

Aantekeningen voor de cursus met Jan

Aantekeningen voor de cursus met Jan

JH

Oegstgeest, Amsterdam

The Netherlands

© 2015 tekst FF

© 2015 illustratie Ruud Hulshof

Fotografie omslag: nog onbekend

Vormgeving omslag: nog onbekend

ISBN

NUR

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written consent of the publisher.

De auteursinkomsten uit dit boek komen o.a. ten goede aan het orkest.

VOORWOORD

‘I like fonctions of one variable’

Xavier Cabré addressing Abel prize winner Louis Nirenberg and a small analysis group at Tor Vergata in June 2015.

This pdf is under construction. Ik ben de mamannotes van vorige jaar aan het herschrijven. Komt er eigenlijk op neer dat de inleidende samenvatting van de voorkennis nu een soort Analyse 1 college is geworden. Hoofdstuk 1 dus, bijna klaar. Misschien blijft het daar maar bij voor mijn gedeelte. Op de plank ligt nog veel meer, zie de mamannotes, ook onder de Mastermath zij-instroom blog op het BON-forum. Jan moet ook nog vectorcalculus en complexe functies doen. Daar doe ik nu al wat voorwerk voor.

Ik gebruik liever deze notaties voor de bekende getallen verzamelingen:



$$n \in \mathbb{N}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$q \in \mathbb{Q}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$z \in \mathbb{C}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Dit vak gaat over integraal- en differentiaalrekening voor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, met generalisaties naar $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow X$, $f : X \rightarrow X$, en voorbeelden zoveel mogelijk $X = \mathbb{R}^2$. Wat X is zie je vanzelf.

NB Op 25-10 de impliciet functie stelling ingevoegd in Sectie 9, VOOR de kettingregel and all that.

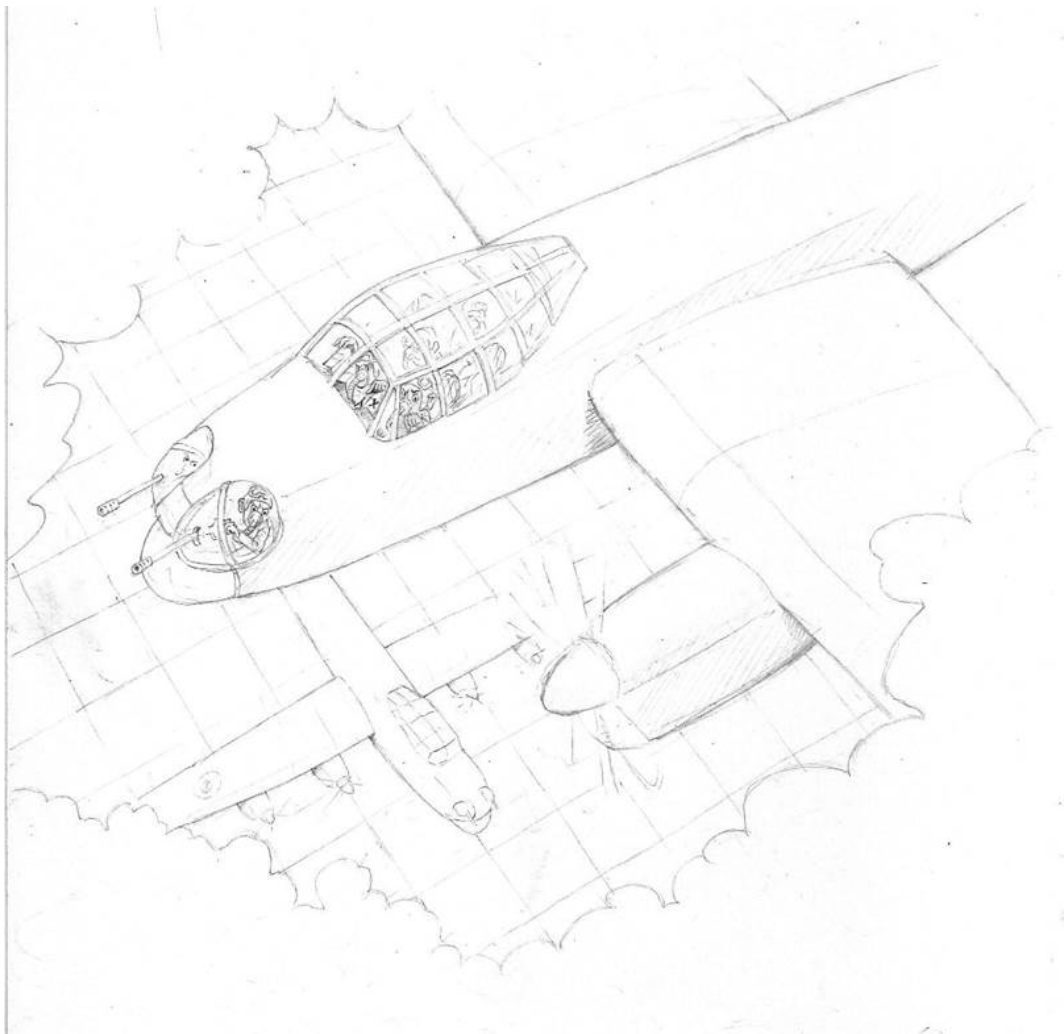
NB Met korte inleiding voor H1 begint.



Inhoudsopgave

1	Integraal- en differentiaalrekening	12
2	Integralen via onder- en bovensommen	13
3	Tussensommen	19
4	Tweevoudige integralen	20
5	Meer over continuïteit en limieten	20
6	Integreerbaar: regels en voorbeelden	22
7	Het verband met en differentiaalrekening	25
8	Integralen via primitieve functies	27
9	Impliciete functies	28
10	Differentieerbare functies: de rekenregels	35
11	Integralen met parameters	39
12	Mooie voorbeelden: machtreeksen	39
13	Rare voorbeelden	45
14	De middelwaardestelling	46
15	De Inverse Functie Stelling	47
16	Speeltuin	48
17	Differentiaalvergelijkingen ad hoc	51
18	Genormeerde ruimten	53
19	Integralen van X -waardige functies	55
20	Differentiaalrekening voor functies op X	57

21	Differentiaalrekening voor functies op $\mathbb{R}^2$	62
22	Partieel differentieerbaar $\implies$?	69
23	Wat metrische topologie	72
24	Equivalentenormen en in de buurt van	76
25	Integraalrekening in poolcoördinaten	78
26	Integraalrekening en kansverdelingen	78
27	Harmonische polynomen	79
28	Intermezzo: het waterstofatoom	83
29	Partieel integreren en toepassingen	85
30	Stirling's formule via schalen en limieten	89
31	Makkelijke convergentiestellingen	92
32	Limieten van differentiequotienten	94
33	Differentiaal- en integraalvergelijkingen	94



Voor we beginnen enige beschouwende herhalingen over (de verzameling $\mathbb{R}$ van) de reële getallen en aftelbare sommen van die getallen. Vanuit getallenrepresentaties als

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

ontstaat op natuurlijke wijze het inzicht of overtuiging dat ieder (reëel) getal van de vorm

$$k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n} \quad (0.1)$$

is, met $k \in \mathbb{Z}$ en $d_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ voor $n \in \mathbb{N}$. De schrijfwijze is niet uniek omdat getallen van de vorm

$$k + \sum_{n=1}^m \frac{d_n}{10^n}$$

twee representaties hebben, bijvoorbeeld

$$1 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{9}{100000} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}.$$

De aftelbare som in (0.1) is met $k \geq 0$ een voorbeeld van

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (0.2)$$

met $a_n \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$. Als de partiële sommen

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n$$



begrensd zijn dan is de kleinste bovengrens van

$$\cup_{N \in \mathbb{N}_0} \{S_N\}$$

per definitie de som van de reeks in (0.2), notatie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$



In het geval van (0.1) is $S_N \leq k + 1$ voor alle $N \in \mathbb{N}_0$ en kan deze uitspraak als tautologie gezien worden: het reële getal S is de limiet van zijn decimale ontwikkeling, een ontwikkeling waarin de decimalen d_n uit de cijfers 0 tot en met 9 gekozen worden.

Als we hadden leren rekenen met $d_n \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ dan was (0.1) een voorbeeld geweest van (0.2) zonder de a priori informatie dat $a_n \geq 0$ maar wel met de eigenschap dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty. \quad (0.3)$$

In dat geval geldt ook dat $S_N \rightarrow S$ voor een unieke $S \in \mathbb{R}$, dus

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad (0.4)$$

en hernummeren van de som verandert niets aan die uitkomst. Reeksen van de vorm (0.2) waarvoor (0.3) geldt zijn onvoorwaardelijk convergent: de volgorde van sommeren maakt niet uit voor de waarde S van de som. Voor S geldt bovendien dat

$$|S| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|. \quad (0.5)$$

Het bewijs van (0.4) gegeven (0.3), de invariantie daarvan onder hernoemen, en de aftelbare 3-hoeksongelijkheid (0.5) laten we achterwege tot we de uitspraak in een algemenere context nodig hebben. Ze zijn een gevolg van het feit dat in de reële getallen rijtjes waarvoor



$$x_n - x_m \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad m, n \rightarrow \infty$$

een unieke limiet $\bar{x}$ hebben, i.e. $\bar{x}$ bestaat als het enige reële getal waarvoor

$$x_n \rightarrow \bar{x} \quad \text{als} \quad n \rightarrow \infty.$$

De rationale getallen $\mathbb{Q}$ hebben die eigenschap niet en dat is de reden waarom we analyse met $\mathbb{R}$ doen, het unieke geordende getallenlichaam waarin (alle) Cauchyrijen en absoluut convergente reeksen convergent zijn.

1 Integraal- en differentiaalrekening

In deze cursus behandelen we ondermeer de calculus voor functies $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ met $I \subset \mathbb{R}$ een interval. Meestal, met $a, b \in \mathbb{R}$, is I daarbij een gesloten begrensde interval

$$I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

of een open begrensde interval

$$I = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

We beginnen met integraalrekening, eerst voor monotone functies, zonder over limieten te spreken, en daarna voor uniform continue functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij we voor het eerst het limietbegrip wel gebruiken.

Met een variabele (bij voorkeur boven-)grens ontdekken we de opzet van de differentiaalrekening met behulp van lineaire benaderingen en werken die meteen uit voor machtreeksen

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots,$$

waarmee we meteen een grote klasse van standaardfunctie tot onze beschikking krijgen waarbij “mag dat” vragen kort maar krachtig met “ja natuurlijk” te beantwoorden zijn. Binnen die klasse is de analyse namenlijk ondergeschikt aan de algebra, en zodra je die algebra goed begrijpt voor x^7 of zo ben je klaar.

Zodra we buiten die klasse van machtreeksen treden verandert dat en is de middelwaardestelling, met de uitspraak dat differentiequotiënten als

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

niet alleen als benaderingen van de afgeleide van F in a of b kunnen worden gebruikt, maar zelf doorgaans ook gelijk zijn aan een afgeleide van F in een x -waarde tussen a en b , als belangrijkste hulpmiddel om ogenschijnlijk evidente uitspraken ook werkelijk te bewijzen.

Eerst integraalrekening dus. Uitgangspunt is de consensus dat de oppervlakte tussen de lijnen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ in het xy -vlak bij afspraak gelijk is aan 1. Integraalrekening kan dan beginnen met de observatie dat de oppervlakte tussen de lijnen $x = 1$, $y = 0$ en de parabool $y = x^2$ gelijk is aan $\frac{1}{3}$, bijvoorbeeld door naar een staafdiagram met staafjes ter breedte $\frac{1}{N}$ te kijken met $N \in \mathbb{N}$ steeds groter, en een rekenpartijtje waarin de som

$$1^2 + 2^2 + \cdots + N^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6} \quad (1.1)$$



voorkomt. In [HM, hoofdstuk 6] wordt met zulke sommen eerst de integraalrekening voor polynomen behandeld. In het bijzonder leidt dit tot de conclusie dat

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad (1.2)$$

zonder dat daartoe eerst over continuïteit van de functie f met formulevoorschrift $f(x) = x^2$ hoeft te worden gesproken. Ook de functie F met formulevoorschrift $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ komt in dat verhaal niet voor. De uitkomst $\frac{1}{3}$ verschijnt simpelweg via de eerste coëfficiënt in het rechterlid van (1.1).

2 Integralen via onder- en bovensommen

In (1.2) staat in het linkerlid de integraal van $x = 0$ tot $x = 1$ van x^2 , dat is bij afspraak de oppervlakte van de verzameling

$$A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}, \quad (2.1)$$

met in dit voorbeeld $a = 0$, $b = 1$ en $f(x) = x^2$. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en een functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) \geq 0$ voor $a \leq x \leq b$, beoogt de wiskundige definitie van

$$\int_a^b f(x) dx \quad (2.2)$$

wiskundig betekenis te geven aan de oppervlakte $|A|$ van A in (2.1). Daartoe worden zogenaamde ondersommen en bovensommen gedefinieerd, waarvan het evident is dat ze bij de beoogde definitie van de oppervlakte van A kleiner respectievelijk groter dan $|A|$ zijn. Als vervolgens blijkt dat er precies één reëel getal is dat **groter is dan** alle ondersommen en **kleiner dan** alle bovensommen, dan is dit getal de enige kandidaat voor $|A|$, en vervolgens wordt dit getal de integraal van f over $[a, b]$ genoemd, i.e. (2.2). We bekijken deze aanpak eerst voor het geval dat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een niet-dalend niet-negatieve functie is.

Definitie 2.1. Als $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dan heet f niet-negatief als $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$; f heet niet-dalend als voor alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ deze implicatie geldt

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

Voor zo'n niet-dalend niet-negatieve functie ligt het voor de hand om de oppervlakte $|A|$ van A in (2.1) van onder te benaderen met sommen van de

vorm

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \sum_{k=1}^N f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= f(x_0)(x_1 - x_0) + \cdots + f(x_{N-1})(x_N - x_{N-1}),\end{aligned}\tag{2.3}$$

waarin

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_N = b \quad \text{met} \quad N \in \mathbb{N}.\tag{2.4}$$

Zo'n keuze van in feite $x_1, \dots, x_{N-1}$ noemen we een partitie P van $[a, b]$ en $\underline{S}$ is niets anders dan de som van de oppervlakten van de rechthoekjes¹

$$R_k = [x_{k-1}, x_k] \times [0, f(x_{k-1})] \quad (k = 1, \dots, N).$$

Hoe $|A|$ verder ook gedefinieerd wordt, je kunt je zelf er makkelijk van overtuigen dat bij iedere zinvolle definitie van $|A|$ wel moet gelden dat $\underline{S} \leq |A|$. Teken maar een plaatje met grafiek en rechthoekjes.

Evenzo is

$$\bar{S} = \sum_{k=1}^N f(x_k)(x_k - x_{k-1})\tag{2.5}$$

de som van de oppervlakten van de rechthoekjes

$$R_k = [x_{k-1}, x_k] \times [0, f(x_k)] \quad (k = 1, \dots, N).$$

en moet wel gelden dat $\bar{S} \geq |A|$. Voor een zinvolle definitie van de oppervlakte van A moet dus gelden dat

$$\underline{S} \leq |A| \leq \bar{S}.\tag{2.6}$$

Slordig² gezegd, de gezochte waarde $|A|$ zitten tussen de ondersom $\underline{S}$ en de bovensom $\bar{S}$, en het verschil van die twee is

$$\bar{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^N (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}).$$

Als we nu de partitie P in (2.4) equi-distant kiezen, i.e.

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b - a}{N} \quad (k = 1, \dots, N),$$

¹Zo'n rechthoekje kan ook een lijnstuk of een punt zijn.

²Het kan gebeuren dat $\underline{S} = |A|$ en/of $|A| = \bar{S}$.

dan volgt

$$\bar{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^N (f(x_k) - f(x_{k-1})) \frac{b-a}{N} = (f(b) - f(a)) \frac{b-a}{N}$$

en dat kunnen we willekeurig klein maken door N groot te kiezen. Er kan dan dus maar één getal tussen alle ondersommen en bovensommen liggen.

Met $N = 1, 2, 4, 8, 16 \dots$ is ook onmiddellijk duidelijk dat de bijbehorende ondersommen $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \underline{S}_4, \underline{S}_8, \dots$ een niet-dalende rij getallen vormen. Evenzo vormen de bovensommen $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_4, \bar{S}_8, \dots$ een niet-stijgende rij. Omdat

$$\underline{S}_1 \leq \underline{S}_2 \leq \underline{S}_4 \leq \underline{S}_8 \leq \dots \leq \bar{S}_8 \leq \bar{S}_4 \leq \bar{S}_2 \leq \bar{S}_1,$$

zijn beide rijen begrensd. De kleinste bovengrens $\underline{J}$ van deze rij ondersommen kan niet groter zijn dan een bovensom en is daarmee een ondergrens voor alle bovensommen in deze rij bovensommen. Voor de grootste ondergrens $\bar{J}$ van alle bovensommen geldt dus $\bar{J} \geq \underline{J}$. Omdat

$$\bar{J} - \underline{J} \leq \bar{S}_{2^n} - \underline{S}_{2^n} = (f(b) - f(a)) \frac{b-a}{2^n}$$

en 2^n willekeurig groot gekozen kan worden volgt $\bar{J} - \underline{J} = 0$. Zo definiëren we een uniek getal $J = \bar{J} = \underline{J}$ dat vervolgens de notaties

$$J = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx$$

krijgt, spreek uit: de integraal van f over $[a, b]$, respectievelijk de integraal van f of $f(x)$ van a of $x = a$ tot b of $x = b$. In de notatie is x een dummy variabele, die door elke andere letter vervangen kan worden, maar bij voorkeur niet door a of b , en liever ook niet door d .

Opgave 2.2. Voor niet-stijgende niet-negatieve functies is het verhaal hierboven op details na hetzelfde. Schrijf dat uit.

Opgave 2.3. Niet-stijgende functies en niet-dalende functies worden monotone functies genoemd. Ook als deze functies niet niet-negatief zijn en zowel positieve als negatieve waarden mogen aannemen, definiëren eindige sommen als in (2.3) en (2.5) via $N = 2^n$ een uniek getal J dat de integraal van f over $[a, b]$ genoemd wordt. Wat is de interpretatie van deze integraal in termen van de gebieden in het x, y -vlak begrensd door $x = a$, $x = b$, $y = 0$ en $y = f(x)$? Leg uit waarom.

Hierboven is de integraal (van een monotone functie f) gedefinieerd aan de hand van equi-distante partities van het interval $[a, b]$. Hoe zit het met andere partities en de ordening van onder- en bovensommen? Een vraag om algemeen te stellen maar eerst nog even het voor specifieke geval hierboven.



Opgave 2.4. Neem weer het geval dat f niet-negatief en niet-dalend is. Neem een partitie P gedefinieerd door (2.4) en een partitie Q gedefinieerd door

$$a = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_M = b \quad \text{met} \quad M \in \mathbb{N}.$$

Neem bij P de bovensom $\bar{S}$ in (2.5) en bij Q de ondersom

$$\underline{S} = \sum_{l=1}^M f(y_{l-1})(y_l - y_{l-1})$$

Laat zien dat $\underline{S} \leq \bar{S}$.

Opgave 2.5. Laat A en B twee niet-lege deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat $A \leq B$. Per definitie wil dit zeggen dat $a \leq b$ voor alle $a \in A$ en alle $b \in B$. Bewijs dat er een getal J is met $a \leq J \leq b$ voor alle $a \in A$ en alle $b \in B$. We zeggen dat J tussen A en B ligt, i.e. $A \leq \{J\} \leq B$.

Stelling 2.6. Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een monotone functie zijn. Dan bestaat er precies één getal J dat tussen de verzameling van alle sommen van de vorm (2.3) en de verzameling alle sommen van de vorm (2.5) ligt. Dit getal J is per definitie de integraal van $f(x)$ van $x = a$ tot $x = b$, notatie

$$J = \int_a^b f(x) dx.$$

Bewijs. Het werk is hierboven gedaan. Zonder beperking der algemeenheid nemen we f niet-dalend. De ondersommen vormen een niet-lege verzameling A en de bovensommen een niet-lege verzameling B . Er geldt dat $A \leq B$, dus er bestaat een J tussen A en B . Met equi-distante partities zien we dat er maar één zo'n J kan zijn. Klaar.

Monotone functies zijn dus integreerbaar. Merk op dat gegeven een partitie P zoals in (2.4), en iedere keuze van zogenaamde tussenpunten

$$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \quad (k = 1, \dots, N),$$

ook

$$S = \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (2.7)$$

een voor de hand liggende benadering van $\int_a^b f(x) dx$ is, ook als $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ niet monotoon is, maar we kunnen dan niet meer op een natuurlijke manier van boven- of ondersommen spreken. Als de waardenverzameling

$$\{f(x) : a \leq x \leq b\} = \cup_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$$

echter begrensd is, i.e. als er $m, M \in \mathbb{R}$ bestaan zodat $m \leq f(x) \leq M$ voor alle $x \in [a, b]$, dan is op elke deelinterval $[x_{k-1}, x_k]$ de waardenverzameling ook begrensd en bestaan er bijbehorende m_k en M_k met $m \leq m_k \leq M_k \leq M$, zodat we



$$\underline{S} = \sum_{k=1}^N m_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{en} \quad \bar{S} = \sum_{k=1}^N M_k(x_k - x_{k-1}) \quad (2.8)$$

weer als onder- en bovensommen voor zowel (3.1) als de te definiëren integraal $\int_a^b f(x) dx$ kunnen introduceren. Bij dezelfde partitie P geldt dan onmiddellijk dat $\underline{S} \leq \bar{S}$.

Wat hebben we nu nodig om het bewijs van Stelling 2.6 over te schrijven? Twee dingen. Ten eerste, de verzamelingen van ondersommen A en bovensommen B moeten weer voldoen aan $A \leq B$. Ten tweede, we moeten de uniciteit van het getal J tussen A en B aantonen, en daartoe nemen we voor m_k en M_k natuurlijk de **grootst respectievelijk kleinste** mogelijke waarde, teneinde het verschil



$$\bar{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^N (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

zo **klein** mogelijk te krijgen. We nemen dus

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \quad \text{en} \quad m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f.$$

Duidelijk is nu dat bij het verfijnen van de partitie, i.e. extra punten toevoegen in (2.4), ondersommen alleen maar groter en bovensommen alleen maar kleiner kunnen worden.

Als nu voor alle $k = 1, \dots, N$ geldt dat

$$M_k - m_k \leq \varepsilon \quad (2.9)$$

dan volgt dat

$$\bar{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^N (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \varepsilon(b - a), \quad (2.10)$$

en wat we dus nodig hebben voor uniciteit van J is dat elke $\varepsilon > 0$ realiseerbaar is in (2.9), middels een geschikte keuze van (2.4). In dat geval geldt voor iedere andere $\tilde{J}$ dat

$$|\tilde{J} - J| \leq \bar{S} - \underline{S} \leq \varepsilon(b - a),$$

en omdat $\varepsilon > 0$ dan zo klein gekozen mag worden als we maar willen volgt $\tilde{J} = J$. De volgende definitie brengt nu uitkomst. Het is de eerste keer dat we een uitspraak formuleren waarin voor alle $\varepsilon > 0$ iets moet gelden dat met die ε te maken heeft.

Definitie 2.7. *Als $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dan heet f uniform continu als er voor alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in [a, b]$ geldt dat*

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Stelling 2.8. *Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een uniform continue functie zijn. Dan bestaat er precies één getal J dat tussen de verzameling van alle ondersommen en de verzameling van alle bovensommen ligt, waarbij we onder de onder- en bovensommen de sommen in (2.8) verstaan. Dit getal J is per definitie de integraal van $f(x)$ van $x = a$ tot $x = b$, notatie*

$$J = \int_a^b f(x) dx.$$

Bewijs. Wederom is vrijwel al het werk al gedaan. De ondersommen vormen een niet-lege verzameling A en de bovensommen een niet-lege verzameling B . Met $\delta > 0$ bij $\varepsilon > 0$ zoals in Definitie 2.8 volgt³ (2.9) als de partitie P in (2.4) zo gekozen wordt dat $x_k - x_{k-1} \leq \delta$ voor alle $k = 1, \dots, N$.

