1 Integraalrekening

Woord vooraf: ik verwijs af en toe naar het groene boekje "Wiskunde in je Vingers"met Ronald Meester [HM]. Onderstaande tekst bevat net als [HM] geen plaatjes. Het is verstandig en leerzaam om die zelf te maken, op blanco papier of op ruitjespapier[1].

Wat ik schrijf is onderdeel van een hoofdstuk over integraalrekening uit een nieuw boek/dictaat dat ik met permissie voorlopig maar "Basisboek Analyse"noem[2], en dat op het web wel te vinden is. Het verwerken van kritiek van collega's (met name René Swarttouw) wissel ik af met het lezen in [Eves], de zesde editie van "An Introduction to the History of Mathematics"van (vader Howard) Eves (en zoon Jamie voor de cultural connections).

Dat hoofdstuk over integraalrekening komt na een algemene inleiding over wat nu vaak gezien wordt als de fundamenten van de wiskunde, en begint met formules voor sommen van machten de facto bij Archimedes. Voor bewijzen (met volledige inductie) van die formules zie eventueel ook Hoofdstuk 6 van [HM], maar Opgaven 1.5,1.6,1.7 bieden een leuk en wat constructiever alternatief waarbij iets minder geraden wordt.

Terzijde: integraalrekening gaat in het nieuwe boek aan diffentiaalrekening vooraf, zoals ik dat voor het eerst zag in de calculusboeken van Apostol. Jan Aarts wees me daar destijds op en Eves beschrijft het in zijn boek ook als de historische volgorde. In het nieuwe boek is de differentiaalrekening echter vanaf het begin gebaseerd op lineaire benaderingen, lineaire benaderingen die volgens niet alleen Eves gebruikt[3] werden voor de benadering van $\sqrt{2}$ op kleitablet YBC7289. Dat kleitablet is ouder dan het werk van Archimedes. Wat de natuurlijke volgorde is kan dus onderwerp van discussie blijven.

Zowel differentiaalrekening (met lineaire benaderingen) als integraalrekening (met benaderende eindige sommen) kan beginnen met simpele voorbeelden, bijvoorbeeld voor de functies $x \to x^n$ met $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, met expliciete uitdrukkingen waaraan je ziet hoe het werkt en wat er uit komt, en in bijzonder de observatie dat de hoofdstelling van de integraalrekening voor monomen geldt. De stap van monomen naar polynomen ligt dan voor de hand, en vervolgens is een snelle keuze voor het generaliseren naar machtreeksen een optie, nog voor continuiteit[4] van functies aan de orde komt.

Een opmerking van Jan Wiegerinck bracht me op de gedachte om[5] een minder gangbare convergentiestelling voor integralen van $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ te

[1] Met vierkante ruitjes.
[2] Met als subtitel "not another ε-book".
[3] Dat wist ik nog niet toen we [HM] schreven.
[4] Secties 1.4 en 1.5 gaan over continuïteit en limieten, maar zijn over te slaan.
[5] Hier nu al in de laatste subsectie.

formuleren, waarbij monotonie in zowel $n \in \mathbb{N}$ als $x \in [a, b]$ wordt aangenomen. Het bewijs van die stelling is een variant op het eenvoudige bewijs dat monotone functies Riemann integreerbaar zijn. De stelling[6] kan worden gebruikt om de stap van polynomen $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N$ naar machtreeksen

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

voor integraalrekening snel te maken, eerst voor het geval dat $0 \leq a \leq b$ en alle $a_n \geq 0$, en vervolgens door splitsen in negatieve en positieve termen in het algemene geval.

Helemaal expliciet kan integraalrekening voor machtreeksen natuurlijk ook worden gedaan maar dat is wat bewerkelijk. Voor differentiaalrekening is de stap van polynomen naar machtreeksen (met lineaire benaderingen en expliciete foutafschattingen) veel makkelijker, zoals ik leerde uit het boek van Conway over *complex functions of one variable*. Komt in deze vakantiecursus niet aan de orde, maar is te vinden in Hoofdstuk 10 van [HM].

Bij integraalrekening kan de analyse zich aanvankelijk beperken tot de uitspraak dat monotone (niet-dalend of niet-stijgend) begrensde rijen in $\mathbb{R}$ convergent zijn (met hun kleinste bovengrens of grootste ondergrens als limiet), en de in de analyse zo belangrijke observatie dat iedere rij in $\mathbb{R}$ een deelrij heeft die monotoon is. Daaruit volgt de stelling dat iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ een convergente deelrij heeft. Han Peters wees me op deze wat minder gebruikelijke maar wel zo efficiënte manier om het bestaan van convergente deelrijen te bewijzen.

De al genoemde hoofdstelling[7] van de integraalrekening legt het verband tussen differentiaalrekening en integraalrekening door de b in

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

variabel te maken en de variatie in de integraal op de voor de hand liggende manier lineair te benaderen. Lineaire benaderingen gaan terug tot kleitablet YBC7289. Oppervlakteberekeningen met polygoonbenaderingen gaan minstens terug tot Archimedes. Eves speculeert dat formules voor sommen van kwadraten al eerder bekend waren. Je vraagt je af welke vraagstelling destijds al tot het ontdekken van het verband had kunnen leiden. De notaties van nu hadden ze natuurlijk nog niet[8].

[6] Kan ook worden gebruikt voor het bewijs in [HM] van de formule van Stirling.
[7] Meestal als twee stellingen geformuleerd.
[8] En ook geen rekenmachines.

1.1 Terug naar Archimedes met simpele voorbeelden

Voor functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ begint integraalrekening met de vraag naar de oppervlakte van verzamelingen in het x, y-vlak begrensd door de x-as en de *grafiek* van f. Die grafiek wordt gegeven door $y = f(x)$. Om niet meteen over onbegrensde gebieden te praten kijken we eerst naar verzamelingen van de vorm

$$A_+ = \{(x, y) : \, x, y \in \mathbb{R}, \, 0 < y < f(x), \, a < x < b\}$$

en

$$A_- = \{(x, y) : \, x, y \in \mathbb{R}, \, f(x) < y < 0, \, a < x < b\},$$

met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a < b$, waarbij we opmerken dat de "grotere" verzamelingen die ontstaan als we hierin elke $<$ door $\leq$ vervangen dezelfde oppervlakte zouden moeten hebben. Althans bij een zinvolle definitie van het begrip oppervlakte, een definitie die we hier echter achterwege laten.

