“Fundamentals of analysis”

Not another ε-book

I’m translating and adapting earlier versions of het Basisboek Analyse

JH&FF, Oegstgeest, Amsterdam (2018)

The Netherlands

Fotografie omslag: nog onbekend
Vormgeving omslag: nog onbekend

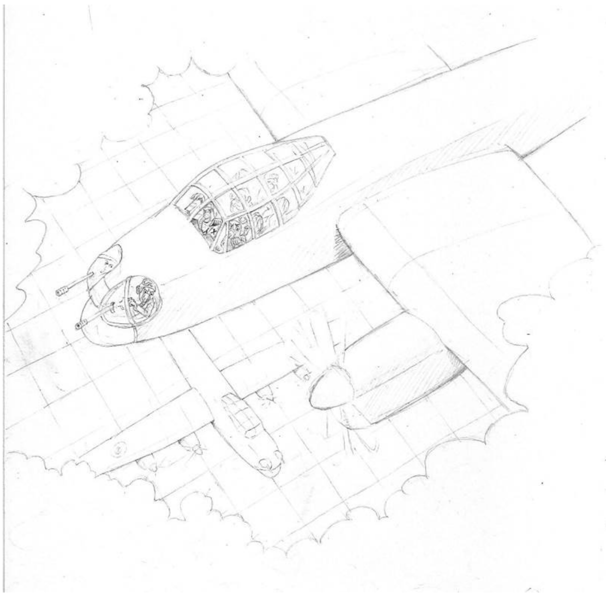
ISBN
NUR

De auteursinkomsten[1] uit dit boek komen ten goede aan de “geluksmachine”:

`http://orchestra18c.com`

[1] Als het ervan komt...

Inhoudsopgave



'I like fonctions of one variable'

Xavier Cabré adressing Abel prize winner Louis Nirenberg and a small analysis group at Tor Vergata in June 2015.

1 Archimedes, algebra and all that really

Some 23 centuries ago Archimedes knew that

$$1+4+9+16+25+36+49+64+81+100 = \frac{1000}{3} + \frac{100}{2} + \frac{10}{6}.$$

On the left you see a calculation with positive integers and on the right a sum of positive fractions. You should think of such fractions as representing rational numbers. Dividing positive integers we encounter these noninteger positive numbers that we often think of as ratio's. The second and third fraction in the sum may be simplified by taking out the common factor 2 in numerator and denominator.

The positive integers are the numbers 1, 2, 3, 4, etc, aka the natural numbers, which together make up what mathematicians call the set $\mathbb{N}$ of all natural numbers. We say that 1 belongs to $\mathbb{N}$, notation $1 \in \mathbb{N}$, and with $1 \in \mathbb{N}$ also $2 = 1+1 \in \mathbb{N}$, $3 = 2+1 \in \mathbb{N}$, $4 = 3+1 \in \mathbb{N}$, and so on. This is not a course about the undeniable joys of set theory, so we simply write

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

A modern notation for the curious sum above is

$$(C_{10}) \qquad \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10^3}{3} + \frac{10^2}{2} + \frac{10}{6},$$

in which k is an index that runs from 1 to 10. It's a dummy index, you can replace it by any other letter in any alphabet you like. I've labelled this sum by (C_{10}), the C is for curious, and the 10 is obvious.

As the young Gauss knew, the *sum* of the first 10 natural numbers is

$$\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10^2}{2} + \frac{10}{2} = \frac{1}{2} \times 11 \times 10.$$

Archimedes was (perhaps not) the first, replacing 10 by any other natural number, to consider such sums for arbitrarily large n. Moreover, Archimedes knew that[1]

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

lovely sums from which a pattern emerges.

[1] I'm using search and replace to substitute $10 = n$ in our modern notation.

The one in the middle is

$$(C_n) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

You may prove (C_n) for every natural number by first guessing it and then showing that, starting with $n = 1$ and (C_1) being a statement that is trivially true, it holds that

$$(C_n) \implies (C_{n+1}).$$

The latter implication is easy in view of

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6},$$

and so this proves a theorem: for every natural number (C_n) holds, as a rearrangement of larger and larger sums of squared natural numbers into simple 3-term sums of "supernatural" numbers.

Note that k is still the dummy, but n is a variable natural number that you can take as large as you want, because there is no real number bounding all the natural numbers. In particular the sums get larger with n, not as fast as $n!$ of course, but still.

1.1 Archimedes now

Dividing the sum of the first n squares by n-cubed, you get from (C_n) that

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2,$$

in which $2n = 2 \times n$, $6n^2 = 6 \times n^2$. Now you see that for n larger and larger, you get a sum that is closer and closer to

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 \, dx,$$

an integral that you must have seen before.

1.1.1 Area in the Cartesian plane

Draw yourself the nice Cartesian xy-plane that Archimedes never had. Make a big sketch by hand of the parabola consisting of all points with equal distances to the point $(0, \frac{1}{4})$ and to the line defined by $y = -\frac{1}{4}$. This parabola is in fact the curve defined by $y = x^2$. You may enjoy verifying that in particular $(1,1)$ fits its geometric description[2], before you go on.

Now evaluate $y = x^2$ with

$$0 = \frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, \frac{10}{10} = 1.$$

These particular x-values give you points in the unit square S, the square consisting of all points (x, y) with $0 \leq x \leq 1$ and $0 \leq y \leq 1$. Let us agree that the area of S is equal to 1. Look at the region A_2 in S bounded by $y = 0$, $x = 1$ and $y = x^2$. Can you convince yourself that consequently the area of A_2 is less than

$$\frac{1}{1000} + \frac{4}{1000} + \frac{9}{1000} + \frac{16}{1000} + \frac{25}{1000} + \frac{36}{1000} + \frac{49}{1000} + \frac{64}{1000} + \frac{81}{1000} + \frac{100}{1000},$$

but more than

$$\frac{1}{1000} + \frac{4}{1000} + \frac{9}{1000} + \frac{16}{1000} + \frac{25}{1000} + \frac{36}{1000} + \frac{49}{1000} + \frac{64}{1000} + \frac{81}{1000}?$$

To do so you have to relate every term in the sums above to the area of a rectangle[3] with 4 corner points, one of which is the point on the curve. There are two obvious ways to do so, providing you with the above (upper and lower) sums[4] for the area of A_2.

If this worked, you can also convince yourself, denoting the area of A_2 by $|A_2|$ from now on, that

$$|A_2| < \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} < \frac{1}{3} + \frac{1}{n}$$

for every natural number n. Likewise

$$|A_2| > \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} > \frac{1}{3} - \frac{1}{n}.$$

Combining it follows that

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{n} < |A_2| < \frac{1}{3} + \frac{1}{n},$$

whence

$$-\frac{1}{n} < |A_2| - \frac{1}{3} < \frac{1}{n}$$

[2] Since $3^2 + 4^2 = 5^2$.

[3] Parallel to the axes.

[4] Riemann sums in fact.

for every natural number n, and that will imply that

$$|A_2| - \frac{1}{3} = 0 \quad \text{whence} \quad |A_2| = \frac{1}{3},$$

won't it?

1.1.2 Really?

A number a with

$$-\frac{1}{n} < a < \frac{1}{n}$$

for every natural number simply can't be different from 0, can it? Otherwise

$$n < \frac{1}{|a|}$$

for all natural numbers n, but no real number can be an upperbound for all the positive numbers.

How's that? Nowadays mathematicians think of the set

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

as a subset of the set $\mathbb{R}^+$, whose elements are all the positive real numbers, whatever real may be. The set $\mathbb{R}^+$ in turn is a subset of the set $\mathbb{R}$ of all real numbers. This set can be introduced in many ways, but it most certainly contains $\mathbb{N}$ and all the numbers obtained from $\mathbb{N}$ via subtraction and division, such as $0 = 1 - 1$, $-1 = 1 - 2$, the number $\frac{1}{3}$ as 1 divided by 3, and so on.

These numbers derived from the natural numbers by algebra are called the rational numbers, and the set whose elements are all the rational numbers is denoted by $\mathbb{Q}$. This $\mathbb{Q}$ contains the set

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

whose elements are all the integers, positive, negative, and the zero number that separates them. You may think of $\mathbb{Z}$ as a bi-infinite sequence of marked points on a line with no endpoints, the other numbers of $\mathbb{Q}$ lying in the intervals between.

1.1.3 Counting it?

It is easy to enumerate $\mathbb{Q}$. Just take a path in your Cartesian xy-plane that starts in $(0, 1)$ and then passes through every point (x, y) with $y \in \mathbb{N}$ and

$0 \neq x \in \mathbb{Z}$. Along this path $\frac{x}{y}$ runs through the whole of $\mathbb{Q}$, with multiple hits of course[5]. Skipping the fractions $\frac{x}{y}$ with common factors in numerator and denominator, every element of $\mathbb{Q}$ occurs precisely once in an enumeration of fractions thus obtained. It is thereby clear that the set $\mathbb{N}$ is in a one-to-one correspondence with the set $\mathbb{Q}$.

You really should convince yourself that such a one-to-one correspondence between $\mathbb{N}$ and the set of all points on the number line via an enumeration

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

leads to paradoxes. For instance, such an enumeration would allow you to completely cover the number line with intervals[6]

$$(x_1 - \frac{1}{4}, x_1 + \frac{1}{4}),$$

$$(x_2 - \frac{1}{8}, x_1 + \frac{1}{8}),$$

$$(x_3 - \frac{1}{16}, x_3 + \frac{1}{16}),$$

$$(x_4 - \frac{1}{32}, x_4 + \frac{1}{32}),$$

$$(x_4 - \frac{1}{64}, x_4 + \frac{1}{64}),$$

$$(x_4 - \frac{1}{128}, x_4 + \frac{1}{3128}),$$

$$(x_4 - \frac{1}{256}, x_4 + \frac{1}{256}),$$

$$(x_4 - \frac{1}{512}, x_4 + \frac{1}{512}),$$

et cetera, the total length of these intervals being

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \cdots \leq 1,$$

an absurdity that we are not quite willing to accept.

