_k + f_k - S_N f_k + S_N f_k - S_N f = (f - f_k) + R_N f_k + S_N(f_k - f)$$

en gebruik de driehoeksongelijkheid (6.15) en som 3 voor $S_N(f_k - f)$ om $\|R_N f\|_2$ klein te krijgen. Kies hiertoe, gegeven een $\epsilon > 0$, eerst een vaste k groot genoeg, en redeneer dan verder.

Opgave 6.34. (Het Gibbs verschijnsel) De Fouriersinusreeks van $f(x) = \pi - x$ heeft $b_n = \frac{2}{n}$. De oneven 2π -periodieke uitbreiding van f heeft $f(0^+) = \pi$ en $f(0^-) = -\pi$. De N -de Fouriersinussom is

$$S_N f(x) = \sum_{n=1}^N \frac{2}{n} \sin nx.$$

1. Laat zien dat

$$x + S_N f(x) = \int_0^x D_N(s) ds.$$

2. De integraal in het rechterlid heeft extrema in de nulpunten van D_N . Het eerste maximum M_N rechts van $x = 0$ is dus in

$$x = x_N = \frac{\pi}{N + \frac{1}{2}}.$$

Laat zien dat

$$\begin{aligned} M_N &= \int_0^{\frac{\pi}{N + \frac{1}{2}}} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})s)}{\sin \frac{1}{2}s} ds = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sin(\frac{1}{2} \frac{t}{N + \frac{1}{2}})} \frac{1}{N + \frac{1}{2}} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \frac{t}{\sin(\frac{2t}{2N+1})} dt. \end{aligned}$$

3. Laat zien dat

$$\frac{\frac{t}{2N+1}}{\sin\left(\frac{t}{2N+1}\right)} \rightarrow 1,$$

uniform op $t \in [0, \pi]$.

4. Laat zien dat

$$M_N \rightarrow 2 \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$$

als $N \rightarrow \infty$.

5. De functie $S_N f(x)$ heeft in $x = x_N$ een negatieve afgeleide. Leg uit waarom ook het eerste maximum van $S_N f(x)$ rechts van $x = 0$ naar

$$2 \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt$$

convergeert als $N \rightarrow \infty$. Dat is groter dan $\pi = f(0^+)$ met een factor 1.178979744.

Opgave 6.35. De integraal $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ is en wel uit te rekenen, met behulp van de complexe functie $\frac{e^{iz}}{z}$, zie Sectie 81 en 82 van Churchill & Brown.

6.5 Dat andere inproduct met afgeleiden

De deelruimte V van H die de rol gaat spelen zoals in de eerdere voorbeelden met $H = l^{(2)}$ wordt gedefinieerd door het inproduct

$$((f, g)) = (f', g'),$$

hetgeen niet voor alle f en g in H gedefinieerd is, net zoals het inproduct in Opgave 5.18 niet voor alle x en y in $l^{(2)}$ gedefinieerd is. Informeel wordt V gegeven door

$$V = \{f \in H : f' \in L^2(-\pi, \pi)\},$$

waarbij met f ook f' steeds 2π -periodiek wordt uitgebreid tot een functie gedefinieerd op heel \mathbb{R} .

Dat uitbreiden is makkelijk, en komt in de opgaven hieronder eerst nog aan de orde, ook ter voorbereiding van wat een stuk lastiger is: *wat betekent het dat f' als meetbare en kwadratisch integreerbare functie bestaat?*

Opgave 6.36. Ga na dat (ook) voor functies f in $L^2(-\pi, \pi)$ met $f(-\pi) \neq f(\pi)$ er geen problemen zijn met de uitbreiding f naar een $f \in H$.

Opgave 6.37. Zijn er functies f in $L^2(-\pi, \pi)$ waarvoor aan $f(0)$ geen betekenis¹¹ kan worden gegeven?

Opgave 6.38. Er is maar één 2π -periodieke oneven¹² functie Ka die voldoet aan $Ka(x) = 1$ voor $0 < x < \pi$. Schets de grafiek van Ka en maak een rij 2π -periodieke oneven continue functies Ka_1, Ka_2, \dots waarvoor geldt dat $|Ka_n - Ka|_2 \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Hint: schets eerst de grafieken van Ka_n .

Opgave 6.39. Bewijs dat een oneven 2π -periodieke functie wordt vastgelegd door zijn functiewaarden op het interval $(0, \pi)$. Hint: gebruik de regels $f(-x) = -f(x)$ en $f(x) = f(x + 2\pi)$. Wat is $f(0)$? En $f(\pi)$?

Leuke functies om over na te denken, maar zulke functies komen we niet tegen als we een zinvolle definitie van de uitspraak dat f' bestaat in bijvoorbeeld $L^2(0, \pi)$ kunnen geven. Wel is het zo f' best zelf zo'n functie kan zijn. Bijvoorbeeld als je f definieert als

$$f(x) = \int_0^x S(s) ds,$$

met een begrensde S zoals eerder gemaakt in Opgave 6.8. Iedere primitieve functie

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds$$

van een f in H is natuurlijk in principe kandidaat om tot V te behoren.

¹¹ Lees: een betekenisvolle waarde kan worden toegekend?

¹² $Ka(-x) = -Ka(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 6.40. Verifieer dat zo'n F een begrensde (2π -periodieke) functie is als $f \in H$, en dat het essentieel is dat in de definitie van H is opgenomen dat voor $f \in H$ moet gelden dat¹³

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0!$$

De ruimte V krijgen we nu als bestaande uit de primitieve functies van functies in H , waarbij de spreekwoordelijke constante wel goed gekozen moet worden.

Opgave 6.41. Als $f \in H$ dan is F periodiek. Waarom? Ga na dat er voor elke $f \in H$ precies één constante C is waarvoor $x \rightarrow F(x) - C$ in H zit.

We weten nu dus wat V moet zijn. De ruimte

$$\{F \in L^2_{loc}(\mathbb{R}) : (\forall x \in \mathbb{R}) F(x) = F(x + 2\pi), f = F' \in L^2_{loc}(\mathbb{R})\}$$

is gelijk aan

$$\{F \in L^2_{loc}(\mathbb{R}) : f = F' \in H\}$$

de ruimte van *alle* primitieven F van functies $f \in H$, en V krijgen we door voor iedere primitieve F precies die constante te nemen waarmee de primitieve gemiddeld nul wordt. Dus

$$V = \{F \in L^2_{loc}(\mathbb{R}) : f = F' \in H, \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = 0\}$$

De kwadratisch integreerbare periodieke functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vormen een nul-dimensionale vectorruimte waarover nog wel het een en ander te vertellen is. Dat zullen we hier niet doen. Periodieke functies kunnen natuurlijk wel *lokaal* kwadratisch integreerbaar zijn. We schrijven

$$L^2_{loc}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \in L^2(I) \text{ voor elke begrensde interval } I \subset \mathbb{R}\},$$

maar de periodieke functies in $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ vormen geen vectorruimte¹⁴. En $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ zelf is wel een vectorruimte maar geen genormeerde ruimte, althans niet met een natuurlijke¹⁵ norm. Maar

$$H = \{f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}) : (\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = f(x + 2\pi); \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0\}$$

¹³ $0! = 1$, maar hier roept het uitroepteken wel.

¹⁴ Waarom niet?

¹⁵ Bas, weet je nog, de discussie na je voordracht op de VU?

wel, de ruimte van 2π -periodieke kwadratisch integreerbare¹⁶ periodieke functies, met inproduct

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx,$$

waarbij we de ruimte nu beperken tot functies die gemiddeld nul zijn.