Dat lijnstukken oppervlakte nul hebben, en grafieken van niet al te lelijke functies ook, lijkt vanzelfsprekend, maar komt hier nog niet aan de orde. In wat hieronder volgt gaat het alleen over welomschreven benaderingen van oppervlakten van verzamelingen waarvan we kunnen aannemen dat die op de een of andere manier meetbaar zijn, bijvoorbeeld met een gereedschapskist vol rechthoekjes waarvan de oppervlakte als lengte en breedte buiten kijf staat. De wiskunde is uiteindelijk ook correct ook zonder dat aan het begrip oppervlakte wordt gedacht. Uitgangspunt is wel de consensus dat de oppervlakte tussen de lijnen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ in het xy-vlak gelijk is aan $1 \times 1 = 1 \cdot 1 = 1$, let wel, zonder fysische eenheden erbij.

We beginnen met het geval dat $A_- = \emptyset$: we nemen aan dat $f(x) \geq 0$ voor $x \in [a, b]$. Het geval $[a, b] = [0, 1]$ en $f(x) = x^n$ met $n \in \mathbb{N}$ is een leerzaam eerste voorbeeld. We rekenen wat we de oppervlakte van de verzameling

$$A_n = \{(x, y) : \, 0 \leq y \leq x^n \leq 1\}$$

zouden willen noemen expliciet uit. Als notatie voor de oppervlakte[9] van een verzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ gebruiken we $|A|$. Als uitgangspunt nemen we dat over de oppervlakte van een rechthoek geen twijfel bestaat, waarbij we zonder eenheden (dus geen vierkante centimeters of zo) werken. De oppervlakte van een rechthoek die parallel ligt aan de assen wordt eenvoudig bepaald door de schaalverdeling op de assen[10].

Voor $n = 1$ gaat het om het gebied in het xy-vlak begrensd door

$$x = 1, \quad y = 0 \quad \text{en} \quad y = x,$$

[9] Of elke $A \subset \mathbb{R}^2$ een oppervlakte $|A|$ heeft is natuurlijk wel de vraag.

[10] Voor $n = 0 \notin \mathbb{N}$ volgt dus $|A_0| = 1$.

een driehoek met oppervlakte $\frac{1}{2}$, precies de helft van de oppervlakte van het vierkant met hoekpunten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ en $(0,1)$. Er zal dus wel gelden dat $|A_1| = \frac{1}{2}$.

Hoe zit het met $|A_2|$? Omdat $A_2 \subset A_1$ is het duidelijk dat moet gelden dat $|A_2| \leq |A_1|$, nog voor je de vraag stelt hoe en of de oppervlakte eigenlijk precies gedefinieerd is. Het is ook duidelijk[11] dat $|A_2|$ niet kleiner kan zijn zijn dan de oppervlakte van een rechthoek die geheel in A_2 ligt, bijvoorbeeld de rechthoek met hoekpunten $(\frac{1}{2}, 0)$, $(1,0)$, $(1, \frac{1}{4})$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. We concluderen hieruit dat $|A_2|$ minimaal $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ moet zijn.

Opgave 1.1. Laat met rechthoekjes zien dat ook moet gelden dat

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} < |A_2| < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{9}.$$

Opgave 1.2. Laat zien dat voor elke $N \in \mathbb{N}$ moet gelden dat

$$\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (N-1)^2}{N^3} < |A_2| < \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + N^2}{N^3}.$$

Als je even nadenkt over hoe je de grenzen in Opgave 1.2 hebt gevonden dan is duidelijk dat het verschil precies $\frac{1}{N}$ is, en dat kunnen we zo klein maken als we willen door N groot te nemen. Bovendien kunnen we deze onder- en bovengrenzen gewoon uitrekenen:

Opgave 1.3. Laat zien dat voor elke $N \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + N^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}.$$

[11] Maak een plaatje.

We gebruiken hier de somnotatie waarin de index n aangeeft dat we de som nemen van de kwadraten van n over alle n in de verzameling

$$\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq N\}.$$

In [Eves] lezen we op pagina 47 dat de formule in Opgave 1.3 al door Archimedes gevonden is. Het rechterlid factoriseert als

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

maar het gaat ons in het vervolg alleen om de coëfficiënt van N^3 in het rechterlid. De bovengrens voor $|A_2|$ in Opgave 1.2 is nu immers gelijk aan

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}$$

en wordt kleiner als N groter genomen wordt. De ondergrens is (niet opnieuw uitrekenen maar gewoon $\frac{1}{N}$ eraf)

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2},$$

en dat wordt juist groter als N groter genomen wordt (al zie je dat misschien niet meteen). De onvermijdelijke conclusie is dat $|A_2| = \frac{1}{3}$. In termen van de integralen[12] die je natuurlijk al eerder gezien hebt is hiermee de uitspraak dat

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$$

gedaan zonder dat er een functie geprimitiveerd is!

Wat aardig en nuttig is om op te merken is dat we van het derdegraads-polynoom in Opgave 1.3 alleen de kopcoëfficiënt in het antwoord terugzien. Het is een leerzame oefening dat het voor bijvoorbeeld[13] A_{42} precies hetzelfde gaat, je bewijst en gebruikt

$$1^{42} + 2^{42} + \cdots + N^{42} = \frac{N^{43}}{43} + \cdots$$

om via oppervlakten van rechthoekjes op $|A_{42}| = \frac{1}{43}$ uit te komen.

Opgave 1.4. Doe $|A_1|$ ook op deze manier. Hint: $1 + 2 + \cdots + N$ is[14] een som die Gauss ooit als strafwerk zou hebben gekregen.