Als we nu ook nog laten zien dat $A \leq B$ zijn we klaar. Neem daartoe twee partities P als in (2.4) en Q net als in Opgave 2.4, en vorm de gemeenschappelijke verfijning

$$a = z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_K = b$$

³Ga dit na, al volgt aanstonds dat m_k en M_k aangenomen worden in $[x_{k-1}, x_k]$.

door $x_1 \leq \dots \leq x_{N-1}$ en $y_1 \leq \dots \leq y_{M-1}$ op volgorde te zetten. Dus $K - 1 = M - 1 + N - 1$ en iedere z_i is een x_k of een y_l .

Met

$$m_l = \inf_{[y_{l-1}, y_l]} f, \quad \tilde{m}_i = \inf_{[z_{i-1}, z_i]} f \leq \sup_{[z_{i-1}, z_i]} f = \tilde{M}_i, \quad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

volgt nu dat

$$\sum_{l=1}^M m_l(y_l - y_{l-1}) \leq \sum_{i=1}^K \tilde{m}_i(z_i - z_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^K \tilde{M}_i(z_i - z_{i-1}) \leq \sum_{l=1}^N M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Waarom? Omdat de eerste ongelijkheid een ondersom betreft van een partitie en een verfijning daarvan, en de derde ongelijkheid een bovensom van een andere partitie naar dezelfde verfijning. De tweede ongelijkheid spreekt vanzelf.

3 Tussensommen

We zijn begonnen met onder- en bovensommen om integralen van monotone functies zo makkelijk mogelijk te behandelen. Voor continue functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kunnen we net zo goed naar sommen van de vorm

$$S = \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \text{met } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad (3.1)$$

vrij te kiezen voor elke $k = 1, \dots, N$ gegeven de partitie (2.4). Vanzelfsprekend geldt

$$\underline{S} \leq S \leq \bar{S}$$

met $\underline{S}$ en $\bar{S}$ als in (2.8) en het bewijs van Stelling 2.8 herlezend is via (2.10) duidelijk dat ook $|S - J| \leq \varepsilon(b - a)$ als $x_k - x_{k-1} \leq \delta$ voor alle $k = 1, \dots, N$.

Het is een aardige en nuttige oefening om wederom via een rij equidistante partities met $N = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$, met voor ξ_k steeds $\xi_k = x_k$ gekozen, direct en zonder de ordening van boven- en ondersommen te gebruiken te laten zien dat er een limiet waarde J bestaat, en daarna voor deze J op dezelfde conclusie uit te komen.

Als $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uniform continu is dan is er een unieke $J \in \mathbb{R}$ waarvoor voor iedere S als in (3.1) geldt dat $|S - J| \leq \varepsilon(b - a)$ mits $x_k - x_{k-1} \leq \delta$ voor alle $k = 1, \dots, N$, waarbij $\delta > 0$ bij $\varepsilon > 0$ gekozen is zoals in de definitie van uniforme continuïteit van $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

4 Tweevoudige integralen

Integraalrekening voor continue functies $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ met $[a, b] \times [c, d]$ een rechthoek in $\mathbb{R}^2$ gaat met partities P als in (2.4) voor $[a, b]$ en

$$c = y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_M = b \quad \text{met} \quad M \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

voor $[c, d]$. Om kort te gaan, met onder- en bovensommen, of met tussensommen van de vorm

$$\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M f(\xi_k, \eta_l)(x_k - x_{k-1})(y_l - y_{l-1}),$$

met tussenwaarden $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ en $\eta_l \in [y_{l-1}, y_l]$ volgt het bestaan van één unieke $J \in \mathbb{R}$ die de integraal van f over $[a, b] \times [c, d]$ genoemd wordt, met notatie (en stelling over het vrij mogen kiezen van de integratievolgorde)

$$J = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy,$$

en de herhaalde integralen worden uitgewerkt met de technieken en regels voor gewone integralen die hieronder nog aan de orde komen. We maken daar hier nu verder geen woorden aan vuil. Merk echter op dat we over meer verzamelingen zullen willen integreren dan over rechthoeken.

5 Meer over continuïteit en limieten

Uniform continue functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zijn dus integreerbaar met dezelfde aanpak als monotone functies. Hoe weet je of een functie uniform continu is? Bijvoorbeeld als je een schatting van de vorm

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad (5.1)$$

hebt voor alle $x, y \in [a, b]$ met een vaste $\alpha > 0$ en een vaste $C > 0$. In het geval dat $\alpha \in (0, 1)$ spreekt men van uniform Hölder continu met exponent α , en als $\alpha = 1$ van uniform Lipschitz continu. Het geval $\alpha > 1$ is niet heel relevant⁴.

Uniforme continuïteit betreft functies op hun hele domein, hierboven steeds $[a, b]$. Gewone continuïteit betreft het gedrag van een functie in een gegeven punt.

⁴Waarom niet?

Definitie 5.1. Als we in Definitie 2.7 de y vast nemen en gegeven iedere $\varepsilon > 0$ altijd een $\delta > 0$ kunnen vinden waarvoor de implicatie geldt met alle $x \in [a, b]$, dan heet f continu in y en zeggen we dat

$$f(y) = \lim_{x \rightarrow y} f(x),$$

of ook wel

$$f(x) \rightarrow f(y)$$

als $x \rightarrow y$ (steeds met $x \in [a, b]$). Als deze uitspraak geldt met uitsluiting van $x = y$ en de functiewaarde $f(y)$ vervangen door een $L \in \mathbb{R}$, dan zeggen we dat L de limiet is van $f(x)$ voor $x \rightarrow y$.

In Definitie 5.1 kan $[a, b]$ vervangen worden door een willekeurig interval $I \subset \mathbb{R}$ en in de uitspraak $f(x) \rightarrow L$ hoeft y dan niet per se in I te liggen. De voor de hand liggende vraag is natuurlijk of een $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die continu is in elke $y \in [a, b]$ ook uniform continu is op heel $[a, b]$. Daartoe herformuleren we nu eerst de definitie van $f(x) \rightarrow L$ als $x \rightarrow y$ in termen van convergente rijen.

Definitie 5.2. Een door $n \in \mathbb{N}$ genummerde rij reële getallen x_n heet convergent als er een (limiet) $\bar{x} \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat er voor alle $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor de implicatie

$$n \geq N \implies |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon$$

geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$. Zonder woorden luidt deze uitspraak

$$\exists \bar{x} \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon.$$

We zeggen dat $x_n \rightarrow \bar{x}$ (als $n \rightarrow \infty$).

Opgave 5.3. Laat $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en $y, L \in \mathbb{R}$. De uitspraak $f(x) \rightarrow L$ als $x \rightarrow y$ is equivalent met de uitspraak dat voor elke rij x_n in I de implicatie

$$x_n \rightarrow y \implies f(x_n) \rightarrow L$$

geldt. Bewijs dit. Hint: noem de ε in de uitspraak dat $x_n \rightarrow y$ maar δ . NB Het kan gebeuren dat er geen rijen x_n in I zijn met $x_n \rightarrow y$. In dat geval zijn beide uitspraken zinloos waar voor elke $L \in \mathbb{R}$.

Opgave 5.4. De enige manier waarop $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ niet uniform continu kan zijn is als er een $\varepsilon > 0$ bestaat waarvoor geen bijbehorende $\delta > 0$ te vinden is waarmee de uitspraak in Definitie 2.7 geldt. Kies nu een willekeurige rij $0 < \delta_n \rightarrow 0$. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ zijn er dan $x_n, y_n \in [a, b]$ met wel $|x_n - y_n| \leq \delta_n$ maar niet $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$. Neem nu aan dat $y_n \rightarrow \eta \in [a, b]$ en leidt een tegenspraak af met de continuïteit van f in η .

Stelling 5.5. Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn in elk punt van $[a, b]$. Dan is $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uniform continu.

 **Bewijs.** Maak de rij y_n in Opgave 5.4 convergent door voldoende elementen van de rij weg te laten (met andere woorden, neem een deelrij) zodanig dat de rij convergent wordt. Gebruik hiertoe **de stelling die zegt** dat iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ een convergente deelrij heeft. Noem de limiet η , laat zien dat $\eta \in [a, b]$ en het werk is gedaan.

Opgave 5.6. Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn in elk punt van $[a, b]$. Bewijs dat f een maximum M en een minimum m op $[a, b]$ heeft. Hint: omdat f uniform continu is op $[a, b]$, is f begrensd op $[a, b]$ (waarom?). Laat $M = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$. Dan bestaat er een rij x_n in $[a, b]$ met $f(x_n) \rightarrow M$. Neem daarvan een convergente deelrij.

6 Integreerbaar: regels en voorbeelden

We weten nu dat voor monotone functies en continue functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ met behulp van onder- en bovensommen een ondubbelzinnige betekenis kan worden gegeven aan

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Voor iedere begrensde functie kunnen we bij een partitie (2.4)

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad \text{en} \quad m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

definiëren en de bijbehorende onder- en bovensom. Net als in het bewijs van Stelling 2.8 volgt nu dat de verzameling van alle ondersommen A en de verzameling van alle bovensommen B voldoen aan $A \leq B$. Op grond van Opgave 2.5 is er dus tenminste één getal J dat tussen A en B ligt.

Definitie 6.1. Een begrensde functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heet Riemann integreerbaar als er precies één getal J tussen de verzameling van alle ondersommen en de verzameling van alle bovensommen ligt. In dat geval is per definitie

$$J = \int_a^b f(x) dx.$$

Opgave 6.2. Bewijs dat met

$$M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} < x < x_k\} \quad \text{en} \quad m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} < x < x_k\}$$

dezelfde begrensde functies integreerbaar worden als in Definitie 6.1.

Opgave 6.3. Bewijs dat de functie f gedefinieerd door $f(x) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{Q}$ en $f(x) = 0$ voor alle $x \notin \mathbb{Q}$ niet integreerbaar is op $[0, 1]$.

Opgave 6.4. Bewijs dat de functie f gedefinieerd door $f(0) = 0$ en $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ voor $x \neq 0$ integreerbaar is op $[0, 1]$.

Opgave 6.5. Iedere begrensde integreerbare functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die op de punten van een partitie

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b \quad \text{met} \quad N \in \mathbb{N}$$



wordt veranderd door $g(x_k) = c_k$ te stellen voor $k = 0, \dots, N$ voor gegeven waarden $c_k \in \mathbb{R}$, en $g(x) = f(x)$ voor alle $x \in [a, b]$ die niet **to** P behoren, definieert een begrensde integreerbare functie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ met $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$. Bewijs dit.

Opgave 6.6. Iedere begrensde functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor er een partitie

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b \quad \text{met} \quad N \in \mathbb{N}$$

bestaat met f monotoon of continu op elk open interval (x_{k-1}, x_k) is integreerbaar. Bewijs dit.

Definitie 6.7. Als $a < b$ dan is

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

vermits $f : [b, a] \rightarrow \mathbb{R}$ begrensd en integreerbaar is.

Opgave 6.8. Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ begrensd zijn en $c \in (a, b)$. Bewijs dat f integreerbaar is op $[a, b]$ dan en slechts dan als f integreerbaar is op zowel $[a, c]$ als $[c, b]$, en dat in dat geval

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Opgave 6.9. De verzameling van begrensde integreerbare functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is een lineaire vectorruimte over $\mathbb{R}$. Bewijs dit, en ook dat

$$f \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

een lineaire afbeelding is van deze vectorruimte (hier $RI([a, b])$ genaamd) naar $\mathbb{R}$.

Opgave 6.10. Als $f \in RI([a, b])$ dan is ook $x \rightarrow |f(x)|$ begrensd en integreerbaar op $[a, b]$ en geldt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Bewijs dit en geef een voorbeeld van een begrensde functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die niet integreerbaar is waarvoor $x \rightarrow |f(x)|$ het wel is.

Samenvattend: begrensde functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kunnen via onder-sommen en bovensommen die willekeurig dicht bij elkaar liggen integreerbaar zijn met integraal $\int_a^b f(x) dx$. Zulke integreerbare functies vormen een lineaire vectorruimte over $\mathbb{R}$, hier genoteerd met $RI([a, b])$. Deze vectorruimte bevat alle (uniform) continue functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die ook een lineaire vectorruimte over $\mathbb{R}$ vormen, doorgaans met $C([a, b])$ aangeduid. Ook bevat $RI([a, b])$ alle monotone functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ maar die vormen geen vectorruimte. De vectorruimte $RI([a, b])$ is zelf een deelruimte van alle functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die met de bewerkingen gedefinieerd door

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

voor alle $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en alle $x \in [a, b]$, een lineaire vectorruimte over $\mathbb{R}$ vormen waarbinnen de integraaltheorie hierboven behandeld zich afspeelt.

7 Het verband met en differentiaalrekening

We stellen ons nu de vraag wat voor eigenschappen de functie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^x f(s) ds \quad (7.1)$$

heeft als $f \in RI([a, b])$. We schrijven daartoe, voor een vaste $x_0 \in [a, b]$ en een **variable** h ,

$$F(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(s) ds = \underbrace{\int_a^{x_0} f(s) ds}_{F(x_0)} + \int_{x_0}^{x_0+h} f(s) ds.$$

Als M een bovengrens is voor de waarden die $|f(x)|$ aanneemt voor $x \in [a, b]$ dan geldt voor de tweede term dat

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(s) ds \right| \leq M|h|$$

en dus is F uniform Lipschitz continu op $[a, b]$, want met $x = x_0 + h$ en $y = x_0$ volgt

$$\forall x, y \in [a, b] : |F(x) - F(y)| \leq M|x - y|.$$

Dit scherpen we aan door

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) &= F(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + f(s) - f(x_0)) ds \\ &= F(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) ds + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(s) - f(x_0)) ds \end{aligned}$$

te schrijven, zo dat met

$$R(x_0, h) = \int_{x_0}^{x_0+h} (f(s) - f(x_0)) ds, \quad (7.2)$$

volgt dat

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + f(x_0)h + R(x_0, h). \quad (7.3)$$

Hoe groot kan de restterm (7.2) hier zijn? Als f continu is in x_0 , dan is er gegeven iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodanig dat

$$|f(s) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \text{als} \quad |s - x_0| \leq \delta.$$

Voor de s in de integrand is dit laatste zeker het geval als $|h| \leq \delta$ en met de driehoeksongelijkheid voor integralen volgt dan dat

$$|R(x_0, h)| \leq \varepsilon|h| \quad \text{als} \quad |h| \leq \delta \quad \text{en} \quad x_0 + h \in [a, b]. \quad (7.4)$$

Deze uitspraak wordt genoteerd als

$$R(x_0, h) = o(h) \quad \text{als} \quad h \rightarrow 0,$$

spreek uit: $R(x_0, h)$ is kleine o van h voor h gaat naar nul.

Definitie 7.1. Een functie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heet differentieerbaar in $x_0 \in [a, b]$ als er een getal $f(x_0) \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat (7.3) geldt met een restterm $R(x_0, h)$ die voor elke $\varepsilon > 0$ voldoet aan (7.4) als $\delta > 0$ daartoe klein genoeg gekozen wordt.

Als $x_0 = a$ respectievelijk $x_0 = b$ dan spreken we over respectievelijk rechts- en linksdifferentieerbaar. In deze definitie kan $[a, b]$ vervangen worden door een willekeurig interval $I \subset \mathbb{R}$, waarbij in (7.4) dan ook I voor $[a, b]$ gelezen moet worden. De waarde $f(x_0)$ heet de afgeleide van F in x_0 , notatie $F'(x_0) = f(x_0)$. De afgeleide kan voor zo'n vaste x_0 gezien worden als een lineaire afbeelding¹ van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, gegeven door



$$h \mapsto F'(x_0)h. \quad (7.5)$$

Als F in elke $x_0 \in [a, b]$ differentieerbaar is met afgeleide $F'(x_0) = f(x_0)$ dan is daarmee een functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd die de afgeleide functie van F wordt genoemd. De functie F heet dan een primitieve functie voor f (ook wel: anti-afgeleide van). Met (7.1) hebben we een belangrijk voorbeeld hierboven al gezien en dat is meteen een hoofdstelling van de integraalrekening.

Stelling 7.2. Definieer voor $f \in RI([a, b])$ de functie $F \in C([a, b])$ door

$$F(x) = \int_a^x f(s) ds.$$

Dan is F differentieerbaar in elke $x_0 \in [a, b]$ waar f continu is, met afgeleide $F'(x_0) = f(x_0)$.

¹Voor $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ wordt dit straks $F'(x_0) : X \rightarrow \mathbb{R}$ in Sectie 18.

8 Integralen via primitieve functies

Met $I = [a, b]$ verwijst Definitie 7.1 naar het voorbeeld gedefinieerd door (7.1), waarin F differentieerbaar in elk punt $x_0 \in [a, b]$ waar f continu is. Dat is het geval voor iedere $x_0 \in [a, b]$ als $f \in C([a, b])$.

In het geval dat een functie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de eigenschap heeft dat $F' \in C([a, b])$ concluderen we nu dat

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(s) ds. \quad (8.1)$$

Immers, met $f(x) = F'(x)$ is de integraal in het rechterlid de formule (7.1) waarmee we begonnen zijn. Links en rechts in (8.1) staan twee functies die als afgeleide $F' = f$ hebben. De functie

$$x \mapsto F(x) - \int_a^x F'(s) ds$$

heeft dus als afgeleide de nulfunctie en is daarmee vanwege Stelling 14.1 toegepast op iedere $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [a, b]$ constant op $[a, b]$. Door $x = 0$ in te vullen zien we dat de constante $F(a)$ is. Dit bewijst een tweede hoofdstelling van de integraalrekening:

Stelling 8.1. Voor $f \in C([a, b])$ geldt dat

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

als F een primitieve functie is van f .

De formule in Stelling 8.1 wordt ook wel geschreven als

$$\int_{[a,b]} dF = F(b) - F(a),$$

waarbij

$$dF = F'(x)dx = f(x)dx$$

een formele notatie is die later in de vectorcalculus nog (algemenere) betekenis zal krijgen. De uitdrukking $f(x)dx$ heet een 1-vorm, $F = F(x)$ heet een 0-vorm, en een 1-vorm kan de d van een 0-vorm zijn.



Opgave 8.2. Als I een interval is en $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de eigenschap heeft dat $f \in RI([a, b])$ voor elk gesloten interval $[a, b] \subset I$, dan varieert $\int_a^b f$ continu met a en b . Leg nog een keer uit waarom.



Opgave 8.3. De aanname in Stelling 8.1 kan ook geformuleerd worden als $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is continu differentieerbaar, i.e. $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is differentieerbaar en $x \mapsto F'(x)$ definieert een continue functie op $[a, b]$. Herschrijf de uitspraak

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx$$

via de substitue

$$x = (1 - t)a + tb = a + t(b - a)$$

als

$$F(b) - F(a) = \int_0^1 F'((1 - t)a + tb)(b - a) dt = \int_0^1 F'((1 - t)a + tb) dt (b - a) \quad (8.2)$$

en bewijs deze uitspraak rechtstreeks vanuit de definities, zonder het regeltje

$$dx = (b - a)dt$$

te gebruiken dus. De formule (8.2) zal nog terugkomen.

9 Impliciete functies

Als voor een functie

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

van twee reële variabelen geldt dat $F(0, 0) = 0$, dan heeft de vergelijking

$$F(x, y) = 0$$

in het algemeen nog meer oplossingen in de buurt van $(x, y) = (0, 0)$. Een standaardmanier om deze oplossingen vinden is Newton's methode, waarbij we aannemen dat voor vaste x in de buurt van $x = 0$ de functie

$$y \rightarrow F(x, y)$$

differentieerbaar is in de buurt van $y = 0$. De afgeleide noteren we nu niet met $F'(x, y)$ maar met $F_y(x, y)$, subscript y voor de afgeleide naar y .

Neem voor zo'n vaste x in (de startwaarde) $y_0 = 0$ de lineaire benadering van $F(x, y)$ als functie van y rond $y = y_0$, stel niet $F(x, y)$ maar die lineaire benadering gelijk aan 0, los daaruit $y = y_1$ op, en neem y_1 als nieuwe startwaarde om y_2 te vinden, en ga zo door. Als $F_y(x, y_{n-1})$ inverteerbaar² is als afbeelding

$$h \rightarrow F_y(x, y_{n-1})h$$

²Hier hetzelfde als $F_y(x, y_{n-1}) \neq 0$ aannemen zodat $(F_y(x, y_{n-1}))^{-1} = \frac{1}{F_y(x, y_{n-1})}$.

van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ geeft dit een volgende y_n gedefinieerd door

$$F(x, y_{n-1}) + F_y(x, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) = 0.$$

Voor $n = 1, 2, \dots$ geldt dan dat

$$y_n = y_{n-1} - (F_y(x, y_{n-1}))^{-1} F(x, y_{n-1}) \quad \text{beginnend met } y_0 = 0, \quad (9.1)$$

en in het algemeen³ breekt dit proces niet af.

Als y_n vervolgens convergeert, en de x -afhankelijke limiet y een zogenaamde impliciete functie

$$x \rightarrow y = f(x)$$

definieert waarvoor geldt dat

$$F(x, y(x)) = 0,$$

dan kan daarna de vraag gesteld worden onder welke voorwaarden f continu of differentieerbaar is, eerst in $x = 0$ bijvoorbeeld.

De “als” hierboven is een vraagteken. Een rechtstreeks bewijs van (snelle) convergentie van de rij y_n is mogelijk via een schatting van de vorm

$$|y_{n+1} - y_n| \leq M |y_n - y_{n-1}|^2,$$

afgeleid uit o.a. een aanname op de tweede afgeleide van $y \rightarrow F(x, y)$, maar voor het aangepaste schema

$$y_n = y_{n-1} - (F_y(0, 0))^{-1} F(x, y_{n-1}) \quad (9.2)$$



kan het zonder zo'n aanname en zijn, behalve een bovengrens op $|F(x, 0)|$, alleen de inverteerbaarheid van $F_y(0, 0)$ en de continuïteit⁴ van

$$(x, y) \rightarrow F_y(x, y)$$

in $(x, y) = (0, 0)$ vereist om in de buurt van $(0, 0)$ alle oplossingen van $F(x, y) = 0$ te vinden, via (9.2) als limiet van de rij y_n , beginnende met

$$y_0 = 0 \quad \text{en} \quad y_1 = -(F_y(0, 0))^{-1} F(x, 0).$$

Merk op dat als $y_1 = y_0 = 0$ meteen ook volgt dat $0 = y_0 = y_1 = y_2 = \dots$ en $y = y_0 = 0$ zelf al de oplossing is van $F(x, y) = 0$.

³Probeer het maar met een voorbeeldje.

⁴Nog niet gedefinieerd wat dat is, maar dat kun je raden wellicht.

We spelen nu eerst uit hoe convergentie van de rij y_n bewezen kan worden, en nemen daarbij aan dat $y_1 \neq y_0$, want anders zijn we al klaar. De strategie is om te laten zien dat de x -afhankelijke afbeelding Φ gedefinieerd door

$$y \xrightarrow{\Phi} y - (F_y(0, 0))^{-1} F(x, y), \quad (9.3)$$

voor x in een geschikt gekozen x -interval, op een geschikt gekozen maar niet van x afhankelijk y -interval precies één y op zich zelf afbeeldt. Zo'n y wordt een vast punt van Φ genoemd en, omdat $(F_y(0, 0))^{-1}$ als inverse van $F_y(0, 0)$ zelf inverteerbaar is, zijn vaste punten van $y \rightarrow \Phi(x, y)$ precies de oplossingen van $F(x, y) = 0$.