De constante functies zijn in deze H buitengesloten, omdat ze in het verhaal dat gaat volgen een vervelend buitenbeentje zijn. Bijgevolg van deze keuze zitten er in H ook geen positieve functies trouwens. Wel in H zitten de functies c_n en s_n uit Opgave 5.1 en net als elke functie in H zijn deze door beperking tot het interval $(-\pi, \pi)$ op te vatten als element van

$$\tilde{H} = \{f \in L^2(-\pi, \pi) : \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0\},$$

een ruimte die we voor gemak met H identificeren door iedere $f \in \tilde{H}$ weer uit te breiden tot heel \mathbb{R} middels $f(x) = f(x + 2\pi)$ voor alle x .

6.6 Blipfuncties

Het formulevoorschrift

$$x \xrightarrow{\text{blip}} \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}) & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0, \end{cases}$$

definieert de functie *blip*: $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$ die met goed recht zowel oogverblindend mooi als gruwelijk lelijk genoemd¹⁷ mag worden.

Opgave 6.42. Schets de grafiek van *blip* en onderzoek het gedrag van $\text{blip}'(x)$ als $x \downarrow 0$. En van $\text{blip}''(x)$. En van alle afgeleiden van *blip*. Concludeer dat *alle* afgeleiden van *blip* als continue functies van \mathbb{R} naar \mathbb{R} bestaan!

Opgave 6.43. Je kunt *blip* ook schalen. Definieer blip_n door

$$\text{blip}_n(x) = \text{blip}(nx) = \exp(-\frac{1}{nx})$$

en bepaal $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{blip}_n(x)$ voor elke $x \in \mathbb{R}$. De limietfunctie heet de Heaviside¹⁸ functie, hier genoteerd als $He(x)$. Deze functie is niet continu in $x = 0$. De waarde

¹⁶ D.w.z. f is meetbaar en $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx < \infty$.

¹⁷ De naam *blip* heb ik gezien in een mooi boek, weet niet meer welk.

¹⁸ Google Heaviside.

van $He(0)$ als limietwaarde van $blip_n(0)$ is 0, maar net zo vaak wordt $He(0) = \frac{1}{2}$ of $He(0) = 1$ genomen. Of zelfs $He(0) = [0, 1]$.

Opgave 6.44. De functies $blip$ en He zitten niet in $L^2(\mathbb{R})$. Waarom niet? Maar $He - blip$ wel. Waarom? En $He - blip_n$ ook. De affine ruimte

$$He + L^2(\mathbb{R}) = \{f = He + g : g \in L^2(\mathbb{R})\}$$

is voorzien van de 2-metrick

$$d(f, g) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

een volledige metrische ruimte¹⁹. Laat zien zien dat $d(blip_n, He) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.

Opgave 6.45. Definieer de functies $blok_n$ door

$$blok_n i(x) = blip_n(x) blip_n(\pi - x)$$

en laat zien dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} blok_n(x) = \chi_{(0, \pi)}(x)$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Waarom geldt dat $blok_n \rightarrow \chi_{(0, \pi)}$ in 2-norm?

Opgave 6.46. Dezelfde vragen als in Opgave 6.45 maar nu voor $blok_n$ gedefinieerd door

$$blok_n i(x) = blip_n\left(x - \frac{1}{n}\right) blip_n\left(\pi - \frac{1}{n} - x\right),$$

Opgave 6.46 laat zien dat $\chi_{(0, \pi)}$, opgevat als

Opgave 6.47. Het is goed om op een rijtje te zetten hoe je zeker weet dat elke $f \in L^2(-\pi, \pi)$ te benaderen is met een rij functies f_1, f_2, \dots in

$$C_c^\infty(-\pi, \pi),$$

¹⁹ Wat is dat?

de ruimte van van functies $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ die oneindig vaak differentieerbaar zijn en identiek nul zijn in de buurt van $x = 0$ en $x = 2\pi$. Benaderen betekent hier dat $f_n \rightarrow f$ in de 2-norm. Het speciale geval om eerst te begrijpen is

$$f(x) = \chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in I \\ 0; & \text{als } x \notin I, \end{cases}$$

met I een interval.

6.7 Intermezzo: out of Hilbertspace

De 2-norm is een bijzonder geval van

$$f \rightarrow |f|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

waarmee voor $1 \leq p < \infty$ de p -norm op $C[-\pi, \pi]$ wordt gedefinieerd, en

$$|f|_{\infty} = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|,$$

de maximumnorm van f . Deze p -normen ($1 \leq p \leq \infty$) zijn te vergelijken met

$$|x|_p = \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

de p -norm van $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$.

Opgave 6.48. Terug naar de overgeslagen calculussommetjes, bewijs (de ongelijkheid van Hölder)

$$|x \cdot y| \leq |x|_p |y|_q$$

voor $1 \leq p, q \leq \infty$ die voldoen aan

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

en $x = (x_1, \dots, x_n)$ en $y = (y_1, \dots, y_n)$ in \mathbb{R}^N . Hint: leg eerst uit waarom het *geen* beperking is om aan te nemen dat $|x|_p = |y|_q = 1$.

Opgave 6.49. Bewijs dat $x \rightarrow |x|_p$ een norm is op \mathbb{R}^N .

Opgave 6.50. Bewijs dat $|x|_p \rightarrow |x|_\infty$ als $p \rightarrow \infty$.

Opgave 6.51. Verzin en maak de analoge opgaven voor

$$f \rightarrow \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

de p -norm op $C[-\pi, \pi]$.

7 Lebesgue's Differentiatie Stelling

Wat we nodig hebben is dat meetbare lokaal integreerbare functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voor bijna alle x voldoen aan

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(s) ds,$$

en die uitspraak bekijken we nu eerst voor meetbare functies $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f| < \infty.$$

Zulke functies vormen de ruimte $L^1(\mathbb{R}^N)$, met norm

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |f|.$$

Omdat $\|f\|_1 = 0$ niet impliceert dat $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^N$ maar wel dat de maat van

$$\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}$$

gelijk is aan nul, moeten we $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ zien als een equivalentieklasse $[f]$ van integreerbare meetbare functies $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ onder de relatie

$$f \sim g \quad \text{als} \quad |\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq g(x)\}| = 0.$$

We gebruiken hier $|A|$ als notatie voor de maat van een meetbare verzameling $A \subset \mathbb{R}^N$.

Voor iedere $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ en iedere bol

$$B(\xi, r) = \{x \in \mathbb{R}^N : (x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_n - \xi_n)^2 < r^2\}$$

bestaat

$$(A_r f)(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f$$

onafhankelijk van de keuze van $f \in [f]$ en de verzameling

$$\mathcal{N}_f = \{x \in \mathbb{R}^N : \lim_{r \downarrow 0} (A_r f)(x) \text{ bestaat niet}\}$$

dus ook. Als de limiet wel bestaat dan ligt het voor de hand om de representant $f \in [f]$ zo te kiezen dat de limiet gelijk is aan $f(x)$ voor alle $x \notin \mathcal{N}_f$, en dat voor alle zulke x , maar daarvoor moeten de x -waarden waarvoor de limiet wel bestaat maar

$$\lim_{r \downarrow 0} (A_r f)(x) \neq f(x),$$

wel een meetbare verzameling van maat 0 vormen.