[12] Maar denk ook aan volumes van piramiden, zie Hoofdstuk 2 van [Eves].
[13] Amusant in [Eves, §3.16]: bewijs meetkundig dat $1^3 + \cdots + N^3 = (1 + \cdots + N)^2$.
[14] Met $N = 100$ meen ik.

Opgave 1.5. Schrijf de differenties $(n+1)^2 - n^2$, $(n+1)^3 - n^3$, $(n+1)^4 - n^4$, enzovoorts uit.

Opgave 1.6. De ad hoc notaties

$$N_1 = \sum_{n=1}^{N} n, \quad N_2 = \sum_{n=1}^{N} n^2, \quad N_3 = \sum_{n=1}^{N} n^3, \ldots$$

definiëren sommen die voor elke index $1, 2, 3, \ldots$ van $N \in \mathbb{N}$ afhangen[15]. Gebruik nu Opgave 1.5: laat met de differenties van n^2 zien dat

$$(N+1)^2 = 1 + N + 2N_1,$$

met de differenties van n^3 dat

$$(N+1)^3 = 1 + N + 3N_1 + 3N_2,$$

met de differenties van n^4 dat

$$(N+1)^4 = 1 + N + 4N_1 + 6N_2 + 4N_3,$$

enzovoorts.

Opgave 1.7. Laat voor $k = 1, 2, 3, \ldots$ zien[16] dat N_k een polynoom is van graad $k+1$ met kopcoëfficiënt $\frac{1}{k+1}$. Hint: los uit de in Opgave 1.6 gevonden indentiteiten achtereenvolgens $N_1, N_2, N_3, \ldots$ op; voor elke volgende k alle vorige resultaten gebruiken en goed kijken wat de graad van elke term is.

Nog voor dat we aan precieze definities zijn toegekomen is de onvermijdelijke conclusie dat wel moet gelden dat

$$|A_n| = \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1},$$

en een kleine variant hier op is:

---

[15] Met eventueel

$$N_0 = \sum_{n=1}^{N} 1.$$

[16] Index k omdat de index n al in gebruik is, het geval $k = 42$ is al genoemd.

Opgave 1.8. Voor $b > 0$ en $n \in \mathbb{N}$ is de oppervlakte van

$$\{(x, y) :\ 0 \leq y \leq x^n \leq b^n\}$$

gelijk aan het quotiënt van b^{n+1} en $n + 1$. Laat dit zien door met schaling van de eenheden op de assen de vraag te herleiden tot het geval $b = 1$.

Lezend in [Eves] is het duidelijk dat Archimedes deze conclusie al had kunnen trekken en dat wellicht ook gedaan heeft voor $n = 2$ en $n = 3$. In moderne notatie:

$$\int_0^b x^n\, dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}.$$

Opgave 1.9. Voor $0 \leq a < b$ en $n \in \mathbb{N}$ is de oppervlakte van

$$\{(x, y) :\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq x^n\}$$

(in moderne notatie) gelijk aan

$$\int_a^b x^n\, dx = [\frac{x^n}{n+1}]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

De functie

$$x \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

noemen we tegenwoordig de primitieve van de functie

$$x \to x^n$$

omdat de afgeleide van de eerste functie gelijk is aan de tweede. Het is niet waarschijnlijk dat de lezer[17] de begrippen primitieve en afgeleide functies nog niet in de een of andere vorm gezien heeft maar het advies is om een en ander bij verder lezen in het achterhoofd te houden.

1.2 Integralen van monotone functies

De integraal van $x = 0$ tot $x = 1$ van x^2 in de inleiding hierboven is bij afspraak de nog niet wiskundig gedefinieerde oppervlakte van de verzameling[18]

$$A = \{(x, y) :\ x, y \in \mathbb{R},\ 0 \leq y \leq f(x),\ a \leq x \leq b\}, \tag{1.1}$$

[17] Ik zal de lezer weleens tutoyeren, sorry.

[18] Nu maar met $\leq$ i.p.v. $<$.

met in dit voorbeeld $a = 0$, $b = 1$ en $f(x) = x^2$. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en een functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ met $f(x) \geq 0$ voor $a \leq x \leq b$, beoogt de wiskundige definitie van

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1.2}$$

wiskundig betekenis te geven aan de oppervlakte $|A|$ van A in (1.1).

Daartoe worden zogenaamde ondersommen en bovensommen gedefinieerd, waarvan het evident is dat ze bij de beoogde definitie van de oppervlakte van A kleiner respectievelijk groter[19] dan $|A|$ zijn. Als vervolgens blijkt dat er precies één reëel getal is dat groter is dan alle ondersommen en kleiner dan alle bovensommen, dan is dit getal de enige kandidaat voor $|A|$, en vervolgens wordt dit getal de integraal van f over $[a, b]$ genoemd, i.e. (1.2). Het is natuurlijk niet verplicht om dan vervolgens te zeggen dat deze integraal gelijk is aan de oppervlakte $|A|$ van A.

We bekijken deze aanpak eerst voor het geval dat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een niet-dalende niet-negatieve functie is.

Definitie 1.10. *Als $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dan heet f niet-negatief als $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$; f heet niet-dalend als de implicatie*

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

geldt voor alle $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Voor zo'n niet-dalend niet-negatieve functie ligt het voor de hand om de oppervlakte $|A|$ van A in (1.1) van onder te benaderen met in dit geval *ondersommen* van de vorm *Teken plaatje!*

$$\underline{S}_N = \sum_{k=1}^{N} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \tag{1.3}$$

$$= f(x_0)(x_1 - x_0) + \cdots + f(x_{N-1})(x_N - x_{N-1}),$$

waarin

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_N = b \quad \text{met} \quad N \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Zo'n keuze van $x_1, \ldots, x_{N-1}$ noemen we een *partitie* P van $[a, b]$ en $\underline{S}_N$ is niets anders dan de som van de oppervlakten van de rechthoekjes[20]

$$R_k = [x_{k-1}, x_k] \times [0, f(x_{k-1})] \quad (k = 1, \ldots, N).$$

[19] Precies gezegd: groter dan of gelijk aan.