We laten nu eerst zien dat Φ voldoet aan een schatting van de vorm

$$|\Phi(x, y) - \Phi(x, \tilde{y})| \leq \theta |y - \tilde{y}| \quad (9.4)$$

met $\theta < 1$. Een afbeelding met deze eigenschap wordt strict contractief genoemd op het domein waar deze schatting geldt. Gegeven een aanname op de grootte van $F(x, 0)$ in de buurt van $x = 0$ moet dit dan voldoende zijn voor (minder snelle) convergentie van de rij y_n via een schatting van de vorm

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \theta |y_n - y_{n-1}|. \quad (9.5)$$

Om een schatting als (9.4) te vinden schrijven we

$$\Phi(x, y) - \Phi(x, \tilde{y}) = (F_y(0, 0))^{-1} (F_y(0, 0)(y - \tilde{y}) - (F(x, y) - F(x, \tilde{y})))$$



en passen (8.2), voor vaste x , toe op de functie $y \rightarrow F(x, y)$ met $a = \tilde{y}$ en $b = y$. We schrijven dus het tweede verschil in de tweede factor van het rechterlid hierboven als

$$F(x, y) - F(x, \tilde{y}) = \int_0^1 F_y(x, ty + (1-t)\tilde{y})(y - \tilde{y}) dt,$$

waarmee $\Phi(x, y) - \Phi(x, \tilde{y})$ herschrijft als



$$\Phi(x, y) - \Phi(x, \tilde{y}) = (F_y(0, 0))^{-1} \int_0^1 (F_y(0, 0) - F_y(x, ty + (1-t)\tilde{y}))(y - \tilde{y}) dt,$$

met de term $F_y(0, 0)(y - \tilde{y})$ binnen de integraal gebracht en de nieuwe integrand gefactoriseerd.

Tot hier is alleen de continuïteit voor vaste x van $y \rightarrow F_y(x, y)$ gebruikt, op een nog te kiezen (x, y) -domein dat nu wordt gekozen via de continuïteit van $y \rightarrow F_y(x, y)$ in $(0, 0)$, en daarmee het bestaan van $F_y(x, y)$ voor (x, y) in

de buurt van $(0, 0)$. Om precies te zijn, we nemen nu aan dat er voor iedere $\eta > 0$ een $\varepsilon > 0$ is waarmee voor alle x en y in $\mathbb{R}$ geldt dat met

$$|x| \leq \varepsilon \text{ en } |y| \leq \varepsilon \implies |F_y(0, 0) - F_y(x, y)| \leq \eta,$$

en in het bijzonder is dus aangenomen dat $y \rightarrow F(x, y)$ voor alle x met $|x| \leq \varepsilon$ differentieerbaar is in elke y met $|y| \leq \varepsilon$. We gebruiken hier i.p.v. de ε, δ -definitie een η, ε -definitie van continuïteit omdat (uiteindelijk) het vaste punt $y = f(x)$ van Φ (straks) ook nog moet voldoen aan $|y| \leq \varepsilon$ voor x met $|x| \leq \delta$ om f continu in $x = 0$ te krijgen.

Voor $x, y, \tilde{y}$ met $|x| \leq \varepsilon$, $|y| \leq \varepsilon$ en $|\tilde{y}| \leq \varepsilon$ volgt voor de eerste factor van de integrand nu dat

$$|(F_y(0, 0) - F_y(x, ty + (1 - t)\tilde{y}))(y - \tilde{y})| \leq \eta |y - \tilde{y}|$$

omdat $t \in [0, 1]$, en daarmee dat

$$|\Phi(x, y) - \Phi(x, \tilde{y})| \leq M\eta |y - \tilde{y}| \quad \text{met} \quad M = |(F_y(0, 0))^{-1}| > 0,$$

i.e. (9.5) met

$$\theta = M\eta,$$

zolang tenminste $|y_n| \leq \varepsilon$. In dat geval volgt met herhaald toepassen van (9.5) dat ook

$$\begin{aligned} |y_{n+1}| &= |y_{n+1} - y_0| \leq |y_{n+1} - y_n| + \cdots + |y_1 - y_0| \leq \\ &(\theta^n + \cdots + 1)|y_1 - y_0| < \frac{|y_1 - y_0|}{1 - \theta} \leq \frac{M|F(x, 0)|}{1 - \theta} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

als tenminste $\theta < 1$ en ook

$$|F(x, 0)| \leq \frac{\varepsilon}{M}(1 - \theta) = \frac{\varepsilon}{M}(1 - M\eta) = \varepsilon\left(\frac{1}{M} - \eta\right) = \tilde{\varepsilon}. \quad (9.6)$$

De laatste ongelijkheid wordt geforceerd door bij deze positieve $\tilde{\varepsilon}$ de bijbehorende $\tilde{\delta} > 0$ van de continuïteit van $x \rightarrow F(x, 0)$ in $x = 0$ te nemen en x te beperken tot $|x| \leq \tilde{\delta}$.

Kies nu $\eta = \eta_0 < \frac{1}{M}$ vast en laat zoals hierboven ε_0 de bijbehorende ε zijn, $\tilde{\varepsilon}_0$ de bijbehorende $\tilde{\varepsilon}$ en $\tilde{\delta}_0$ de daar weer bijbehorende $\tilde{\delta}$ van de continuïteit van $x \rightarrow F(x, 0)$ in $x = 0$. Neem voor δ_0 het minimum van ε_0 en $\tilde{\delta}_0$. De (aannamen voor de) schattingen hierboven zijn hieronder alleen nog nodig voor x met $|x| \leq \delta_0$ en y met $|y| \leq \varepsilon_0$. Voor iedere x met $|x| \leq \delta_0$ volgt dan dat de x -afhankelijke som

$$\sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+1} - y_n)$$

absoluut convergent is, en dus ook gewoon convergent. Maar dat betekent dat de x -afhankelijke rij y_n , gedefinieerd door $y_0 = 0$ en (9.2) voor $n \in \mathbb{N}$, convergeert naar een limiet $y = f(x)$ met $|y| \leq \varepsilon_0$. Deze y nu moet de unieke oplossing van $F(x, y) = 0$ in

$$\bar{B}_{\varepsilon_0} = \{y \in \mathbb{R} : |y| \leq \varepsilon_0\}$$

zijn.

Merk daartoe nog een keer op dat $F(x, y) = 0$ via (9.3) equivalent is met $y = \Phi(x, y)$ omdat $(F(0, 0))^{-1}$ als inverse van $F(0, 0)$ inverteerbaar is. Omdat $y \rightarrow \Phi(x, y)$ op $\bar{B}_{\varepsilon_0}$ voor alle x met $|x| \leq \delta_0$ uniform Lipschitz continu is met Lipschitz constante $L = M\eta_0 < 1$ is er voor iedere zulke x hoogstens één zo'n $y \in \bar{B}_{\varepsilon_0}$ met $y = \Phi(x, y)$. Voor de limiet $y = f(x)$ geldt vanwege de continuïteit van $y \rightarrow \Phi(x, y)$ dat

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x, y_n) = \Phi(x, y).$$

We hebben met de grafiek van f op $\bar{B}_{\delta_0}$ nu dus precies alle oplossingen van $(F(x, y) = 0$ in $\bar{B}_{\delta_0} \times \bar{B}_{\varepsilon_0}$ te pakken:

$$\{(x, y) \in \bar{B}_{\delta_0} \times \bar{B}_{\varepsilon_0} : F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \bar{B}_{\delta_0} \times \bar{B}_{\varepsilon_0} : y = f(x)\}, \quad (9.7)$$

Omdat bovenstaande constructie voor elke $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ met bijbehorende $\tilde{\varepsilon}$ en $\tilde{\delta}$ kan worden herhaald hebben we nu ook meteen dat $x \rightarrow f(x)$ continu is, met een δ -keuze bij ε die direct gerelateerd is aan die voor $x \rightarrow F(x, 0)$ via (9.6) en een vaste keuze $\eta = \eta_0$! Beter nog, de formule direct boven (9.6) geeft via de geslaagde limietovergang $y_{n+1} \rightarrow y = f(x)$ dat

$$|f(x)| \leq \frac{M|F(x, 0)|}{1 - \theta} = \frac{M}{1 - M\eta_0} |F(x, 0)|.$$

Als $x \rightarrow F_x(x, 0)$ continu is de buurt van $x = 0$, dan volgt, wederom met (8.2), dat

$$F(x, 0) = F(x, 0) - F(0, 0) = \int_0^1 F_x(tx, 0)x \, dt$$

voor x in diezelfde buurt. In dat geval hebben we voor $|x| \leq \delta_1$

$$|F(x, 0)| \leq \int_0^1 |F_x(tx, 0)| \, dt |x| \leq L|x|$$

met $L > |F_x(0, 0)|$ naar keuze, als $\delta_1 > 0$ gekozen is bij $\varepsilon_1 = L_1 - |F_x(0, 0)|$ via de continuïteit van $x \rightarrow F_x(x, 0)$ in $x = 0$. Dit geeft

$$|f(x)| \leq \frac{ML_1}{1 - M\eta_0} |x| = L|x| \quad \text{als} \quad |x| \leq \delta_1. \quad (9.8)$$

Kies nu een eventueel kleinere $\delta_1 > 0$ met $\varepsilon_1 = L\delta_1 \leq \varepsilon_0$. Dan is

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \bar{B}_{\delta_1} \times \bar{B}_{\varepsilon_1} : F(x, y) = 0\} &= \{(x, y) \in \bar{B}_{\delta_1} \times \bar{B}_{\varepsilon_1} : y = f(x)\} \\ &\subset \{(x, y) \in \bar{B}_{\delta_1} \times \bar{B}_{\varepsilon_1} : \delta_1|y| \leq \varepsilon_1|x|\}. \end{aligned}$$

Is f ook differentieerbaar in $x = 0$? We introduceren daartoe de definitie van differentieerbaarheid van

$$(x, y) \rightarrow F(x, y)$$

in $(x, y) = (0, 0)$, die natuurlijk de differentieerbaarheid van

$$x \rightarrow F(x, 0) \quad \text{en} \quad y \rightarrow F(0, y)$$

moet impliceren, en nemen aan dat

$$F(x, y) = F(0, 0) + F_x(0, 0)x + F_y(0, 0)y + R(x, y),$$

met

$$\frac{|R(x, y)|}{|x| + |y|} \rightarrow 0$$

als $|x| + |y| \rightarrow 0$.

Met $y = f(x)$ en $F(0, 0) = 0$ geeft dit

$$0 = F(x, f(x)) = F_x(0, 0)x + F_y(0, 0)f(x) + R(x, f(x)),$$

en dus dat

$$f(x) = -(F_y(0, 0))^{-1}F_x(0, 0)x - (F_y(0, 0))^{-1}R(x, f(x)),$$

waarin we

$$f'(0) = -(F_y(0, 0))^{-1}F_x(0, 0) \tag{9.9}$$

herkennen, maar daarvoor moet de restterm

$$r(x) = -(F_y(0, 0))^{-1}R(x, f(x))$$

de eigenschap hebben dat $r(x) = o(|x|)$ als $x \rightarrow 0$. Omdat $|f(x)| \leq L|x|$, volgt

$$\frac{|r(x)|}{|x|} = \frac{|R(x, f(x))|}{|f(x)| + |x|} \frac{|x| + |f(x)|}{|x|} \leq (L + 1) \frac{|R(x, f(x))|}{|f(x)| + |x|} \rightarrow 0$$

als $|x| \rightarrow 0$. Dus f is inderdaad differentieerbaar in $x = 0$, met afgeleide gegeven door (9.9).

Om ook

$$f'(x) = -(F_y(x, f(x)))^{-1} F_x(x, f(x)) \quad (9.10)$$

te concluderen beschouwen we het rechterlid van (9.9) als functie van x , op de buurt van $x = 0$ gedefinieerd door $|x| \leq \delta_2$, met $0 < \delta_2 \leq \delta_1$ nog te kiezen, en wel zo dat $F_y(x, f(x))$ inverteerbaar is voor alle x met $|x| \leq \delta_2$. Om te concluderen dat f continu differentieerbaar is op $B_{\delta_2} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \delta_2\}$ eisen we nu sowieso dat F_x en F_y continu zijn op $\bar{B}_{\delta_2} \times \bar{B}_{L\delta_2}$. Daarmee zijn

$$x \rightarrow F_x(x, f(x)) \quad \text{en} \quad x \rightarrow F_y(x, f(x))$$

continu op $\bar{B}_{\delta_2}$ en gaat het alleen nog om het bestaan en continuïteit van de samengestelde afbeelding

$$x \rightarrow F_y(x, f(x)) = A \rightarrow A^{-1} = (F_y(x, f(x)))^{-1},$$

dat we nu via een op het oog wat overdreven studie van

$$A \rightarrow A^{-1} \quad (9.11)$$

laten zien.

Alvorens we dat doen merken we op dat in elke $x = x_0$ waar de inverse van $F_y(x_0, f(x_0))$ bestaat, het bewijs hierboven voor $(x_0, y_0) = (0, 0)$ kan worden overgeschreven door $x - x_0$ en $y - f(x_0)$ als nieuwe x en y te nemen, en (9.10) te concluderen voor $x = x_0$. Er volgt zo dus inderdaad dat f continu differentieerbaar is op de nog te vinden $B_{\delta_2} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \delta_2\}$, met afgeleide gegeven door (9.10).

Wat (9.11) betreft, als A_0 in het domein van deze afbeelding zit, dan is

$$A = A_0 + A - A_0 = A_0 + H = A_0(1 + A_0^{-1}H),$$

en dus

$$A^{-1} = (1 + A_0^{-1}H)^{-1} A_0^{-1} = (1 - B)^{-1} A_0^{-1}$$

met

$$B = -A_0^{-1}H = -A_0^{-1}(A - A_0) = A_0^{-1}(A_0 - A).$$

Als $|B| < 1$ dan is

$$(1 - B)^{-1} = 1 + B + B^2 + B^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} B^n,$$

en daarmee

$$A^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B^n \right) A_0^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (B^n A_0^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} ((A_0^{-1}(A_0 - A))^n A_0^{-1}) \quad (9.12)$$

Omdat

$$|B| = |A_0^{-1}(A_0 - A)| \leq |A_0^{-1}| |A_0 - A|$$

is

$$|A_0 - A| < \frac{1}{|A_0^{-1}|} \quad (9.13)$$

nu een voldoende voorwaarde voor het bestaan van (9.12) als machtreeks, waarbij geldt dat

$$\begin{aligned} |A^{-1}| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |(A_0^{-1}(A_0 - A))^n A_0^{-1}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |(A_0^{-1}(A_0 - A))^n| |A_0^{-1}| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |A_0^{-1}(A_0 - A)|^n |A_0^{-1}| = \frac{|A_0^{-1}|}{1 - |A_0^{-1}(A_0 - A)|} \leq \frac{|A_0^{-1}|}{1 - |A_0^{-1}| |A_0 - A|}. \end{aligned}$$

In deze schattingen hebben we systematisch niet $|AB| = |A||B|$ maar $|AB| \leq |A||B|$ gebruikt.

De belangrijkste conclusie is dat (9.11) gedefinieerd is voor A die voldoet aan (9.13). Dus

$$B = \{A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineair} : |A_0 - A| < \frac{1}{|A_0^{-1}|}\}$$

zit in het domein van (9.12). Continuïteit in A_0 volgt met vergelijkbare algebra uit

$$\begin{aligned} A^{-1} - A_0^{-1} &= (1 - B)^{-1} A_0^{-1} - A_0^{-1} = ((1 - B)^{-1} - 1) A_0^{-1} \\ &= (1 - B)^{-1} (1 - (1 - B)) A_0^{-1} = (1 - B)^{-1} B A_0^{-1} = \end{aligned}$$

en de schatting

$$|A^{-1} - A_0^{-1}| \leq$$

10 Differentieerbare functies: de rekenregels

De rekenregels voor de afgeleide functies volgen eenvoudig uit de definitie met lineaire benaderingen, en die lineaire benaderingen worden vaak met $x - x_0$ i.p.v. h geschreven.

Opgave 10.1. Schrijf voor $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$ de expansie (7.3) als

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + R_0(x).$$

Herformuleer de conditie op de restterm $R_0(x)$ die zegt dat F differentieerbaar is in x_0 met afgeleide $F'(x_0)$. Laat zien dat die conditie ook impliceert dat F continu is in x_0 .

Als eerste voorbeeld van een rekenregel die we rechtstreeks uit de lineaire benadering halen bekijken we de functie

$$x \rightarrow \frac{1}{F(x)},$$

die natuurlijk wel eerst gedefinieerd moet zijn.

Opgave 10.2. Neem in Opgave 10.1 aan dat I een open interval is en dat $F(x_0) \neq 0$ met F continu in x_0 . Bewijs dat

$$x \rightarrow \frac{1}{F(x)}$$

bestaat op een interval $[a, b] \subset I$ met $a < x_0 < b$ en continu is in x_0 . Hint: gebruik eerst de definitie van continuïteit met $\varepsilon = \frac{1}{2}|F(x_0)|$ om het interval $[a, b]$ te maken.

In het bijzonder zegt deze opgave dat iedere $F \in C([a, b])$ die geen nulpunten  geeft een “omgekeerde” functie definieert die ook in $C([a, b])$ zit.

Opgave 10.3. Neem in Opgave 10.2 aan dat F differentieerbaar is in x_0 . Bewijs dat

$$x \rightarrow \frac{1}{F(x)}$$

differentieerbaar is in x_0 met afgeleide

$$-\frac{F'(x_0)}{F(x_0)^2}$$

door

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{1}{F(x_0)} + \frac{F(x_0) - F(x)}{F(x)F(x_0)}$$

uit werken met behulp van de expansie in Opgave 10.1.

Opgave 10.4. Dezelfde vraag als in Opgave 10.3 maar nu voor

$$x \rightarrow \frac{1}{|F(x)|}.$$

Wat verandert er?

Opgave 10.5. Schrijf voor $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$ de expansie (7.3) als in Opgave 10.1, en gebruik eenzelfde expansie

$$G(x) = G(x_0) + G'(x_0)(x - x_0) + S_0(x).$$

voor $G : I \rightarrow \mathbb{R}$. Vermenigvuldig beide expansies, werk uit als

$$F(x)G(x) = F(x_0)G(x_0) + (F'(x_0)G(x_0) + F(x_0)G'(x_0))(x - x_0) + T_0(x),$$

en bewijs dat met F en G ook

$$x \rightarrow F(x)G(x)$$

differentieerbaar is in x_0 . Hint: de afgeleide in x_0 leest zich onmiddellijk af, laat zien dat de restterm de juiste eigenschappen heeft.

De regel voor de afgeleide van $F(x)G(x)$ heet de regel van Leibniz of ook wel de produktregel: in elke x waar F en G differentieerbaar zijn is ook het produkt van F en G differentieerbaar met

$$(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x). \quad (10.1)$$

Opgave 10.6. Dezelfde (gaap) vraag als in Opgave 10.5 voor $x \rightarrow F(x) + G(x)$.

Opgave 10.7. Schrijf je bewijzen nog een keer over met $x - x_0$ vervangen door h en zie nog een keer goed hoe in de produktregel de twee lineaire benaderingen $F(x_0) + F'(x_0)h$ en $G(x_0) + G'(x_0)h$ met elkaar vermenigvuldigd worden tot

$$F(x_0) + G(x_0) + (F'(x_0)G(x_0) + F(x_0)G'(x_0))h + o(h).$$

Iets lastiger maar ook niet echt moeilijk is de rekenregel voor functies van de vorm $x \rightarrow G(F(x))$. Deze regel staat bekend als de kettingregel. We beperken ons nu tot open intervallen als definitiegebieden.

Opgave 10.8. Neem $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ met beeld in (c, d) en $G : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ met F differentieerbaar in $x_0 \in (a, b)$ en G differentieerbaar in $y_0 = F(x_0) \in (c, d)$. Vul de expansie voor $y = F(x)$ in in de expansie

$$G(y) = G(y_0) + G'(y_0)(y - y_0) + S_0(y).$$

en bewijs dat met F differentieerbaar in x_0 en G in $y_0 = F(x_0)$ ook

$$x \rightarrow G(F(x))$$

differentieerbaar is in x_0 . Hint: de afgeleide in x_0 leest zich af uit

$$G(F(x)) = G(y) = G(y_0) + G'(y_0)(F(x) - F(x_0)) + S_0(y) =$$

$$G(y_0) + G'(y_0)F'(x_0)(x - x_0) + G'(y_0)R_0(x) + S_0(y)$$

Laat zien dat ook hier de (deels nog uit te werken) restterm de juiste eigenschappen heeft.

Opgave 10.9. Schrijf de lineaire benaderingen ook met $h = x - x_0$ en $k = y - y_0$ als $F(x_0) + F'(x_0)h$ en $G(y_0) + G'(y_0)k$ en zie nog een keer goed hoe in de lineaire benadering

$$G(F(x_0 + h)) = G(F(x_0)) + G'(y_0)F'(x_0)h + o(h)$$

de term met h verschijnt door $k = F'(x_0)h$ te substitueren in $G'(y_0)k$. Anders gezegd, verifieer dat

$$h \xrightarrow{F'(x_0)} F'(x_0)h = k \xrightarrow{G'(y_0)} G'(y_0)k = G'(y_0)F'(x_0)h. \quad (10.2)$$

De coëfficiënt $G'(y_0)F'(x_0)$ van $h = x - x_0$ lezen we af als de afgeleide van $G(F(x))$ in x_0 . Deze regel heet de kettingregel.

Met $x = x_0 + h$ is h een coördinaat om het gedrag van $y = F(x)$ en dus ook van $k = F(x) - F(x_0)$ rond $(h, k) = (0, 0)$ te beschrijven. In de kettingregel hebben we met $y = F(x)$ en $z = G(y)$ voor

$$k = F(x) - F(x_0) \quad \text{en} \quad l = G(F(x)) - G(F(x_0))$$

dus de grafieken

$$k = F'(x_0)h + o(h) \quad \text{en} \quad l = G'(y_0)k + o(k) = G'(y_0)F'(x_0)h + o(h)$$

in het h, k -vlak, het k, l -vlak en het h, l -vlak rond respectievelijk $(h, k) = (0, 0)$, $(k, l) = (0, 0)$ en $(h, l) = (0, 0)$.

Opgave 10.10. Leg uit waarom Opgave 10.3 achteraf overbodig was. Gebruik de vorige opgaven om de eveneens overbodige regel voor de afgeleide van

$$x \rightarrow \frac{G(x)}{F(x)}$$

in x_0 te behandelen als $F(x_0) \neq 0$.

Opgave 10.11. Differentieerbaar in x_0 impliceert continu in x_0 en daarmee dat alle “nieuwe” functies hierboven onder de aannamen ook continu zijn in x_0 . Daarvoor was continuïteit van de ingrediënten natuurlijk voldoende. Formuleer en bewijs de voor de hand liggende uitspraken over continuïteit.

11 Integralen met parameters

Over toepassing kettingregel op

$$\int_{a(t)}^{b(t)} f(t, x) dx$$

in combinatie met wat we weten over 2-voudige integralen.

12 Mooie voorbeelden: machtreeksen

We doen even een voorbeeldje om te laten zien dat we de analyse wel zo graag algebraïsch houden. Neem $I = [-r, r]$ met $r > 0$, $F(x) = x^7$, vervang x_0 door a , $x_0 + h$ door x en maak voor dit geval (7.3) expliciet middels

$$x^7 = a^7 + a^6(x-a) + (x^5 + 2ax^4 + 3a^2x^3 + 4a^3x^2 + 5a^4x + 6a^5)(x-a)^2, \quad (12.1)$$

waarin we de afgeleide van x^7 in $x = a$ aflezen als de coëfficiënt van $h = x - a$.

Met $x - a$ in plaats van h is de algebra hier een stuk aangenamer, vooral omdat

$$x^7 - a^7 = (x-a)(x^6 + ax^5 + a^2x^4 + x^3x^3 + a^4x^2 + a^5x + a^6),$$

en de laatste factor met $x = a$ al de $7a^6$ geeft, waarna met een staartdeling het verschil van die factor met $7a^6$ is te schrijven als $(x-a)$ maal de grote factor in het rechterlid van (12.1). Leerzame algebra met een mooie uitkomst waarmee je meteen een patroon in ziet.