Een alternatieve manier is om $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ als equivalentklasse van Cauchyrijen van continue functies f_n die elk buiten een bol B_n identiek nul zijn. Van zo'n rij functies eisen we dan dat

$$\|f_n - f_m\| = \int_{\mathbb{R}^N} |f_n - f_m| \rightarrow 0$$

als $m, n \rightarrow \infty$, waarbij de integralen de facto gewone Riemann integralen over bollen $B_{m,n}$ zijn waarbuiten f_n en f_m nul zijn. Twee zulke Cauchyrijen heten equivalent als $\|f_n - g_n\|_1 \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$, en

$$(A_r f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f_n$$

is weer ondubbelzinning gedefinieerd, en daarmee ook \mathcal{N}_f .

We bekijken nu hoe $A_r f(x)$ zich gedraagt als $r \rightarrow 0$ en dat doen we eerst voor een gegeven integreerbare meetbare functie $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ met behulp van een te kiezen functie $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ die continu is en nul buiten een bol. We schrijven

$$A_r f(x) - f(x) = A_r f(x) - A_r g(x) + \underbrace{A_r g(x) - g(x)}_{\rightarrow 0 \text{ als } r \downarrow 0} + g(x) - f(x),$$

$$\limsup_{r \downarrow 0} |A_r f(x) - f(x)| \leq \limsup_{r \downarrow 0} |A_r f(x) - A_r g(x)| + |g(x) - f(x)|, \quad (7.1)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\leq (H(f-g))(x)}$$

waarin we Hardy-Littlewood functie (van $f - g$) gebruiken, die voor iedere $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ wordt gedefinieerd als

$$(Hf)(x) = \sup_{r>0} (A_r |f|)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f| \in [0, \infty],$$

met andere woorden, $(H(f-g))(x)$ is de grootst mogelijke gemiddelde waarde van $|f(x) - g(x)|$ op een bollen gecentreerd in x . Voor elke $\epsilon > 0$ geldt nu dat

$$\{x \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r \downarrow 0} |A_r f(x) - f(x)| > 2\epsilon\} \subset$$

$$\{x \in \mathbb{R}^N : H(f-g)(x) > \epsilon\} \cup \{x \in \mathbb{R}^N : |f(x) - g(x)| > \epsilon\}, \quad (7.2)$$

en dus dat (met verkorte notatie)

$$|\{\limsup_{r \downarrow 0} |A_r f(x) - f(x)| > 2\epsilon\}| \leq \underbrace{|\{H(f-g)(x) > \epsilon\}|}_{\text{nog af te schatten}} + \frac{1}{\epsilon} \|f - g\|,$$

hetgeen we door g geschikt te kiezen willekeurig klein willen praten teneinde te concluderen dat

$$\forall \epsilon > 0 : |\{\limsup_{r \downarrow 0} |A_r f(x) - f(x)| > 2\epsilon\}| = 0. \quad (7.3)$$

In dat geval is ook

$$|\{\limsup_{r \downarrow 0} |A_r f(x) - f(x)| > 0\}| = 0, \quad (7.4)$$

met andere woorden, de verzamelingen van punten waarvoor

$$\lim_{r \downarrow 0} A_r f(x) \quad (7.5)$$

niet bestaat of niet samenvalt met $f(x)$ heeft maat nul.

Voor het afschatten van $H(f-g)(x)$ merken we op dat (neem even $g \equiv 0$) de verzameling

$$E_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^N : (Hf)(x) > \epsilon\}$$

open is omdat

$$x \in E_\epsilon \iff \exists r > 0 : \underbrace{\int_{B(x,r)} |f|}_{\text{continu in } r,x} > \epsilon |B(x,r)|. \quad (7.6)$$

De continuïteit volgt uit de gedomineerde convergentiestelling.

Hoe groot kan E_ϵ zijn? Iedere compacte $K \subset E_\epsilon$ wordt overdekt door slechts eindig veel bolletjes zoals in (7.6), zeg

$$K \subset B_1 \cup \dots \cup B_m,$$

en als deze bolletje voor elke compacte $K \subset E_\epsilon$ disjunct gekozen kunnen worden dan volgt voor iedere compacte $K \subset E_\epsilon$ dat

$$\epsilon |K| \leq \epsilon (|B_1| + \dots + |B_m|) \leq \int_{B_1} |f| + \dots + \int_{B_m} |f| = \int_{B_1 \cup \dots \cup B_m} |f| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f|,$$

en daarmee dat $\epsilon |E_\epsilon| \leq \|f\|_1$.

Zo'n disjuncte keuze is in het algemeen natuurlijk niet mogelijk maar met een extra factor geldt er wel zo'n schatting. Kies daartoe de grootste bol, zeg B_{j_1} . De bollen B_i waarvoor $B_i \cap B_{j_1} \neq \emptyset$ liggen allemaal in $3B_{j_1}$ waarbij $3B_{j_1}$ staat voor de bol met hetzelfde middelpunt als B_{j_1} maar met drie keer zo grote straal. Als er nog andere bollen zijn neem dan daarvan weer de grootste, zeg B_{j_2} . Die andere bollen hebben allemaal $B_i \cap B_{j_1} = \emptyset$, en die waarvoor $B_i \cap B_{j_2} \neq \emptyset$ liggen allemaal in $3B_{j_2}$. Als er nog andere bollen zijn waarvoor $B_i \cap B_{j_1} = B_i \cap B_{j_2} = \emptyset$ neem dan daarvan weer de grootste, zeg B_{j_3} . Enzovoorts. Dit proces breekt af, mogelijk na de keuze van j_1 , mogelijk na de keuze van j_2 , of misschien pas na de keuze van j_k . Als B_{j_k} met $1 \leq k \leq m$ de laatste gekozen grootste bol is, dan zijn¹

$$B_{j_1}, \dots, B_{j_k}$$

onderling disjunct en geldt

$$B_1 \cup \dots \cup B_m \subset 3B_{j_1} \cup \dots \cup 3B_{j_k},$$

zodat

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &\geq \int_{B_1 \cup \dots \cup B_m} |f| \geq \int_{B_{j_1} \cup \dots \cup B_{j_k}} |f| = \int_{B_{j_1}} |f| + \dots + \int_{B_{j_k}} |f| \\ &\geq \epsilon(|B_{j_1}| + \dots + |B_{j_k}|) = 3^{-N} \epsilon(|3B_{j_1}| + \dots + |3B_{j_k}|) \\ &\geq 3^{-N} \epsilon |3B_{j_1} \cup \dots \cup 3B_{j_k}| \geq 3^{-N} \epsilon |B_1 \cup \dots \cup B_m| \geq 3^{-N} \epsilon |K| \end{aligned}$$

voor alle kompakte $K \in E_\epsilon$ en dus volgt dat

$$\epsilon |E_\epsilon| \leq 3^N \|f\|_1, \quad (7.7)$$

hetgeen we gebruiken in (7.2) om te concluderen dat

$$|\{x \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r \downarrow 0} |A_r f(x) - f(x)| > 2\epsilon\}| \leq \frac{1}{\epsilon} (3^N + 1) \|f - g\|_1. \quad (7.8)$$

Als elke $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ willekeurig goed in 1-norm te benaderen is met continue functies g die nul zijn buiten een bol, volgt (7.4).

Per definitie van meetbaarheid en integreerbaarheid is iedere $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ zowel de puntsgewijze limiet als limiet in 1-norm van een rij functies van de vorm

$$\sum_{k=1}^K a_k \chi_{E_k}$$

¹ De uitspraak die nu volgt bewijst Vitali's covering lemma.

waarin E_1, \dots, E_K onderling disjuncte meetbare verzamelingen zijn met eindige maat, en

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in E \\ 0 & \text{als } x \notin E, \end{cases}$$

de karakteristieke functie van E definieert. De maat van zo'n E wordt als uitwendige maat gedefinieerd via karakteristieke functies van blokken die we met blijkfuncties kunnen benaderen in 1-norm. Bijgevolg kan in (7.8) het rechterlid willekeurig klein gekozen worden.