[5] In view of $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \cdots$ for instance.
[6] For numbers $a < b$ we denote by (a, b) the set of all numbers x with $a < x < b$.

1.1.4 The square root of two?

In $\mathbb{Q}$ we have the usual operations $+, -\times, /$ with the usual rules. You should employ your knowledge of those natural numbers to prove that the magic number $\sqrt{2}$ cannot belong to $\mathbb{Q}$. That is to say, $\mathbb{Q}$ does not contain a positive number r with $r^2 = 2$. Every $q \in \mathbb{Q}$ either has $q^2 > 2$ or $q^2 < 2$. It is not so difficult to generate the increasing sequence of numbers

$$q_1 = 1 < q_2 = 1.4 < q_3 = 1.41 < q_4 = 1.414 < q_5 = 1.4142 < q_6 = 1.41421$$

$$< q_7 = 1.414213 < q_8 = 1.4142135 < q_9 = 1.41421356 < \cdots < 2.$$

Clearly 2 is an upper bound because of the 1 in front of every decimal point of every single number in this sequence.

Every new digit in every next number in this sequence is chosen as large as possible to have the square below 2. Of course the resulting sequence of digits can only be generated by a machine that runs a suitable programme till the very end of time. Still, we can agree to say that the number r is defined by putting all those digits in an never-ending expansion

$$r = 1.41421356\ldots,$$

even if it is impossible to write all these digits down.

Clearly the number r is then larger than all *finitely represented* expansions in the increasing sequence $q_1 < q_2 < q_3 < \ldots$. Thus r is an upper bound below the crude upper bound 2. You should try to convince yourself that there is actually no lower upper bound than r, making r the lowest upper bound for the sequence.

1.1.5 Elementary school representations of real numbers

A proper definition of the multiplication of such numbers represented by never-ending decimal expansions then must yield that

$$r^2 = 2.$$

Here a possible convention is that 2 is represented as

$$2 = 1.9999999\cdots = 1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots$$

This would exclude expansions which only have finitely many nonzero digits. In particular $1 \in \mathbb{N}$ should then be considered as represented in $\mathbb{R}$ by

$$1 = 0.9999999\ldots$$

All real numbers are then represented by never-ending sequences[7] of digits, with a decimal point that separates the integer part of the number from its remainder[8].

All this can be done, but is somewhat cumbersome in base 10. Binary representations with base 2 = 10 do a much beter job here. With

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

represented by the bits $1, 1, 1, 1, 1, 1 \ldots$, and a zero before the binary point in

$$1 = 0.11111111\ldots,$$

you may enjoy the details of the resulting construction of the real numbers and their arithmetic[9].

1.1.6 Bounded increasing sequences: Archimedes returns.

Anyhow, you can now consider bounded sequences

$$r_1 < r_2 < r_3 < \cdots$$

of such numbers, the sequence q_n in Section 1.1.4 being a nice example.

With the proper definition of $<$ it is not hard to then construct the lowest possible upper bound of such a sequence as such a number. The existence of such lowest upper bounds is a crucial property of the set $\mathbb{R}$. Either via the construction above, or by any other construction: the real numbers[10] really have the property that every strictly increasing bounded sequence has a lowest upper bound.

It is this property of the real numbers really then that proves to mathematicians that $\mathbb{N}$ is not bounded by any real number. That would imply the existence of a smallest $S \in \mathbb{R}$ with $n \leq S$ for all $n \in \mathbb{N}$. But then $S - \frac{1}{2}$ is not an upper bound whence $n \in \mathbb{N}$ exists with $n > S - \frac{1}{2}$. Thus the number $n+1 \in \mathbb{N}$ satisfies $n+1 > S + \frac{1}{2} > S$ contradicting S being an upper bound for $\mathbb{N}$.

1.1.7 Sums with infinitely many nonnegative terms

Section 1.1.5 contained examples of the form

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots ,$$

[7] Why can such representations not be enumerated? Section 5.6.

[8] If you like after division by 1.

[9] https://www.youtube.com/watch?v=x9DejWMJoOA

[10] You may wish to reflect on how to state that there is only one set of real numbers.

with a_n a sequence of positive rational numbers numbered by $n \in \mathbb{N}$. The concepts in Section 1.1.6 now allow to give a well defined meaning to such sums for any sequence of nonnegative real numbers. We simply introduce the partial sums

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

These sums form a sequence

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots$$

that may be bounded or not. If it is, we take its lowest upper bound S and say that[11]

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n.$$

It is then easy to see that for instance

$$a_{27}+a_{271}+a_{2718}+a_{27182}+a_{271828}+a_{2718281}+a_{27182818}+a_{271828182}+a_{2718281828} \leq S,$$

an estimate that holds for all such finite sums. Thus, if we renumber $\mathbb{N}$ by a sequence

$$n_1, n_2, n_3, \ldots$$

in which every number in $\mathbb{N}$ occurs precisely once, S is also an upper bound for the partial sums

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} a_{n_k}.$$

Moreover

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sup_{m \in \mathbb{N}} S_m \leq S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

But this arguments works both ways. Thus it follows that

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S,$$

and we may write[12]

$$S = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

[11] This is the first time we use the symbol ∞.

[12] No longer using the symbol ∞.

to indicate that the order of summation is irrelevant.

Do observe that every decimal expansion as in Section 1.1.5 is an example of such a sum. Just like we can add such decimal expansions, we can add such sums. You should want to convince yourself that

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n+\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n$$

if both a_n en b_n are sequences of nonnegative real numbers with bounded partial sums.

1.1.8 Sums with infinitely many terms of arbitrary sign

What about

$$a_1+a_2+a_3+\cdots$$

if a_n is a sequence of real numbers, including both positive and negative real numbers? If we assume that the partial sums

$$|a_1|+\cdots+|a_n|=\sum_{k=1}^{n}|a_k|$$

are bounded[13] then

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$$

is well defined and so are

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n^+ \quad \text{and} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}}a_n^-,$$

if we define

$$a_n^+=\max(a_n,0) \quad \text{and} \quad a_n^-=-\min(a_n,0)$$

because $0\le a_n^+\le|a_n|$ and $0\le a_n^-\le|a_n|$. We then simplify define

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n^+-\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n^-,$$

what else could and should it be? Again you should want to convince yourself that

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n+\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n$$

if both $|a_n|$ and $|b_n|$ have bounded partial sums[14].

---

[13] Sometimes denoted as

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\le\infty.$$

[14] The question being: how much of Chapter 5 is really needed to do so?

1.1.9 Integrals now!

Of course you've already been told that $|A_2| = \frac{1}{3}$, via

$$|A_2| = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

but that's based on differential calculus, which did not exist in the days of Archimedes. Summing up, based on the properties of the real numbers, including the Archimedian property that below every positive number there exits a $\frac{1}{n}$ with $n \in \mathbb{N}$, we have shown that

$$\int_{x\in[0,1]} x^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

The integral is defined and computed via lower and upper sums as above, with n arbitrarily large.

As for notation, using the values of x^2 for

$$x \in [0,1]_n = \left\{\frac{k}{n} : k = 1,2,\ldots,n\right\} \quad \text{and setting} \quad \Delta_n x = \frac{1}{n},$$

the upper sums rewrite as

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \sum_{x\in[0,1]_n} x^2\,\Delta_n x.$$

This is not so different from the notation for the integral. It's really just

$$\int_{x\in[0,1]} x^2\,dx \quad \text{versus} \quad \sum_{x\in[0,1]_n} x^2\,\Delta_n x.$$

The latter is a finite sum, the former has all subscripts n dropped, Σ replaced by the curly $\int$, and $\Delta_n x$ by dx.

An almost immediate consequence now is that

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3},$$

by similar definition and computation: all the sketches you may have drawn can be copied with b replacing 1 on the x-axis and b^2 replacing 1 on the y-axis. Just multiply every term in the lower and upper sums by b^3.

The pattern you saw emerging replacing the exponent 2 by $3, 4, 5, \ldots$, can and should be proved outside the domain of analysis. It thus follows that

$$\int_0^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

for all $b \in \mathbb{R}^+$ and $n \in \mathbb{N}$. Likewise for any $0 \le a < b$, a similar definition leads[15] to

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Such identities and the inequalities that prove them combine. Zum Beispiel, with

$$p_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{and} \quad P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

it holds that

$$\int_0^1 p_n(x)\,dx = P_n(1) - P_n(0),$$

i.e.

$$\int_0^1 \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right)\,dx = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}.$$

It really all adds up, also if we first multiply by positive scalars. With

$$E_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \times 3} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

for instance we have[16]

$$\int_0^1 E_n(x)\,dx = E_{n+1}(1) - E_{n+1}(0),$$

i.e.

$$\int_0^1 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \times 3} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\,dx = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}.$$

The question about what will hold for

$$p(x) = 1+x+x^2+\cdots, \quad P_n(x) = x+\frac{x^2}{2}+\cdots, \quad E(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

[15] Subtraction may also convince you.

[16] Pay attention to the constant 1 in $E_{n+1}(1)$ and $E_{n+1}(0)$.

is immediate. Does

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

define a positive number for instance?

Never-ending summings and integrals, we can define and compute them guided by what Archimedes knew long before differential calculus was invented. This gives a complete theory for expressions of the form

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots\ ,$$

in which x is a positive real variable and a_0, a_1, a_2, a_2 real nonnegative coefficients[17]. Of course we also consider negative x and negative $a_0, a_1, a_2, a_2, \ldots,$ not much of a worry, but calling for some care.

All this can be done before even worrying about the definition of functions and maps. For the moment the notation $f(x)$ we just introduced may be understood as a formula containing x in which we can put any x we like. We can think of f as a map

$$x \to f(x)$$

that takes x to $f(x)$. Just as the map

$$f \to \int_a^b f(x)dx$$

takes such an f to its integral from a to b for formula's $f(x)$ of this form.