Opgave 12.1. Voor $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ en $x, a \in [-r, r]$ geldt dat

$$x^n = a^n + na^{n-1}(x-a) + R_{a,n}(x) \quad \text{met} \quad |R_{a,n}(x)| \leq \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} (x-a)^2.$$



Bewijs dit. Hint: $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

We zien voor $n \geq 2$ dat x^n in a afgeleide na^{n-1} heeft omdat

$$(a+h)^n = a^n + na^{n-1}h + R(a, h),$$

met de expliciete resttermschatting

$$|R(a, h)| \leq \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} h^2 \leq \varepsilon |h| \quad \text{voor} \quad |h| \leq \delta = \frac{2\varepsilon}{n(n-1)r^{n-2}}.$$

Merk op dat voor $n = 0$ en $n = 1$ deze schatting minder relevant (en in deze vorm onjuist) is omdat in die twee gevallen $R(a, h) = 0$ voor alle h .

Voor een polynoom $P(x) = \sum_{n=0}^k \alpha_n x^n$ met graad $k \geq 2$ gaat het net zo. Vermenigvuldig links en rechts in Opgave 12.1 met α_n en sommeer. Het resultaat is

$$P(x) = \sum_{n=0}^k \alpha_n x^n = \sum_{n=1}^k \alpha_n n a^{n-1} (x-a) + \sum_{n=2}^k \alpha_n R_{a,n}(x),$$

waarin we

$$P'(a) = \sum_{n=1}^k n \alpha_n a^{n-1}$$

aflezen omdat

$$\left| \sum_{n=2}^k \alpha_n R_{a,n}(x) \right| \leq \sum_{n=2}^k |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} (x-a)^2 \leq \varepsilon |x-a|$$

als

$$|x-a| \leq \delta \quad \text{met} \quad \delta \sum_{n=2}^k |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} = 2\varepsilon.$$

Maar ja, dan gaat het met (macht)reeksen precies het zelfde. In

(copy/paste in latex, replace $\wedge k$ by $\wedge \infty$)



$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n a^{n-1} (x-a) + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n R_{a,n}(x), \quad (12.2)$$

lezen we

$$P'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n a^{n-1} \quad (12.3)$$

af omdat

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n R_{a,n}(x) \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} (x-a)^2 \leq \varepsilon |x-a| \quad (12.4)$$

voor

$$|x - a| \leq \delta \quad \text{met} \quad \delta \sum_{n=2}^{\infty} |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} = 2\varepsilon. \quad (12.5)$$

De enige eis om te stellen is dat de reeksen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n a^{n-1}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}$$

convergeren en omdat $|x| \leq r$ en $|a| \leq r$ is dat via het gewoon convergent zijn van absoluut convergente reeksen en

$$1 \leq n \leq \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{1}{2} n^2 \quad (n \geq 2)$$

zeker het geval als

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\alpha_n| r^n \leq \infty. \quad (12.6)$$

Opgave 12.2. Bepaal voor de gevallen $\alpha_n = 1$, $\alpha_n = \frac{1}{n!}$ en $\alpha_n = n!$ het maximale interval waarop de machtreeks gegeven door (12.2) gedefinieerd is en doe hetzelfde voor $P'(x)$.

In (12.6) is $r > 0$ nog variabel. Is voor een $r > 0$ aan (12.6) voldaan, dan is

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

differentieerbaar op $[-r, r]$, met (vervang a in (12.3) door x)

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \alpha_{n+1} x^n$$

voor alle $x \in [-r, r]$. De r -waarden waarvoor (12.6) geldt vormen een interval $I_2 \subset [0, \infty)$ met $0 \in I_2$. Voor elke $k \in \mathbb{N}$ geldt hetzelfde voor

$$I_k = \{r \geq 0 : \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\alpha_n| r^n \leq \infty\}.$$

Opgave 12.3. Het is evident dat

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots,$$

want met grotere k zijn de termen in de reeks groter. Bewijs dat er een $R \in [0, \infty]$ is met de eigenschap dat voor elke $k \in \mathbb{N}$ geldt dat $I_k = [0, R)$ of $I_k = [0, R]$ en geef voorbeelden van $R = 0$, $R = 1$ en $R = \infty$.

De volgende stelling vat samen wat we nu weten.

Stelling 12.4. *Elke machtreeks*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

met $\alpha_n \in \mathbb{R}$ voor $n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ heeft een convergentiestraal $R \in [0, \infty]$. Voor $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < R$ geldt dat de termen $\alpha_n x^n$ en $n\alpha_n x^{n-1}$ van de machtreeksen voldoende hard naar 0 gaan om absolute convergentie van zowel $P(x)$ als van

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1} x^n$$

te garanderen, waarbij p de afgeleide is van P op $\{x \in \mathbb{R} : |x| < R\}$ en P DE primitieve van p met $P(0) = \alpha_0$. Voor $x \in \mathbb{R}$ met $|x| > R$ zijn de termen van beide machtreeksen onbegrensd en zijn deze machtreeksen dus allebei niet convergent.

Op het hoofdletters gedrukte DE komen we nog terug. Voorlopig bedoelen we dat $P(x)$, met een vrije keuze voor α_0 , de enige machtreeks is die $p(x)$ als afgeleide machtreeks heeft.

Met uitdrukkingen zoals $P(x)$ kunnen we nu eenvoudige differentiaalvergelijkingen oplossen. Bijvoorbeeld de differentiaalvergelijking

$$F'(x) = F(x). \quad (12.7)$$

Welke functies zijn differentieerbaar met afgeleide gelijk aan zich zelf? Probeer maar een machtreeks. Term voor term uitschrijven helpt om te zien wat er gebeurt. Als

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^6 + \alpha_7 x^7 + \cdots$$

met convergentiestraal R dan is voor $|x| < R$ de afgeleide gelijk aan

$$P'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + 4\alpha_4 x^3 + 5\alpha_5 x^4 + 6\alpha_6 x^5 + 7\alpha_7 x^6 + 8\alpha_8 x^7 + \cdots,$$

en dus is

$$P'(x) - P(x) = (\alpha_1 - \alpha_0) + (2\alpha_2 - \alpha_1)x + (3\alpha_3 - \alpha_2)x^2 + (4\alpha_4 - \alpha_3)x^3 + \dots,$$

hetgeen alleen maar 0 als

$$0 = \alpha_1 - \alpha_0 = 2\alpha_2 - \alpha_1 = 3\alpha_3 - \alpha_2 = 4\alpha_4 - \alpha_3 = \dots!$$

Het uitroepteken staat er niet voor niets bij. Een waarheid als een koe. Toch? Of niet? Ja, wel!

Opgave 12.5. Neem aan dat $r > 0$ en dat $P(x)$ convergent is voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < r$, en dat $P(x) = 0$ voor al die x . Waarom is $\alpha_0 = 0$? Haal vervolgens x buiten haakjes en concludeer dat $\alpha_1 = 0$, waarom? Etc.

Toegepast op de verschilmachtreeks volgt dat met bijvoorbeeld $\alpha_0 = 1$ de coëfficiënten moeten voldoen aan

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{1}{2} \frac{1}{3}, \alpha_4 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4}, \dots,$$

m.a.w.

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Stelling 12.6. Laat $r > 0$. De enige machtreeks die voldoet aan zowel $P'(x) = P(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < r$ als aan $P(0) = 1$ is

$$P(x) = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \dots$$

Opgave 12.7. Laat zien dat de reeks in Opgave 12.6 voor elke $x \in \mathbb{R}$ convergent is. De machtreeks heeft dus convergentiestraal is $R = \infty$ en is zijn eigen afgeleide.

Definitie 12.8. Voor een functie $F : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zeggen we dat $F(x) \rightarrow 0$ als $x \rightarrow \infty$, als er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\xi \in [a, \infty)$ bestaat waarmee geldt:

$$x \geq \xi \implies |F(x)| \leq \varepsilon.$$

Opgave 12.9. Laat zien dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\frac{x^n}{\exp(x)} \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad x \rightarrow \infty,$$

de bekende standaardlimiet die zegt dat $\exp(x)$ het wint van elke macht van x .

Stelling 12.10. *Laat $r > 0$. De enige machtreeks die voldoet aan zowel $P''(x) + P(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < r$ als aan $P(0) = 0$ en $P'(0) = 1$ is*

$$P(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots.$$

Opgave 12.11. Bewijs Stelling 12.10. Wat is de convergentiestraal? Wat is de afgeleide van $\sin$? Noem deze functie maar $\cos$. Wat is de afgeleide van $\cos$?

Dat $\exp(x)$, $\sin x$, $\cos x$ zijn⁵ wat ze moeten zijn, namelijk $e = \exp(1)$ tot de macht x , en sinus en cosinus van een hoek x in radialen is nog niet meteen duidelijk. Ook willen we wel even zeker weten dat er geen andere functies dan deze machtreeksen zijn met de eigenschappen die $\exp(x)$, $\cos x$, $\sin x$ als machtreeks uniek definiëren. Eenzelfde vraag staat overigens nog open voor functies met de eigenschap dat $F'(x) = 0$ voor alle x met $|x| < r$.

De eigenschappen van $\cos$ en $\sin$ zijn natuurlijk te halen uit het feit dat de reeksen van $\cos x$ en $\sin x$ net als die voor $\exp(x)$ absoluut convergent zijn voor alle $x \in \mathbb{R}$ en dus uitvermenigvuldigd kunnen worden. Dat is wat gepriegeld.

Opgave 12.12. Laat zien dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat



$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

door voor $\cos x$ en $\sin x$ de machtreeksen in te vullen, de kwadraten⁶ uit te werken en op te tellen.

Opgave 12.13. Bewijs de gelijkheid in Opgave 12.12 zonder al dat rekenwerk door op te merken dat $\cos^2 x$ en $\sin^2 x$ als kwadraten van machtreeksen weer machtreeksen zijn. Hint: hun som is dus ook een machtreeks. Wat weet je via Opgave 12.10 van de afgeleide van die machtreeks? Dus?

⁵We zouden eigenlijk $\sin(x)$ en $\cos(x)$ moeten schrijven, maar dat doet vrijwel niemand.

⁶Lees $\cos^2 x = (\cos x)^2$ en idem voor $\sin$.

Bovenstaande opgaven zijn nuttige oefeningen, maar inzicht bieden ze niet echt. De machtreeksen zijn oplossingsformules voor een differentiaalvergelijking die met $F''(x) + F(x) = 0$ een notatie heeft die de tenen doet krommen. Dit is namelijk de vergelijking voor een harmonische oscillator die we bij voorkeur schrijven als

$$\ddot{x} + x = 0,$$

waarin x de afhankelijke grootheid (plaats) is en t de onafhankelijke grootheid. Dus $x = x(t)$ en $\ddot{x}$ staat voor de tweede afgeleide van $t \rightarrow x(t)$. Oplossingen zijn periodiek met periode 2π . Het verband met cirkels en met name cirkelbewegingen via $y = -\dot{x}$ in het x, y -vlak is natuurlijk de moeite van het bespreken waard. Met name omdat formules als

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

en de vorm van de grafiek van $x = \sin t$ in het t, x -vlak bij voorkeur uit de differentiaalvergelijking gehaald worden (gebruikmakend van wat hieronder nog over dat onderwerp volgt) en juist niet uit de oplossingsformules. Maar voor wie meer wil rekenen met zulke formules, het is niet verboden:

Opgave 12.14. Bewijs met de theorie tot nu toe door middel van o.a. machtsreeksberekeningen dat $\sin$ een periodieke functie is met een periode die we 2π noemen, en dat $-\sin(-x) = \sin x = \sin(\pi - x) > 0$ voor $0 < x < \pi$. Schets de grafiek van $\sin$.

13 Rare voorbeelden

Er zijn ook functies $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die in elke $x_0 \in [a, b]$ differentieerbaar zijn met een afgeleide $F'(x_0)$, waarvoor $F' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wel als functie

$$x \rightarrow F'(x) \tag{13.1}$$

is gedefinieerd maar niet in $C([a, b])$ zit. Dat komt omdat de meest vreemde functies differentieerbaar kunnen zijn.

Opgave 13.1. Als $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie is die continu is in $x = 0$ met waarde $g(0) = 0$, dan is de functie $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $R(x) = xg(x)$ differentieerbaar in $x = 0$ met afgeleide $R'(x) = 0$. Laat dit zien rechtstreeks vanuit Definitie 7.1.

Voor de functie g in Opgave 13.1 kun je bijvoorbeeld $g(x) = 0$ voor $x \in \mathbb{Q}$ en $g(x) = x$ voor $x \notin \mathbb{Q}$ nemen. Zo krijg je een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die in geen enkele $x \neq 0$ continu is maar wel differentieerbaar is in $x = 0$.

Opgave 13.2. Definieer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(0) = 0$ en (voor $x \neq 0$)

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}.$$

Laat zien dat f in elke $x \in \mathbb{R}$ differentieerbaar is maar dat $f'(x)$ niet begrensd is op het interval $[0, 1]$. Hint: gebruik dat de functies $\cos$ en $\sin$ periodiek zijn maar niet constant.

Opgave 13.3. Definieer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(0) = 0$ en (voor $x \neq 0$)

$$\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Schets de grafiek van f . Laat met de theorie tot nu toe zien dat f afgeleiden $f', f'', \dots$ van iedere orde heeft en dat in $x = 0$ alle afgeleiden van f gelijk zijn aan 0.

14 De middelwaardestelling

Merk op dat Stelling 12.4 eigenlijk een uitspraak is over P en p samen. Het woordje DE is met twee hoofdletters geschreven omdat na het voorwerk alleen deze uitspraak nog toelichting behoeft. Dat voor $|x| < R$ de enige vrijheidsgraad die er is in de primitieve van p overeenkomt met de waarde van (de constante term) $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ is een uitspraak over machtreeksen. Het zou natuurlijk kunnen zijn dat er nog andere primitieve functies zijn. In het eenvoudigste voorbeeld dat $p(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ leidt dit tot de vraag of er functies zijn die differentieerbaar zijn op een interval met afgeleide overal nul, maar zelf niet constant. De stelling die dit evident (waarom?) uitsluit (en daarmee het bestaan van nog andere primitieven van p in Stelling 12.4) is de middelwaardestelling:

Stelling 14.1. *Laat $F \in C([a, b])$ differentieerbaar zijn op het open interval (a, b) . Dan is er een ξ in (a, b) zodanig dat*

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi)$$

Deze stelling is een gevolg van de uitspraak in Opgave 5.6 over maxima en minima van functies $F \in C([a, b])$ en een uitspraak over de afgeleide in het geval dat zo'n extreme waarde wordt aangenomen in $x_0 \in (a, b)$.

Stelling 14.2. *Laat $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zijn. Als er een punt $x_0 \in (a, b)$ is waarin F differentieerbaar is en $F(x) \leq F(x_0)$ voor alle $x \in (a, b)$ dan is $F'(x_0) = 0$.*

Opgave 14.3. Bewijs Stelling 14.2 rechtstreeks vanuit Definitie 7.1.

Opgave 14.4. Bewijs Stelling 14.1 in het geval dat $F(a) = F(b) = 0$. Hint: gebruik Stelling 14.2 en Opgave 5.6. Onderscheid de gevallen $m < 0 \leq M$, $m \leq 0 < M$ en $m = 0 = M$.

Opgave 14.5. Herleid het algemene geval in Stelling 14.1 tot het resultaat in Opgave 14.4 door van F een lineaire⁷ functie G met $G(x) = \alpha x + \beta$ af te trekken, met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zo gekozen dat $F(a) = G(a)$ en $F(b) = G(b)$.

15 De Inverse Functie Stelling

Als I een open interval is met $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar en $F'(x) > 0$ voor alle $x \in I$ dan volgt uit de middelwaardestelling dat F strict monotoon stijgend is op I . Voor iedere $[a, b] \subset I$ met $a < b$ is het beeld onder F van $[a, b]$ dus bevat in $[F(a), F(b)]$, het beeld van (a, b) onder F in $(F(a), F(b))$, en kan elke waarde $c \in (F(a), F(b))$ maar één keer worden aangenomen. Wordt elke waarde $c \in (F(a), F(b))$ ook daadwerkelijk aangenomen? Het antwoord is ja en daarvoor is alleen maar nodig dat $F \in C([a, b])$. Zie [HM] of het dictaat van Bas en Theo over die fundamenteën van de wiskunde. Of maak de volgende opgave.

Opgave 15.1. Laat $F \in C([a, b])$ en neem aan dat $F(a) < c < F(b)$. Beschouw de kleinste bovengrens ξ van de niet-lege verzameling x -waarden in $[a, b]$ waarvoor $F(x) < c$, dus

$$\xi = \sup\{x \in [a, b] : F(x) < c\}.$$

⁷Beter gezegd: een functie waarvan de grafiek een rechte lijn is.

Bewijs dat $F(\xi) = c$.

Stelling 15.2. Laat $F \in C([a, b])$ en neem aan dat F differentieerbaar is met $F'(x_0) > 0$ in elke $x_0 \in (a, b)$. Dan bestaat er een functie $G \in C([F(a), F(b)])$ met $G(F(x)) = x$ voor alle $x \in [a, b]$, $F(G(y)) = y$ voor alle $y \in [F(a), F(b)]$ en G is differentieerbaar in elke $y_0 \in [F(a), F(b)]$ met afgeleide gedefinieerd door $F'(x_0)G'(y_0) = 1$ als $y_0 = F(x_0)$ (en $x_0 = G(y_0)$).

Opgave 15.3. Het bestaan van G volgt onmiddellijk uit de overwegingen boven de stelling en de opgave. We hoeven alleen nog te laten zien dat G differentieerbaar is. Neem daartoe zonder beperking der algemeenheid het geval dat $x_0 = 0$, $F(0) = 0 = y_0$ (dus $G(0) = 0$), en $F'(x_0) = 1$. Maak het bewijs af door $F'(0) = 1$ te relateren met het liggen van de grafiek $y = F(x)$ tussen $y = (1 + \varepsilon)x$ en $x = (1 + \varepsilon)y$ in de buurt van $(x, y) = (0, 0)$ voor gegeven willekeurige $\varepsilon > 0$. **Maak** dat de herformulering symmetrisch is in x en y en concludeer dat $G'(0)$ bestaat en gelijk is aan 1.

Opgave 15.4. Reduceer het algemene geval via geschikte hulpfuncties tot het speciale geval $F(0) = 0$ en $F'(0) = 1$ in Opgave 15.3.

Opgave 15.5. De functies $x \rightarrow x^n$ op $\mathbb{R}^+$ met $n \in \mathbb{N}$ hebben inverse functies. Gebruik Stelling 15.3 om de afgeleiden van de inverse functies $y \rightarrow \sqrt[n]{y}$ te bepalen.

16 Speeltuin

Deze subsectie is een grote speeltuin na en met wat we hierboven gezien hebben, en die speeltuin krijgt nog meer attracties!

Expliciete schattingen zijn handig als je sommen wil nemen zoals in de stap van monomen x^n naar machtreeksen als in (12.2). Bijvoorbeeld om de vraag te beantwoorden voor welke $x \in \mathbb{R}$ de Laurentreeks

$$L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n x^n = \cdots + \frac{\alpha_{-2}}{x^2} + \frac{\alpha_{-1}}{x} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$$

convergent is en term voor term gedifferentieerd kan worden, met $|x|$ niet te groot voor de positieve machten en $|x|$ niet te klein voor de negatieve

machten. Verzin eerst maar een mooie variant op Opgave 12.1 in de vorm

$$\frac{1}{x^7} = \frac{1}{a^7} - \frac{7}{a^8}(x - a) + R_a(x).$$

Misschien doe je dit liever eerst voor de functie

$$x \rightarrow \frac{1}{x},$$

die bij de omgekeerde operatie (primitiveren) meteen het buitenbeentje is, want geen afgeleide van een algegraïsche functie!

Definitie 16.1. Voor $x > 0$ wordt $\ln x$ gedefinieerd door

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{s} ds.$$

Opgave 16.2. Leidt rechtsreeks uit de definities af dat voor $0 < a < b$, $f \in RI([a, b])$ en $c > 0$ geldt dat

$$\int_a^b (f(x) dx) = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f\left(\frac{x}{c}\right) dx,$$

en gebruik dit om voor $x > 1$ en $y > 1$ de integraal voor $\ln y$ te schrijven als integraal van x tot xy . Concludeer dat

$$\ln xy = \ln x + \ln y.$$

Bewijs dat deze identiteit geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}^+$. Hint: laat apart zien dat $\ln x + \ln \frac{1}{x} = 0$ voor alle $x > 0$.

Opgave 16.3. Uit de definitie volgt dat $\ln$ een strict stijgende functie is op $\mathbb{R}^+$. Bewijs en gebruik de ongelijkheid

$$\ln n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

om te laten zien dat $\ln x \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow \infty$. Geef daarvan en daartoe ook een definitie zoals Definitie 12.8. Wat geldt er voor $x \rightarrow 0$?

Opgave 16.4. Vanwege Opgave 16.3 en Stelling 15.2 heeft $\ln$ een inverse functie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Laat zie dat uit de stelling ook volgt dat $F(0) = 1$ en $F'(y) = F(y)$ voor alle $y \in \mathbb{R}$. Leg uit waarom $\ln$ maar één inverse functie kan hebben en concludeer dat $F = \exp$.

Opgave 16.5. Laat zien dat $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, en dat met $e = \exp(1)$ gedefinieerd door

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$$

geldt dat

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}$$

voor alle $p \in \mathbb{Z}$ en alle $q \in \mathbb{N}$. Bij afspraak is $e^x = \exp(x)$ ook voor alle andere $x \in \mathbb{R}$.

In Opgave 16.5 zijn machten van e^x van e eerst voor $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ uitgewerkt. Voor zulke x vallen $\exp(x)$ en e^x samen. Omdat $x \rightarrow \exp(x)$ een differentieerbare en dus continue functie is geldt nu dat $e^r = \exp(r) \rightarrow \exp(x)$ als $r \rightarrow x$ langs $r \in \mathbb{Q}$, hetgeen de algemene consensus dat e^x als limiet van e^r gedefinieerd MOET worden rechtvaardigt: bij deze is e^x voortaan gelijk aan $\exp(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Voor machten x^α van een willekeurige $x > 0$ is het verhaal precies hetzelfde. Met de hierboven gevonden rekenregels voor $\exp$ en $\ln$ is eerst

$$x^n = (e^{\ln x})^n = e^{n \ln x}$$

voor $n \in \mathbb{N}$, vervolgens leid je af dat $n \in \mathbb{N}$ door $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ vervangen mag worden en eenzelfde consensus als voor de e -macht is nu gerechtvaardigd:

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad \text{voor } x > 0 \quad \text{en } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (16.1)$$

Het is leuk om daar even mee te spelen. De volgende twee opgaven zijn een eerste kennismaking met asymptotische formules. De notatie

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{voor } x \rightarrow a \quad (16.2)$$

betekent bij afspraak dat

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \quad \text{als } x \rightarrow a,$$

waarbij voor a bijvoorbeeld 0 of ∞ mag worden gelezen. Zulke formules worden ook gebruikt met $n \in \mathbb{N}$ i.p.v. $x \in \mathbb{R}$. Bijvoorbeeld

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{als } n \rightarrow \infty, \quad (16.3)$$

de formule van Stirling waarover we nog uitgebreid komen te spreken. Als wat links van het $\sim$ teken lastig te doorgronden is en de rechterkant wel transparant is dan kunnen dit soort uitspraken nuttig zijn. Kwestie van smaak soms, want de keuze van $g(x)$ ligt uiteraard niet vast.

Opgave 16.6. Onderzoek de functie $F : x \rightarrow x^x$ met $x \in \mathbb{R}^+$ m.b.v. de definitie in (16.1). Schets de grafiek. Bepaal een zo simpel mogelijke functie $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ zodanig dat

$$F(x) - 1 \sim xg(x)$$

als $x \rightarrow 0$, i.e.

$$\frac{F(x) - 1}{xg(x)} \rightarrow 1.$$

Als we $F(0) = 1$ stellen is F dan (rechts)differentieerbaar in $x = 0$?