[20] Zo'n rechthoekje kan ook een lijnstuk of een punt zijn.

Hoe $|A|$ verder ook gedefinieerd wordt, je kunt je zelf er makkelijk van overtuigen dat bij iedere zinvolle definitie van $|A|$ wel moet gelden dat $\underline{S}_N \leq |A|$. Teken maar een plaatje met grafiek en rechthoekjes.

Evenzo maken de oppervlakten van de rechthoekjes

$$R_k = [x_{k-1}, x_k] \times [0, f(x_k)] \quad (k = 1, \ldots, N)$$

de *bovensom*

$$\bar{S}_N = \sum_{k=1}^{N} f(x_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{1.5}$$

Voor een zinvolle definitie van de oppervlakte van A moet dus wel gelden dat

$$\underline{S}_N \leq |A| \leq \bar{S}_N. \tag{1.6}$$

Slordig[21] gezegd, de gezochte waarde $|A|$ zitten *tussen*[22] de ondersom $\underline{S}_N$ en de bovensom $\bar{S}_N$, en het verschil van die twee is

$$\bar{S}_N - \underline{S}_N = \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}).$$

Als we nu de partitie P in (1.4) equi-distant kiezen, i.e.

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{N} \quad (k = 1, \ldots, N),$$

dan volgt

$$\bar{S}_N - \underline{S}_N = \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \frac{b-a}{N} = (f(b) - f(a)) \frac{b-a}{N}$$

en dat kunnen we willekeurig klein maken door N groot te kiezen[23]. De onvermijdelijke conclusie is dan dat er maar één getal tussen alle ondersommen en bovensommen kan liggen.

Opgave 1.11. Met $N = 1, 2, 4, 8, 16 \ldots$ vormen de ondersommen $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \underline{S}_4, \underline{S}_8, \ldots$ een niet-dalende rij getallen. Laat dit zien.

[21] Het kan gebeuren dat $\underline{S}_N = |A|$ en/of $|A| = \bar{S}_N$.

[22] Als $\underline{S}_N < |A| < \bar{S}_N$ spreken we van strict tussen.

[23] Anders zou $\mathbb{N}$ naar boven begrensd zijn in $\mathbb{R}$.

Evenzo vormen de bovensommen $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_4, \bar{S}_8, \ldots$ een niet-stijgende rij. Omdat

$$\underline{S}_1 \leq \underline{S}_2 \leq \underline{S}_4 \leq \underline{S}_8 \leq \cdots \leq \bar{S}_8 \leq \bar{S}_4 \leq \bar{S}_2 \leq \bar{S}_1,$$

zijn beide rijen begrensd.

Definitie 1.12. *Als $a \leq M \in \mathbb{R}$ respectievelijk $a \geq M$ voor alle $a \in A \subset \mathbb{R}$ dan heet M een bovengrens respectievelijk een ondergrens voor A, en A naar boven respectievelijk beneden begrensd.*

De kleinste bovengrens[24] $\underline{J}$ van deze rij ondersommen kan niet groter zijn dan een bovensom en is daarmee een ondergrens voor alle bovensommen in deze rij bovensommen. Voor de grootste ondergrens[25] $\bar{J}$ van alle bovensommen geldt dus $\bar{J} \geq \underline{J}$. Omdat

$$\bar{J} - \underline{J} \leq \bar{S}_{2^n} - \underline{S}_{2^n} = (f(b) - f(a))\frac{b-a}{2^n}$$

en 2^n willekeurig groot gekozen kan worden volgt $\bar{J} - \underline{J} = 0$. Zo definiëren we een uniek getal $J = \bar{J} = \underline{J}$ dat vervolgens genoteerd wordt als

$$J = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx,$$

spreek naar keuze uit als: de *integraal* van f over $[a, b]$, respectievelijk de integraal van f of $f(x)$ van a of $x = a$ tot b of $x = b$. In de notatie is x een *dummy* variabele, die door elke andere letter vervangen kan worden, maar bij voorkeur niet door a of b, en liever ook niet door d of f.

Opgave 1.13. Voor niet-stijgende niet-negatieve functies is het verhaal hierboven op details na hetzelfde. Schrijf dat uit.

Opgave 1.14. Niet-stijgende functies en niet-dalende functies worden monotone functies genoemd. Ook als deze functies zowel positieve als negatieve waarden aannemen, definiëren eindige sommen als in (1.3) en (1.5) via $N = 2^n$ een uniek getal J dat de integraal van f over $[a, b]$ genoemd wordt. Wat is de interpretatie van deze integraal in termen van de gebieden in het x, y-vlak begrensd door $x = a$, $x = b$, $y = 0$ en $y = f(x)$? Leg uit waarom.

---

[24] Ander woord voor kleinste bovengrens: supremum. Waarom bestaat die/dat?
[25] Ander woord voor grootste ondergrens: infimum. Waarom bestaat die/dat?

1.3 Andere partities

De integraal van een monotone functie f is nu gedefinieerd aan de hand van equi-distante partities van het interval $[a, b]$. Hoe zit het met andere partities en de ordening van onder- en bovensommen? Een vraag om algemeen te stellen maar nu eerst nog even het voor specifieke geval van monotone functies.

Opgave 1.15. Neem weer het geval dat f niet-dalend is. Neem een partitie P gedefinieerd door (1.4) en een partitie Q gedefinieerd door

$$a = y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_M = b \quad \text{met} \quad M \in \mathbb{N}.$$

Neem[26] bij P de bovensom $\bar{S}$ in (1.5) en bij Q de ondersom

$$\underline{S} = \sum_{l=1}^{M} f(y_{l-1})(y_l - y_{l-1})$$

Laat zien dat $\underline{S} \leq \bar{S}$. Hint: eerst zelf proberen, maar kijk eventueel al naar (1.11).