1.2 Back to Babylonian times: YBC7289

So what about differential calculus? You may have heard of Newton's method for the calculation of algebraic numbers like $\sqrt{2}$ which is more efficient then the generation of digits by trial and error. The first recorded attempt to find a positive r with $r^2=2$ that I know of can be found on YBC7289. Dating back to some 40 centuries ago, it used calculations carried out in base 60.

These calculations are now believed to employ the approximation

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}$$

for x close to 0. The right hand side is an expression which you may relate to the line defined by $y=1+\frac{x}{2}$ in your Cartesian plane, while $y=\sqrt{1+x}$ defines half of the parabola given by $1+x=y^2$. You should relate this to

[17] See Section 3.3.

your knowledge of tangent lines and the differential calculus: $\frac{1}{2}$ is the value of $F'(0)$ if

$$F(x) = \sqrt{1+x}.$$

Replacing x by $y-1$ the approximation is equivalent to

$$g(y) = \sqrt{y} \approx 1 + \frac{1}{2}(y-1),$$

which relates to $g'(1) = \frac{1}{2}$.

Apparently this idea of linear approximations was used in the Babylonian calculations to find $\sqrt{2}$. In our modern language these would look like

$$\sqrt{2} = \sqrt{r^2 + 2 - r^2} = r\sqrt{1 + \frac{2-r^2}{r^2}} \approx r\left(1 + \frac{2-r^2}{2r^2}\right) = \frac{r}{2} + \frac{1}{r},$$

in which the above approximation of $F(x) = \sqrt{1+x}$ is used as an intermediate step. With

$$x = \frac{2-r^2}{r^2}$$

to be precise. In terms of g the approximation is strikingly equivalent to

$$\sqrt{2} = g(2) \approx g(r^2) + \frac{1}{2r}(2-r^2),$$

in which the coefficient $\frac{1}{2r}$ is the value of the derivative $g'(y)$ in $y = r^2$. Thus the line tangent in $y = r^2$ to the graph $x = g(y)$ is used to approximate $\sqrt{2}$.

In terms of $f(x) = x^2$ this is equivalent to intersecting the line defined by

$$y = r^2 + 2r(x-r)$$

with the line defined by $y = 2$: solve for x to find a new and better approximation for $\sqrt{2}$, starting from a previous $x = r$. This is Newton's method. Starting with $r = 1$ the approximation $\frac{3}{2}$ voor $\sqrt{2}$ is obtained (which is not that bad really). Redoing the approximation with $r = \frac{3}{2}$ then gives $\frac{17}{12}$, much better, and $r = \frac{17}{12}$ in turn gives

$$\frac{17}{24} + \frac{12}{17} = \frac{289+288}{24 \times 17} = \frac{577}{408} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} + \cdots .$$

This is the Babylonian approximation on YBC7289, in which the 10 will return if you continue the expansion in base 60.

Iterating the input-output relation[18]

$$r \to \frac{r}{2} + \frac{1}{r},$$

[18] You don't actually need the considerations above to come up with this method...

as was also done by Heron in Alexandria some 22 centuries later, one obtains

$$\frac{3}{2} > \frac{17}{12} > \frac{577}{408} > \frac{665857}{470832} > \frac{886731088897}{627013566048} > \cdots > 1$$

and thus an enumerated set of decreasing numbers which is bounded from below by 1.

The largest such lower bound is of course $\sqrt{2}$, as you may want to know for sure. Again the existence of such a largest lower bound L is a property of the set $\mathbb{R}$, either by assumption, or by construction. A proof that $L^2 = 2$ is easily concocted. See e.g. my Dutch book with Ronald Meester on fingers and math.

The limits of difference quotients you have seen in highschool will be avoided in this material: everything you have seen in the calculus of derivatives is to be based on linear approximations. This is necessary to develop an underlying theory that will allow a smooth generalisation to multivariate calculus. All this starts from elementary examples like

$$x^2 = 1 + x^2 - 1 = 1 + (x+1)(x-1) = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2,$$

to obtain $y = 1 + 2(x-1) = 2x - 1$ as the formula for the line tangent in $(1,1)$ to the parabola given by $y = x^2$. Babylonian math if you like. And again, if you know how to deal with x^2 you know how to deal with

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots,$$

as a little algebra will help to clarify.

1.2.1 Differential calculus founded in algebra

The formula

$$(L_7) \qquad x^7 = \underbrace{a^7 + 7a^6(x-a)}_{\textit{linear approximation}} + (x^5 + 2ax^4 + 3a^2x^3 + 4a^3x^2 + 5a^4x + 6a^5)(x-a)^2$$

is a nice piece of easy but meaningful algebra that tells you a lot about hard analysis. You can find it using long division to first write the *difference quotient*

$$\frac{x^7 - a^7}{x - a}$$

as

$$\frac{x^7 - a^7}{x - a} = x^6 + ax^5 + a^2x^4 + a^3x^3 + a^4x^2 + a^5x + a^6 = 7a^6 + (\cdots)(x-a).$$

What's on the dots you then find from another long division[19]. It gives you the long term in the algebra formula which I labeled (L_7), L for linear approximation: the first two terms on the right hand side are a linear approximation of x^7 around $x = a$. Just like we saw in the context of YBC7289 above.

To fix ideas restrict the attention to the fixed a and variable x lying in the interval $[-1, 1]$. By definition this interval consists of all numbers between -1 and 1, including -1 and 1. The error for the linear approximation in (L_7) is then bounded by

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)(x - a)^2.$$

Writing

$$x^7 = a^7 + 7a^6(x - a) + R_7(x, a),$$

we have

$$|R_7(x, a)| \leq \frac{7 \times 6}{2}(x - a)^2$$

as young Gauss would write is. No other linear approximation comes with such a good estimate, so therefore

$$a^7 + 7a^6(x - a)$$

is the *only linear approximation* to be called THE linear approximation of x^7 around $x = a$. This then is the algebraic foundation of differential calculus, and again it all adds up in Section 4.4. There are no boring limits it would seem[20]: only sums with infinitely many terms, of which we know the essentials since elementary school.

1.2.2 The mystery of the tangent

So, if we believe the historians, the only thing about

$$f(x) = \sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

not going back to Babylonian times is the notation really. Neither does the concept of a tangent line I guess. We say that

$$y = 1 + \frac{x}{2}$$

[19] Which one?

[20] Indeed: Sectie 4.4, though under Opgave 4.1 the first ϵ and δ appear.

defines the line tangent tangent in $(x, y) = (0, 1)$ to the graph of tha map f. This should be the same as saying that

$$x = 2y - 2$$

defines the line tangent in $(y, x) = (1, 0)$ to the graph of g defined by

$$x = g(y) = y^2 - 1.$$

Are these statements about tangent lines symmetric in x and y? Section 8.7 adresses this question in the context of one-to-one order preserving correspondences

$$y = f(x) \quad \text{and} \quad x = g(y)$$

between x- and y-intervals, first in the case that $f(0) = 0$ and $x = y$ defines a line tangent to the graph of f in $(0, 0)$. Enter the epsilons again.

2 The limits of algebra

So what about continuity? Good question. It badly messes up analysis, that's for sure, as you inevatibly are about to find out: the sad fact is that most algebraic equations[21] simply don't have solutions we can find by algebraic methods. As a consequence the main theorem of algebra just cannot do without continuity. Read on.

2.1 Quadratics, cubics and quartics

You may be inclined to think of the quadratic equation

$$(I) \qquad 1 + x^2 = 0$$

as an example. But solutions of (I) are unreal, imagine a real number that squares to -1! Square roots of negative numbers don't exist in $\mathbb{R}$. Thus your general quadratic equation

$$x^2 + px + q = 0$$

with real coefficients p, q is not always solvable by completing the square via

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

You're really done if the above right hand side is negative.

Of course the solution formula

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

make good sense if

$$\frac{p^2}{4} > q.$$

Do not forget that

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

defines another solution then, making for two solutions[22].

The borderline case is the equation

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = 0,$$

which only has $x = -\frac{p}{2}$ as a solution, counted with multiplicity 2 as mathematicians rightly prefer to do.

[21] See also Section **??**.

[22] And no more, a little algebra theorem.

2.1.1 Cubics

The story is the same for not quite your general cubic equation

$$x^3 + px + q = 0,$$

which was solved in the days of Cardano by putting

$$x = u + v \quad \text{with} \quad 3uv + p = 0.$$

This leads to a quadratic equation for u^3 solvable by completing the square. The study of this method and the general solution of the cubic offers a true feast[23] in itself that we here sadly leave for some other party to crash. It does however unavoidably lead to the consideration of squares of square roots of negative numbers. Thus it really must be done: imagine a square root of -1.

2.1.2 Imagine?

Since no square root of -1 exists as a real number we imagine one square root of minus one, and call it i. The square of this imaginairy i then equals -1. So then does the square of $-i$ if we stick by the usual rules for $+, -, \times, /$. Combining with the real numbers whose collective[24] fundamental properties Archimedes already understood we now find many complex numbers.

Here they all are:

$$z = x + iy = x + yi$$

with x and y real. Every point in the Cartesian xy-plane defines a complex number. Numbers we can add, substract and multiply as we like, simplifying complicated expressions using the old rules combined with the new rule that $i^2 = -1$. This involves a cute little trick for division in which u^2+v^2 appears:

$$\frac{x+iy}{u+iv} = \frac{x+iy}{u+iv}\,\frac{u-iv}{u-iv} = \frac{ux+yv+i(uy-vx)}{u^2+v^2} = \frac{ux+yv}{u^2+v^2} + i\,\frac{uy-vx}{u^2+v^2}.$$

The Pythagorean sum u^2+v^2 is nowadays called the square of the absolute value of

$$w = u + iv,$$

the complex number defined by the reals u and v. The absolute value of w is then defined by

$$|w| = |u+iv| = \sqrt{u^2+v^2}, \quad \text{and likewise} \quad |z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

[23] The quartic is another feast, but then the party's over, as Galois tragically found out.