Opgave 16.7. Omdat x^x strict stijgend is in x als x voldoende groot is (groter dan wat?) heeft $x \rightarrow x^x$ een inverse functie $y \rightarrow f(y)$ gedefinieerd voor y voldoende groot. Laat zien dat f gedefinieerd is door de vergelijking $x \ln x = \ln y$, breng $\ln x$ naar de andere kant en gebruik de formule die je dan krijgt voor x weer in de rechterkant teneinde een zo simpel mogelijke $g(y)$ te vinden zodanig dat

$$f(y) \sim \frac{\ln y}{g(y)}$$

als $y \rightarrow \infty$. Hint: uitdrukkingen met x en y die je naar 1 wil laten gaan kun je in x uitdrukken en vervolgens via $t = \ln x$ en Opgave 12.9 behandelen.

17 Differentiaalvergelijkingen ad hoc

Terug naar de differentiaalvergelijking $F'(x) = F(x)$: wat nog niet duidelijk is of er nog andere oplossingen zijn dan machtreeksoplossingen. Te prefereren is wellicht een directe uitspraak dat oplossingen van zulke differentiaalvergelijkingen altijd machtreksen zijn. Voor nu is het echter de (later wellicht overbodige) vraag of een functie F die aan $F'(x) = F(x)$ voldoet op

een interval I nulpunten kan hebben op dat interval zonder de nulfunctie te zijn. We beantwoorden die vraag nu door juist te kijken naar oplossingen die ergens positief (voor negatief is het argument hetzelfde door naar $-F(x)$ te kijken).

Opgave 17.1. Laat $I \subset \mathbb{R}$ een open interval zijn en $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar met $F'(x) = F(x)$ voor alle $x \in I$ en $(a, b) \subset I$ een maximaal interval waarop $F(x) > 0$. Dan is $(a, b) = I$. Bewijs dit door de vergelijking op te lossen via scheiding van variabelen onder de aanname dat $F(x) > 0$ gebruikmakend van ondermeer Opgave 10.8 en

$$F'(x) = F(x) \iff \frac{F'(x)}{F(x)} = 1 \iff \ln(F(x)) = x + C \iff F(x) = e^{x+C}$$

Opgave 17.2. Dezelfde vraag als in Opgave 17.1 maar nu voor $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ die voldoet aan $F'(x) = F(x)g(x)$ met $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Los de differentiaalvergelijking ook weer (zoals dat op school genoemd wordt) exact op m.b.v. een primitieve G van g .

Opgave 17.3. Voor $\alpha \in \mathbb{R}$ voldoet de functie $F_\alpha : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ gedefinieerd door $F_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$ aan een differentiaalvergelijking zoals in Opgave 17.2. Schrijf deze in de vorm $(1+x)F'(x) = \alpha F(x)$ en bepaal een machtreeks oplossing van de vorm

$$1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Schrijf de coëfficiënten in een vorm waarmee je in het geval $\alpha = n \in \mathbb{N}$ het binomium van Newton herkent. De convergentiestraal van deze machtreeks (voor $\alpha \notin \mathbb{N}_0$) is $R = 1$. Kun je dat aantonen? Waarom volgt nu dat $F_\alpha(x)$ (alleen) voor $|x| < 1$ gelijk is aan de machtreeks die je hebt uitgerekend?

Een bijzonder geval om te onthouden is $\alpha = -1$, maar ook $\alpha = \pm \frac{1}{n}$ komt vaak van pas.

Bovenstaande opgaven bevatten ad hoc argumenten om de oplossing van een eerste orde lineaire differentiaalvergelijking gegeven een randvoorwaarde als machtreeks te identificeren. Voor vergelijkingen als $F''(x) + F(x) = 0$ gaat het rekenwerk net zo, maar zijn de ad hoc argumenten wat anders, een reden te meer om de ad hoc redematies te vervangen door een aanpak gebaseerd op integraalvergelijkingen, die we oplossen in de vectorruimte van continue

functies op gesloten begrensde intervallen, in $C([a, b])$ dus. Dat doen we in Sectie 33. Een alternatieve vraag om te stellen is hoe je van een functie gedefinieerd als oplossing van zo'n integraalvergelijking, bijvoorbeeld

$$F(x) = 1 + \int_0^x F(s) ds \quad (17.1)$$

meteen ziet dat de functie, in ieder geval voor $|x|$ kleiner dan een te bepalen en zo groot mogelijke r , gegeven wordt door een ondubbelzinnig gedefinieerde machtreeks.

18 Genormeerde ruimten

We hebben het al gehad over vectorruimten van functies. In zulke vectorruimten willen over limieten kunnen spreken net zoals we dat doen in $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ gebruiken we daarvoor absolute waarden van verschillen, in algemene vectorruimten zoeken we naar een geschikte norm waarmee we verschillen meten. Een eerste voorbeeld is de zogenaamde 1-norm.

Definitie 18.1. Voor iedere $f \in RI[a, b]$ schrijven we

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Definitie 18.2. Als X een lineaire vectorruimte over $\mathbb{R}$ is en $x \in X \rightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$ een afbeelding met de eigenschap dat voor alle $x, y \in X$ en voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$(i) \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0; \quad (ii) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

dan heet X genormeed met norm $\|\cdot\|$. Een Cauchyrij in X is een door $n \in \mathbb{N}$ genummerde rij $x_n \in X$ met $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ als $m, n \rightarrow \infty$. Als alle Cauchyrijen in X convergent zijn (met per definitie hun limiet in X) dan heet X volledig. Volledige ruimten worden Banachruimten genoemd.

Opgave 18.3. Geef de ε -definitie van $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ als $m, n \rightarrow \infty$. Geef ook de definitie van het convergent zijn van de rij x_n in X .

Opgave 18.4. Waarom is $\|\cdot\|_1$ geen norm op $RI([a, b])$ maar wel op $C([a, b])$?

De voor de liggende norm op $C([a, b])$ is de ∞ -norm, die de limiet is van de p -normen

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1) \quad (18.1)$$

voor $p \rightarrow \infty$, al zie je dat aan de definitie

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (18.2)$$

misschien niet meteen. Deze norm wordt (op $C([a, b])$) ook wel de maximum-norm genoemd.

Stelling 18.5. *Met de maximumnorm (18.2) is $C([a, b])$ een Banachruimte.*

Bewijs. We bewijzen alleen dat $C([a, b])$ met de maximum norm (wel) volledig is. Neem een Cauchyrij in f_n in $C([a, b])$. Je had in Opgave 18.3 al bedacht dat de uitspraak dat $\|f_n - f_m\|_\infty \rightarrow 0$ als $m, n \rightarrow \infty$ equivalent is met

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \implies \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon, \quad (18.3)$$

ofwel

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \implies |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]. \quad (18.4)$$

Maar dan is voor elke vast gekozen $x \in [a, b]$ de rij $f_n(x)$ een Cauchyrij in $\mathbb{R}$ en dus convergent met een limiet die we $f(x)$ noemen. Daarmee is een functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd en te bewijzen is natuurlijk dat $f \in C([a, b])$.

Voor we dat doen merken we op dat in (18.4) nu de limiet $m \rightarrow \infty$ genomen kan worden waarmee de uitspraak

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \quad (18.5)$$

zich aandient. Als nu f (en dus ook $f - f_n$) inderdaad in $C([a, b])$ zit dan is (18.5) equivalent met

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \implies \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad (18.6)$$

en zijn we klaar.

Waarom zit f in $C([a, b])$? Neem weer $\varepsilon > 0$ en probeer $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ te krijgen door $|x - y| \leq \delta$ voor een bijbehorende $\delta > 0$ te eisen. Dat moet wel via de f_n want die zijn uniform continu. Schrijf daartoe

$$f(x) - f(y) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y),$$

waarmee

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \varepsilon \text{ als } n \geq N} + |f_n(x) - f_n(y)| + \underbrace{|f_n(y) - f(y)|}_{\leq \varepsilon \text{ als } n \geq N}. \quad (18.7)$$

In (18.7) kiezen we nu $n = N$ en bij die vaste N een $\delta > 0$ zodanig dat voor de middelste term geldt dat

$$|f_N(x) - f_N(y)| \leq \varepsilon \quad \text{als} \quad |x - y| \leq \delta,$$

culminerend in

$$|f(x) - f(y)| \leq 3\varepsilon \quad \text{als} \quad |x - y| \leq \delta$$

vanwege (18.7). Hiermee is het bewijs klaar omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen was.

Opgave 18.6. De voorfactor 3 doet er niet toe. Waarom niet?

Definitie 18.7. Als de rij $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ voldoet aan (18.5) in het bewijs hierboven dan heet de rij f_n uniform convergent op $[a, b]$. In deze definitie kan $[a, b]$ natuurlijk vervangen worden door een willekeurig interval I .

19 Integralen van X -waardige functies

Als X een genormeerde ruimte is dan kunnen we voor $f : [a, b] \rightarrow X$ de definitie van uniform continu overschrijven met $\|f(x) - f(y)\|$ in plaats van $|f(x) - f(y)|$, zie Definitie 2.7. Als de aardige en nuttige oefening in Sectie 3 is gelukt dan heb je nu een bewijs van de volgende stelling.

Stelling 19.1. Laat X een Banachruimte zijn en $f : [a, b] \rightarrow X$ uniform continu. Dan bestaat er een unieke $J \in X$ waarvoor geldt dat

$$\|S - J\| \leq \varepsilon(b - a)$$

voor elke S van de vorm (3.1) mits $x_k - x_{k-1} \leq \delta$ voor alle $k = 1, \dots, N$ waarmee de bijbehorende partitie P in (2.4) genummerd wordt. Per definitie is

$$J = \int_a^b f(x) dx.$$

Dat uniforme continuïteit ook hier uit puntsgewijze continuïteit volgt is ook weer een kwestie van overschrijven. En Stelling 19.3 kan ook met bewijs en al worden overgeschreven voor $f : [a, b] \rightarrow X$ (uniform) continu.

Opgave 19.2. Als $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ een lineaire functie is dan is $x \rightarrow A(f(x))$ weer een $\mathbb{R}$ -waardige functie. Als deze functie continu is bestaat zijn integraal op $[a, b]$. We kunnen A ook loslaten op de benaderende Riemannsommen voor de integraal van f zelf, en op verschillen daarvan. Met een schatting van de vorm

$$\|Ax\| \leq L\|x\| \quad \text{voor alle } x \in X \quad (19.1)$$

voor een vaste $L \geq 0$ moet uit je bewijs voor Stelling 19.1 nu volgen dat

$$A(J) = \int_a^b A(f(x)) dx.$$

Verifieer dit eerst voor $L = 1$. Hint: de relevante schattingen voor (o.a. de Riemansommen bij) $x \rightarrow A(f(x))$ zijn voor $L = 1$ identiek aan die voor de sommen bij f .



Stelling 19.3. Laat X een Banachruimte zijn. Definieer voor $f : [a, b] \rightarrow X$ de functie $F : [a, b] \rightarrow X$ door

$$F(x) = \int_a^x f(s) ds.$$

Dan is F differentieerbaar in elke $x_0 \in [a, b]$, met afgeleide $F'(x_0) = f(x_0)$.



Merk op dat in het **bewijs** de driehoeksongelijkheid voor integralen werd gebruikt. Die geldt ook hier, rechtstreeks vanuit de definities. Voor f als in Stelling 19.1 geldt

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx,$$

waarbij de continuïteit van $x \rightarrow \|f(x)\|$ volgt uit

$$\left| \|f(x)\| - \|f(y)\| \right| \leq \|f(x) - f(y)\|,$$

de omgekeerde driehoeksongelijkheid toegepast op $f(x)$ en $f(y)$.

Stelling 19.3 zegt weer dat F een primitieve is van kleine f en voor deze primitieve geldt met $x = b$ dat

$$\int_a^x f(s) ds = F(b) - F(a), \quad (19.2)$$

omdat $F(a) = 0$. Als $\tilde{F}$ een andere primitieve is van f dan geldt voor $G = F - \tilde{F} : [a, b] \rightarrow X$ dat G differentieerbaar is met $G'(x) = 0$ voor alle

$x \in [a, b]$. Met de kettingregel is dan voor elke continue lineaire (en dus differentieerbare) $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ de reëelwaardige functie

$$x \xrightarrow{\phi} g(G(x))$$

differentieerbaar op $[a, b]$ met afgeleide in $x \in [a, b]$ gedefinieerd door

$$h \xrightarrow{\phi'(x)} g(G(x))G'(x)h = 0$$

voor $h \in \mathbb{R}$. Dus $\phi(b) = \phi(a)$ via de gewone middelwaardestelling.

We concluderen hieruit dat $g(G(b)) - g(G(a)) = 0$ voor elke continue lineaire $g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Voor $y = G(b) - G(a)$ geldt dus dat $g(y) = 0$ voor al deze g . We zeggen dat de continue lineaire functies de punten in X scheiden als dat impliceert dat $y = 0$. In dat geval zijn we klaar want dan is $F(b) - F(a) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)$. Hiermee is de volgende stelling bewezen, waarin we $\tilde{F}$ weer F noemen.

Stelling 19.4. *Laat X een Banachruimte zijn waarop continue lineaire functies de punten scheiden⁸. Als $f : [a, b] \rightarrow X$ continu is op $[a, b]$ en de continue differentieerbare functie $F : [a, b] \rightarrow X$ als primitieve heeft⁹, dan is*

$$\int_a^b f(s) ds = F(b) - F(a).$$

20 Differentiaalrekening voor functies op X

Als X een genormeerde ruimte is en

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}$$

een reëelwaardige functie¹⁰ op X , dan kunnen we de definitie van differentieerbaarheid in een vaste $x_0 \in X$ overschrijven van Definitie 7.1 beginnende met de expansie

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + F'(x_0)h + R(x_0, h), \quad (20.1)$$

waarin

$$F'(x_0) : X \rightarrow \mathbb{R}$$

⁸Op Banachruimten scheiden de continue lineaire functies de punten (Hahn-Banach).

⁹Hetgeen ook hier betekent dat $F'(x) = f(x)$ voor alle $x \in [a, b]$.

¹⁰Iedere $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ met $A \subset X$ breidt uit tot $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ via $F(x) = 0$ voor $x \notin A$.

lineair is en de restterm moet voldoen aan (met dubbele verticale normstrepen)

$$\|R(x_0, h)\| = o(\|h\|) \quad \text{als} \quad \|h\| \rightarrow 0, \quad (20.2)$$

uit te spreken als (zonder die toch niet uit te spreken normstrepen): $R(x_0, h)$ is kleine o van h voor h naar nul.

Definitie 20.1. Een functie $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ op een genormeerde ruimte heet differentieerbaar in $x_0 \in X$ als er een uniform Lipschitz continue lineaire afbeelding $A = F'(x_0) : X \rightarrow \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat (20.1) geldt met (20.2).

Uniform Lipschitz continu is een mond vol maar betekent niets anders dan dat $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ de eigenschap heeft dat er een $L \geq 0$ is waarmee geldt dat $\|A(h - k)\| \leq L\|h - k\|$ voor alle $h, k \in X$. Omdat A lineair is, is dat equivalent met (19.1), de schatting die we in Opgave 19.2 nodig hadden om X -waardige integralen via zo'n A aan gewone $\mathbb{R}$ -waardige intergalen te relateren.

Definitie 20.2. Een lineaire afbeelding $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ van een genormeerde ruimte X naar $\mathbb{R}$ heet begrensd als (19.1) geldt voor een zekere $L \geq 0$.

We schrijven Ax in plaats van $A(x)$. Dat is een gebruikelijke notatie bij lineaire afbeeldingen. Maar $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ is natuurlijk ook gewoon een functie, een functie die lineair is:

$$A(x + y) = A(x) + A(y) \quad \text{en} \quad A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad \text{voor alle} \quad x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Opgave 20.3. Op $\mathbb{R}^n$ zijn alle lineaire functies continu. Maar voor niet eindig-dimensionale ruimten¹¹ X is dit niet te verwachten. Denk bijvoorbeeld aan de ruimte $X = (c_{00})$ die bestaat uit alle rijtjes $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ met maar eindig veel niet-nullen, voorzien van bijvoorbeeld de gewone Euclidische norm¹². De afbeelding

$$A : (c_{00}) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{met} \quad A(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} nx_n$$

gedefinieerd als eindige som is lineair maar voldoet niet aan een schatting van de vorm (19.1). Waarom niet?

¹¹Een tegenvoorbeeld op een niet eindig-dimensionale Banachruimte is een verhaal apart.

¹²De wortel uit de (eindige) som van de kwadraten.

Opgave 20.4. Bewijs voor lineaire afbeeldingen $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ van een genormeerde ruimte X naar $\mathbb{R}$ dat

$$A \text{ is uniform Lipschitz continu} \iff A \text{ is begrensd} \iff A \text{ is continu in } x = 0.$$



Opgave 20.5. Als een reëelwaardige $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ op een genormeerde ruimte differentieerbaar in $x_0 \in X$ dan is F ook continu in x_0 .

Opgave 20.6. Zonder de extra aanname dat $A = F'(x_0) : X \rightarrow \mathbb{R}$ uniform Lipschitz continu is, impliceren (20.1) en (20.2) niet dat F continu is in x_0 . Waarom niet?

Opgave 20.7. Formuleer en bewijs de regel van Leibniz voor $F, G : X \rightarrow \mathbb{R}$. Hint: schrijf Opgave 10.5 en je uitwerking van die opgave over met dubbele normstrepen in plaats van enkele absolute waarde strepen.

Als $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar is in elke $x \in X$ dan is $x \rightarrow F'(x)$ een afbeelding van X naar de verzameling X^* van alle continue functie $A : X \rightarrow \mathbb{R}$, waarmee dan

$$F' : X \rightarrow X^* \tag{20.3}$$

is gedefinieerd. Deze X^* wordt de duale ruimte van X genoemd.

Opgave 20.8. Voor elke genormeerde ruimte X geldt dat de duale ruimte X^* een Banachruimte is met

$$A \rightarrow \|A\| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{|Ax|}{\|x\|}$$

en de voor de hand liggende algebraïsche operaties. Bewijs dit.

Ook van $F' : X \rightarrow X^*$ willen we kunnen zeggen of F' differentieerbaar is in een $x_0 \in X$ en daartoe schrijven we Definitie 20.1 over voor $F : X \rightarrow Y$ in plaats van $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ als X en Y genormeerde ruimten zijn. Een search op $\rightarrow \mathbb{R}$ en replace by $\rightarrow Y$ dus, waarbij absolute waarde strepen in $\mathbb{R}$ weer vervangen worden door normstrepen voor de norm in Y , ook in Opgave 20.8,

waar X^* moet worden vervangen door $BL(X, Y)$, de genormeerde ruimte van lineaire afbeeldingen $A : X \rightarrow Y$ waarvoor $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ voor alle $x \in X$, nu met de norm van $\|Ax\|$ in Y . Met $Y = X^*$ hebben we dan ook de definitie van twee keer differentieerbaar, enzovoorts.

Zonder extra algebraïsche structuur is de Leibnizregel niet meer zo maar over te schrijven, maar de kettingregel gaat weer precies hetzelfde.

Opgave 20.9. Schrijf Opgaven 10.8 en 10.9 en je uitwerking over voor $F : X \rightarrow Y$ en $G : Y \rightarrow Z$ met X, Y, Z genormeerde ruimten.

Kortom, veel van de gewone differentiaalrekening is precies hetzelfde in de algemene context. Belangrijke uitzonderingen zijn de middelwaardestelling en de inverse functiestelling zoals geformuleerd voor monotone functies. Beide stellingen maken echt gebruikt gebruik van de 1-dimensionale structuur die $\mathbb{R}$ heeft en de bijbehorende argumenten waarin het woordje “tussen” essentieel is. De middelwaardestelling kan echter wel mooi in stelling gebracht worden voor

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}$$

door voor twee punten $x, y \in X$ een functie $t \rightarrow \xi(t) \in X$ te introduceren die x en y met elkaar “verbindt”, bijvoorbeeld

$$\xi(t) = (1 - t)x + ty, \quad \xi : [0, 1] \rightarrow X, \quad (20.4)$$

waarbij we spreken over het interval

$$[x, y] = \{\xi(t) = (1 - t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}, \quad (20.5)$$

de door $t \in [0, 1]$ geparametriseerde convexe combinaties van x en y , en ook over het interval

$$(x, y) = \{\xi(t) = (1 - t)x + ty; 0 < t < 1\}. \quad (20.6)$$

Stelling 20.10. Als $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar is op X dan is er voor elke $x, y \in X$ een $\xi \in (x, y)$ waarvoor geldt dat

$$F(y) - F(x) = F'(\xi)(y - x).$$

Bewijs. Volgens de kettingregel is $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$t \xrightarrow{\phi} F(\xi(t)) \in \mathbb{R} \quad (20.7)$$

differentieerbaar op $[0, 1]$ met

$$\phi'(t) = F'(\xi(t))(y - x).$$

De middelwaardestelling geeft nu een $\tau \in (0, 1)$ waarvoor geldt dat $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\tau)$. Noem $\xi(\tau)$ nu ξ en het bewijs is klaar.

Neem nu een willekeurige Banachruimte Y en $F : X \rightarrow Y$ continu differentieerbaar. Als we Stelling 19.4 toepassen met $a = 0$ en $b = 1$ op de functie $\phi : [0, 1] \rightarrow Y$ gedefinieerd door (20.7) dan volgt uit

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t) dt$$

en

$$\phi'(t) = F'((1 - t)x + ty)(y - x)$$

dat

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 F'((1 - t)x + ty)(y - x) dt \quad (20.8)$$

als Y -waardige integraal. In het geval dat $Y = \mathbb{R}$ wordt deze $\mathbb{R}$ -waardige integraal begrensd door het maximum en het minimum van de integrand en dus volgt dat $F(y) - F(x) = F'(\xi)(y - x)$ voor een zekere

$$\xi \in [x, y] = \{(1 - t)x + ty, 0 \leq t \leq 1\},$$

een iets zwakkere uitspraak dan in Stelling 20.10.

Als F niet $\mathbb{R}$ -waardig maar Y -waardig dan werkt dit argument niet. Echter, als we Stelling 19.4 toepassen met $a = 0$ en $b = 1$ op de functie $\phi : [0, 1] \rightarrow Y$ gedefinieerd door

$$\phi : t \xrightarrow{\xi} (1 - t)x + ty \xrightarrow{F} Y$$

met $x, y \in X$ en $F : X \rightarrow Y$ continu differentieerbaar, dan volgt uit

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t) dt$$

en

$$\phi'(t) = F'((1 - t)x + ty)(y - x)$$

dat

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 F'((1 - t)x + ty)(y - x) dt \quad (20.9)$$

als Y -waardige integraal.

21 Differentiaalrekening voor functies op $\mathbb{R}^2$

In het speciale geval dat $X = \mathbb{R}^2$ en $Y = \mathbb{R}$ of $Y = \mathbb{R}^2$ werken we nu een aantal concepten en met name de kettingregel verder uit. In het bijzonder kijken we naar coördinaten-transformaties met als belangrijk voorbeeld de overgang op poolcoördinaten: ieder punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kunnen we via

$$x = r \cos \theta \quad \text{en} \quad y = r \sin \theta \quad (21.1)$$

zien als gegeven door poolcoördinaten $r, \theta \in \mathbb{R}$ voor $(x, y) \neq (0, 0)$.

Opgave 21.1. Voor iedere $(x, y) \neq (0, 0)$ is er vrijheid in de keuze van r en θ . Karakteriseer die vrijheid.

We gebruiken (21.1) hieronder ook om de matrixnotatie te introduceren die zo handig is bij het samenstellen van functies/afbeeldingen als

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{en} \quad Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

waarbij we Z hier nu zien als transformatie van de onafhankelijke plaatsvariabelen via (21.1) en $F(x, y) = F(Z(r, \theta))$ als de afhankelijke variabele. Natuurlijk geldt de kettingregel voor het samenstellen van twee afbeeldingen waarbij niet een van de twee schakels een coördinatentransformatie is.

Voor $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is Definitie 20.1 met de gewone rechthoekige coördinaten x en y en $h = x - x_0$, $k = y - y_0$ te lezen als

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = F(x_0, y_0) + ah + bk + R(x_0, y_0, h, k), \quad (21.2)$$

met $a, b \in \mathbb{R}$ en

$$\frac{R(x_0, y_0, h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0. \quad (21.3)$$

Opgave 21.2. Neem voor $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ en $a, b \in \mathbb{R}$ aan dat (21.2) geldt met (21.3). Dan volgt dat

$$\frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} \rightarrow a \quad \text{en} \quad \frac{F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0)}{k} \rightarrow b$$

als $h, k \rightarrow 0$. Laat dit zien.