Zo hebben we Lebesgue's differentiatiestelling nu bewezen. Iedere lokaal integreerbare meetbare functie heeft de eigenschap voor bijna elke x geldt dat

$$f(x) = \lim_{r \downarrow 0} A_r f(x).$$

Ook zonder maat- en integratie theorie is zo'n uitspraak te formuleren en bewijzen, rechtstreeks vanuit de definitie van $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ als equivalentklasse van Cauchyrijen van continue functies f_n die elk buiten een bol B_n identiek nul zijn. Van zo'n rij functies eisen we dan dat

$$\|f_n - f_m\| = \int_{\mathbb{R}^N} |f_n - f_m| \rightarrow 0$$

als $m, n \rightarrow \infty$, waarbij de integralen de facto gewone Riemann integralen over bollen $B_{m,n}$ zijn waarbuiten f_n en f_m nul zijn. Twee zulke Cauchyrijen heten equivalent als $\|f_n - g_n\|_1 \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$, en

$$(A_r f)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f_n$$

is weer ondubbelzinning gedefinieerd, en daarmee ook \mathcal{N}_f , maar de puntgewijze limiet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

hoeft in het algemeen niet te bestaan. Maar wel geldt

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \underbrace{|f_n(x) - A_r f_n(x)|}_{\rightarrow 0 \text{ als } r \downarrow 0} + \underbrace{|A_r f_n(x) - A_r f_m(x)|}_{\leq H(f_n - f_m)(x)} + \underbrace{|A_r f_m(x) - f_m(x)|}_{\rightarrow 0 \text{ als } r \downarrow 0},$$

en dus dat we, gegeven $\epsilon > 0$ en $\eta > 0$,

$$|\{x \in \mathbb{R}^N : |f_n(x) - f_m(x)| > \epsilon\}| \leq \frac{1}{\epsilon} 3^N \|f_n - f_m\| \leq \eta$$

kunnen forceren door $m, n \geq N$ te kiezen waarbij N afhangt van $\eta \epsilon 3^{-N}$ via de Cauchy-eigenschap van de rij f_n .

Neem nu $\epsilon_k \downarrow 0$ en $\eta_k \downarrow 0$ met

$$\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k = \epsilon, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k = \eta$$

en bijbehorende N_k zoals hierboven dan convergeert f_{N_k} uniform op het complement F van de vereniging

$$E = \cup_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^N; |f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_k}(x)| > \epsilon_k\},$$

en

$$|E| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k = \eta.$$

Noem $\eta = \delta_1$, $E = E_1$, $F = F_1$ en herhaal het argument met $\eta = \delta_2 < \delta_1$. Dit geeft E_2 met $|E_2| \leq \delta_1$ en een op $F_2 = E_2^c$ uniform convergente verdere deelrij. Met $\delta_n \downarrow 0$ geeft dit $G_n = F_1 \cup \dots \cup F_n$ met $G_n^c \subset E_n$ en dus $|G_n^c| \leq \delta_n \rightarrow 0$, met steeds verdere deelrijen uniform convergent op G_n . De diagonaal rij convergeert nu op het complement van de nulverzameling $\cap_{n=1}^{\infty} E_n$.

8 Olver

From Fourier series to integral I slightly modify the presentation in 7.1 of Olver. Let $f = f(x)$ be defined on the real line, smooth and $f(x) = 0$ for $|x| \geq l$. Then the (uniformly convergent) Fourier series of f on the interval $[-l, l]$ is obtained via scaling:

$$F(y) = f(x), \quad \frac{x}{l} = \frac{y}{\pi}.$$

We have

$$\begin{aligned} f(x) = F(y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\eta) e^{-in\eta} d\eta e^{iny} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{l} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^l f(\xi) e^{-i\frac{n\pi}{l}\xi} d\xi}_{\widehat{f}(\frac{n\pi}{l}) = \widehat{f}(k_n)} e^{i\frac{n\pi}{l}x}. \end{aligned}$$

Set

$$k_n = n\Delta k, \quad \Delta k = \frac{\pi}{l},$$

and define

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx,$$

then

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k_n) e^{ik_n x} \Delta k.$$

In other words, $f(x)$ is equal to a uniformly convergent sum, which actually is a Riemann sum for

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} dk,$$

and likewise

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k_n)|^2 \Delta k,$$

which is a Riemann sum for

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 dk.$$

Note that these identities remain valid if we increase l . In particular both Riemann sums are independent of Δk in the limit $\Delta k \rightarrow 0$.

Can we conclude that both $f(x)$ and $\int |f(x)|^2$ are also equal to the integrals themselves? The answer will be yes if $\widehat{f}(k)$ is continuous and decays sufficiently fast as $|k| \rightarrow \infty$, to make the tails of both integrals and Riemann sums small. Then we can restrict the convergence argument to integrals and Riemann sums on bounded k -intervals. Since

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[f(x) \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \frac{e^{-ikx}}{-ik} dx \right) = \frac{\widehat{f}'(k)}{ik} = \frac{\widehat{f^{(m)}}(k)}{(ik)^m}$$

and

$$|\widehat{f^{(m)}}(k)| \leq 2l \max_{-l \leq x \leq l} |f^{(m)}(x)|,$$

we can conclude that indeed

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} dk, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 dk$$

for all f in C_c^∞ , the class of smooth compactly supported functions.

Denoting the class of measurable complex valued functions f with bounded $\int |f(x)| dx$ by L^1 and the class with bounded $\int |f(x)|^2 dx$ by L^2 we have that C_c^∞ is dense in L^2 , and that the map

$$\mathcal{F} : C_c^\infty \rightarrow L^1 \cap L^2 \cap C^\infty \subset L^2, \quad \mathcal{F}(f) = \widehat{f}$$

uniquely extends to an isometry

$$\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2.$$

Only if $f \in L^1 \cap L^2$ we can write $\widehat{f}(k)$ as an absolutely convergent integral. The inverse map is the same, up to a reflection in x , that is, for $f = f(k)$,

$$(\mathcal{F}^{-1})f(x) = \widehat{f}(-x).$$

9 Airy scary

I did the calculations below while reading Chapter 8 in Peter Olver's new PDE book with a little help of E.J. Hinch's nice little Cambridge Applied Math textbook on perturbation methods. Just goes to show how beautiful (also applied) complex analysis is.

The Airy function is defined by

$$\text{Ai}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi x + \frac{x^3}{3})} dx,$$

an integral barely convergent. The Airy function plays the same role in the theory for $u_t + u_{xxx} = 0$ as the Gaussian $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ for $u_t = u_{xx}$. Both functions define the spatial profile of the fundamental solution.

Replacing $\xi \in \mathbb{R}$ by $\zeta \in \mathbb{C}$ the Airy function is a complex analytic function of

$$\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\psi}.$$

Replacing also $x \in \mathbb{R}$ by

$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$

one may deform the "real" contour C defined by $z = z(t) = t$ with $-\infty < t < \infty$ to another contour γ_ζ that connects two points at infinity. This can be done (without changing the outcome) as long as the integrals of

$$e^{i(\zeta z + \frac{z^3}{3})} = e^{\Phi(z;\zeta)}$$

over the connecting arcs $|z| = R$ between C and the new contour γ_ζ go to zero as $R \rightarrow \infty$.