Definitie 1.16. *Laat A en B twee deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}$. We zeggen dat $A \leq B$ als $a \leq b$ voor alle $a \in A$ en alle $b \in B$. In dat geval zeggen we dat $J \in \mathbb{R}$ tussen A en B ligt als $A \leq \{J\} \leq B$.*

Al onze onder- en bovensommen maken twee zulke verzamelingen A en B. De volgende opgave is nu van belang.

Opgave 1.17. Laat A en B twee niet-lege deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat $A \leq B$. Bewijs dat er een getal $J \in \mathbb{R}$ is dat tussen A en B ligt. Hint: zie de redenatie onder Definitie 1.12.

Stelling 1.18. *Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een monotone functie zijn. Dan bestaat er precies één getal J dat tussen de verzameling van alle sommen van de vorm (1.3) en de verzameling van alle sommen van de vorm (1.5) ligt. Dit getal J is per definitie de integraal van $f(x)$ van $x = a$ tot $x = b$, notatie*

$$J = \int_a^b f(x)\, dx.$$

[26] Even zonder index in de notatie.

Bewijs. Het werk is hierboven gedaan, tenzij Opgave 1.15 niet gelukt is, maar lees dan toch maar verder. Zonder beperking der algemeenheid[27] nemen we f niet-dalend. De ondersommen vormen een niet-lege verzameling A en de bovensommen een niet-lege verzameling B. Er geldt dat $A \leq B$, dus er bestaat een J tussen A en B. Met equi-distante partities zien we dat er maar één zo'n J kan zijn. Klaar.

Monotone functies zijn dus integreerbaar. Merk op dat gegeven een partitie P zoals in (1.4), en iedere keuze van zogenaamde *tussenpunten*

$$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \quad (k = 1, \ldots, N),$$

ook

$$S = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{1.7}$$

een voor de hand liggende benadering van $\int_a^b f(x)\,dx$ zou moeten zijn, ook als $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ niet monotoon is, maar we kunnen dan niet meer op een natuurlijke manier van boven- of ondersommen spreken.

Als de waardenverzameling[28]

$$\{f(x) : \ a \leq x \leq b\} = \cup_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$$

echter begrensd is, i.e. als er $m, M \in \mathbb{R}$ bestaan zodat $m \leq f(x) \leq M$ voor alle $x \in [a,b]$, dan is op elke deelinterval $[x_{k-1}, x_k]$ de waardenverzameling ook begrensd en bestaan er bijbehorende ondergrenzen m_k en bovengrenzen M_k met $m \leq m_k \leq M_k \leq M$, waarmee we

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{en} \quad \bar{S} = \sum_{k=1}^{N} M_k(x_k - x_{k-1}) \tag{1.8}$$

weer als onder- en bovensommen voor zowel (1.7) als de te definiëren integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ kunnen introduceren. Bij dezelfde partitie P geldt dan onmiddellijk dat $\underline{S} \leq \bar{S}$.

1.4 Integralen van uniforme continue functies

Wat hebben we nu nodig om het bewijs van Stelling 1.18 over te schrijven? Twee dingen goed begrijpen nu. Ten eerste, de verzamelingen van

[27] Afkorting: zbda.

[28] Het bereik B_f van $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, door sommigen ook het codomein van f genoemd.

ondersommen A en bovensommen B moeten weer voldoen aan $A \leq B$. Ten tweede, we moeten de uniciteit van het getal J tussen A en B aantonen, en daartoe nemen we voor m_k en M_k natuurlijk de grootst respectievelijk kleinst mogelijk waarde, teneinde het verschil

$$\bar{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^{N} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

zo klein mogelijk[29] te krijgen.

Kies dus

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \quad \text{en} \quad m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f.$$

Hierin staat sup voor *supremum* van de verzameling in kwestie. Iedere nietlege verzameling $A \subset \mathbb{R}$ die begrensd is naar boven, middels een *bovengrens* $M \geq a$ voor alle $a \in A$, heeft een kleinste bovengrens die het supremum van A genoemd wordt. Dit is één van de vanzelfsprekende eigenschappen die $\mathbb{R}$ moet[30] hebben. Evenzo staat inf voor *infimum* of grootste ondergrens.

Opgave 1.19. Laat zien dat bij het *verfijnen* van de partitie, i.e. extra punten toevoegen in (1.4), ondersommen niet kleiner en bovensommen niet groter kunnen worden.

Als nu voor alle $k = 1, \ldots, N$ geldt dat

$$M_k - m_k \leq \varepsilon \tag{1.9}$$

(voor een $\varepsilon > 0$), dan volgt dat

$$\bar{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^{N} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \varepsilon(b - a). \tag{1.10}$$

Wat we dus nodig hebben voor uniciteit van J is dat elke $\varepsilon > 0$ realiseerbaar is in (1.9), middels een geschikte keuze van (1.4). In dat geval geldt voor iedere andere $\tilde{J}$ tussen A en B dat

$$|\tilde{J} - J| \leq \bar{S} - \underline{S} \leq \varepsilon(b - a),$$

[29] Hopelijk willekeurig klein.

[30] Anders $\mathbb{R}$ terugsturen naar de verzamelingsgeleerden!

en omdat $\varepsilon > 0$ dan zo klein gekozen mag worden als we maar willen volgt[31] $\tilde{J} = J$.

De definitie van (meteen maar) *uniforme continuïteit* brengt nu uitkomst. Dit is de eerste keer dat we een uitspraak formuleren waarin *voor alle* $\varepsilon > 0$ iets moet gelden dat met die ε te maken heeft, en zo'n uitspraak meteen gebruiken om een fundamentele stelling te bewijzen. Merk op dat je zo'n uitspraak alleen maar *echt gebruikt* als je meerdere (de facto oneindig veel) keren een ε kiest[32].