[24] Sometimes collection is another word for set.

You should note that
$$|z| = 0 \iff z = 0$$
generalises what you know for $|x|$ and x. In fact, for any complex expression $p(z)$ with z an unknown complex number, the equation
$$p(z) = 0$$
is equivalent to solving
$$|p(z)| = 0.$$
This is just like solving $p(x) = 0$ is equivalent to solving $|p(x)| = 0$ for real expressions, with x a real unknown.

Now if $p(z)$ is just $p(x)$ with x replaced by z it gets really interesting. Par exemple, the function
$$x \to |x^2 + 1|$$
is positive for every real x. In contrast,
$$z \to |z^2+1| = |(x^2-y^2+1+2ixy| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}\,\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = f(x, y)$$
is a realvalued function of $z \in \mathbb{C}$ with two global zero minima, as you see immediately from the defining formula. The global mimimisers $z = i$ and $z = -i$ are the roots of the equation
$$z^2 + 1 = 0.$$

2.2 Looking for minima instead

Let's imagine that you could not find these roots[25]. Then you may look at the somewhat complicated formula for $f(x, y)$ in Section 2.1.2. You will see that for (x, y) on large circles centered in the origin, $f(x, y)$ is bounded from below by a positive number. The larger the circle, the larger the lower bound. This should guarantee the existence of a smallest value m of $f(x, y)$ in some (x_0, y_0), i.e.
$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$
for alle (x, y) with $x, y \in \mathbb{R}$. Which is equivalent to $|z^2 + 1|$ being minimal and equal to m in $z_0 = x_0 + iy_0$.

Now substitute $z = z_0 + w$. Then
$$|(z_0 + w)^2 + 1| = |1 + z_0^2 + 2z_0w + w^2|$$

[25] Or the solution of any other polynomial equation! N.B. not every zero is a root.

is minimal in $w = 0$. Can it happen that $1 + z_0^2 \neq 0$? If so then

$$m = |1 + z_0^2| > 0.$$

Thus the complex number $1+z_0^2$ corresponds to a point in the xy-plane which, among all points corresponding to values of $1 + z_0^2 + 2z_0 w + w^2$ varying w, has minimal distance m to the origin.

Suppose then that the coefficient of w is nonzero. In this example it would mean that $z_0 \neq 0$. All complex numbers w with

$$|w| = \frac{\epsilon}{2|z_0|}$$

for some $\epsilon > 0$ then produce values of $2z_0 w$. It's a little exercise to show that these values have $|2z_0 w| = \epsilon$, and that all complex numbers with absolute value equal to ϵ appear as such a product $2z_0 w$.

It follows that for some such w the complex number $1 + z_0^2 + 2z_0 w$ corresponds to a point with distance $m - \epsilon$ to the origin. But

$$|w^2| = |w|^2 = \frac{\epsilon^2}{4|z_0|^2}$$

then guarantees that the point corresponding to $1 + z_0^2 + 2z_0 w + w^2$ has distance to the origin at most

$$m - \epsilon + \frac{\epsilon^2}{4|z_0|^2}$$

This is smaller than m if $\epsilon > 0$ is chosen small, a contradiction.

Thus $|z_0| > 0$ cannot be if $m > 0$, so m is achieved by $z_0 = 0$: $|1 + z^2|$ is minimal in $z = 0$, and $m = 1$. But this too cannot be: examine the values of $|z^2|$ for $|z| = \epsilon > 0$ and derive another contradiction. If follows that the assumption $m > 0$ was false and therefore $|z_0^2 + 1| = m = 0$. Therefore z_0 is a solution[26] of $z^2 + 1 = 0$.

2.2.1 Generalise it!

Not a big deal, but the key idea applies to every equation of the form

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0$$

with $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. And then to every equation of the form

$$z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0,$$

[26] We found it again.

as you may enjoy figuring out, and likewise for every polynomial equation

$$z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0.$$

The existence of a global minimiser $z = z_0$ for

$$z \to |z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0|$$

leads to the conclusion that

$$z_0^n + \alpha_{n-1}z_0^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z_0 + \alpha_0 = 0.$$

The existence of a global minimiser in turn is guaranteed by the continuity of

$$(x, y) \to x + iy = z \to |z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0| = f(x, y) \geq 0,$$

and the largeness of f on large circles centered in the origin. The latter involves a simple geometric estimate explained in Section 2.2.2 next. A proper introduction and definition of the concept of continuity then allows a simple existence proof. All this is based on properties of real number sequences only, employed in the search of minima and minimisers, see Section 2.2.3 below.

2.2.2 Estimates and order in the complex plane

For $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$[27] and z a variable complex number[28] the third order polynomial

$$C(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

defines a varying complex number. This varying number corresponds to a varying point in the Cartesian plane. Note that $C(z)$ is the sum of z^3 and the quadratic[29] polynomial $Q(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$.

For fixed $R > 0$ the complex numbers z with $|z| = R$ correspond to a circle with radius R centered in the origin. Since $|z^3| = |z|^3$, the varying complex number z^3 corresponds to a point on the circle with the same center and (larger) radius R^3 (if we take $R > 1$).

For the absolute value of the smaller sum $Q(z)$ we have

$$|Q(z)| = |\alpha z^2 + \beta z + \gamma| \leq |\alpha z^2| + |\beta z| + |\gamma|.$$

[27] No, that's not an exponent. To be read as: for real numbers α, β, γ.
[28] Notation: for variable $z \in \mathbb{C}$.
[29] Quadratic, unless $\alpha = 0$.

This says that the distance to the origin of the point corresponding to $Q(z)$ is at most the sum of the distances of the points corresponding to the 3 indivual terms. These point have respective distances

$$|\alpha z^2| = |\alpha|\,|z^2| = |\alpha|\,|z|^2 = |\alpha|\,R^2, \quad |\beta z| = |\beta|\,|z| = |\beta|\,R, \quad |\gamma|$$

to the origin if $|z| = R$. Thus the distance to the origin of the point corresponding to $C(z)$ is at least

$$R^3 - |\alpha|\,R^2 - |\beta|\,R - |\gamma| \geq R^3 - (|\alpha| + |\beta| + |\gamma|)R^2$$

$$= R^3(1 - \frac{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|}{R}) \geq \frac{1}{2}\,R^3,$$

provided we choose $R \geq 2(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|)$.

Without words this argument reads

$$|C(z)| = |z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma| \geq |z^3| - |\alpha z^2 + \beta z + \gamma| \geq |z^3| - |\alpha z^2| - |\beta z| - |\gamma|$$

$$\geq |z|^3(1 - \frac{|\alpha| + |\beta| + |\gamma|}{|z|}) \geq \frac{1}{2}\,|z|^3 = \frac{1}{2}\,R^3$$

if $|z| = R \geq 1$ and $|z| = R \geq 2(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|)$.

Now fix such an R. Clearly then

$$|C(0)| = |\gamma| \leq \frac{R}{2} \quad \text{while} \quad |C(z)| > \frac{1}{2}R^3 \geq \frac{1}{2}R \quad \text{for} \quad |z| > R.$$

Hence a smallest value of $|C(z)|$, *if it exists*, can only be attained by a $z \in \mathbb{C}$ with $|z| \leq R$. If it exists.

2.2.3 Archimedes minimises it

Now define

$$f(x, y) = |C(x + iy)|$$

with $C(z) = C(x + iy)$ as just above, and let R be as chosen. Then

$$f(x, y) \geq 0$$

for every real number pair (x, y). In addition it holds that

$$f(x, y) > f(0, 0) \quad \text{if} \quad x^2 + y^2 > R^2.$$

We look for a globally minimal value m of $f(x, y)$ and a corresponding minimiser (x_0, y_0) with $f(x_0, y_0) = m$.

If $f(x_0, y_0) = 0$ for some (x_0, y_0) we're done[30]. So suppose that $f(x, y) > 0$ for every real x and y. In search of the minimum we can forget about the points (x, y) outside the circle defined by $x^2 + y^2 = R^2$: we know that we can only have $m \leq f(0, 0)$. If there are no values $f(x, y) < f(0, 0)$ we're also done[31].

So assume that $f(0, 0)$ is not a global minimal value of $f(x, y)$. Without loss of any generality we now assume that $f(0, 0) = 1$. It may happen that there are values $f(x, y) < \frac{1}{2}$. If so let $I_1 = [0, \frac{1}{2})$.

If not it may happen that there are values $f(x, y) < \frac{3}{4}$. If so let $I_1 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, if not, then consider $[\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$, and so on. This proces must terminate otherwise Archimedes happily tells us there are no values $f(x, y)$ below 1 at all. It follows that in the sequence of intervals

$$[0, \frac{1}{2}), \ [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \ [\frac{3}{4}, \frac{7}{8}), \ [\frac{7}{8}, \frac{15}{16}), \ldots$$

there is a *first* interval I_1 that contains a value $f(x, y)$, say $p_1 = f(x_1, y_1)$. In that interval we repeat the argument above and obtain a first interval I_2 in a similar sequence with a $p_2 = f(x_2, y_2) \in I_2$, and so on.

It may happen that $p_2 = p_1$ and/or $a_1 = a_2$, and likewise in every next step. No matter what, we get

$$a_n \leq p_n = f(x_n, y_n) < b_n$$

with both a_n and b_n fractions whose denominators are pure powers of 2, and

$$0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

By construction the minimum we look for must lie in every $[a_n, b_n)$.

The sequence a_n has

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots < 1$$

and its smallest lower bound defines a real number that we call m. It's really Archimedes again who now tells us this m is in fact *the only possible value a global minimum* of $f(x, y)$ can have, if it exists.