Meerdere notaties worden nu gebruikt, zoals

$$a = F_x(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = (\delta_x F)(x_0, y_0) = (D_1 F)(x_0, y_0); \quad (21.4)$$

$$b = F_y(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = (\delta_y F)(x_0, y_0) = (D_2 F)(x_0, y_0), \quad (21.5)$$

waarbij (x_0, y_0) en haakjes regelmatig worden weggelaten. Als kolomvector schrijven we ook, met

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (21.6)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} e_x + \frac{\partial F}{\partial y} e_y = e_x \frac{\partial F}{\partial x} + e_y \frac{\partial F}{\partial y}, \quad (21.7)$$

de gradient van F in (x_0, y_0) , nu geschreven zonder (x_0, y_0) . Merk op dat het lineaire gedeelte in (21.2) te schrijven is als

$$ah + bk = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = h \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y}, \quad (21.8)$$

het inproduct¹³ van ∇F en de verschilvector $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, ook te lezen als

$$ah + bk \quad \text{is} \quad h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{werkend op} \quad F,$$

in $(x, y) = (x_0, y_0)$ in dit geval.

Evenzo is (21.7) te lezen als

$$\nabla F \quad \text{is} \quad \nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{werkend op} \quad F, \quad (21.9)$$

waarmee ∇ nu als vectorwaardige differentiaaloperator gedefinieerd is. Middels het inproduct kan ∇ ook werken op een vectorwaardige functie

$$(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} V_x(x, y) \\ V_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = V_x e_x + V_y e_y,$$

als

$$\nabla \cdot V = \left(e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (V_x e_x + V_y e_y) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}, \quad (21.10)$$

¹³Het inproduct van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven door $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = ah + bk$.

de divergentie van V . We schrijven hier nu V met subscripten¹⁴ x, y voor de x - en y -coördinaten V_x en V_y van V t.o.v. de orthonormale vectoren (21.6) die samen de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$ vormen.

Merk op dat V_x en V_y van x en y afhangen maar e_x en e_y niet, de indices x en y staan voor de x -richting en de y -richting, en die richtingen zijn overal in het x, y -vlak hetzelfde. Elk van de twee termen in ∇ werkt dus alleen op V_x en V_y en omdat

$$e_x \cdot e_x = e_y \cdot e_y = 1 \quad \text{en} \quad e_x \cdot e_y = e_y \cdot e_x = 0 \quad (21.11)$$

blijven er maar twee termen over in (21.10). Nog een keer, omdat e_x en e_y niet van x en y afhangen geeft elk van de vier termen

$$e_x \frac{\partial}{\partial x} \cdot V_x e_x, \quad e_x \frac{\partial}{\partial x} \cdot V_y e_y, \quad e_y \frac{\partial}{\partial y} \cdot V_x e_x, \quad e_y \frac{\partial}{\partial y} \cdot V_y e_y$$

die we krijgen bij het uitwerken van (21.10) maar één term, te weten

$$e_x \frac{\partial}{\partial x} \cdot V_x e_x = e_x \frac{\partial}{\partial x} \cdot V_x e_x = e_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} V_x e_x = e_x \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} e_x = \frac{\partial V_x}{\partial x} e_x \cdot e_x = \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

voor de eerste,

$$e_x \frac{\partial}{\partial x} \cdot V_y e_y = e_x \frac{\partial}{\partial x} \cdot V_y e_y = e_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} V_y e_y = e_x \cdot \frac{\partial V_y}{\partial x} e_y = \frac{\partial V_y}{\partial x} e_x \cdot e_y = 0$$

voor de tweede, en

$$e_y \frac{\partial}{\partial y} \cdot V_x e_x = 0, \quad e_y \frac{\partial}{\partial y} \cdot V_y e_y = \frac{\partial V_y}{\partial y}$$

voor de derde en vierde. Van de vier termen worden er dus nog twee nul vanwege $e_x \cdot e_y = 0$ in (21.11) en de andere twee vereenvoudigen en blijven in die vorm over in (21.10).

Nemen we $V = \nabla F$ dan volgt

$$\nabla \cdot \nabla F = (e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y}) \cdot (\frac{\partial F}{\partial x} e_x + \frac{\partial F}{\partial y} e_y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} = \Delta F, \quad (21.12)$$

de Laplaciaan van F , die weer gezien kan worden als

$$\Delta F \quad \text{is} \quad \Delta = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{werkend op} \quad F. \quad (21.13)$$

¹⁴Niet te verwarren met het gebruik van subscripten voor partiele afgeleiden!

We kunnen nu de kettingregel toepassen op

$$(r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta) = (X(r, \theta), Y(r, \theta)) = (x, y) \rightarrow F(x, y) = G(r, \theta)$$

in (r_0, θ_0) door de lineaire benadering van $(r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$ in te vullen in de lineaire benadering van $(x, y) \rightarrow F(x, y)$, zoals uitgelegd in Opgave 10.9 en opnieuw gezien in Opgave 20.9. We doen dit stap voor stap, met puntjes voor de resttermen, en met weglating van (r_0, θ_0) in de partiële afgeleiden.

In

$$\begin{aligned} X(r_0 + h, \theta_0 + k) &= X(r_0, \theta_0) + \frac{\partial X}{\partial r} h + \frac{\partial X}{\partial \theta} k + \dots; \\ Y(r_0 + h, \theta_0 + k) &= Y(r_0, \theta_0) + \frac{\partial Y}{\partial r} h + \frac{\partial Y}{\partial \theta} k + \dots \end{aligned}$$

zijn de lineaire stukken uit we werken als

$$\begin{aligned} h \frac{\partial X}{\partial r} + k \frac{\partial X}{\partial \theta} &= h \cos \theta_0 - kr \sin \theta_0; \\ h \frac{\partial Y}{\partial r} + k \frac{\partial Y}{\partial \theta} &= h \sin \theta_0 + kr \cos \theta_0, \end{aligned}$$

waarvan de eerste nu als h , en de tweede als k in (21.8) moet worden ingevuld.

Het resultaat¹⁵ is

$$\begin{aligned} &(h \frac{\partial X}{\partial r} + k \frac{\partial X}{\partial \theta}) \frac{\partial F}{\partial x} + (h \frac{\partial Y}{\partial r} + k \frac{\partial Y}{\partial \theta}) \frac{\partial F}{\partial y} = \\ &h (\frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial y}) + k (\frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial y}) \end{aligned}$$

en dat moet gelijk zijn aan

$$h \frac{\partial G}{\partial r} + k \frac{\partial G}{\partial \theta},$$

dus

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial y} \quad (21.14)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial y}. \quad (21.15)$$

In vector-matrixnotatie schrijven we dit als

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial r} \\ \frac{\partial G}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (21.16)$$

¹⁵Om te zien wat er gebeurt gebruiken we nog niet de formules met cos en sin.

waarin we links een 2 bij 1 matrix zien met de partiele afgeleiden van G en rechts net zo'n matrix voor F , en een 2 bij 2 matrix voor

$$(r, \theta) \xrightarrow{Z} (X(r, \theta), Y(r, \theta)),$$

met $Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ via (21.1) gedefinieerd door

$$Z(r, \theta) = (X(r, \theta), Y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Horizontaal worden deze matrices genummerd met de variabele grootheden in het beeld, verticaal met die in het domein van de betreffende afbeelding.

In het algemeen is een (m bij n) matrix A een blok met entries a_{ij} met de verticale index i lopend van 1 tot en met m en de horizontale index j lopend van 1 tot en met n . Is B een andere (n bij p) matrix met entries b_{jk} met de verticale index j lopend van 1 tot en met n en de horizontale index k lopend van 1 tot en met p , dan is per definitie AB de (m bij p) matrix met entries

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}. \quad (21.17)$$



Klappen we beide blokken om door met de eerste index juist horizontaal en met de tweede index verticaal te nummeren dan krijgen we getransponeerde matrices A^T en B^T met entries a_{ji}^T en b_{kj}^T en leest (21.17) als de entries van $B^T A^T$ en dus is $(AB)^T = B^T A^T$.

Met nog een derde (p bij r) matrix C met entries c_{kl} is $(AB)C$ de matrix met entries

$$\sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} c_{kl}. \quad (21.18)$$

hetgeen ook de entries zijn van $A(BC)$ door de sommatie volgorde te verwisselen. Kortom $(AB)C = A(BC)$ en dus schrijven we ABC voor het produkt van A , B en C . Transponeren geeft dan weer dat $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

Mooie voorbeelden van zulke matrixprodukten zien we als we in (21.16) aan beide kanten links $(h \ k)$ erbij zetten. Dan is

$$(h \ k) \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial r} \\ \frac{\partial G}{\partial \theta} \end{pmatrix} = (h \ k) \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (21.19)$$

nu links en rechts uit te werken tot een 1 bij 1 matrix met daarin precies de twee lineaire stukken die we hierboven aan elkaar gelijkstelden bij het uitwerken van de kettingregel.

Via links en rechts transponeren is (21.19) equivalent met

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial r} & \frac{\partial G}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \quad (21.20)$$

waarin we de zogenaamde Jacobi matrices van G , F en Z herkennen, waarin de beeldvariabelen niet horizontaal maar verticaal genummerd worden. Ook zien we dat de volgorde in (21.20) nu net is als in (10.2), hetgeen prettig is als we h en k zien als variabelen.

Als $F(x, y) = G(r, \theta)$ een grootheid is met twee componenten $F_1(x, y) = G_1(r, \theta)$ en $F_2(x, y) = G_2(r, \theta)$, dan kan (10.2) voor beide componenten in één keer opgeschreven worden als

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial r} & \frac{\partial G_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial G_2}{\partial r} & \frac{\partial G_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \quad (21.21)$$

en zien we hoe de kettingregel toegepast op

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{Z} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$$

de Jacobi matrix van G produceert via het matrixprodukt van de Jacobi matrices van F en Z . Deze notatie suggereert om de afhankelijke grootheid $F(x, y) = G(r, \theta)$ als 2-vector te zien, dus

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad G(r, \theta) = \begin{pmatrix} G_1(r, \theta) \\ G_2(r, \theta) \end{pmatrix},$$

en dus ook de x en y en r en θ als componenten van de 2-vectoren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}.$$

We blijven echter $F = F(x, y)$ en $G = G(r, \theta)$ schrijven.

De notatie (21.19) is echter handiger als we zoals gebruikelijk in de natuurkunde aan $F(x, y) = G(r, \theta)$ denken als één en dezelfde afhankelijke grootheid en niet als een functie zoals gebruikelijk in de wiskunde. In dat geval ligt het voor de hand om die grootheid af te splitsen uit de notatie in (21.16) en de kettingregel voor coördinatentransformaties te schrijven als

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (21.22)$$

hetgeen de matrixnotatie is voor

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y},$$

waaruit de differentiaaloperatoren

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial y}$$

kunnen worden opgelost in termen van de coëfficiënten

$$\frac{\partial X}{\partial r}, \frac{\partial Y}{\partial r}, \frac{\partial X}{\partial \theta}, \frac{\partial Y}{\partial \theta} \quad \text{en de differentiaaloperatoren} \quad \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Opgave 21.3. In het concrete geval van poolcoördinaten geeft dit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Laat dit zien.

Met Opgave 21.3 zijn we nog niet klaar als we in (21.9)

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y}$$

willen omschrijven naar r en θ . De vraag is ook hoe we e_x en e_y omschrijven naar e_r en e_θ , en daarvoor komt de vraag wat e_r en e_θ eigenlijk zijn. Een natuurkundige zal hier niet lang over nadenken. Teken maar een plaatje.

Evident moet het zo zijn dat

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

en

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} = e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (21.23)$$

Daar had'ie de hele kettingregel überhaupt niet voor nodig. Omdat

$$e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = 1 \quad \text{en} \quad e_r \cdot e_\theta = e_\theta \cdot e_r = 0$$

staan de vectoren e_r en e_θ in ieder punt onderling loodrecht¹⁶ met elk lengte¹⁷ 1, en wijzen in de richtingen waarin het punt $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ loopt als je r respectievelijk θ varieert. De voorfactor $\frac{1}{r}$ compenseert de met r evenredige snelheid bij gelijkmatige toename van θ .

¹⁶Wiskundig is dit per definitie en consistent met wat je ziet als je pijltjes tekent.

¹⁷Stelling van Pythagoras: lengte is wortel uit het inproduct van vector met zichzelf.

Opgave 21.4. In (21.23) staan twee representaties van dezelfde operator. Door e_x en e_y in e_r en e_θ uit te drukken en Opgave 21.3 te gebruiken kun je zien dat ze inderdaad hetzelfde zijn. Doe dat. Schrijf ook $V = V_x e_x + V_y e_y$ om in $V = V_r e_r + V_\theta e_\theta$.

Opgave 21.5. Laat zien

$$\nabla \cdot V = \left(e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot (V_r e_r + V_\theta e_\theta) = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}.$$

Hint: Omdat e_r en e_θ van θ afhangen werkt met de produktregel van Leibniz de $e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$ in de factor links nu ook op e_r en e_θ in de factor rechts en één van die twee geeft na inproduct met de voorfactor e_θ een bijdrage.

Opgave 21.6. Pas de regel in Opgave 21.5 nu toe op ∇ zelf en laat zien dat

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}}_{\Delta_r} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}}_{\Delta_S}$$

Hint: wellicht eerst Opgave 21.5 toepassen op ∇ als werkend op de afhankelijke grootheid $G = F$ waarvoor de natuurkundige dezelfde letter gebruikt en de wiskundige dan met $G(r, \theta) = F(r \cos \theta, r \sin \theta)$ in de war raakt omdat G en F niet dezelfde functies zijn.

In Opgave 21.6 zien we

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_S, \quad (21.24)$$

waarin Δ_r de radiale Laplaciaan is, die ook werkt op functies $R = R(r)$, en Δ_S de Laplace-Beltrami operator is op

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

uitgedrukt in de hoekvariabele θ .

22 Partieel differentieerbaar $\implies$?

We hebben gezien dat $F : \mathbb{R}^2$ differentieerbaar is in x_0, y_0 als er $a, b \in \mathbb{R}$ bestaan zo dat (21.2) geldt en de restterm voldoet aan de conditie onder

(21.2). In dat geval bestaan de partiele afgeleiden

$$a = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(x_0, y_0) = F_x(x_0, y_0) \quad \text{en} \quad b = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0),$$

en leest (21.2) met $x = x_0 + h$ en $y = y_0 + k$ als

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \text{restterm}.$$

We gebruiken de subscripts hier dus weer voor de partiële afgeleiden die we in Opgave 21.2 gevonden hebben voor a en b als

$$a = F_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$b = F_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0)}{k} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{F(x_0, y) - F(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

door de eigenschap van de restterm te gebruiken.

Het kan natuurlijk zijn dat voor een gegeven $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en $x_0 \in \mathbb{R}$ en $y_0 \in \mathbb{R}$ de partiele afgeleiden $F_x(x_0, y_0)$ en $F_y(x_0, y_0)$ zo bestaan als twee limieten, maar op zich zegt dat weinig. Als bijvoorbeeld $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd is door $F(x, y) = 0$ als $xy = 0$ en $F(x, y) = 1$ als $xy \neq 0$ dan is $F_x(0, 0) = F_y(0, 0) = 0$ maar F is zeker niet differentieerbaar in $(0, 0)$, want de lineaire benadering zou dan de nulfunctie zijn en die komt voor $xy \neq 0$ niet de buurt van de functiewaarde 1.

Dus wat hebben we nodig van $x \rightarrow F(x, y)$ en $y \rightarrow F(x, y)$ als we alleen deze “partiele” functies mogen gebruiken om te kunnen concluderen dat $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar is in (x_0, y_0) ? We beantwoorden deze vraag nu meteen voor het algemenere geval van

$$F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R},$$

en $x_0 \in X, y_0 \in Y$, en nemen aan dat $x \rightarrow F(x, y)$ en $y \rightarrow F(x, y)$ voor respectievelijk vaste $y \in B_\delta(y_0)$ en vaste $x \in B_\delta(x_0)$ differentieerbaar¹⁸ zijn op respectievelijk $B_\delta(x_0)$ en $B_\delta(y_0)$, met $\delta_0 > 0$ vast.

Via de middelwaardestelling (Stelling 20.10) voor functies van genormeerde ruimten naar $\mathbb{R}$ is

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_0, y_0) + F(x, y) - F(x_0, y_0) = \\ &= F(x_0, y_0) + \underbrace{F(x, y) - F(x_0, y)}_{\text{vary } x} + \underbrace{F(x_0, y) - F(x_0, y_0)}_{\text{vary } y} = \end{aligned}$$

¹⁸In feite gebruiken we van $y \rightarrow F(x, y)$ alleen maar de differentieerbaarheid voor $y = y_0$.

$$F(x_0, y_0) + F_x(\xi(y), y)(x - x_0) + F_y(x_0, \eta)(y - y_0)$$

voor $x \in B_\delta(x_0)$ en $y \in B_\delta(y_0)$ met $\xi(y) \in (x_0, x)$ en $\eta \in (y_0, y)$. Bijgevolg is

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R \quad (22.1)$$

met restterm

$$R = (F_x(\xi(y), y) - F_x(x_0, y_0))(x - x_0) + (F_y(x_0, \eta) - F_y(x_0, y_0))(y - y_0).$$

Als

$$(x, y) \rightarrow F_x(x, y) \quad \text{en} \quad (x, y) \rightarrow F_y(x, y)$$

continu zijn in (x_0, y_0) dan voldoet R aan

$$\begin{aligned} |R| &\leq \|(F_x(\xi(y), y) - F_x(x_0, y_0))(x - x_0)\| + \|(F_y(x_0, \eta) - F_y(x_0, y_0))(y - y_0)\| \leq \\ &\underbrace{\|F_x(\xi(y), y) - F_x(x_0, y_0)\|}_{\leq \varepsilon} \|x - x_0\| + \underbrace{\|F_y(x_0, \eta) - F_y(x_0, y_0)\|}_{\leq \varepsilon} \|y - y_0\| \\ &\leq \varepsilon \max(\|x - x_0\|, \|y - y_0\|) = \varepsilon \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \end{aligned}$$

als $\delta > 0$ voldoende klein is. We gebruiken hier als norm op $X \times Y$ de norm

$$\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|).$$

We onthouden dit resultaat als de volgende stelling.

Stelling 22.1. *Als X en Y genormeerde ruimten zijn en $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ heeft partiele functies*

$$x \rightarrow F(x, y) \quad \text{en} \quad y \rightarrow F(x, y)$$

die voor $x \in B_\delta(x_0)$ en $y \in B_\delta(y_0)$ met $x_0 \in X, y_0 \in Y, \delta > 0$ gedefinieerd en differentieerbaar zijn, met

$$(x, y) \rightarrow F_x(x, y) \quad \text{en} \quad (x, y) \rightarrow F_y(x, y)$$

continu in (x_0, y_0) , dan is F differentieerbaar in (x_0, y_0) met

$$(h, k) \xrightarrow{F'(x_0, y_0)} F_x(x_0, y_0)h + F_y(x_0, y_0)k.$$

Opgave 22.2. De voorwaarden in Stelling 22.1 zijn voldoende maar natuurlijk niet noodzakelijk. Als $F : X \times Y$ differentieerbaar is in (x_0, y_0) dan zijn zowel $x \rightarrow F(x, y_0)$ als $y \rightarrow F(x_0, y)$ differentieerbaar in respectievelijk x_0 en y_0 en hun afgeleiden heten

de partiële afgeleiden, notatie o.a. $F_x(x_0, y_0)$, $F_y(x_0, y_0)$. Verifieer dit rechtstreeks aan de hand van de definities, en ook dat

$$F'(x_0, y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = F_x(x_0, y_0)h + F_y(x_0, y_0)k$$

voor alle $h \in X$ en $k \in Y$.

Opgave 22.3. Als X , Y , Z genormeerde ruimten zijn en $F : X \times Y \rightarrow Z$ dan werkt de bewijstechniek met de middelwaarde stelling niet. Schrijf echter weer

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \underbrace{F(x, y) - F(x_0, y)}_{\text{vary } x} + \underbrace{F(x_0, y) - F(x_0, y_0)}_{\text{vary } y}$$

en behandel de twee variërende termen met (20.9), waarbij je moet aannemen dat Z volledig is. Neem hiertoe aan dat $x \rightarrow F(x, y_0)$ continu differentieerbaar is voor $x \in X$ met $\|x - x_0\| < \delta_x$ en dat voor elke van deze x de functie $y \rightarrow F(x, y)$ continu differentieerbaar is voor $y \in Y$ met $\|y - y_0\| < \delta_y$, $\delta_x, \delta_y > 0$, en bovendien dat $(x, y) \rightarrow F_y(x, y)$ continu is in (x_0, y_0) . Bewijs dat F differentieerbaar is in (x_0, y_0) .

Opgave 22.4. Als X , Y , Z genormeerde ruimten, Z volledig, en $F : X \times Y \rightarrow Z$ heeft partiële functies met partiële afgeleiden F_x en F_y die continu zijn op een open verzameling O in $X \times Y$ dan is F differentieerbaar in elk punt van O en $F' : O \rightarrow BL(X \times Y, Z)$ is continu, gedefinieerd in elke $(x_0, y_0) \in O$ als in Opgave 22.2.

23 Wat metrische topologie

Een aardig dictaatje is hier te vinden, uit de tijd dat Leiden de R nog in de naam had:

<http://www.few.vu.nl/~jhulshof/NOTES/anal.pdf>



Onze genormeerde ruimten X , waaronder $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ en ook $C([a, b])$ met de maximumnorm, maar helaas niet $R([a, b])$ met de 1-norm, zijn voorbeelden van metrische ruimten met het afstandsbegrip gedefinieerd door de metriek

$$(x, y) \xrightarrow{d} d(x, y) = \|x - y\|, \quad (23.1)$$

een afbeelding¹⁹ d van $X \times X$ naar $[0, \infty)$ met de eigenschappen dat voor alle $x, y, z \in X$ geldt dat

$$\begin{aligned} (i) \quad d(x, y) = 0 &\iff x = y; & (ii) \quad d(x, y) = d(y, x); \\ (iii) \quad d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, x). \end{aligned} \tag{23.2}$$

Iedere niet-lege deelverzameling A van X is zo een metrische ruimte, waarbij we de algebraïsche vectorruimte operaties nu vergeten.

Definitie 23.1. *Een metrische ruimte is een niet-lege verzameling X met een afbeelding $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ waarvoor (i), (ii) en (iii) uit (23.2) hierboven gelden voor alle $x, y, z \in X$.*

Opgave 23.2. Zie Opgave 18.3. De ε, N -definitie van $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ als $m, n \rightarrow \infty$ definieert wat een Cauchyrij in X is. Geef die definitie. Geef ook de definitie van het convergent zijn van de rij x_n in X .

We gebruiken hieronder de notatie $x_n \rightarrow x$ voor $x_1, x_2, x_3, \dots, x \in X$ zonder er steeds $n \rightarrow \infty$ bij te zetten en spreken over ook een rij x_n zonder te vermelden dat $n \in \mathbb{N}$ (of een andere deelverzameling van $\mathbb{Z}$ van de vorm $m + \mathbb{N}$ met $m \in \mathbb{Z}$, bijvoorbeeld $\mathbb{N}_0$).

Opgave 23.3. Een flauwe opgave om aan de de notaties, definities en axioma's te wennen: laat zien dat als $x_n \rightarrow x$ en $x_n \rightarrow y$ (alles in X) voor de limieten x en y geldt dat $x = y$. De limiet van een convergente rij is dus uniek.

Met convergente rijen kunnen we voor metrische ruimten X en Y zeggen wat het voor een afbeelding

$$F : X \rightarrow Y$$

betekent om continu te zijn in $a \in X$.