Definitie 1.20. *Als $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dan heet f uniform continu als er voor alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in [a, b]$ geldt dat*

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Stelling 1.21. *Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een uniform continue functie zijn. Dan bestaat er precies één getal J dat tussen de verzameling van alle ondersommen en de verzameling van alle bovensommen ligt, waarbij we onder de onder- en bovensommen de sommen in (1.8) verstaan. Dit getal J is per definitie de integraal van $f(x)$ van $x = a$ tot $x = b$, notatie*

$$J = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Bewijs. Wederom is vrijwel al het werk al gedaan. De ondersommen vormen een niet-lege verzameling A en de bovensommen een niet-lege verzameling B. Met $\delta > 0$ bij $\varepsilon > 0$ zoals in Definitie 1.21 volgt[33] (1.9) als de partitie P in (1.4) zo gekozen wordt dat $x_k - x_{k-1} \leq \delta$ voor alle $k = 1, \ldots, N$.

Als we nu ook nog laten zien dat $A \leq B$ zijn we klaar. Neem daartoe P als in (1.4) en Q net als in Opgave 1.15, en vorm de *gemeenschappelijke* verfijning

$$a = z_0 \leq z_1 \leq \cdots \leq z_K = b, \tag{1.11}$$

door $x_1 \leq \cdots \leq x_{N-1}$ en $y_1 \leq \cdots \leq y_{M-1}$ op één gemeenschappelijke volgorde te zetten. Dus $K - 1 = M - 1 + N - 1$ en iedere z_i is een x_k of een y_l, waarmee met

$$m_l = \inf_{[y_{l-1}, y_l]} f, \quad \tilde{m}_i = \inf_{[z_{i-1}, z_i]} f \leq \sup_{[z_{i-1}, z_i]} f = \tilde{M}_i, \quad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

[31] Ook dit gebruikt weer dat $\mathbb{N}$ niet begrensd is in $\mathbb{R}$ via het kiezen van $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

[32] Houd het met $\varepsilon = \frac{1}{n}$ bij voorkeur simpel, en je slaagt met vlag en wimpel.

[33] Ga dit na, al volgt aanstonds dat m_k en M_k aangenomen worden in $[x_{k-1}, x_k]$.

volgt dat

$$\sum_{l=1}^{M} m_l(y_l - y_{l-1}) \leq \sum_{i=1}^{K} \tilde{m}_l(z_i - z_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{K} \tilde{M}_l(z_i - z_{i-1}) \leq \sum_{k=1}^{N} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Waarom? Omdat de eerste ongelijkheid de ondersommen betreft van een partitie en een verfijning[34] daarvan, en de derde ongelijkheid de bovensommen van een andere partitie naar dezelfde verfijning. De tweede ongelijkheid spreekt vanzelf en Stelling 1.21 is nu voor eens en altijd met onder- en bovensommen bewezen.

1.5 Toch maar wat meer over continuïteit en limieten

Uniform continue functies $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zijn dus integreerbaar met dezelfde aanpak als monotone functies. Maar hoe weet je of een functie uniform continu is? Wel, bijvoorbeeld als je een schatting van de vorm

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \tag{1.12}$$

hebt voor alle $x, y \in [a, b]$ met een vaste $\alpha > 0$ en een vaste $C > 0$. In het geval dat $\alpha \in (0, 1)$ spreekt men van uniform *Hölder continu* met exponent α, en als $\alpha = 1$ van uniform *Lipschitz continu*. Het geval $\alpha > 1$ is niet heel relevant[35].

Uniforme continuïteit betreft functies op hun hele domein, hierboven steeds $[a, b]$. *Gewone continuïteit* betreft het gedrag van een functie in de buurt van een gegeven punt.

Definitie 1.22. *Als we in Definitie 1.20 de y vast nemen en gegeven iedere $\varepsilon > 0$, altijd een $\delta > 0$ kunnen vinden waarvoor de implicatie geldt voor alle x met $x \in [a, b]$, dan heet f continu in y. We zeggen dan ook dat*

$$f(y) = \lim_{x \to y} f(x),$$

of ook wel

$$f(x) \to f(y)$$

als $x \to y$ (steeds met $x \in [a, b]$). Als deze uitspraak geldt met uitsluiting van $x = y$, en de functiewaarde $f(y)$ vervangen door een $L \in \mathbb{R}$, dan zeggen we dat L de limiet is van $f(x)$ voor $x \to y$.

[34] Zie Opgave 1.19.
[35] Waarom niet? Leuke opgave: bewijs dat zulke functies constant zijn.

In Definitie 1.22 kan $[a, b]$ vervangen worden door een willekeurige $I \subset \mathbb{R}$ en in de uitspraak $f(x) \to L$ hoeft y dan niet per se in I te liggen.

De voor de hand liggende vraag is natuurlijk of een $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die continu is in elke $y \in [a, b]$ ook uniform continu is op heel $[a, b]$. Daartoe herformuleren we nu eerst de definitie van $f(x) \to L$ als $x \to y$ in termen van *convergente rijen*.

Definitie 1.23. *Een door $n \in \mathbb{N}$ genummerde*[36] *rij reële getallen x_n heet convergent als er een (limiet) $\bar{x} \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat er voor alle $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor de implicatie*

$$n \geq N \implies |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon$$

geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$. Zonder woorden luidt deze uitspraak

$$\exists \bar{x} \in \mathbb{R} \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} \, : \, n \geq N \implies |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon.$$

We zeggen dat $x_n \to \bar{x}$ (als $n \to \infty$).

Opgave 1.24. Laat zien dat een convergente rij reële getallen x_n maar één limiet heeft. Hint: stel niet dan zijn er minstens twee limieten, zeg $\bar{x}$ en $\hat{x}$; gebruik

$$|\bar{x} - \hat{x}| = |\bar{x} - x_n + x_n - \hat{x}| \leq |\bar{x} - x_n| + |x_n - \hat{x}|$$

en kies één geschikte ε om een tegenspraak af te leiden met Definitie 1.23.