2.2.4 Conclusion

The by construction bounded sequences x_n and y_n do not necessarily have the property that

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq \cdots \quad \text{or} \quad x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq \cdots$$

[30] By the way, this is what we wanted in this example, remember?

[31] This is what we wanted to force a contradiction.

and likewise for y_n. However, a nice little argument[32] provides us with subsequences x_n and y_n which do have this property and thereby define real numbers x_0 and y_0: either as lowest upperbound of the particular subsequence, or as largest lower bound.

What remains is to come up with a definition of continuity that applies to the example from Section 2.2.2 under consideration and implies that $f(x_0, y_0) = m$. A quick way to do so is via the concept of convergent sequences: we say that continuity amounts to $x_n \to x_0$ and $y_n \to y_0$ implying that $f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0)$. In Sectie 5.1 this characterisation is discussed in the context of functions of one variable, in relation to the concept of uniform continuity in Stelling 5.9.

[32] See Sectie 5.7. BTW, Thomas Rot worked out Opgave 5.28.

3 Integraalrekening

Voor functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ begint integraalrekening met de vraag naar de oppervlakte van verzamelingen in het x, y-vlak begrensd door de x-as en de *grafiek* van f. Die grafiek wordt gegeven door $y = f(x)$. Om niet meteen over onbegrensde gebieden te praten kijken we eerst naar verzamelingen van de vorm

$$A_+ = \{(x, y) : \, x, y \in \mathbb{R}, \, 0 < y < f(x), \, a < x < b\}$$

en

$$A_- = \{(x, y) : \, x, y \in \mathbb{R}, \, f(x) < y < 0, \, a < x < b\},$$

met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a < b$, waarbij we opmerken dat de "grotere" verzamelingen die ontstaan als we hierin elke $<$ door $\leq$ vervangen dezelfde oppervlakte zouden moeten hebben. Althans bij een zinvolle definitie van het begrip oppervlakte, een definitie die we hier echter achterwege laten!

Dat lijnstukken oppervlakte nul hebben, en grafieken van niet al te lelijke functies ook, lijkt vanzelfsprekend, maar komt hier nog niet aan de orde. In wat hieronder volgt gaat het alleen over welomschreven benaderingen van oppervlakten van verzamelingen waarvan we kunnen aannemen dat die op de een of andere manier meetbaar zijn, bijvoorbeeld met een gereedschapskist vol rechthoekjes waarvan de oppervlakte als lengte en breedte buiten kijf staat. De wiskunde hieronder is correct ook zonder dat aan het begrip oppervlakte wordt gedacht. Uitgangspunt is wel de consensus dat de oppervlakte tussen de lijnen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ in het xy-vlak gelijk is aan $1 \times 1 = 1 \cdot 1 = 1$, let wel, zonder fysische eenheden erbij.

We beginnen met het geval dat $A_- = \emptyset$: we nemen aan dat $f(x) \geq 0$ voor $x \in [a, b]$. Het geval $[a, b] = [0, 1]$ en $f(x) = x^n$ met $n \in \mathbb{N}$ is een leerzaam eerste voorbeeld. We rekenen wat we de oppervlakte van de verzameling

$$A_n = \{(x, y) : \, 0 \leq y \leq x^n \leq 1\}$$

zouden willen noemen expliciet uit. Als notatie voor de oppervlakte[1] van een verzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ gebruiken we $|A|$. Als uitgangspunt nemen we dat over de oppervlakte van een rechthoek geen twijfel bestaat, waarbij we zonder eenheden (dus geen vierkante centimeters of zo) werken. De oppervlakte van een rechthoek die parallel ligt aan de assen wordt eenvoudig bepaald door de schaalverdeling op de assen.

Voor $n = 1$ gaat het om het gebied in het xy-vlak begrensd door

$$x = 1, \quad y = 0 \quad \text{en} \quad y = x,$$

[1] Of elke $A \subset \mathbb{R}^2$ een oppervlakte $|A|$ heeft is natuurlijk wel de vraag.

een driehoek met oppervlakte $\frac{1}{2}$, precies de helft van de oppervlakte van het vierkant met hoekpunten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ en $(0,1)$. Kortom $|A_1| = \frac{1}{2}$.

Hoe zit het met A_2? Omdat $A_2 \subset A_1$ is het duidelijk dat moet gelden dat $|A_2| \leq |A_1|$, nog voor je de vraag stelt hoe en of de oppervlakte eigenlijk precies gedefinieerd is. Het is ook duidelijk[2] dat $|A_2|$ niet kleiner kan zijn zijn dan de oppervlakte van een rechthoek die geheel in A_2 ligt, bijvoorbeeld de rechthoek met hoekpunten $(\frac{1}{2},0)$, $(1,0)$, $(1,\frac{1}{4})$ en $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$. We concluderen hieruit dat $|A_2|$ minimaal $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ moet zijn.

Opgave 3.1. Laat met rechthoekjes zien dat ook moet gelden dat

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9} < |A_2| < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{9}.$$

Opgave 3.2. Laat zien dat voor elke $N \in \mathbb{N}$ moet gelden dat

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+(N-1)^2}{N^3} < |A_2| < \frac{1^2+2^2+\cdots+N^2}{N^3}.$$

Als je even nadenkt over hoe je de grenzen in Opgave 3.2 hebt gevonden dan is duidelijk dat het verschil precies $\frac{1}{N}$ is, en dat kunnen we zo klein maken als we willen door N groot te nemen. Bovendien kunnen we deze onder- en bovengrenzen gewoon uitrekenen:

Opgave 3.3. Laat zien dat voor elke $N \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = 1^2+2^2+\cdots+N^2 = \frac{N^3}{3}+\frac{N^2}{2}+\frac{N}{6}.$$

We gebruiken hier de somnotatie waarin de index n aangeeft dat we de som nemen van de kwadraten van n over alle n in de verzameling

$$\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq N\}.$$

[2] Maak een plaatje.

In [Eves] lezen we op pagina 47 dat de formule in Opgave 3.3 al door Archimedes gevonden is. Het rechterlid factoriseert als

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

maar het gaat ons in het vervolg alleen om de coëfficiënt van N^3 in het rechterlid. De bovengrens voor $|A_2|$ in Opgave 3.2 is nu immers gelijk aan

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2N}+\frac{1}{6N^2}$$

en wordt kleiner als N groter genomen wordt. De ondergrens is (niet opnieuw uitrekenen maar gewoon $\frac{1}{N}$ eraf)

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2N}+\frac{1}{6N^2},$$

en dat wordt juist groter als N groter genomen wordt (al zie je dat misschien niet meteen). De onvermijdelijke conclusie is dat $|A_2| = \frac{1}{3}$. In termen van de integralen[3] die je natuurlijk al eerder gezien hebt is hiermee de uitspraak dat

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

gedaan zonder dat er een functie geprimitiveerd is!

Wat aardig en nuttig is om op te merken is dat we van het derdegraadspolynoom in Opgave 3.3 alleen de kopcoëfficiënt in het antwoord terugzien. Het is een leerzame oefening dat het voor bijvoorbeeld[4] A_{42} precies hetzelfde gaat, je bewijst en gebruikt

$$1^{42}+2^{42}+\cdots+N^{42}=\frac{N^{43}}{43}+\cdots$$

om via oppervlakten van rechthoekjes op $|A_{42}| = \frac{1}{43}$ uit te komen.

Opgave 3.4. Doe $|A_1|$ ook op deze manier. Hint: $1+2+\cdots+N$ is[5] een som die Gauss ooit als strafwerk zou hebben gekregen.

[3] Maar denk ook aan volumes van piramiden, zie Hoofdstuk 2 van [Eves].
[4] Amusant in [Eves, §3.16]: bewijs meetkundig dat $1^3+\cdots+N^3=(1+\cdots+N)^2$.
[5] Met $N=100$.

Opgave 3.5. Schrijf de differenties $(n+1)^2 - n^2$, $(n+1)^3 - n^3$, $(n+1)^4 - n^4$, enzovoorts uit.

Opgave 3.6. De ad hoc notaties

$$N_1 = \sum_{n=1}^{N} n, \quad N_2 = \sum_{n=1}^{N} n^2, \quad N_3 = \sum_{n=1}^{N} n^3, \ldots$$

definiëren sommen die voor elke index $1, 2, 3, \ldots$ van $N \in \mathbb{N}$ afhangen[6]. Gebruik nu Opgave 3.5: laat met de differenties van n^2 zien dat

$$(N+1)^2 = 1 + N + 2N_1,$$

met de differenties van n^3 dat

$$(N+1)^3 = 1 + N + 3N_1 + 3N_2,$$

met de differenties van n^4 dat

$$(N+1)^4 = 1 + N + 4N_1 + 6N_2 + 4N_3,$$

enzovoorts.

Opgave 3.7. Laat voor $k = 1, 2, 3, \ldots$ zien[7] dat N_k een polynoom is van graad $k+1$ met kopcoëfficiënt $\frac{1}{k+1}$. Hint: los uit de in Opgave 3.6 gevonden indentiteiten achtereenvolgens $N_1, N_2, N_3, \ldots$ op; voor elke volgende k alle vorige resultaten gebruiken en goed kijken wat de graad van elke term is.

Nog voor dat we aan precieze definities zijn toegekomen is de onvermijdelijke conclusie dat wel moet gelden dat

$$|A_n| = \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1},$$

en een kleine variant hier op is:

[6] Met eventueel

$$N_0 = \sum_{n=1}^{N} 1.$$

[7] Index k omdat de index n al in gebruik is, het geval $k = 42$ is al genoemd.

Opgave 3.8. Voor $b > 0$ en $n \in \mathbb{N}$ is de oppervlakte van

$$\{(x, y) : 0 \leq y \leq x^n \leq b^n\}$$

gelijk aan het quotiënt van b^{n+1} en $n + 1$. Laat dit zien door met schaling van de eenheden op de assen de vraag te herleiden tot het geval $b = 1$.