To answer the question

$$\text{Ai}(\rho)e^{i\psi} \sim ? \quad \text{as } \rho \rightarrow \infty \quad (\text{for } \psi \text{ fixed}),$$

one chooses the new contour to be one along which the absolute value of the integrand, $e^{\text{Re } \Phi(z;\zeta)}$, is peaked and has fast decay as $|z| \rightarrow \infty$, and along which $\text{Im } \Phi(z;\zeta) = \phi_\zeta$ is a ζ -dependent constant, so that

$$\text{Ai}(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\zeta} e^{i(\zeta z + \frac{z^3}{3})} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\zeta} \underbrace{e^{\text{Re } \Phi(z;\zeta)}}_{\text{real, positive}} dz e^{i\phi_\zeta},$$

in which the integrand is real, although $dz = dx + idy$ will typically still make the integral complex. The factor $e^{i\phi_\zeta}$ contains the "stationary phase"

ϕ_ζ . If M_ζ is the maximum of $\operatorname{Re} \Phi(z; \zeta)$ along γ_ζ , realised in some $z = m_\zeta$, one may also factor out e^{M_ζ} and write

$$\operatorname{Ai}(\zeta) = \frac{e^{M_\zeta + i\phi_\zeta}}{2\pi} \underbrace{\int_{\gamma_\zeta} e^{-f_0(z; \zeta)} dz}_{\rightarrow ? \text{ as } |\zeta| \rightarrow \infty},$$

in which $f_0(z; \zeta) \geq 0$ along γ_ζ . Typically $f_0(z; \zeta)$ has a unique global minimum zero along γ_ζ and $f_0(z; \zeta) \rightarrow +\infty$ as $|z| \rightarrow \infty$ along γ_ζ . Note though that the integrand is likely to be ill-behaved as $\rho = |\zeta| \rightarrow \infty$, also because the contour γ_ζ may disappear in the limit. The resolution of this latter complication may be prepared by scaling x before going to complex variables and making the optimal choice of γ_ζ .

Thus, returning to the definition of $\operatorname{Ai}(\zeta)$ one writes $\operatorname{Ai}(\rho e^{i\psi}) =$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{i(\rho e^{i\psi} x + \frac{x^3}{3})}}_{\text{scale } x = \rho^{\frac{1}{2}} u} dx = \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\rho^{\frac{3}{2}}(e^{i\psi} u + \frac{u^3}{3})} du = \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho^{\frac{3}{2}} \Psi(u)} du,$$

in which you should now view u as $u = \operatorname{Re} w$ with $w = u + iv \in \mathbb{C}$. The effect of this scaling is that the level lines of $\operatorname{Im} \Psi(w)$ are independent of ρ .

One has

$$\Psi(w) = i\left(e^{i\psi} w + \frac{w^3}{3}\right) = f(u, v; \psi) + ig(u, v; \psi),$$

with

$$f(u, v; \psi) = -v \cos \psi - u \sin \psi + v\left(-u^2 + \frac{v^2}{3}\right)$$

and

$$g(u, v; \psi) = u \cos \psi - v \sin \psi + u\left(\frac{u^2}{3} - v^2\right).$$

These harmonic functions have mutually perpendicular level curves. It is convenient to think of the level curves of the imaginary part $g(u, v; \psi)$ as orbits of

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{du}{dt} = f_u = \frac{\partial f}{\partial u} = -\sin \psi - 2uv \\ \dot{v} &= \frac{dv}{dt} = f_v = \frac{\partial f}{\partial v} = -\cos \psi - u^2 + v^2, \end{aligned}$$

a system of ordinary differential equations for $u = u(t)$ and $v = v(t)$. In fact, Cauchy-Riemann gives

$$\frac{df}{dt} = f_u \dot{u} + f_v \dot{v} = f_u^2 + f_v^2 > 0, \quad \frac{dg}{dt} = g_u \dot{u} + g_v \dot{v} = g_u f_u + g_v f_v = 0.$$

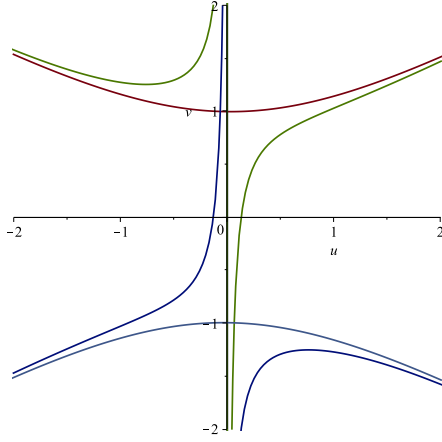


Figure 1: orbits for $\psi = \frac{\pi}{24}$

Thus the only orbits of interest as possible contours are the stable manifolds of saddle points, with the maximum of the real part f along the contour occurring in the saddle point.

This is illustrated for small positive ψ by Figure 1 which pictures the possibly relevant level curves of $g(u, v; \frac{\pi}{24})$. The red curve is the stable manifold of

$$m_\psi = (u_\psi, v_\psi) = \left(-\sin \frac{\psi}{2}, +\cos \frac{\psi}{2}\right)$$

and asymptotes to $3v^2 = u^2$. In particular it has u ranging from $-\infty$ to $+\infty$, and may be written as the graph of a function $v = \varphi(u; \psi)$. The other stable manifold, that of

$$m_{\psi+2\pi} = (u_{\psi+2\pi}, v_{\psi+2\pi}) = \left(+\sin \frac{\psi}{2}, -\cos \frac{\psi}{2}\right),$$

the green curve on the right, fails this condition and has a vertical asymptote. The other branch of this level curve is the green curve on the left which is not a stable manifold of either two saddles. Neither of these two orbits is of direct use in relation to the Airy function, but this will change as ψ is taken larger. Note that although $\text{Ai}(\rho e^{i\psi})$ is 2π -periodic in ψ , the parametrisation of the saddle point m_ψ is only 4π -periodic.

Deforming the contour as explained above,

$$\text{Ai}(\rho e^{i\psi}) = \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho^{\frac{3}{2}}(f(u, \varphi(u; \psi); \psi))} (1 + i\varphi'(u; \psi)) du}_{I(\rho, \psi)} e^{\rho^{\frac{3}{2}}(-\frac{2i}{3}(4\cos^2 \frac{\psi}{2} - 1)\sin \frac{\psi}{2})},$$

in which the phase factor has been made precise. It remains to examine the integral $I(\rho, \psi)$ in the limit $\rho \rightarrow \infty$. Clearly the most important information comes from the (second order) Taylor expansion

$$f = f(u, \varphi(u; \psi); \psi) = M_\psi - a_\psi^2(u - u_\psi)^2 + \dots$$

with minor contributions coming from the higher order terms and the expansion of $\varphi'(u; \psi)$. Setting

$$u = u_\psi + p$$

one sees that to leading order the asymptotic expansion of the integral must be given by

$$I(\rho, \psi) \sim e^{M_\psi \rho^{\frac{3}{2}}} \int \underbrace{e^{-a_\psi^2 \rho^{\frac{3}{2}} p^2}}_{\text{scale } s=a_\psi \rho^{\frac{3}{4}} p} dp \sim \frac{e^{M_\psi \rho^{\frac{3}{2}}}}{a_\psi \rho^{\frac{3}{4}}} \underbrace{\int e^{-s^2} ds}_{\sqrt{\pi}} + \dots,$$

so that

$$\text{Ai}(\rho e^{i\psi}) = \frac{1}{2\rho^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}} \frac{e^{M_\psi \rho^{\frac{3}{2}}}}{a_\psi} e^{\rho^{\frac{3}{2}}(-\frac{2i}{3}(4\cos^2\frac{\psi}{2}-1)\sin\frac{\psi}{2})} (1 + O(\rho^{-\frac{3}{2}}))$$

as $\rho \rightarrow \infty$. Notice the exponential decay combined with the increasingly rapid oscillations because of the phase factor.