Opgave 1.25. Laat zien dat iedere convergente rij reële getallen x_n begrensd is, i.e. er is een $M \geq 0$ waarvoor geldt dat $|x_n| \leq M$ voor alle n in $\mathbb{N}$. Hint: pas Definitie 1.23 toe met één $\varepsilon > 0$ naar vrije keuze en kies M zo dat $M \geq |x_n|$ voor alle n kleiner dan de bijbehorende N en $M \geq |x_N| + \varepsilon$. Geef een voorbeeld van een begrensde rij die niet convergent en maak die rij convergent door voldoende veel termen van de rij weg[37] te laten.

Opgave 1.26. Laat $f : I \to \mathbb{R}$ en $y, L \in \mathbb{R}$. De uitspraak $f(x) \to L$ als $x \to y$ is equivalent met de uitspraak dat voor elke rij x_n in I de implicatie

$$x_n \to y \implies f(x_n) \to L$$

geldt. Bewijs dit. Hint: rijgen van definities, noem de ε in de uitspraak dat $x_n \to y$ daartoe maar δ.

[36] Of door $n \in k + \mathbb{N} = \{k + j : j \in \mathbb{N}\}$, met $k \in \mathbb{Z}$.

[37] Grapje: denk aan ongewenste data.

NB. Het kan gebeuren in Opgave 1.26 dat $y \notin I$ en dat er geen rijen x_n in I zijn met $x_n \to y$. In dat geval zijn beide uitspraken zinloos[38] voor elke $L \in \mathbb{R}$. Zo'n punt $y \notin I$ moeten we dan maar *geen limietpunt* van I noemen.

Opgave 1.27. De enige manier waarop $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ niet uniform continu kan zijn is als er een $\varepsilon > 0$ bestaat waarvoor geen bijbehorende $\delta > 0$ te vinden is waarmee de uitspraak in Definitie 1.20 geldt. Kies nu een willekeurige rij $0 < \delta_n \to 0$. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ zijn er dan $x_n, y_n \in [a,b]$ met wel $|x_n - y_n| \leq \delta_n$ maar niet $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$. Neem nu aan[39] dat $y_n \to \eta \in [a,b]$ en leid een tegenspraak af met de continuïteit van f in η. Hint: laat zien dat ook $x_n \to \eta$; wat geldt er dus voor $f(x_n)$ en $f(y_n)$?

Stelling 1.28. *Laat $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu zijn in elk punt van $[a,b]$. Dan is $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uniform continu.*

Bewijs. Stel dat $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ niet uniform continu is. Redeneer dan als in Opgave 1.27: als de rij y_n niet convergent is dan kan de rij convergent gemaakt worden door voldoende elementen van de rij weg te laten (met andere woorden, neem een deelrij) zodanig dat de rij convergent wordt (en de andere rij dus ook). Gebruik hiertoe de STELLING die zegt dat *iedere begrensde rij in* $\mathbb{R}$ een convergente deelrij heeft. Noem de limiet van de deelrij η, laat zien dat $\eta \in [a,b]$ en het werk is gedaan.

De in het bewijs gebruikte STELLING is belangrijk genoeg om een eigen hoofdstuk te krijgen. Het is de eerste stelling die we formuleren over het bestaan van een limiet van een (in dit geval deel-)rij zonder die limiet al op de een of andere manier bepaald te hebben. Een poging om het convergent zijn van een rij x_n te formuleren *zonder* de limiet in de definitie te gebruiken gaat terug tot Cauchy en correspondeert met we wat tegenwoordig een Cauchyrij noemen. Vergelijk de volgende definitie daarom nauwkeurig met de eerste zin in Definitie 1.23.

Definitie 1.29. *Een door $n \in \mathbb{N}$ genummerde rij reële getallen x_n heet een Cauchyrij als er voor alle $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor de implicatie*

$$m, n \geq N \implies |x_n - x_m| \leq \varepsilon$$

geldt voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

In Definitie 1.29 is $m, n \geq N$ te lezen als $m \geq N$ en ook $n \geq N$. Evenzo is $m, n \in \mathbb{N}$ te lezen als $m \in \mathbb{N}$ en ook $n \in \mathbb{N}$. In het volgende hoofdstuk volgt het convergent zijn van Cauchyrijen via de STELLING uit het begrensd zijn van Cauchyrijen.

[38] Maar wel waar.

[39] Absurde aanname?

Opgave 1.30. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uniform continu zijn. Bewijs met de STELLING dat f begrensd is op $[a, b]$.

Opgave 1.31. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu zijn in elk punt van $[a, b]$. Bewijs dat f een maximum M en een minimum m op $[a, b]$ heeft. Hint: omdat f uniform continu is op $[a, b]$, is f begrensd op $[a, b]$. Laat $M = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$. Dan bestaat er een rij x_n in $[a, b]$ met $f(x_n) \to M$. Neem daarvan een convergente deelrij.

1.6 Riemann integreerbaarheid

We weten tot nu toe alleen dat voor monotone en voor continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ met behulp van onder- en bovensommen een ondubbelzinnige betekenis kan worden gegeven aan de *integreerbaarheid* van f en de waarde van de integraal

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Voor iedere begrensde functie kunnen we echter bij een partitie (1.4)

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad \text{en} \quad m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

definiëren en de bijbehorende onder- en bovensom. Net als in het bewijs van Stelling 1.21 volgt nu dat de verzameling van alle ondersommen A en de verzameling van alle bovensommen B voldoen aan $A \leq B$. Op grond van Opgave 1.17 is er dus tenminste één getal J dat tussen A en B ligt.

Definitie 1.32. *Een begrensde functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heet Riemann integreerbaar als er precies één getal J tussen de verzameling A van alle ondersommen en de verzameling B van alle bovensommen ligt. In dat geval is per definitie*

$$J = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Een functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kan alleen maar Riemann integreerbaar zijn als f begrensd is. Maar welke begrensde functies integreerbaar zijn is een vraag die we nog niet gesteld hebben. Zonder bewijs: het antwoord is dat daartoe de verzameling $\mathcal{N}$ van x-waarden waarin f niet continu is een zogenaamde nulverzameling moet zijn. Dat is een verzameling die voor elke $\varepsilon > 0$ overdekt kan worden met intervallen $[a_n, b_n]$ genummerd door $n \in \mathbb{N}$, waarbij voor elke $N \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\sum_{n=1}^{N}(b_n - a_n) \leq \varepsilon.$$

Overdekken betekent hier dat

$$\mathcal{N} \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n],$$

en de overdekking hangt af van ε. Intuïtief: met een willekeurig klein intervalletje opgegeknipt in aftelbaar veel stukjes is $\mathcal{N}$ te bedekken.