Lezend in [Eves] is het duidelijk dat Archimedes deze conclusie al had kunnen trekken en dat wellicht ook gedaan heeft voor $n = 2$ en $n = 3$. In moderne notatie:

$$\int_0^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}.$$

Opgave 3.9. Voor $0 \leq a < b$ en $n \in \mathbb{N}$ is de oppervlakte van

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, \, 0 \leq y \leq x^n\}$$

(in moderne notatie) gelijk aan

$$\int_a^b x^n \, dx = [\frac{x^n}{n+1}]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

De functie

$$x \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

noemen we tegenwoordig de primitieve van de functie

$$x \to x^n$$

omdat de afgeleide van de eerste functie gelijk is aan de tweede. Het is niet waarschijnlijk dat de lezer[8] de begrippen primitieve en afgeleide functies nog niet in de een of andere vorm gezien heeft maar het advies is om een en ander bij verder lezen in het achterhoofd te houden. In (7.6) komt de uitspraak hierboven terug in algemene vorm.

Opgave 3.10. Tijdens de vakantiecursus voor wiskundeleraren op 25-8-2017 in Eindhoven maakte een van de toehoorders de terechte opmerking dat uit $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$ ook de integraal $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx$ volgt. Kun je $\int_0^1 \sqrt[n]{x} \, dx$ berekenen voor iedere $n \in \mathbb{N}$?

[8] Ik zal de lezer doorgaans tutoyeren, sorry.

Opgave 3.11. De dag na die cursus mailde Frits Beukers me een manier om op $\int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}$ uit te komen zonder een formule voor $1^k + 2^k + \cdots + n^k$, gebruikmakend van de differenties in Opgave 3.5, maar dan uitgeschreven via het merkwaardige product $a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b)(a^k + \cdots + b^k)$. Vul de puntjes in en schrijf uit wat je krijgt met $a = n+1$ en $b = n$. Je krijgt $k+1$ termen, die elk uit factoren $n+1$ en n bestaan. Als je al zulke factoren n vervangt door $n+1$ wordt de som groter en als je al zulke $n+1$ vervangt door n wordt de som kleiner. Sommeer de ongelijkheden die je krijgt van $n = 0$ tot $n = N$ en deel door $k+1$. Laat zien dat

$$1^k + 2^k + \cdots + N^k < \frac{(N+1)^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \cdots + N^k + (N+1)^k,$$

en gebruik dit om via onder- en bovensommen $\int_0^1 x^k\,dx$ te bepalen.

3.1 Integralen via onder- en bovensommen

De integraal van $x = 0$ tot $x = 1$ van x^2 in de inleiding hierboven is bij afspraak de nog niet wiskundig gedefinieerde oppervlakte van de verzameling[9]

$$A = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ 0 \leq y \leq f(x),\ a \leq x \leq b\}, \tag{3.1}$$

met in dit voorbeeld $a = 0$, $b = 1$ en $f(x) = x^2$. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en een functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ met $f(x) \geq 0$ voor $a \leq x \leq b$, beoogt de wiskundige definitie van

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{3.2}$$

wiskundig betekenis te geven aan de oppervlakte $|A|$ van A in (3.1).

Daartoe worden zogenaamde ondersommen en bovensommen gedefinieerd, waarvan het evident is dat ze bij de beoogde definitie van de oppervlakte van A kleiner respectievelijk groter[10] dan $|A|$ zijn. Als vervolgens blijkt dat er precies één reëel getal is dat groter is dan alle ondersommen en kleiner dan alle bovensommen, dan is dit getal de enige kandidaat voor $|A|$, en vervolgens wordt dit getal de integraal van f over $[a,b]$ genoemd, i.e. (3.2). Het is natuurlijk niet verplicht om dan vervolgens te zeggen dat deze integraal gelijk is aan de oppervlakte $|A|$ van A.

We bekijken deze aanpak eerst voor het geval dat $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een niet-dalende niet-negatieve functie is.

---

[9] Nu maar met $\leq$ i.p.v. $<$.

[10] Precies gezegd: groter dan of gelijk aan.

Definitie 3.12. *Als $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dan heet f niet-negatief als $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$; f heet niet-dalend als de implicatie*

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

geldt voor alle $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Voor zo'n niet-dalend niet-negatieve functie ligt het voor de hand om de oppervlakte $|A|$ van A in (3.1) van onder te benaderen met in dit geval *ondersommen* van de vorm Teken plaatje!

$$\underline{S}_N = \sum_{k=1}^{N} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \tag{3.3}$$

$$= f(x_0)(x_1 - x_0) + \cdots + f(x_{N-1})(x_N - x_{N-1}),$$

waarin

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_N = b \quad \text{met} \quad N \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Zo'n keuze van $x_1, \ldots, x_{N-1}$ noemen we een *partitie* P van $[a, b]$ en $\underline{S}_N$ is niets anders dan de som van de oppervlakten van de rechthoekjes[11]

$$R_k = [x_{k-1}, x_k] \times [0, f(x_{k-1})] \quad (k = 1, \ldots, N).$$

Hoe $|A|$ verder ook gedefinieerd wordt, je kunt je zelf er makkelijk van overtuigen dat bij iedere zinvolle definitie van $|A|$ wel moet gelden dat $\underline{S}_N \leq |A|$. Teken maar een plaatje met grafiek en rechthoekjes.

Evenzo maken de oppervlakten van de rechthoekjes

$$R_k = [x_{k-1}, x_k] \times [0, f(x_k)] \quad (k = 1, \ldots, N)$$

de *bovensom*

$$\bar{S}_N = \sum_{k=1}^{N} f(x_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{3.5}$$

Voor een zinvolle definitie van de oppervlakte van A moet dus wel gelden dat

$$\underline{S}_N \leq |A| \leq \bar{S}_N. \tag{3.6}$$

Slordig[12] gezegd, de gezochte waarde $|A|$ zitten *tussen*[13] de ondersom $\underline{S}_N$ en de bovensom $\bar{S}_N$, en het verschil van die twee is

$$\bar{S}_N - \underline{S}_N = \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}).$$

[11] Zo'n rechthoekje kan ook een lijnstuk of een punt zijn.
[12] Het kan gebeuren dat $\underline{S}_N = |A|$ en/of $|A| = \bar{S}_N$.
[13] Als $\underline{S}_N < |A| < \bar{S}_N$ spreken we van strict tussen.

Als we nu de partitie P in (3.4) equi-distant kiezen, i.e.

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{N} \quad (k = 1, \ldots, N),$$

dan volgt

$$\bar{S}_N - \underline{S}_N = \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\frac{b-a}{N} = (f(b) - f(a))\frac{b-a}{N}$$

en dat kunnen we willekeurig klein maken door N groot te kiezen[14]. De onvermijdelijke conclusie is dan dat er maar één getal tussen alle ondersommen en bovensommen kan liggen.

Opgave 3.13. Met $N = 1, 2, 4, 8, 16 \ldots$ vormen de ondersommen $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \underline{S}_4, \underline{S}_8, \ldots$ een niet-dalende rij getallen. Laat dit zien.

Evenzo vormen de bovensommen $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_4, \bar{S}_8, \ldots$ een niet-stijgende rij. Omdat

$$\underline{S}_1 \leq \underline{S}_2 \leq \underline{S}_4 \leq \underline{S}_8 \leq \cdots \leq \bar{S}_8 \leq \bar{S}_4 \leq \bar{S}_2 \leq \bar{S}_1,$$

zijn beide rijen begrensd.

Definitie 3.14. *Als $a \leq M \in \mathbb{R}$ respectievelijk $a \geq M$ voor alle $a \in A \subset \mathbb{R}$ dan heet M een bovengrens respectievelijk een ondergrens voor A, en A naar boven respectievelijk beneden begrensd.*

De kleinste bovengrens[15] $\underline{J}$ van deze rij ondersommen kan niet groter zijn dan een bovensom en is daarmee een ondergrens voor alle bovensommen in deze rij bovensommen. Voor de grootste ondergrens[16] $\bar{J}$ van alle bovensommen geldt dus $\bar{J} \geq \underline{J}$. Omdat

$$\bar{J} - \underline{J} \leq \bar{S}_{2^n} - \underline{S}_{2^n} = (f(b) - f(a))\frac{b-a}{2^n}$$

en 2^n willekeurig groot gekozen kan worden volgt $\bar{J} - \underline{J} = 0$. Zo definiëren we een uniek getal $J = \bar{J} = \underline{J}$ dat vervolgens genoteerd wordt als

$$J = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx,$$

[14] Anders zou $\mathbb{N}$ naar boven begrensd zijn in $\mathbb{R}$.
[15] Ander woord voor kleinste bovengrens: supremum. Waarom bestaat die/dat?
[16] Ander woord voor grootste ondergrens: infimum. Waarom bestaat die/dat?

spreek naar keuze uit als: de *integraal* van f over $[a, b]$, respectievelijk de integraal van f of $f(x)$ van a of $x = a$ tot b of $x = b$. In de notatie is x een *dummy* variabele, die door elke andere letter vervangen kan worden, maar bij voorkeur niet door a of b, en liever ook niet door d of f.

Opgave 3.15. Voor niet-stijgende niet-negatieve functies is het verhaal hierboven op details na hetzelfde. Schrijf dat uit.

Opgave 3.16. Niet-stijgende functies en niet-dalende functies worden monotone functies genoemd. Ook als deze functies zowel positieve als negatieve waarden aannemen, definiëren eindige sommen als in (3.3) en (3.5) via $N = 2^n$ een uniek getal J dat de integraal van f over $[a, b]$ genoemd wordt. Wat is de interpretatie van deze integraal in termen van de gebieden in het x, y-vlak begrensd door $x = a$, $x = b$, $y = 0$ en $y = f(x)$? Leg uit waarom.

De integraal van een monotone functie f is nu gedefinieerd aan de hand van equi-distante partities van het interval $[a, b]$. Hoe zit het met andere partities en de ordening van onder- en bovensommen? Een vraag om algemeen te stellen maar nu eerst nog even het voor specifieke geval van monotone functies.