Definitie 23.4. *Een afbeelding F van een metrische ruimte X naar een (niet per se andere) metrische ruimte Y heet continu in $a \in X$ als de implicatie*

$$x_n \rightarrow a \implies F(x_n) \rightarrow F(a)$$

geldt voor elke rij x_n in X . Als dit het geval is voor elke $a \in X$ dan zeggen we dat $F : X \rightarrow Y$ continu is.

¹⁹De d van distance, a van afstand doen we maar niet.

Opgave 23.5. Als X, Y, Z metrische ruimten en

$$X \xrightarrow{F} Y \quad \text{en} \quad Y \xrightarrow{G} Z$$

afbeeldingen dan is de afbeelding

$$X \xrightarrow{G \circ F} Z \quad \text{gedefinieerd door} \quad X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z$$

continu in $a \in X$ als F continu is in a en G continu is in $b = F(a)$. Hint: triviaal, leg uit.

Definitie 23.6. Een metrische ruimte heet *rijkompakt* als elke rij in X een convergente deelrij heeft, en *volledig* als elke Cauchyrij in X convergent is (in beide gevallen met limiet in X dus).

Opgave 23.7. Bewijs dat rijkompakte metrische ruimten volledig zijn.

Opgave 23.8. Als X en Y metrische ruimten zijn, met X rijkompakt, dan is iedere continue $F : X \rightarrow Y$ uniform continu, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, a \in X : d(x, a) \leq \delta \implies d(F(x), F(a)) \leq \varepsilon.$$

Bewijs dit door een eerder bewijs (van Stelling 5.5) over te schrijven.

Opgave 23.9. Bewijs dat in een Banachruimte iedere rijkompakte deelverzameling begrensd en gesloten is en dat in $\mathbb{R}^n$ ook de omgekeerde uitspraak geldt.

Continuïteit kunnen we ook met open verzamelingen beschrijven. In het standaardjargon heet een deelverzameling $G \subset X$ van een metrische ruimte X gesloten als voor iedere rij x_n in G met $x_n \rightarrow x \in X$ de limiet x in G zit (je kan G niet uit door limieten te nemen). Een verzameling $O \subset X$ heet open²⁰ als zijn complement gesloten is.

Opgave 23.10. De collectie $\mathcal{G}$ van alle gesloten deelverzamelingen van een metrische ruimte X heeft drie belangrijke eigenschappen:

$$(i) \quad \emptyset \in \mathcal{G}, X \in \mathcal{G}; \quad (ii) \quad G_1, G_2 \in \mathcal{G} \implies G_1 \cup G_2 \in \mathcal{G};$$

²⁰Minder gelukkige naamgeving, sorry, is niet anders.

en (voor elke indexverzameling I)

$$(iii) \quad G_i \in \mathcal{G} \quad \forall i \in I \implies \bigcap_{i \in I} G_i \in \mathcal{G}.$$

Bewijs dit via de definitie dat $G \in \mathcal{G}$ als voor iedere rij x_n in G met $x_n \rightarrow x \in X$ voor de limiet geldt $x \in G$.

Opgave 23.11. De collectie $\mathcal{O}$ van alle open deelverzamelingen van een metrische ruimte X heeft de volgende eigenschappen:

$$\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}; \quad O_1, O_2 \in \mathcal{O} \implies O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O};$$

en (voor elke indexverzameling I)

$$O_i \in \mathcal{O} \quad \forall i \in I \implies \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

Bewijs dit via de definitie dat $O \in \mathcal{O}$ als

$$O^c = \{x \in X : x \notin O\} \in \mathcal{G}.$$

Opgave 23.12. Laat zien dat in een metrische ruimte X een deelverzameling $O \subset X$ open is dan en slechts dan als voor elke $a \in O$ er een $r > 0$ is zo dat

$$\bar{B}_r(a) = \{x \in A : d(x, a) \leq r\} \subset O.$$

Bewijs ook dat $\bar{B}_r(a)$ gesloten is.

Om te weten welke verzamelingen op zijn moet je dus weten wat de gesloten bollen $\bar{B}_r(a)$ zijn maar niet eens dat. Heb je bijvoorbeeld twee normen en noemen we de bijbehorende bollen $\bar{B}_r(a)$ en $\bar{K}(a)$ dan krijgen we precies dezelfde open verzamelingen als elke $\bar{B}_r(a)$ met $r > 0$ altijd een $\bar{K}_s(a)$ bevat met $s > 0$ en omgekeerd. Is X een vectorruimte over $\mathbb{R}$ met twee normen dan noemen we die normen equivalent als ze dezelfde collectie $\mathcal{O}$ definiëren. Via Opgave 23.10 leidt dat deze karakterisatie van equivalente normen op X .

Opgave 23.13. Als twee normen

$$x \rightarrow \|x\|_1 \quad \text{en} \quad x \rightarrow \|x\|_2$$

dezelfde collectie $\mathcal{O}$ van open verzamelingen definiëren dan zijn er constanten A_1 en A_2 zo dat voor alle $x \in X$ geldt

$$\|x\|_1 \leq A_2 \|x\|_2 \quad \text{en} \quad \|x\|_2 \leq A_1 \|x\|_1.$$

Bewijs dit. Terzijde, omgekeerd geldt ook en is makkelijker.

Opgave 23.14. Laat zien dat in een metrische ruimte X een deelverzameling $O \subset X$ open is dan en slechts dan als voor elke $a \in O$ er een $r > 0$ is zo dat

$$B_r(a) = \{x \in A : d(x, a) < r\} \subset O.$$

Bewijs ook dat $B_r(a)$ open is.

Stelling 23.15. *Laat X en Y metrische ruimten zijn en $F : X \rightarrow Y$. Dan is F continu dan en slechts dan als alle inverse beelden van open verzamelingen in Y open zijn in X .*

Opgave 23.16. Wel een kluitje: bewijs Stelling 23.15. Triviaal daarna is dat als X, Y, Z metrische ruimten zijn en

$$X \xrightarrow{F} Y \quad \text{en} \quad Y \xrightarrow{G} Z$$

continue afbeeldingen, dat de afbeelding

$$X \xrightarrow{G \circ F} Z \quad \text{gedefinieerd door} \quad X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z$$

continu is. Waarom? Zie nog even Opgave 23.5.

24 Equivalente normen en in de buurt van

In $\mathbb{R}^2$ hebben we behalve the standaardnorm

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{x \cdot x} \quad \text{voor} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

afkomstig van het standaardinproduct

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

de normen

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p} \quad \text{voor} \quad p \geq 1 \quad \text{en} \quad \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|).$$

Als deze normen zijn equivalent.

Opgave 24.1. Bewijs dat al deze p -normen equivalent zijn en teken in het x_1, x_2 -vlak de gesloten eenheidsbollen $\bar{B}^p = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ voor $p = 1, 2$ en $p = \infty$, en voor nog twee p 's naar keuze. Blader nog even terug naar Opgave 23.13 en de karakterisatie daaronder en boven van open verzamelingen met behulp bollen, gesloten of open, zoals $B_\varepsilon^p(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - \xi\|_p < \varepsilon\}$ met $\xi \in \mathbb{R}^2$ en $\varepsilon > 0$.

Opgave 24.2. De bollen B^1 en B^∞ zijn ook te beschrijven als doorsnijdingen van open halfvlakken van de form $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) < b\}$ met $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineair gegeven door $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2$ en $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$. Laat dat zien.

Opgave 24.3. Een alternatieve manier om te zeggen dat een $O \in \mathbb{R}^2$ open is te zeggen dat er voor elke $\xi \in O$ drie²¹ open halfvlakken K_1, K_2, K_3 zijn zoals in Opgave 24.3, waarvoor geldt

$$\xi \in K_1 \cap K_2 \cap K_3 \subset O.$$

Waarom definieert dit dezelfde open verzamelingen? Geef ook zo'n definitie van open in $\mathbb{R}^3$.

Opgave 24.4. Een verzameling W in een genormeerde ruimte X heet zwak open als er voor elke $\xi \in W$ geldt dat er er eindig veel open halfvlakken zijn zo dat geldt

$$\xi \in K_1 \cap \dots \cap K_n \subset W.$$

Bewijs dat voor deze zwak open verzamelingen W dezelfde eigenschappen gelden als in Opgave 23.11. Met eindige doorsnijdingen van open halfvlakken is dus een topologie te maken: een collectie van "open" verzamelingen die voldoet aan de "axioma's" in Opgave 23.11. In het geval dat $X = \mathbb{R}^n$ zijn alle normen op X en deze topologie equivalent.

<https://www.youtube.com/watch?v=fmTcSGuk04o>

Opgave 24.5. Bewijs dat iedere norm $x \rightarrow \|x\|$ op $\mathbb{R}^2$ equivalent is met de 2-norm. Hint: laat eerst zien dat $x \rightarrow \|x\|$ op $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ een positief minimum en maximum heeft.

²¹3 = 2 + 1.

Opgave 24.6. Laat X_1 en X_2 genormeerde ruimten zijn. Bewijs dat

$$X_1 \times X_2 = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$$

met de voor de hand liggende bewerkingen weer een genormeerde ruimte is met (equivalente) normen (voor $p \geq 1$)

$$x \rightarrow \sqrt[p]{\|x_1\|^p + \|x_2\|^p} \quad \text{en} \quad x \rightarrow \max(\|x_1\|, \|x_2\|).$$

Opgave 24.7. Laat X_1 en X_2 genormeerde ruimten zijn en $X = X_1 \times X_2$. Bewijs dat iedere $f \in X^*$ van de vorm

$$x = (x_1, x_2) \xrightarrow{f} f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

is met $f_1 \in X_1^*, f_2 \in X_2^*$. Met andere woorden $X^* = X_1^* \times X_2^*$.

Opgave 24.8. Laat X_1 en X_2 genormeerde ruimten zijn en $f \in X^* = X_1^* \times X_2^*$. Bepaal de norm van f in X^* als voor de norm op $X = X_1 \times X_2$ de norm $x \rightarrow \|x_1\| + \|x_2\|$ genomen wordt. Zelfde vraag voor $x \rightarrow \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$.

25 Integraalrekening in poolcoördinaten

Riemann sommen in poolcoördinaten voor rechtstreekse definitie en uitwerking van

$$\iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x, y) d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

26 Integraalrekening en kansverdelingen

Over de normale verdeling en de Cauchyverdeling. Quotient van normaal verdeelde grootheden. Samenhang tussen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

27 Harmonische polynomen

Als $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ twee keer differentieerbaar is en voldoet aan

$$\Delta u = 0$$

dan heet u harmonisch. Twee keer differentieerbaar betekent dat de afbeelding

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

zelf weer differentieerbaar is. Met de kettingregel²² zijn dan ook

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \right) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{en} \quad (x, y) \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \right) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}$$

differentieerbaar en dus heeft $\Delta u = 0$ betekenis als

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (27.1)$$

en niet-constante oplossingen daarvan zijn er in overvloed. Bijvoorbeeld de homogene harmonische polynomen

$$x, y, x^2 - y^2, 2xy, x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3, x^4 - 6x^2y^2 + y^4, 4x^3y - 4xy^3, \dots, \quad (27.2)$$

polynomen van respectievelijk graad 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ..., die we krijgen door van de complexe monomen

$$z^n = (x + iy)^n$$

de reële en imaginaire delen te nemen. Deze monomen zijn complex differentieerbaar omdat we uitdrukkingen als (12.1) kunnen overschrijven als

$$z^7 = z_0^7 + z_0^6(z - z_0) + (z^5 + 2z_0z^4 + 3z_0^2z^3 + 4z_0^3z^2 + 5z_0^4z + 6z_0^5)(z - z_0)^2,$$

en alles wat we over monomen tot en met machtreeksen hebben gezien nu ook complex doorgaat²³.

In de complexe differentiaalrekening werken we in plaats van $y = f(x)$ met

$$w = f(z) \quad \text{voor} \quad z = x + iy \quad \text{voor} \quad w = u + iv.$$

Een functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is complex differentieerbaar in z_0 als

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + R(z; z_0) \quad (27.3)$$

²²Toegepast op een ketting waarin de tweede schakel lineair is.

²³Maar dat is hier nog niet aan de orde.

met $R(z; z_0) = o(|z - z_0|)$ als $z \rightarrow z_0$. Via

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{en} \quad w = u + iv \in \mathbb{C} \leftrightarrow (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

en met

$$\alpha = a + ib = f'(z_0)$$

gaat (27.3) over in

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \text{restterm},$$

en we lezen dus af dat

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{en} \quad b = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (27.4)$$

Zijn deze partiële afgeleiden overal differentieerbaar²⁴ dan volgt voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dat

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

als de volgorde van differentiëren er niet toe doet. In dat geval zijn zowel $u(x, y)$ als $v(x, y)$ harmonisch.

Opgave 27.1. Laat $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn op heel $\mathbb{R}^2$ en

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

differentieerbaar in (x_0, y_0) . Dan bestaan de tweede orde partiële afgeleiden in (x_0, y_0) en daar geldt dat

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Bijgevolg zijn de functies

$$(x, y) \rightarrow \operatorname{Re}(x + iy)^n \quad \text{en} \quad (x, y) \rightarrow \operatorname{Im}(x + iy)^n$$

oplossingen van de Laplace vergelijking en dit zijn precies de harmonische polynomen van graad $n = 1, 2, 3, \dots$ in (27.2).

²⁴En dat geldt onder de aanname dat f overal complex differentieerbaar is!

We vinden deze polynomen ook als we de Laplace vergelijking met scheiding van variabelen in poolcoördinaten oplossen door de operator in Opgave 21.6 los te laten op

$$u(x, y) = R(r)\Theta(\theta) \quad (27.5)$$

en het resultaat gelijk aan nul te stellen. Dit geeft

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) R(r)\Theta(\theta) \\ &= \Theta(\theta) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r) + \frac{R(r)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Theta(\theta) \\ &= \Theta(\theta) \left(R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) \right) + \frac{R(r)}{r^2} \Theta''(\theta). \end{aligned}$$

Als Θ'' een veelvoud is van Θ , zeg

$$-\Theta'' = \mu\Theta \quad (27.6)$$

dan volgt Euler's vergelijking

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) = \mu \frac{R(r)}{r^2} \quad (27.7)$$

voor $R(r)$.

Merk op dat (27.6) gezien kan worden als een (eigenwaarde)probleem voor

$$-\Delta_S = -\frac{d^2}{d\theta^2}$$

op de eenheidscirkel waar bij Θ een 2π -periodieke functie moet zijn om een functie op de cirkel

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

te definiëren.

Opgave 27.2. Welke μ zijn toegestaan in (27.6) voor oplossingen (27.5) die op heel $\mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd? Leg uit dat je die waarden ook meteen²⁵ aan de harmonische polynomen kunt zien zonder de precieze vorm van (27.6) te kennen. Schrijf die harmonische polynomen in gescheiden variabelen r en θ als $R(r)\Theta(\theta)$ en verifieer dat $R(r)$ een oplossing is van de (27.7) met de bijbehorende μ .

²⁵In $\mathbb{R}^3$ eigenwaarden en -functies van Laplace-Beltrami operator ook via polynomen.

Opgave 27.3. Voor elke $N \in \mathbb{N}$ en $a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ in $\mathbb{R}$ is

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) r^n$$

via $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ een harmonische functie. Overtuig jezelf van de juistheid van de informele uitspraak dat deze oplossing in $(0, 0)$ gelijk is aan zijn gemiddelde op elke disk met middelpunt $(0, 0)$.

Opgave 27.3 suggereert

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) r^n$$

als een algemene oplossing voor de Laplacevergelijking op de eenheidsdisk met randvoorwaarde

$$u(\cos \theta, \sin \theta) = f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta). \quad (27.8)$$

Ook deze $u(x, y)$ is dan in $(x, y) = (0, 0)$ het gemiddelde van $u(x, y)$ op elke disk met middelpunt $(0, 0)$ en straal voldoende klein, kleiner dan 1 in dit geval.

Opgave 27.4. In $\mathbb{R}^3$ gebruiken we bolcoördinaten

$$x = r \sin \theta \cos \phi;$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi;$$

$$z = r \cos \theta,$$

en

$$e_r = \sin \theta \cos \phi e_x + \sin \theta \sin \phi e_y + \cos \theta e_z$$

$$e_\theta = \cos \theta \cos \phi e_x + \cos \theta \sin \phi e_y - \sin \theta e_z$$

$$e_\phi = -\sin \phi e_x + \cos \phi e_y.$$

Schrijf e_r, e_θ, e_ϕ al of niet als kolomvectoren en verifieer dat

$$e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = e_\phi \cdot e_\phi = 1; \quad e_r \cdot e_\theta = e_r \cdot e_\phi = e_\theta \cdot e_\phi = 0.$$

Overtuig jezelf van

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} e_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (27.9)$$

en gebruik (28.1) om voor

$$V = V_r e_r + V_\theta e_\theta + V_\phi$$

eerst af te leiden dat

$$\nabla V = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r} V_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} V_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right),$$

en vervolgens via $V = \nabla F$ dat

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}}_{\Delta_r} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)}_{\Delta_S}.$$

Wederom zien we hier (21.6), maar nu met Δ_S gedefinieerd op

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

De formules in $\mathbb{R}^n$ laten zich nu raden, afgezien wellicht van de exacte vorm van Δ_S in de hoekvariabelen $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, maar met

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

voor het radiale gedeelte.

28 Intermezzo: het waterstofatoom

Opgave 28.1. In $\mathbb{R}^3$ gebruiken we bolcoördinaten

$$x = r \sin \theta \cos \phi;$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi;$$

$$z = r \cos \theta,$$

en

$$e_r = \sin \theta \cos \phi e_x + \sin \theta \sin \phi e_y + \cos \theta e_z$$

$$e_\theta = \cos \theta \cos \phi e_x + \cos \theta \sin \phi e_y - \sin \theta e_z$$

$$e_\phi = -\sin \phi e_x + \cos \phi e_y.$$

Schrijf e_r, e_θ, e_ϕ al of niet als kolomvectoren en verifieer dat

$$e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = e_\phi \cdot e_\phi = 1; \quad e_r \cdot e_\theta = e_r \cdot e_\phi = e_\theta \cdot e_\phi = 0.$$

Overtuig jezelf van

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} e_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (28.1)$$

en gebruik (28.1) om voor

$$V = V_r e_r + V_\theta e_\theta + V_\phi$$

eerst af te leiden dat

$$\nabla V = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r} V_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} V_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right),$$

en vervolgens via $V = \nabla F$ dat

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}}_{\Delta_r} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)}_{\Delta_S}.$$

Wederom zien we hier (21.6), maar nu met Δ_S gedefinieerd op

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

De formules in $\mathbb{R}^n$ laten zich nu raden, afgezien wellicht van de exacte vorm van Δ_S in de hoekvariabelen $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, maar met

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

voor het radiale gedeelte.

Met

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}$$

is de stationaire Schrödinger vergelijking voor het waterstofatoom is

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - \frac{e^2}{r} \psi = E \psi, \quad (28.2)$$

waarin m de massa van het electron is, e de lading van het electron, $\hbar$ de constante van Planck. De negatieve waarden van E waarvoor (28.2) een oplossing met

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, y, z)|^2 d(x, y, z) = 1$$

heeft zijn de energieniveaus die het electron in gebonden toestand kan aannemen.

We hebben gezien dat

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}}_{\Delta_r} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)}_{\Delta_s}.$$

Via

$$\psi(x, y, z) = R(r) P_l\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right),$$

met $P_l(x, y, z) = Y(\theta, \phi)$ een harmonisch homogeen polynoom van graad l in x, y, z , en een nieuwe x en n gedefinieerd door

$$x = \frac{1}{\hbar} \sqrt{-2mE} r \quad \text{en} \quad -E = \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2},$$

leidt dit tot

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dR}{dx} - \frac{l(l+1)}{x^2} R + \frac{2n}{x} R = R$$

met $R(x) \sim x^l$ voor $x \rightarrow 0$ en $R(x) \sim e^{-x}$ voor $x \rightarrow \infty$.

Substitueer daarom $R(x) = x^l e^{-x} u(x)$ en leidt voor $u(x)$ af dat²⁶

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\frac{4l}{x} - 2\right) \frac{du}{dx} = 2 \frac{n-l-1}{x} u.$$

De machtreeksoplossing²⁷

$$u(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

breekt af voor een n die van l afhangt. Welke n is dat?

29 Partieel integreren en toepassingen

We doen eerst een voorbeeld. Voor gegeven $f \in C([0, 1])$ is het randwaardeprobleem

$$-u''(x) = f(x) \quad (0 \leq x \leq 1); \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (29.1)$$

uniek oplosbaar in $C^2([0, 1])$ door $-f$ twee keer te primitiveren en de twee vrije integratieconstanten zo te kiezen dat de dubbele primitieve u in $x = 0$

²⁶Corrigeer eventuele typo's!

²⁷Instructief om eerst $\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dR}{dx} = R$ op te lossen.

en $x = 1$ gelijk is aan 0. Het is wellicht instructief om dit in detail te doen. Een keer primitiveren geeft

$$u'(x) = u'(0) - \underbrace{\int_0^x f(s) ds}_{F(x)},$$

met een nog onbepaalde $u'(0)$ en de primitieve van F van f die voldoet aan $F(0) = 0$, waarna nog een keer primitiveren geeft dat

$$u(x) = u'(0)x - \int_0^x F(s) ds,$$

$u'(0)$ nog steeds onbepaald, $\int_0^x F(s) ds$ de primitieve van F die 0 is in $x = 0$, en $u(1) = 0$ nog niet gebruikt.

Met de productregel van Leibniz is $F(s)$ te schrijven als

$$\begin{aligned} \underbrace{1 F(s)}_{G'(s)F(s)} &= \underbrace{(s-a)'}_{G'(s)} F(s) = \underbrace{((s-a) F(s))'}_{G(s)} - \underbrace{(s-a) F'(s)}_{G(s)} \\ &= \underbrace{((s-a)F(s))'}_{(G(s)F(s))'} - \underbrace{(s-a)f(s)}_{G(s)F'(s)} \end{aligned}$$

(afgeleiden naar s). Onder de formules is aangegeven dat we 1 zien als $G'(s)$ met $G(s) = s - a$ en a nog vrij te kiezen. Dus de primitieve van F in x is te schrijven als

$$\int_0^x F(s) ds = \underbrace{[(s-a)F(s)]_0^x - \int_0^x (s-a)f(s) ds}_{\text{kies } a=x} = \int_0^x (x-s)f(s) ds. \quad (29.2)$$

Met $a = x$ volgt dat

$$u(x) = u'(0)x - \int_0^x (x-s)f(s) ds$$

en door $x = 1$ in te vullen vinden we dat

$$u'(0) = \int_0^1 (1-s)f(s) ds.$$

Daarmee is

$$u(x) = \int_0^1 (1-s)f(s) ds x - \int_0^x (x-s)f(s) ds$$

$$= x \int_x^1 (1-s)f(s) ds + (1-x) \int_0^x sf(s) ds = \int_0^1 A(x,s)f(s) ds.$$

In deze laatste formule wordt

$$A(x,s) = \begin{cases} (1-x)s & \text{als } 0 \leq s \leq x \\ (1-s)x & \text{als } x \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (29.3)$$

de kern van de oplossingsoperator wordt genoemd. Die operator geeft u in termen van f als

$$u(x) = \int_0^1 A(x,s)f(s) ds. \quad (29.4)$$

De symmetrische kern A is zo te vergelijken met een symmetrische matrix A , en over symmetrische matrices komen we nog te spreken in het volgende hoofdstuk.

We hebben hierboven (29.4) met (29.3) afgeleid als oplossing voor (29.1) via de produktregel voor de afgeleide van $s \rightarrow F(s)G(s)$. Als we Stelling 8.1 toepassen op de produktregel (10.1) dan vinden we voor primitieven functies F en G van $f = F'$ en $g = G'$ in $C([a,b])$ dat

$$\int_a^b F(x)G'(x) dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F'(x)G(x) dx, \quad (29.5)$$

de bekende regel voor *integration by parts*.