1.7 Sommen en limieten van integralen

We zijn begonnen met integralen van de functies $x \to x^n$ en hebben daarna laten zien dat monotone functies $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integreerbaar zijn in de zin van Definitie 1.32. Het is niet moeilijk om rechtstreeks vanuit de definitie te laten zien dat met $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ook de somfunctie $f + g : [a, b] \to \mathbb{R}$ weer integreerbaar is met de integraal die je verwacht: de functie $x \to f(x) + g(x)$ is integreerbaar met

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

Ook veelvouden van integreerbare functies zijn weer integreerbaar. Ook het rijgen van integralen, i.e.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

voor $c \in (a, b)$ volgt eenvoudig: als de integraal links bestaat dan bestaan de integralen recht en omgekeerd, met de gelijkheid in de formule. Met Opgave 1.9 volgt zo eenvoudig de hoofdstelling van de integraalrekening voor polynomen: de functie

$$x \to p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

is integreerbaar op ieder begrensd interval $[a, b]$ met

$$\int_a^b p(x)\, dx = P(b) - P(a),$$

waarbij

$$P(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_N}{N+1}x^{N+1} = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

Neem nu even aan dat $0 \leq a \leq b$ en dat $a_n \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gegeven zijn. Wat kunnen we zeggen over $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \tag{1.13}$$

als we aannemen dat deze formule in ieder geval $f(b)$ als limiet van een stijgende rij getallen definieert? De volgende opgave is voldoende om te concluderen dat

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

met

$$F(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Het bewijs borduurt voort op de bewijzen in Sectie 1.2.

Opgave 1.33. Gegeven functies $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ met

$$\forall x \in [a,b] \quad 0 \leq n_1 \leq n_2 \implies f_{n_1}(x) \leq f_{n_2}(x),$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad a \leq x_1 \leq x_2 \leq b \implies f_n(x_1) \leq f_n(x_2),$$

en $f_n(b)$ begrensd, bestaat

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

voor alle x. Er geldt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Bewijs dit rechtstreeks vanuit de definitie met onder- en bovensommen. Hint: gebruik de aanpak in Sectie 1.2, het is voldoende om equidistante partities te gebruiken.

Er zijn nog drie versies van deze stelling. Welke drie?

De conclusie nu is dat we machtreeksen als in (1.13), ook zonder de beperkingen op de tekens van a_n, a, b, kunnen integreren als de somfunctie gedefinieerd[40] is, precies zoals we dat met polynomen doen, zonder dat we over

[40] Als verschil van twee limieten van niet-negatieve rijen functies.

integraalrekening voor continue functies hoeven te spreken. Het enige limietbegrip dat we nodig hebben beperkt zich tot monotone begrensde rijen en sommen en verschillen van die rijen. De volgende open opgave vat dit samen.

Opgave 1.34. Voor $0 \leq a \leq b$ kan de aanname dat $a_n \geq 0$ worden weggelaten door de som in (1.13) te splitsen in positieve termen en negatieve termen. Wat moet je aannemen om tot dezelfde conclusies te komen? Hoe kom je vervolgens van de aanname dat $0 \leq a \leq b$ af?

1.8 Discussie

Een vraag om te stellen is wat van het bovenstaande al (vroeg) op school zou kunnen worden behandeld. Ik beperk me voor deze vraag tot Sectie 1.1. Elke formule waarin behalve getallen ook nog een letter in voorkomt, vraagt een abstractieniveau dat aanvankelijk nog afwezig is. De eerste letter die in Opgave 1.1 en daarna voorkomt is N. Die kun je natuurlijk eerst 10, 100, 1000 en groter nemen, en via Opgave 1.4 leidt dat tot de oppervlakte die we later de integraal van x over $[0, 1]$ noemen, en die we al kenden als de oppervlakte van de driehoek A_1.

Opgave 1.6 is geformuleerd met een algemene N en is gebaseerd op de differenties in Opgave 1.5, waarin natuurlijk de driehoek van Pascal te herkennen is. Zodra die driehoek herkend of ontdekt is in het uitwerken van $(n+1)^2$, $(n+1)^3 = (n+1)(n+1)^2$, $(n+1)^4 = (n+1)(n+1)^3$, enzovoorts, liefst met de recurrente betrekkingen die daar bij horen om steeds de volgende rij te maken, is een aanpak als in Opgave 1.6 te overwegen.

Met differenties $n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1, n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1, \ldots,$ worden de uitdrukkingen in Opgave 1.6 dan net wat prettiger, met links steeds een macht van N in plaats van een macht van $N+1$, en rechts dezelfde uitdrukkingen maar met plussen en minnen. De formules voor de machten van N volgen dan stap voor stap in termen van de sommen van de lagere machten van n, ook als voor N een macht van 10 gekozen wordt. Opgave 1.7 wordt vervolgens uitvoerbaar. Een alternatief is om tabellen[41] van de machten te maken en alles met getallen zonder letters uit te schrijven, minder abstractie, maar meer gereken (en wellicht daarom juist nuttig). Als voor de oppervlakte die we later de integraal van x^2 over $[0, 1]$ noemen benaderingen verschijnen waarin we $\frac{1}{3}$ herkennen is de eerste stap gemaakt. Piramides kunnen hier natuurlijk bij helpen. Daarna is het eigenlijk voor elke macht hetzelfde, en dat kun je verder wel geloven dan op weg naar Opgave 1.9.

[41] Die vinden we ook al terug op kleitabletten.