Opgave 3.17. Neem weer het geval dat f niet-dalend is. Neem een partitie P gedefinieerd door (3.4) en een partitie Q gedefinieerd door

$$a = y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_M = b \quad \text{met} \quad M \in \mathbb{N}.$$

Neem[17] bij P de bovensom $\bar{S}$ in (3.5) en bij Q de ondersom

$$\underline{S} = \sum_{l=1}^{M} f(y_{l-1})(y_l - y_{l-1})$$

Laat zien dat $\underline{S} \leq \bar{S}$. Hint: eerst zelf proberen, maar kijk eventueel al naar (3.11).

Definitie 3.18. *Laat A en B twee deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}$. We zeggen dat $A \leq B$ als $a \leq b$ voor alle $a \in A$ en alle $b \in B$. In dat geval zeggen we dat $J \in \mathbb{R}$ tussen A en B ligt als $A \leq \{J\} \leq B$.*

[17] Even zonder index in de notatie.

Al onze onder- en bovensommen maken twee zulke verzamelingen A en B. De volgende opgave is nu van belang.

Opgave 3.19. Laat A en B twee niet-lege deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat $A \leq B$. Bewijs dat er een getal $J \in \mathbb{R}$ is dat tussen A en B ligt. Hint: zie de redenatie onder Definitie 3.14.

Stelling 3.20. *Laat $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een monotone functie zijn. Dan bestaat er precies één getal J dat tussen de verzameling van alle sommen van de vorm (3.3) en de verzameling van alle sommen van de vorm (3.5) ligt. Dit getal J is per definitie de integraal van $f(x)$ van $x = a$ tot $x = b$, notatie*

$$J = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Bewijs. Het werk is hierboven gedaan, tenzij Opgave 3.17 niet gelukt is, maar lees dan toch maar verder. Zonder beperking der algemeenheid[18] nemen we f niet-dalend. De ondersommen vormen een niet-lege verzameling A en de bovensommen een niet-lege verzameling B. Er geldt dat $A \leq B$, dus er bestaat een J tussen A en B. Met equi-distante partities zien we dat er maar één zo'n J kan zijn. Klaar.

Monotone functies zijn dus integreerbaar. Merk op dat gegeven een partitie P zoals in (3.4), en iedere keuze van zogenaamde *tussenpunten*

$$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \quad (k = 1, \ldots, N),$$

ook

$$S = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{3.7}$$

een voor de hand liggende benadering van $\int_a^b f(x)\,dx$ zou moeten zijn, ook als $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ niet monotoon is, maar we kunnen dan niet meer op een natuurlijke manier van boven- of ondersommen spreken.

Als de waardenverzameling[19]

$$\{f(x) :\, a \leq x \leq b\} = \cup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$$

echter begrensd is, i.e. als er $m, M \in \mathbb{R}$ bestaan zodat $m \leq f(x) \leq M$ voor alle $x \in [a,b]$, dan is op elke deelinterval $[x_{k-1}, x_k]$ de waardenverzameling

[18] Afkorting: zbda.

[19] Het bereik B_f van $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, door sommigen ook het codomein van f genoemd.

ook begrensd en bestaan er bijbehorende ondergrenzen m_k en bovengrenzen M_k met $m \leq m_k \leq M_k \leq M$, waarmee we

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{en} \quad \bar{S} = \sum_{k=1}^{N} M_k(x_k - x_{k-1}) \tag{3.8}$$

weer als onder- en bovensommen voor zowel (3.7) als de te definiëren integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ kunnen introduceren. Bij dezelfde partitie P geldt dan onmiddellijk dat $\underline{S} \leq \bar{S}$.

Wat hebben we nu nodig om het bewijs van Stelling 3.20 over te schrijven? Twee dingen goed begrijpen nu. Ten eerste, de verzamelingen van ondersommen A en bovensommen B moeten weer voldoen aan $A \leq B$. Ten tweede, we moeten de uniciteit van het getal J tussen A en B aantonen, en daartoe nemen we voor m_k en M_k natuurlijk de grootst respectievelijk kleinst mogelijk waarde, teneinde het verschil

$$\bar{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^{N} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

zo klein mogelijk[20] te krijgen.

Kies dus

$$M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \quad \text{en} \quad m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f.$$

Hierin staat sup voor *supremum* van de verzameling in kwestie. Iedere nietlege verzameling $A \subset \mathbb{R}$ die begrensd is naar boven, middels een *bovengrens* $M \geq a$ voor alle $a \in A$, heeft een kleinste bovengrens die het supremum van A genoemd wordt[21]. Dit is één van de vanzelfsprekende eigenschappen die $\mathbb{R}$ moet[22] hebben. Evenzo staat inf voor *infimum* of grootste ondergrens.

Opgave 3.21. Actually you may avoid the lowest upper bound axiom for bounded sets if you you want to conclude that

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

exists when $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is uniformly continuous. Prove that M exists using only the axiom that bounded noincreasing sequences in $\mathbb{R}$ have a lowest upper bound. Hint: without loss of any generality assume that $[a, b] = [0, 1]$ and use the values of f in the binary numbers.

[20] Hopelijk willekeurig klein.

[21] Zie ook Sections 1.1.4, 1.1.6, en Sectie **??**.

[22] Anders $\mathbb{R}$ terugsturen naar de verzamelingsgeleerden!

Opgave 3.22. Laat zien dat bij het *verfijnen* van de partitie, i.e. extra punten toevoegen in (3.4), ondersommen niet kleiner en bovensommen niet groter kunnen worden.

Als nu voor alle $k = 1, \ldots, N$ geldt dat

$$M_k - m_k \leq \varepsilon \tag{3.9}$$

(voor een $\varepsilon > 0$), dan volgt dat

$$\bar{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^{N} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \varepsilon(b - a). \tag{3.10}$$

Wat we dus nodig hebben voor uniciteit van J is dat elke $\varepsilon > 0$ realiseerbaar is in (3.9), middels een geschikte keuze van (3.4). In dat geval geldt voor iedere andere $\tilde{J}$ tussen A en B dat

$$|\tilde{J} - J| \leq \bar{S} - \underline{S} \leq \varepsilon(b - a),$$

en omdat $\varepsilon > 0$ dan zo klein gekozen mag worden als we maar willen volgt[23] $\tilde{J} = J$.

De definitie van (meteen maar) *uniforme continuïteit* brengt nu uitkomst. Dit is de eerste keer dat we een uitspraak formuleren waarin *voor alle* $\varepsilon > 0$ iets moet gelden dat met die ε te maken heeft, en zo'n uitspraak meteen gebruiken om een fundamentele stelling te bewijzen. Merk op dat je zo'n uitspraak alleen maar *echt gebruikt* als je meerdere (de facto oneindig veel) keren een ε kiest[24].

Definitie 3.23. *Als $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dan heet f uniform continu als er voor alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in [a, b]$ geldt dat*

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Stelling 3.24. *Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een uniform continue functie zijn. Dan bestaat er precies één getal J dat tussen de verzameling van alle ondersommen en de verzameling van alle bovensommen ligt, waarbij we onder de onder- en bovensommen de sommen in (3.8) verstaan. Dit getal J is per definitie de integraal van $f(x)$ van $x = a$ tot $x = b$, notatie*

$$J = \int_a^b f(x)\, dx.$$

[23] Ook dit gebruikt weer dat $\mathbb{N}$ niet begrensd is in $\mathbb{R}$ via het kiezen van $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

[24] Houd het met $\varepsilon = \frac{1}{n}$ bij voorkeur simpel, en je slaagt met vlag en wimpel.

Bewijs. Wederom is vrijwel al het werk al gedaan. De ondersommen vormen een niet-lege verzameling A en de bovensommen een niet-lege verzameling B. Met $\delta > 0$ bij $\varepsilon > 0$ zoals in Definitie 3.24 volgt[25] (3.9) als de partitie P in (3.4) zo gekozen wordt dat $x_k - x_{k-1} \leq \delta$ voor alle $k = 1, \ldots, N$.

Als we nu ook nog laten zien dat $A \leq B$ zijn we klaar. Neem daartoe P als in (3.4) en Q net als in Opgave 3.17, en vorm de *gemeenschappelijke* verfijning

$$a = z_0 \leq z_1 \leq \cdots \leq z_K = b, \tag{3.11}$$

door $x_1 \leq \cdots \leq x_{N-1}$ en $y_1 \leq \cdots \leq y_{M-1}$ op één gemeenschappelijke volgorde te zetten. Dus $K - 1 = M - 1 + N - 1$ en iedere z_i is een x_k of een y_l, waarmee met

$$m_l = \inf_{[y_{l-1}, y_l]} f, \quad \tilde{m}_i = \inf_{[z_{i-1}, z_i]} f \leq \sup_{[z_{i-1}, z_i]} f = \tilde{M}_i, \quad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

volgt dat

$$\sum_{l=1}^{M} m_l(y_l - y_{l-1}) \leq \sum_{i=1}^{K} \tilde{m}_i(z_i - z_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{K} \tilde{M}_l(z_i - z_{i-1}) \leq \sum_{k=1}^{N} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Waarom? Omdat de eerste ongelijkheid de ondersommen betreft van een partitie en een verfijning[26] daarvan, en de derde ongelijkheid de bovensommen van een andere partitie naar dezelfde verfijning. Met de tweede ongelijkheid en $\tilde{M}_i - \tilde{m}_i \leq \varepsilon$ is het bewijs van Stelling 3.24 nu klaar.

Opgave 3.25. Bewijs dat je antwoord in Opgave 3.10 juist is.

3.2 Integreerbaar: definities, regels, voorbeelden

We weten tot nu toe alleen dat voor monotone en voor uniform continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ met behulp van onder- en bovensommen een ondubbelzinnige betekenis kan worden gegeven aan de *integreerbaarheid* van f en de waarde van de integraal

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Voor iedere begrensde functie kunnen we echter bij een partitie (3.4)

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad \text{en} \quad m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

[25] Ga dit na, al volgt later dat m_k en M_k aangenomen worden in $[x_{k-1}, x_k]$.