At first sight you might expect an $O(\rho^{-\frac{3}{4}})$ error estimate but since the exponential function in the integrand expands as

$$e^{-s^2 + b_3 \frac{p^3}{\rho^{\frac{3}{4}}} + b_4 \frac{p^4}{\rho^{\frac{6}{4}}} + b_5 \frac{p^5}{\rho^{\frac{9}{4}}} + \dots} = e^{-s^2} \left(1 + (b_3 \frac{p^3}{\rho^{\frac{3}{4}}} + \dots) + \frac{1}{2} (b_3 \frac{p^3}{\rho^{\frac{3}{4}}} + \dots)^2 + \dots \right)$$

the higher order terms in the expansion of $\text{Ai}(\rho e^{i\psi})$ involve the integrals

$$\int s^n e^{-s^2} ds \quad (n = 3, 4, \dots)$$

of which the odd ones vanish. Therefore a contribution of the first b_3 -term appears only in combination with the first order term in the expansion of $\varphi'_\psi(u_\psi; \psi)$ (the second order term in the expansion of $\varphi_\psi(u_\psi; \psi)$). It is an exercise to make the expansion more precise.

One has

$$M_\psi = -\frac{2}{3} \left(4 \cos^2 \frac{\psi}{2} - 3 \right) \cos \frac{\psi}{2},$$

and by direct but tedious calculation the stable manifold is given by

$$v = \varphi_\psi(u) = \varphi_\psi(-s+p) = \frac{-sc + p\sqrt{1 - \frac{4}{3}sp + \frac{1}{3}p^2}}{-s + p} \quad (c = \cos \frac{\psi}{2}, s = \sin \frac{\psi}{2}).$$

You should recognise a discriminant under the square root, which for the level curve going through the saddle has the property that it is everywhere positive, except in the saddle point m_ψ . Expansion gives

$$\varphi_\psi(-s + p) = c + \frac{-1 + c}{s}p + \frac{1}{3} \frac{2c - 1}{c + 1}p^2 + \dots$$

For $\psi = 0$ one has

$$v = \varphi_0(u) = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{3}u^2} = 1 + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{72}u^4 + \dots$$

and

$$f(u, \varphi_0(u)) = -2(1 + \frac{4}{9}u^2)\sqrt{1 + \frac{1}{3}u^2} = -\frac{2}{3} - u^2 - \frac{5}{36}u^4 + \dots,$$

so that

$$a_0 = 1, M_0 = -\frac{2}{3}, A_0 = 0,$$

and

$$\text{Ai}(\xi) \sim \frac{e^{-\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}\xi^{\frac{1}{4}}}$$

as $\xi \rightarrow +\infty$, give or take a mistake in the constants, without oscillations.

Increasing ψ there are changes as ψ crosses $\frac{\pi}{3}$ and $\frac{2\pi}{3}$. For all $0 \leq \psi < \frac{2\pi}{3}$ it still holds that

$$\text{Ai}(\rho e^{i\psi}) = \frac{\rho^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho^{\frac{3}{2}}(f(u, \varphi(u; \psi); \psi))} (1 + i\varphi'(u; \psi)) du e^{\rho^{\frac{3}{2}}(-\frac{2i}{3}(4\cos^2 \frac{\psi}{2} - 1)\sin \frac{\psi}{2})}.$$

Figure 2 shows the relevant orbits for $\psi = \frac{15\pi}{24}$, with the same stable manifold defining the contour, and the same asymptotics still valid, but with a different sign for M_ψ , as Figure 3 shows. The sign change occurs at $\frac{\pi}{3}$. Thus for $\frac{\pi}{3} < \psi < \frac{2\pi}{3}$ there is exponential growth of $\text{Ai}(\rho e^{i\psi})$ as $\rho \rightarrow \infty$, while the nonzero phase factor accounts for increasingly rapid oscillations.

At $\psi = \frac{2\pi}{3}$, when the growth is maximal (and no oscillations, see Figure 8), the diagram (and the Maple automatic colour coding) changes. All orbits in Figure 4 are in the stable or unstable manifolds of the saddle points.

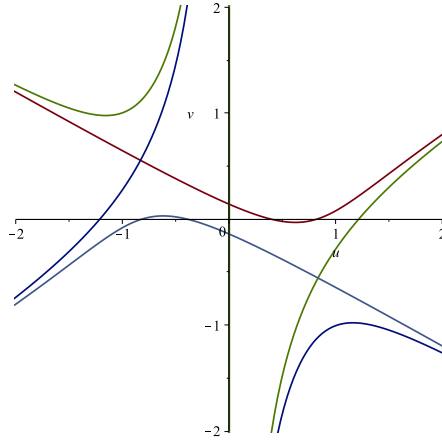


Figure 2: orbits for $\psi = \frac{15\pi}{24}$

The appropriate contour now consists of 3 orbits: the 2 orbits in the stable manifold of $m_{\frac{2\pi}{3}}$ (one of which is in the unstable manifold of $m_{\frac{8\pi}{3}}$), and one orbit in the stable manifold of $m_{\frac{8\pi}{3}}$. Can you see which one? You should convince yourself that $M_{\frac{8\pi}{3}}$ only enters the asymptotics beyond any relevant order.

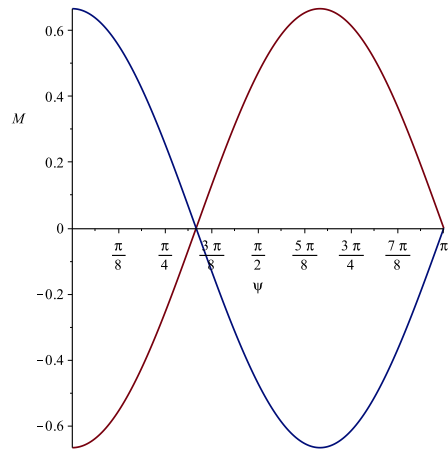
Only as ψ is increased to $\psi = \pi$ both M_π and $M_{3\pi}$ are on par: $M_\pi = M_{3\pi} = 0$. The phases are then $\phi_\pi = \frac{2}{3}$ and $\phi_{3\pi} = -\frac{2}{3}$, and the two stable manifolds are given by

$$v = \frac{(u+1)\sqrt{u(u-2)}}{u\sqrt{3}} \quad (u < 0), \quad v = \frac{(u-1)\sqrt{u(u+2)}}{u\sqrt{3}} \quad (u > 0).$$

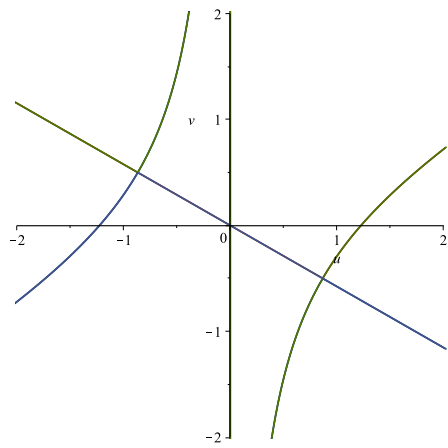
You can now compute the expansion using both contours, with u running from $-\infty$ to 0 for the first integral and from 0 to ∞ for the second. Note the symmetry in Figure 7.

