Kijk eens door de franje heen in dit filmpje:

`https://www.youtube.com/watch?v=0l9hrFHNw3Q#t=133`

De formule van Pythagoras wordt toegepast op een rechthoekige driehoek met schuine zijde $R + l$, lange zijde R en korte zijde z. Ik heb van de r een R gemaakt, omdat R GROOT is ten opzichte van z en l. En z is weer groot ten opzichte van l. Dat schrijven we zo

$$R >> z >> l,$$

met dubbele $>>$ symbolen (die vaak een minder precies omschreven betekenis hebben dan de enkele symbolen, maar dat terzijde). Deze orde van grootte beschouwingen, die essentieel zijn voor de modelvorming en uitwerking blijven achterwege in het filmpje, net als de uitwerking zelf. De uiteindelijke vergelijking is

$$R^2 + z^2 = (R + l)^2,$$

met de lengte z van de zichtlijn als de onbekende. De straal R van de aarde en de ooghoogte l van het poppetje zijn als gegeven of op te zoeken te beschouwen.

Zoals gezegd, de uitwerking blijft achterwege. Wel wordt een verkeerde samenvatting gegeven: eerst de straal R van de aarde opzoeken en dan wat algebraïsche manipulaties. Dat moet natuurlijk precies andersom, eerst de formule uitwerken en daarna de getallen invoeren als dat zin heeft of nodig is. Als we rechts het kwadraat uitwerken dan krijgen we

$$R^2 + z^2 = R^2 + 2Rl + l^2,$$

en begint dat wat nog al eens betekenisloos wordt genoemd, maar wel degelijk betekenis heeft. We strepen links en rechts de gigantisch grote R^2 weg en houden een formule over die niet direct in verband gebracht kan worden met een meetkundige figuur, maar daarom niet minder is:

$$z^2 = 2Rl + l^2.$$

Is verder rekenen nu nodig? Ik zou zeggen nauwelijks. Rechts staan twee termen waarvan de eerste VEEL groter is dan de tweede, dus het kan niet anders dan dat bij benadering z de wortel uit $2Rl$ is. NU PAS is het moment daar om getallen in te vullen. Uit mijn hoofd is R ongeveer (en meer dan) 6 duizend kilometer en voor Jos is l ongeveer 2 meter. De dominante term rechts is dus ongeveer 2 keer 6 duizend kilometer keer 2 meter, en dat is 24 miljoen meter kwadraat, waarbij het vast handig is om van die 24 maar 25 te maken. Dan hebben 3 kwadraten op een rijtje in dit product en zien we dat z ongeveer 5 kilometer is. Nu, dat is te lopen.

In mijn tweeslagmodel kijken we nog even terug en wat preciezer. Die eenheden zijn misschien wat verwarrend maar ook in de laatste vergelijking zijn alle termen het product van twee lengten. De grootste daarvan is R en die kun je op 1 zetten door als fysische eenheid van lengte de EU te nemen, de zogenaamde

Earth Unit. Als je dat meteen al gedaan had dan was de vergelijking voor z dus $z^2 = 2l + l^2$ geweest, met z en l in EU. Een beetje gevaarlijke formule die makkelijk een eigen leven gaat leiden waarbij de eenheden vergeten worden, denk aan ongeveer elke andere examenopgave. Zelf geef ik er in dit voorbeeld nu de voorkeur aan om pas te schalen bij het uitwerken van de vergelijking voor z, maar dat is misschien een kwestie van smaak.

Omdat alles net zo positief als dit commentaar zelve kunnen we links en rechts de wortel nemen. Factorizerend komen we dan uit op

$$z = \sqrt{2Rl + l^2} = \sqrt{2Rl}\sqrt{1 + \frac{l}{2R}}.$$

De laatste stap is essentieel. Hier pas wordt echt duidelijk hoe volstrekt verwaarloosbaar de *dimensieloze* tweede term onder de tweede wortel is. Als we links en rechts door R delen zien we dat

$$\frac{z}{R} = \sqrt{\frac{2l}{R}}\sqrt{1 + \frac{l}{2R}},$$

een formule waarin zowel z als l met R geschaald zijn. Noemen we de geschaalde grootheden ζ en λ, dan is

$$\zeta = \sqrt{2\lambda}\sqrt{1 + \frac{1}{2}\lambda}$$

De vervolgvraag die betrekking op het (hoeveel) groter zijn van z bij grotere l heeft weinig te maken met logisch redeneren en wiskundige denkactiviteiten maar des te meer met het verontachtzaamde rekenen en de algebra van de formules. For all practical purposes is de tweede wortel niet te onderscheiden van 1. Maken we l (en dus λ) vier keer zo klein dan zien we dat papa Jos maar twee keer zo ver kijkt als de dreumes die naast hem staat. Dat hadden we natuurlijk al gezien aan de eerste benadering waarin z als ongeveer $\sqrt{2Rl}$ tevoorschijn kwam.

Hier ligt natuurlijk een leuk opstapje voor echte calculus met reeksontwikkelingen. Het belang bijvoorbeeld van het binomium van Newton

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3\cdot 2}x^3 + \cdots$$

met α niet per se geheel en positief en $|x| < 1$. Voor $\alpha = \frac{1}{2}$ geeft afkappen na twee termen een methode om de wortel uit 1 plus een klein beetje de bepalen die ten behoeve van de benadering van $\sqrt{2}$ als 2000 jaar B.C. werd gebruikt getuige[1] kleitablet YBC7289: de ontwikkeling

$$\zeta = 2^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}}\lambda^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

is met de hand goed te doen en laat bij invullen van getallen zien hoe klein de fout is in de eerste benadering hierboven. Helaas, calculus wordt niet gezien als hoognodig in de bijscholing. WDA is wat de klok slaat.

[1]Zo leerde ik uit het boek van Eves over de geschiedenis van de wiskunde.