Partieel integreren is voor alles en nog wat handig. Bijvoorbeeld voor herhaald primitiveren zoals hierboven. Daarover nu een serie opgaven die leiden tot de Stelling van Taylor over polynomiale benaderingen van voldoende vaak continu differentieerbare functies.

Opgave 29.1. Neem $f \in C([a,b])$ en definieer

$$F_1(x) = F(x) = \int_a^x f(s) ds \quad \text{en} \quad F_2(x) = \int_a^x F_1(s) ds.$$

Laat met (29.5) zien dat

$$F_2(x) = \int_a^x (x-s)f(s) ds.$$

Hint: de integratievariabele is s en de 1 die je niet ziet voor $F_1(s)$ is de afgeleide naar s van $s-x$.

Opgave 29.2. Definieer in de context van Opgave 29.1

$$F_{n+1}(x) = \int_a^x F_n(s) ds \quad (n = 1, 2, 3 \dots),$$

en laat met herhaald partieel integreren zien dat

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s) ds.$$

Hint: voor F_3 moet je twee keer partieel integreren, voor F_4 drie keer, et cetera. En dan zie je wel hoe het gaat.

Opgave 29.3. De formule in Opgave 29.2 produceert de zoveelste primitieve van f als een gewone in plaats van een meervoudige integraal. Verander het schema nu in

$$F_0(x) = f(x), \quad F_n(x) = b_n + \int_a^x F_{n-1}(s) ds \quad (n = 1, 2, 3 \dots), \quad (29.6)$$

en geef weer een formule voor $F_n(x)$ zoals hierboven (met meer termen natuurlijk). Bij constructie is $F_n(a) = b_n$, $F'_n(a) = b_{n-1}$, $F''_n(a) = b_{n-2}$, $\dots$, en je ziet hier een zogenaamde Taylorbenadering van orde $n-1$ staan voor een functie waarvan de eerste $n-1$ afgeleiden in a gegeven zijn door b -tjes. Verifieer nu dat voor elke n keer continue differentieerbare functie gedefinieerd op een interval I dat 0 bevat voor $x \in I$ geldt dat

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n-1)}(a) \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \\ & + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds. \end{aligned}$$

De laatste term is de restterm. Als $M = M_n(x, a)$ en $m = m_n(x, a)$ het maximum respectievelijk het minimum zijn van $f^{(n)}(s)$ als s varieert van $s = a$ naar $s = x$, dan zit deze term tussen

$$\frac{M}{n!} (x-a)^n \quad \text{en} \quad \frac{m}{n!} (x-a)^n$$

in. Omdat $f^{(n)}(s)$ tussen $s = a$ en $s = x$ alle waarden tussen $M = M_n(x, a)$ en $m = m_n(x, a)$ aanneemt, is er een zekere maar i.h.a. verder niet nader te bepalen $s = \sigma$ tussen $s = a$ en $s = x$ waarvoor de restterm gelijk is aan

$$\frac{f^{(n)}(\sigma)}{n!} (x-a)^n.$$

Kortom,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\sigma)}{n!} (x-a)^n, \quad (29.7)$$

met σ tussen a en x .

Het resultaat in formule (29.3) is ook te bewijzen zonder de aanname dat $f^{(n)}$ continu is, met een σ strict tussen a en x . In het geval dat $n = 1$ reduceert de uitspraak dan tot de middelwaardestelling, en het is weer een slimme toepassing van diezelfde hier al in Sectie 14 bewezen middelwaardestelling waarmee (29.7) kan worden bewezen. In sommige colleges gebeurt dat wellicht nog. Het bewijs hierboven is echter inzichtelijker en gebaseerd op herhaald primitiveren.

Partieel integreren wordt natuurlijk ook gebruikt om integralen uit te rekenen. Een mooi voorbeeld is de integraalformule voor $n!$ met $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 29.4. Bereken

$$\int_0^\infty \exp(-x) dx, \quad \int_0^\infty x \exp(-x) dx, \quad \int_0^\infty x^2 \exp(-x) dx, \quad \int_0^\infty x^3 \exp(-x) dx,$$

en geef voor $n!$ een integraalformule. NB Dit zijn zogenaamde oneigenlijke integralen. Lees

$$\int_0^\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R$$

en doe daar verder niet moeilijk over (maar leg wel uit welke al behandelde standaardlimiet je gebruikt).

30 Stirling's formule via schalen en limieten

Met Opgave 29.4 komen we nu terug op (16.3). Waar die formule vandaan komt wordt aanstonds duidelijk.

Opgave 30.1. Schets daartoe eerst de grafiek $y = x^n e^{-x}$ (voor n nog niet te groot) in het x, y -vlak. Waar ligt de top van de berg?

Opgave 30.2. Door de in Opgave 29.4 gevonden integraal voor $n!$ met het maximum van de integrand te schalen en horizontaal te schuiven volgt dat

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-n}^\infty g_n(x) dx$$

met

$$g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x}$$

Laat dit zien m.b.v. (16.1) en schets de nieuwe grafiek $y = g_n(x)$.

Opgave 30.3. De eerste factor van $g_n(x)$ is de rente op rente benadering van e^x die in [HM] in detail wordt besproken alvorens $\exp(x)$ wordt gedefinieerd als de puntsgewijze limiet van

$$e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

voor $n \rightarrow \infty$. Verifieer deze limiet en ook dat $e_n(x)$ stijgt met n voor $x > -n$.

Bijgevolg stijgt $g_n(x)$ dus naar 1 voor elke $x \in \mathbb{R}$. Omdat $g_n(x)$ stijgend is in x voor $x \in [-n, 0]$ en dalend in x voor $x \geq 0$ is onmiddellijk duidelijk dat

$$\int_{-n}^{\infty} g_n(x) dx \rightarrow \infty$$

als $n \rightarrow \infty$. Kunnen we het gebied waarvan deze integraal de oppervlakte geeft horizontaal schalen (met een n -afhankelijke schaalfactor) teneinde wel een eindige limiet te krijgen?

Opgave 30.4. Schrijf daartoe

$$g_n(x) = e^{-\psi_n(x)} \quad \text{met} \quad \psi_n(x) = -\ln(g_n(x)),$$

en verifieer dat

$$\psi_n(x) = x - n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = n\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = n\psi_1\left(\frac{x}{n}\right).$$

De rij functies ψ_n ontstaat dus door schalen uit één en dezelfde functie $\Psi = \psi_1$, en die functie heeft als formulevoorschrift

$$\Psi(x) = x - \ln(1+x). \quad (30.1)$$

Hoe ziet de grafiek van Ψ eruit? Je weet al dat $\Psi(0) = \Psi'(0) = 0$ omdat $g_n(x)$ een maximum ter grootte 1 heeft in $x = 0$. Omdat

$$\Psi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \sim x$$

als $x \rightarrow 0$, volgt voor Ψ zelf dat

$$\Psi(x) \sim \frac{1}{2}x^2$$

als $x \rightarrow 0$. De grafiek van Ψ wordt verder gekenmerkt door een verticale asymptoot bij $x = -1$ en bijna-lineaire groei voor $x \rightarrow \infty$.

Wel een schetsje waard deze grafiek maar belangrijker is dat voor ψ_n nu geldt dat

$$\psi_n(x) = n\Psi\left(\frac{x}{n}\right) \sim \frac{x^2}{2n},$$

niet alleen voor $x \rightarrow 0$, maar ook voor $\frac{x}{n} \rightarrow 0$, hetgeen steeds grotere x toelaat, maar waarbij in de limiet $n \rightarrow \infty$ niets overblijft.

Een schaling waarbij wel wat overblijft lezen we onmiddellijk af. We moeten x zo schalen dat de n in het rechterlid verdwijnt, en dus substitueren we $x = s\sqrt{n}$. Met deze schaling volgt nu dat

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n\Psi\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} ds \quad (30.2)$$

In de integrand zien we een nieuwe anders geschaalde versie van Ψ , die we zo hebben gekozen dat voor elke n geldt dat

$$n\Psi\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{2}s^2, \quad (30.3)$$

nu niet alleen voor $s \rightarrow 0$, maar ook voor $\frac{s}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$. Het fraaie is dat met grotere n deze geschaalde $\Psi(s)$ steeds meer op zijn kwadratische benadering bij $s = 0$ gaat lijken. We zoomen als het ware in op de oorsprong en in de limiet blijft alleen de parabool over, juist omdat we (de grafiek van) Ψ verticaal en horizontaal anders schalen. De schaling is zo gekozen dat $\frac{1}{2}s^2$ van schalen niets merkt en in de limiet $n \rightarrow \infty$ wordt het linkerlid in (30.3) gelijk aan het rechterlid. De linkergrens van de integraal schuift daarbij op naar $-\infty$. Wat we nu nog moeten doen om te kunnen concluderen dat

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \quad (30.4)$$

als $n \rightarrow \infty$ is bewijzen dat

$$\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n\Psi\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} ds \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \quad (30.5)$$

als $n \rightarrow \infty$. Puntsgewijs

$$f_n(s) = e^{-n\Psi\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}s^2}$$

als $n \rightarrow \infty$.

Opgave 30.5. Bereken de afgeleide van $f_n(s)$ naar n voor vaste s en laat zien dat deze afgeleide een teken heeft dat alleen van het teken van s afhangt. Hint: gebruik de formule voor Ψ pas op het allerlaatst.

We zien nu dat, net als hun integranden, de integralen

$$\int_{-\sqrt{n}}^0 e^{-n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}})} ds \quad \text{en} \quad \int_0^\infty e^{-n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}})} ds$$

stijgend respectievelijk dalend zijn in n . Zijn deze rijen convergent met limiet respectievelijk

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \quad \text{en} \quad \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}s^2} ds?$$

Een positief antwoord vertelt ons dan dat (30.4) waar is, en alleen de limietintegraal zelf moet dan nog worden uitgerekend.

31 Makkelijke convergentiestellingen

Opgave 31.1. We bekijken nu eerst het geval van eindige intervallen $[a, b]$ en integralen van rijen functies $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$\forall x \in [a, b] \quad 1 \leq n_1 \leq n_2 \implies f_{n_1}(x) \leq f_{n_2}(x),$$

en

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a \leq x_1 \leq x_2 \leq b \implies f_n(x_1) \leq f_n(x_2).$$

Neem aan dat zo'n rij f_n begrensd is. Bewijs rechtstreeks vanuit de definitie met onder- en bovensommen van de integraal voor monotone functies dat

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx,$$

waarbij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Er zijn nog drie versies van deze stelling. Welke drie?

Merk op dat we niets aannamen over het teken van $f_n(x)$. In de volgende opgave doen we dat wel.

Opgave 31.2. We bekijken nu het geval van het interval $[0, \infty)$ en integralen van rijen functies $f_n : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ met

$$\forall x \in [0, \infty) \quad 1 \leq n_1 \leq n_2 \implies f_{n_1}(x) \geq f_{n_2}(x),$$

en

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \implies f_n(x_1) \geq f_n(x_2).$$

Neem aan dat

$$\int_0^\infty f_1(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f_1(x) dx$$

bestaat. Bewijs rechtstreeks vanuit de definities dat dan

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx,$$

waarbij

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Van deze stelling zijn er geen drie versies omdat positieve monotoon stijgende functies niet integreerbaar zijn op $[0, \infty)$ en ook omdat het geval f_n stijgend echt anders is.

Opgave 31.3. Formuleer en bewijs een bruikbare stelling als in Opgave 31.2 voor rijen functies met

$$\forall x \in [0, \infty) \quad 1 \leq n_1 \leq n_2 \implies f_{n_1}(x) \leq f_{n_2}(x),$$

en

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \implies f_n(x_1) \geq f_n(x_2).$$

Opgave 31.4. Bewijs (30.4) met behulp van de laatste twee opgaven.

32 Limieten van differentiequotienten

We hebben de afgeleide van F in x_0 gedefinieerd als coëfficiënt van de lineaire benadering in (7.3) waarbij de restterm in verhouding tot h willekeurig klein is voor $h \rightarrow 0$.

Definitie 32.1. Als $I \subset \mathbb{R}$ een interval is en $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dan zeggen we voor $x_0 \in \bar{I}$ en $L \in \mathbb{R}$ dat

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

als er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x \in I$ de implicatie

$$|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

geldt. We schrijven ook $f(x) \rightarrow L$ als $x \rightarrow x_0$.

Opgave 32.2. Als $I \subset \mathbb{R}$ een interval is en $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar is in $x_0 \in I$, dan is

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

Omgekeerd, als deze limiet bestaat dan is F differentieerbaar in x_0 met afgeleide $F'(x_0)$. Bewijs dit.

In de vorm

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad (32.1)$$

is de formule in Opgave 32.2 de gebruikelijke definitie voor de afgeleide functie F' die meestal voorafgaat aan de behandeling van differentiaalrekening met lineaire benaderingen. De limiet, indien deze bestaat, heet dan het differentiaalquotient, ogenschijnlijk genoteerd als breuk met teller dF en noemer dx , hetgeen ook de notatie $dF = F'(x)dx$ in Sectie 8 suggereert. Met $h = \Delta x$ heet de breuk

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

zelf een differentiequotient. Het differentiaalquotient is de limiet van het differentiequotient als $\Delta x \rightarrow 0$.

33 Differentiaal- en integraalvergelijkingen

In (17.1) is de differentiaalvergelijking die de functie $\exp$ definieert omgeschreven tot integraalvergelijking. Vanaf hier kiezen we zo veel mogelijk voor de

t van tijd als onafhankelijke variabele in de differentiaalvergelijkingen onder consideratie, en voor x als de afhankelijke variabele. Daarbij we spreken over $x = x(t)$ als de oplossing, en de lezer wordt gevraagd deze “abuse of notation” voor lief **the** nemen. Dus $x = x(t)$ voor $t \in I$ is een verkorte schrijfwijze om een functie $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ aan te duiden. Bijvoorbeeld $x(t) = \exp(t)$, de unieke oplossing van

$$x' = x \quad \text{met} \quad x(0) = 1 \quad \text{op} \quad I = \mathbb{R},$$

een probleem van de vorm

$$x'(t) = f(x(t)) \quad \text{voor alle} \quad t \in I \quad \text{met} \quad x(0) = \xi. \quad (33.1)$$

Merk op dat een oplossing van (33.1) per definitie differentieerbaar is op I en dus continu.

Voor iedere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $\xi \in \mathbb{R}$ is (33.1) een probleem om op te lossen voor t in een (liefst maximaal) interval I , met $0 \in I$ omdat anders de voorwaarde $x(0) = \xi$ geen betekenis heeft. We beperken ons hier nu tot differentiaalvergelijkingen waarin de onafhankelijke variabele t niet expliciet voorkomt. Dus $x'(t) = f(x(t))$ en niet $x'(t) = f(t, x(t))$. Zulke differentiaalvergelijkingen hebben de eigenschap dat een horizontaal verschoven grafiek van een oplossing in het t, x -vlak weer de grafiek van een oplossing is. Met één oplossing heb je er dankzij deze *translatie-variantie* dus meteen een heleboel en soms zelfs allemaal (als f geen nulpunten heeft).

Opgave 33.1. Teken in het x, y -vlak een grafiek $y = f(x)$ van een mooie functie f met een paar nulpunten en gebruik de informatie uit die grafiek om grafieken van oplossingen in t, x -vlak te schetsen. Hint: schets eerst de grafieken van de constante oplossingen.

Onder de aanname dat f continu is op $\mathbb{R}$ is (33.1) equivalent met

$$x(t) = \xi + \int_0^t f(x(s)) ds \quad \text{voor alle} \quad t \in I. \quad (33.2)$$

Opgave 33.2. Bewijs de equivalentie van (33.1) en (33.2) voor continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $\xi \in \mathbb{R}$ gebruikmakend van de integraal- en differentiaalrekening ontwikkeld tot nu toe.

Opgave 33.3. Dezelfde vraag (met $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu en $\xi, \eta \in \mathbb{R}$) voor

$$x'' = f(x) \quad \text{met} \quad x(0) = \xi \quad \text{en} \quad x'(0) = \eta$$

en de integraalvergelijking die je krijgt door twee keer te integreren. Hint: gebruik (je uitwerking van) Opgave 29.1 om de herhaalde integraal om te schrijven tot een enkele integraal.

Om een oplossing van (33.2) te maken kunnen we eerst $a, b \in \mathbb{R}$ kiezen met $0 \in [a, b] \subset I$ en (33.2) herschrijven als een vergelijking

$$x = \xi + \Phi(x), \tag{33.3}$$

voor $x \in C([a, b])$, met $\Phi : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ gedefinieerd door

$$(\Phi(x))(t) = \int_0^t f(x(s)) ds, \tag{33.4}$$

een formulevoorschrift voor de (nieuwe) functie $\Phi(x) \in C([a, b])$ gegeven de (“oude”) functie $x \in C([a, b])$.

In (33.3) is ξ nu te lezen als een constante functie $x_0 : t \rightarrow \xi$ en met het schema

$$x_{n+1} = \xi + \Phi(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{33.5}$$

ontstaat dan een rij x_n in $C([a, b])$ waarvan we nu willen of deze via zijn limiet een unieke oplossing van (33.2) definieert. De vraag nu is onder welke aannames op f en $[a, b]$ dit lukt. Om dat te onderzoeken nemen we eerst zonder beperking der algemeenheid $\xi = 0$.

In wat volgt vermijden we notationeel gepriegel met bovengrenzen t die kleiner zijn dan de ondergrens 0 in (33.4) door de afbeelding Φ te bekijken op $X = C([0, T])$. Vaste punten van Φ zijn dan oplossingen van (33.2) met $\xi = 0$ en daarmee van (33.1). Oplossingen van (het beginwaardeprobleem)

$$x'(t) = f(x(t)) \quad \text{voor} \quad t \in [0, T] \quad \text{en} \quad x(0) = 0$$

corresponderen dus met vaste punten van $\Phi : X \rightarrow X$. En voor het vinden van zulke “dekpunten” is er een stelling die iedereen die wiskunde doceert gezien moet hebben.

Stelling 33.4. *Laat X een Banachruimte zijn. Als $\Phi : X \rightarrow X$ een afbeelding is die voor een vaste $\theta \in [0, 1)$ voldoet aan*

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \theta \|x - y\| \quad \forall x, y \in X,$$

dan heeft Φ een uniek vast punt $\bar{x} = \Phi(\bar{x}) \in X$. Gegeven iedere $x_0 \in X$ geldt voor de rij gedefinieerd door $x_n = \Phi(x_{n-1})$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat $x_n \rightarrow \bar{x}$ als $n \rightarrow \infty$.

Bewijs. Dat Φ geen twee vaste punten kan hebben volgt meteen uit de aanname. Gegeven een willekeurige x_0 en $x_1 = \Phi(x_0)$ volgt ook uit de aanname dat

$$\|x_2 - x_1\| = \|\Phi(x_1) - \Phi(x_0)\| \leq \theta \|x_1 - x_0\|,$$

$$\|x_3 - x_2\| = \|\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\| \leq \theta \|x_2 - x_1\| \leq \theta^2 \|x_1 - x_0\|,$$

etc. Voor de incrementen geldt dus dat

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \theta^n \|x_1 - x_0\|, \quad (33.6)$$

en dus volgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \|x_1 - x_0\| = \|x_1 - x_0\| \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = \|x_1 - x_0\| \frac{1}{1-\theta}.$$

De reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$$

is dus convergent met een limiet $S \in X$ vanwege de uitspraak in Opgave 33.5 hieronder. Omdat

$$x_{N+1} = x_0 + \sum_{n=0}^N (x_{n+1} - x_n)$$

volgt dat

$$x_{N+1} = \Phi(x_N) \rightarrow x_0 + S \quad \text{als} \quad N \rightarrow \infty.$$

Met $\bar{x} = x_0 + S$ hebben we de limiet van de rij x_n dus te pakken en omdat

$$\begin{aligned} \|\Phi(\bar{x}) - \bar{x}\| &\leq \|\Phi(\bar{x}) - \Phi(x_n)\| + \|\Phi(x_n) - x_n\| + \|x_n - \bar{x}\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + 2\|x_n - \bar{x}\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

is $\bar{x}$ een vast punt van Φ . Daarmee is het bewijs klaar.

Opgave 33.5. Laat X een Banachruimte zijn en $a_n \in X$ voor $n \in \mathbb{N}_0$. Schrijf het bewijs van het convergent zijn van absoluut convergente reeksen in $\mathbb{R}$ over met normstrepen i.p.v. absolute waarde strepen en bewijs zo dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{bestaat en} \quad \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|.$$

Opgave 33.6. Neem aan dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniform Lipschitz continu is met Lipschitz constante $L > 0$. Dus

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bewijs dat Φ in (33.4) voldoet aan

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq LT\|x - y\|_\infty \quad \forall x, y \in X = C([0, T]).$$

Stelling 33.7. *Neem aan dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniform Lipschitz continu is, en dat $\xi \in \mathbb{R}$. Dan heeft de differentiaalvergelijking*

$$x'(t) = f(x(t))$$

precies één oplossing met $x(0) = \xi$. Die oplossing is gedefinieerd voor alle $t \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Met $\xi = 0$ volgt het bestaan van een unieke oplossing op $[0, T]$ via Opgave 33.2, Stelling 33.4 en Opgave 33.6 onder de aanname dat $LT < 1$. Voor $\xi \neq 0$ is het bewijs precies hetzelfde, niet alleen op $[0, T]$ maar ook op $[-T, 0]$, of in één keer op $[-T, T]$. Maar vanwege de translatie-invariantie geldt dit ook voor oplossingen met $x(T) = \eta \in \mathbb{R}$ op $[T, 2T]$. Kies nu $\eta = x(T)$ met x de oplossing die we al hadden op $[0, T]$. Dit geeft een oplossing op $[T, 2T]$ met $x(0) = \xi$. Enzovoort. Stap voor stap, naar links en naar rechts, steeds met dezelfde stapgrootte T , breiden we de oplossing zo uit tot uiteindelijk heel $\mathbb{R}$ en het bewijs is klaar.

Opgave 33.8. Neem aan dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniform Lipschitz continu is en $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ willekeurig. Als we de unieke oplossing van $x'(t) = f(x(t))$ met $x(\tau) = \xi$ noteren als $x(t; \tau, \xi)$ dan geldt $x(t; \tau, \xi) = x(t - \tau; 0, \xi)$. Leg uit waarom. Definieer nu de afbeeldingen $S_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $S_t(\xi) = x(t; 0, \xi)$. Leg uit waarom voor alle $s, t \in \mathbb{R}$ geldt dat $S_{t+s} = S_t(S_s(\xi))$ voor alle $\xi \in \mathbb{R}$, i.e.

$$S_{t+s} = S_t \circ S_s.$$

We schrijven ook $S_t(\xi) = x(t; \xi)$ en dan luidt deze regel dat

$$x(t + s; \xi) = x(t; x(s; \xi)) = x(s; x(t; \xi)).$$

Gebruik dit met $f(x) = x$ om te concluderen dat $\exp(t + s) = \exp(t)\exp(s)$, waarbij $\exp(t)$ gedefinieerd is door $\exp(t) = x(t; 1)$.

Opgave 33.9. Neem aan dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniform Lipschitz continu is, en dat $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Dan heeft de differentiaalvergelijking

$$x''(t) = f(x(t))$$

precies één oplossing met $x(0) = \xi$ en $x'(0) = \eta$. Die oplossing is gedefinieerd voor alle $t \in \mathbb{R}$. Schets een bewijs van deze uitspraak gebruikmakend van Opgave 33.3 en de strategie in het voorafgaande.

Opgave 33.10. De oplossing in Opgave 33.9 kan genoteerd worden als $x(t; \xi, \eta)$. Herschrijf $x(t + s; \xi, \eta)$ zoals in Opgave 33.8. Gebruik dit met $f(x) = -x$ om de bekende regels voor $\cos(s + t)$ en $\sin(s + t)$ af te leiden rechtstreeks vanuit de definitie dat $\sin(t) = x(t; 0, 1)$ en $\cos(t) = x(t; 1, 0)$.

Opgave 33.11. Verifieer dat $\exp, \cos, \sin$ als machtreeksoplossingen samenvallen met de oplossingen hierboven door de iteratieschema's voor de betreffende integraalvergelijkingen expliciet uit te voeren.