Observe that for $\frac{2\pi}{3} < \psi \leq \pi$ the contours are different. In Figures 5 you see the red curve turning blue after the turning point, and as it escapes to infinity along the negative v -axis it is joined by the green curve which is the stable manifold of the other saddle point. As in the case that $\psi = \pi$, the appropriate contour consists in fact of two contours: the sum of the integrals along both stable manifolds defines $\text{Ai}(\rho e^{i\psi})$. For $\psi < \pi$ the main contribution comes from the contour on the left. Solving a cubic equation this contour can be written as a graph $u = \varphi(v)$, but the main contribution can be computed as above, still writing $v = \varphi(u)$ near the saddle point.

A similar program works for the solution of $u_t + \frac{1}{3}u_{xxx} = 0$ that starts



Figuur 3: M_ψ and $M_{\psi+2\pi}$



Figuur 4: orbits for $\psi = \frac{16\pi}{24} = \frac{2\pi}{3}$

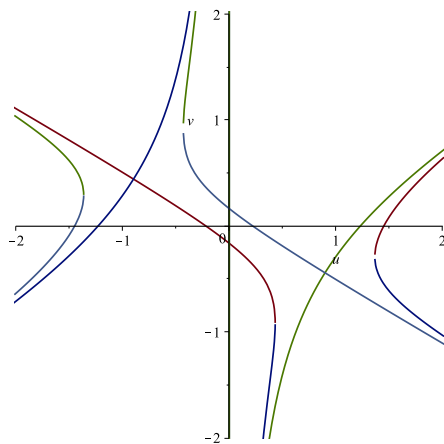


Figure 5: orbits for $\psi = \frac{17\pi}{24}$

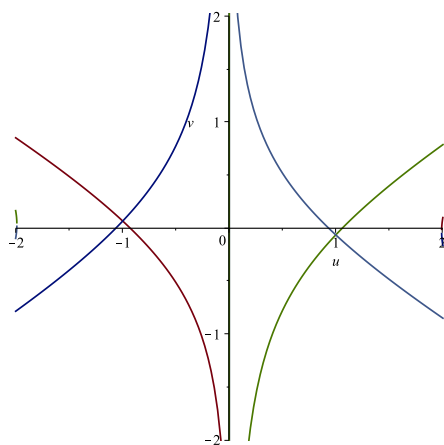


Figure 6: orbits for $\psi = \frac{23\pi}{24}$

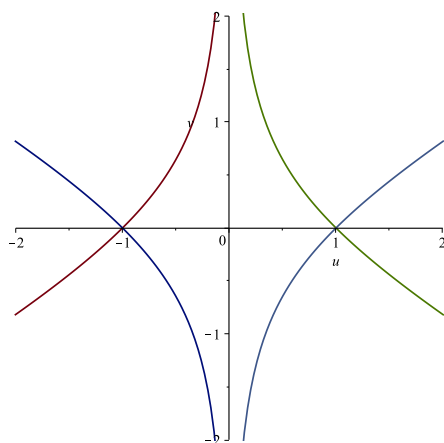


Figure 7: orbits (stable manifolds: blue curves) for $\psi = \frac{24\pi}{24} = \pi$

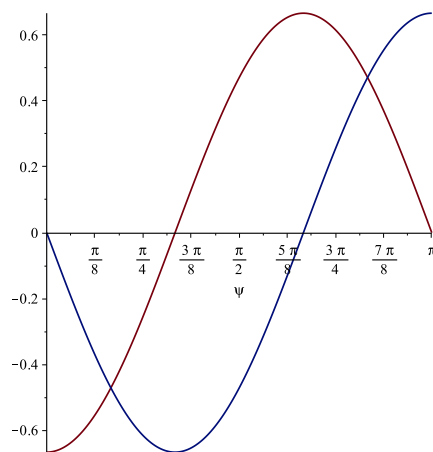


Figure 8: Amplitude M_ψ (red) and phase ϕ_ψ , changes at $\psi = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$.

from a “wave packet”

$$u_0(x) = e^{-\frac{x^2}{4a}} e^{ik_0x},$$

along lines $x = ct + \xi$. One then has

$$u(t, ct + \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(c + \frac{1}{3}k^2)t + i\xi k - a(k - k_0)^2} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\Phi} dk.$$

Replace k by $z = x + iy$ (not the same x of course) and write

$$\Phi = \Phi(z) = \Phi(z; t) = \Phi(z; t, \xi, k_0, a) = f + ig$$

with

$$f = -ty(c + x^2 - \frac{1}{3}y^2) + a(-(x - k_0)^2 + y^2) - \xi y$$

and

$$g = tx(c + \frac{1}{3}x^2 - y^2) - 2a(x - k_0)y + \xi x.$$

Then as before one may rewrite

$$u(t, ct + \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\Phi(x;t)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma} e^{\Phi(z;t)} dz$$

in which γ consists of orbits in stable manifolds of a suitable gradient flow of f , which is defined by

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{t} \frac{\partial f}{\partial x} = -2xy - \frac{2a}{t}(x - k_0), \\ \dot{y} &= \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{t} \frac{\partial f}{\partial y} = -c - x^2 + y^2 + \frac{2ay - \xi}{t}. \end{aligned}$$

Unlike in the analysis of the Airy function integral, there is now no need to scale x and y , because in the limit $t \rightarrow \infty$ the diagram in the x, y -plane is well defined. For $c = 1$ it is the same as in Figure 7 and for $c = -1$ it coincides with Figure 9 (with u, v replaced by x, y). Unlike the u, v -diagram the x, y -diagram varies with the parameter under consideration, as the role of ρ is now played by t . One computes the relevant unstable manifold(s) directly from solving $g = \phi$, which is a quadratic equation in y , asking that the discriminant

$$D = \frac{4}{3}x^2(x^2 + 3c)t^2 + 4x(\xi x - \phi)t + 4a^2(x - k_0)^2$$

of this equation is positive except in the saddle point, thus first determining simultaneously the saddle point and the phase ϕ by solving

$$D = \frac{dD}{dx} = 0.$$

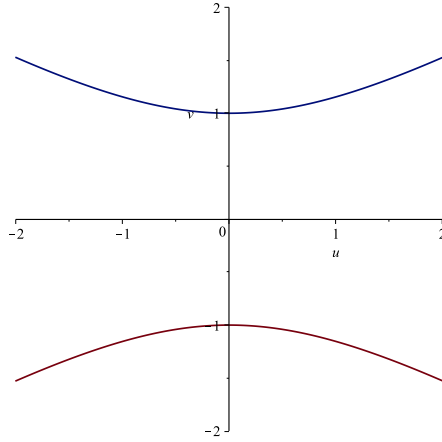


Figure 9: u, v -plane for $\psi = 0$, the vertical axis also consist of orbits

The phase ϕ then drops out of

$$x \frac{dD}{dx} - D = t^2 x^4 + (a^2 + \xi t + ct^2)x^2 - k_0^2 a^2 = 0,$$

which determines the square of the positive solution $x = x_c > 0$ uniquely in terms of the parameters t, c, ξ, a , the y -coordinate $y = y_c$. The phase ϕ_c and the value M_c of f in the saddle point (x_c, y_c) are then given by

$$y_c(t) = \frac{a(k_0 - x_c)}{x_c t}, \quad \phi_c(t) = -\frac{2tx_c^3}{3} - \frac{2a^2 k_0(x_c - k_0)}{x_c t},$$

and

$$M_c(t) = -a(x_c - k_0)^2 - \frac{a^3(x_c + 2k_0)(x_c - k_0)^2}{3x_c^3 t^2}.$$

For the values of y, ϕ, M in the other saddle point replace x_c by $-x_c$. Note that $x_c = x_c(t)$ and likewise for y_c, ϕ_c, M_c (the other dependencies are also suppressed in the notation). Observe the different behaviours as $t \rightarrow \infty$ for $c < 0$ and $c > 0$.

At this point I found it convenient to continue the calculations for the stable manifold with x_c implicitly defined by the quartic $x \frac{dD}{dx} - D$ and all other quantities explicitly in terms of x_c . With

$$x = x_c + u, \quad y = y_c + v,$$

the real and imaginary parts of Φ rewrite as

$$f = M_c + F_c, \quad F = F_c(t) = -t(2x_c uv + v(u^2 - \frac{v^2}{3})) - \frac{ak_0}{x_c}(u^2 - v^2),$$

$$g = \phi_c + G_c, \quad G = G_c(t) = t(x_c(u^2 - v^2) + u(\frac{u^2}{3} - v^2)) - \frac{2ak_0uv}{x_c},$$

the latter defining the stable manifold as the graph $v = \varphi_c(u) = \varphi_c(u; t)$ obtained from solving $G = 0$ for v , the discriminant having the desired behaviour: positive except for $u = 0$. For $c > 0$ this gives a globally defined function and deforming contours as before it follows that

$$u(t, ct + \xi) = \frac{e^{M_c(t) + i\phi_c(t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{F_c(u, \varphi_c(u; t); t)} (1 + i\varphi'_c(u; t)) du.$$

Note that c has disappeared completely from the formula's, except for the dependence through x_c .

The integral depends only on the formula's for F_c and G_c , φ_c being defined by solving $G = 0$, i.e.

$$(x_c + u)tv^2 + \frac{2ak_0u}{x_c}v - tu^2(x_c + \frac{u}{3}) = 0$$

and simplifying the discriminant using the quartic for x_c . This gives

$$v = \varphi_c(u) = \frac{u}{x_c(x_c + u)} \left(-\frac{ak_0}{t} + x_c R \right),$$

in which

$$R = \sqrt{\underbrace{c + 2x_c^2 + \frac{\xi}{t} + \frac{a^2}{t^2} + \frac{4x_c u}{3} + \frac{u^2}{3}}_{\text{positive}}}.$$

The derivative appears in the integral as

$$\varphi'_c(u) = -\frac{ak_0}{t(x_c + u)^2} + \frac{u(2x_c + u)}{3R(x_c + u)},$$

and the exponent in the integral rewrites as

$$F_c(u, \varphi_c(u; t); t) = -\frac{2}{9} \frac{tRu^2(3x_c + 2u)^2}{(x_c + u)^2} + \frac{2}{3} \frac{ak_0u^2(3x_c + 2u)}{(x_c + u)^2} - \frac{2}{3} \frac{k_0^2a^2(Rx_c t - ak_0)u^2(3x_c + u)}{t^2x_c^3(x_c + u)^3}$$

Clearly these formula's suggest putting

$$u = x_c s, \quad k_0 = \frac{b}{a}, \quad t = b\tau, \quad \xi = b\eta$$

This scaling of u makes each term separate as far the integration variable and t are concerned, except for the R -terms. One now has to distinguish between $c < 0$ (the case discussed by Olver) when $u(t, ct + \xi)$ appears as the sum of 2 integrals involving the stable manifolds of both saddles, and $c > 0$, when $u(t, ct + \xi)$ appears as one single integral.

With x_c going to $\sqrt{-c}$ if $c < 0$, both integrals can be handled as in the Airy case, and the final expansion will depend on c . It may be handy to split the exponential in 3 separate exponentials before you proceed. From the c -dependence there should be a connection with the group velocity discussion by Olver, as we see below. On the other hand, when $c > 0$ (this case is not discussed by Olver) tx_c goes to a constant so $x_c \rightarrow 0$. Note that all 3 terms involve s^2 , but with different signs. This is really an instructive example for understanding the method!

Now to back to WHY we did this analysis observe that the prefactor in the integral expression for

$$u(t, ct + \xi)$$

contains

$$e^{M_c}$$

which behaves very differently for $c < 0$ and $c > 0$.

For $c > 0$ it is the second term in the expression for $M_c(t)$ above that dominates and goes to infinity because tx_c goes to a constant, and this leading order term then goes to $-\infty$ linearly in t . Modulo the details of the analysis of the integral it follows that $u(t, ct + \xi) \rightarrow 0$ exponentially fast as $t \rightarrow \infty$.

On the other hand, if $c < 0$ then $x_c \rightarrow \sqrt{-c}$ and $M_c(t) \rightarrow -a(\sqrt{-c} - k_0)^2$ which is maximal and equal to zero for $c = -k_0^2$. Thus only for this value of c the solution is of order one along the line $x = ct + \xi$ as $t \rightarrow \infty$, with the more precise asymptotics following from a more detailed analysis of the integral, as in the Airy functions case, with contributions from both saddle points, and combining both phases and $\frac{2}{3}c^{\frac{3}{2}}t$ appearing in the imaginary part. Olver's point in the section about dispersion relations is that this *group velocity* $-c$ is 3 times larger as you would expect from looking at the single frequency solution with $a = 0$, and he did so by one single calculation starting from the dispersion relation. Read again what he did after the exam, and pay attention to the factor $\frac{1}{3}$ in the third order equation $u_t + \frac{1}{3}u_{xxx} = 0$ that I solved starting from a wave packet centered at $k = k_0$ rather than from a single wave with $k = k_0$.

1. This is an exercise about applying the Fourier transform to solve the equation $u_t + u_{xxx} = 0$ on the real line with initial data $u(0, x) = \delta(x)$, the Dirac δ -function, and to investigate the behaviour of the solution for $x \rightarrow -\infty$. The Fourier transform of a function $f = f(x)$ and the inverse transform are defined by

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dk,$$

respectively whenever f and \hat{f} are sufficiently nice. The improper integrals are to be understood in the principal value sense

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R$$

and are often easiest evaluated using complex integration over appropriate contours.

- (a) Explain why $\hat{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
- (b) Show using integration by parts that $\widehat{(f')}(k) = ik\hat{f}(k)$.
- (c) Let u be a smooth solution of $u_t + u_{xxx} = 0$ which decays to zero sufficiently fast as $|x| \rightarrow \infty$ to have $(\hat{u})_t = \widehat{(u_t)}$. Here $\hat{u} = \hat{u}(t, k)$ denotes the Fourier transform of the function $x \rightarrow u(x, t)$. Denote the initial value of u by u_0 , that is, $u_0(x) = u(0, x)$. Show that

$$\hat{u}(t, k) = \hat{u}_0(k)e^{ik^3t}$$

- (d) Show that the inversion formula formally applied to the case that $\hat{u}_0(k) = \hat{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ defines a solution formula

$$u(t, x) = \frac{1}{(3t)^{\frac{1}{3}}} \text{Ai}\left(\frac{x}{(3t)^{\frac{1}{3}}}\right)$$

in which

$$\text{Ai}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi x + \frac{x^3}{3})} dx.$$

- (e) Use the methods above to determine the asymptotic behaviour of $\text{Ai}(\xi)$ for $\xi \rightarrow -\infty$.

NAWOORD

Dit boek is geen systematische inleiding in de analyse geworden.