[26] Zie Opgave 3.22.

definiëren en de bijbehorende onder- en bovensom[27]. Net als in het bewijs van Stelling 3.24 volgt nu dat de verzameling van alle ondersommen A en de verzameling van alle bovensommen B voldoen aan $A \leq B$. Op grond van Opgave 3.19 is er dus tenminste één getal J dat tussen A en B ligt.

Definitie 3.26. *Een begrensde functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heet Riemann integreerbaar als er precies één getal J tussen de verzameling A van alle ondersommen en de verzameling B van alle bovensommen ligt. In dat geval is per definitie*

$$J = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Het is wel handig om een paar variaties op het thema te hebben bij de vraag welke functies nog meer integreerbaar zijn, en welke regeltjes er gelden die wel moeten gelden. De volgende opgaven zijn daartoe nuttig. Zorg dat je begrijpt wat de uitspraken zijn en waarom ze waar (moeten) zijn.

Opgave 3.27. Bewijs dat met

$$M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} < x < x_k\} \quad \text{en} \quad m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} < x < x_k\}$$

dezelfde begrensde functies integreerbaar worden als in Definitie 3.26, met dezelfde waarde van J.

Opgave 3.28. Bewijs dat de functie f gedefinieerd door $f(x) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{Q}$ en $f(x) = 0$ voor alle $x \notin \mathbb{Q}$ niet integreerbaar is op $[0,1]$.

Opgave 3.29. Iedere begrensde integreerbare functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ die op de punten van een partitie

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b \quad \text{met} \quad N \in \mathbb{N}$$

wordt veranderd door $g(x_k) = c_k$ te stellen voor $k = 0, \ldots, N$ voor gegeven waarden $c_k \in \mathbb{R}$, en $g(x) = f(x)$ voor alle $x \in [a,b]$ die niet to P behoren, definieert een begrensde integreerbare functie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ met $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Bewijs dit.

[27] The strong statement cannot do without the stronger axiom, see Exercise 3.21.

Opgave 3.30. Iedere begrensde functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ waarvoor er een partitie

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b \quad \text{met} \quad N \in \mathbb{N}$$

bestaat met f monotoon of uniform continu op elk open interval (x_{k-1}, x_k) is integreerbaar. Bewijs dit[28].

Definitie 3.31. *Als $a < b$ dan is*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

vermits $f : [b, a] \to \mathbb{R}$ begrensd en integreerbaar is[29].

Opgave 3.32. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ begrensd zijn en $c \in (a, b)$. Bewijs dat f integreerbaar is op $[a, b]$ dan en slechts dan als f integreerbaar is op zowel $[a, c]$ als $[c, b]$, en dat in dat geval

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Opgave 3.33. Teken een plaatje met een x-as en een y-as zonder pijltjes, markeer een $x = a$ en een $x = b$ op de x-as en teken een grafiek van zo maar een uniform continue $f(x)$ zonder nulpunten of tekenwisselingen gedefinieerd voor x tussen a en b. Kies pas na dat je dit gedaan hebt de pijltjes op de assen die aangeven of x naar links of naar rechts loopt en y naar beneden of naar boven. Er zijn vier mogelijkheden om dat te doen. Relateer in alle vier de gevallen de integraal

Teken plaatje!

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

aan de (bij algemene afspraak) positieve oppervlakte van het gebied ingesloten door $x = a$, $x = b$, $y = 0$ en $y = f(x)$. In welk geval is zowel f als $\int_a^b f(x)\,dx$ positief? Verifieer dat dan $b > a$ en dat je de positieve x-as 3 uren tegen de klok in om de oorsprong moet draaien om de positieve y-as te krijgen. Hint: als je dit een stomme opgave vindt lees dan alvast Sectie 8.9 en kijk naar Opgave 8.21.

[28] Hiermee ben je van een hoop gezeur af.

[29] Consistent met de intuïtie dat dx in $\int_a^b f(x)\,dx$ negatief is als $a > b$.

3.3 Integrals of polynomials and more

With the definitions and rules in Section 3.2 it now follows that

$$\int_a^b p(x)\,dx = P(b) - P(a) \tag{3.12}$$

for

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n \tag{3.13}$$

if P is defined by

$$P(x) = \alpha_0 x + \frac{\alpha_1}{2} x^2 + \frac{\alpha_2}{3} x^3 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{3.14}$$

Of course you recognise $p(x)$ as the derivative of $P(x)$ the way you computed it in highschool. Now have a look at Section 1.1.9 and play a bit with the example

$$\int_0^1 \underbrace{(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)}_{p_n(x)}\,dx = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

using the rules in Section 3.2. Restricting to $x \in [0,1]$ we have that $p_n(x)$ is nondecreasing in both x and n. We have that

$$p_n(1) = n + 1$$

is an unbounded sequence of numbers, while

$$p_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{for} \quad 0 \le x < 1. \tag{3.15}$$

Thus

$$p_\infty(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} p_n(x)$$

exists for all $0 \le x < 1$ as the lowest upper bound of the sequence $p_n(x)$ and

$$p_\infty(x) \le \frac{1}{1-x}$$

because the right hand side is surely an upperbound for $p_n(x)$.

Opgave 3.34. Use the Archimedean principle to show that

$$p_\infty(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Hint: this requires statements such as $x^n \le \frac{1}{n}$ if $0 \le x < 1$ and n sufficiently large.

Thus

$$\int_0^1 p_\infty(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$$

cannot be defined as a Riemann integral, because

$$x \to p_\infty(x) = \frac{1}{1-x}$$

is not bounded on $[0,1)$, nor is any adaptation of it as in Exercise 3.29. For every $0 \le a < b < 1$ however it is clear that

$$\int_a^b p_\infty(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{1-x}\,dx \ge \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b (1 + x + \cdots + x^n)\,dx$$

do exist as Riemann integrals, because both $p_\infty(x)$ and $p_n(x)$ are increasing on $[a,b]$, and with the monotonicity in n this makes

$$\int_a^b p_n(x)\,dx$$

an increasing bounded sequence with

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b p_n(x)\,dx \le \int_a^b p_\infty(x)\,dx. \tag{3.16}$$

Opgave 3.35. Use the definition and rules in in Section 1.1.9 to show that

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b p_\infty(x)\,dx,$$

using only that $p_n(x)$ is nondecreasing in both n and x, and the boundedness of $p_n(b)$.

In particular Exercise 3.35 tells you that

$$\int_0^b \frac{1}{1-x} = \sup_{n\in\mathbb{N}}(b + \frac{b^2}{2} + \cdots + \frac{b^{n+1}}{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{b^n}{n}$$

in the notation of Section 1.1.7. This should make you want to play with integrals of the polynomials

$$q_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

and ask about the increasing sequence

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Also you may like to think about integrals of

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

and the possibility to extend (3.12) to polynomials of infinite degree: in fact, restricting to $0 \leq a \leq b$ for the moment, Section 1.1.8 offers a straightforward approach to establish

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n-1}}{n} b^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n-1}}{n} a^n, \tag{3.17}$$

the only assumption being that

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n b^n|$$

exists as explained in Section 1.1.7, and for arbitrary $[a, b] \subset \mathrm{I\!R}$ one has to also assume that

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n a^n|$$

exists. Note though that the right hand side of (3.17) may make sense under weaker conditions.

3.4 Functies als vectoren

We merken op dat de Riemann integreerbare functies een (vector)ruimte[30] over $\mathrm{I\!R}$ vormen. As je nog niet weet wat een vectorruimte is lees dan de voetnoot, doe even alsof

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

2-vectoren in $\mathrm{I\!R}^2$ zijn, waarvoor de gebruikelijk vectoroptelling en vermenigvuldiging met scalairen λ, μ uit het lichaam $\mathrm{I\!R}$ wel bekend zullen zijn, en je begrijpt waarom $\mathrm{I\!R}^2$ een vectorruimte genoemd wordt. Iedere $f \in \mathrm{I\!R}^2$ heeft coördinaten f_i genummerd door $i \in \{1, 2\}$ en met functies $f : [a, b] \to \mathrm{I\!R}$ is

[30] Met f, g Riemann integreerbaar is $\lambda f + \mu g$ het ook voor alle $\lambda, \mu \in \mathrm{I\!R}$.

het net zo. De "coördinaten" van f worden alleen niet genoteerd met f_x maar met $f(x)$, "genummerd" door $x \in [a,b]$ (en niet in een kolommetje gezet). De verzameling van alle functies $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is zo op een vanzelfsprekende manier net zo'n vectorruimte als $\mathbb{R}^2$, met de vectorbewerkingen gedefinieerd door

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

voor alle $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en alle $x \in [a,b]$.

Meer over vectorruimten hoef je hier voorlopig niet te weten, maar het is het wel goed om op te merken dat deze vectorruimte van alle functies $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een heleboel deelvectorruimten heeft, bijvoorbeeld $\mathrm{RI}([a,b])$, de verzameling van alle Riemann integreerbare functies $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Deze vectorruimte bevat weer alle uniform continue functies $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die zelf ook een lineaire vectorruimte over $\mathbb{R}$ vormen, doorgaans met $C([a,b])$ aangeduid. Ook bevat $\mathrm{RI}([a,b])$ alle monotone functies $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ maar die vormen geen vectorruimte[31].

Opgave 3.36. De verzameling van begrensde integreerbare functies $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is dus een vectorruimte[32] over $\mathbb{R}$, hier $\mathrm{RI}([a,b])$ genaamd. Bewijs dat

$$f \to \int_a^b f(x)\,dx$$

een lineaire[33] afbeelding is van deze vectorruimte naar $\mathbb{R}$. Hint: laat met name zien dat met $f, g \in \mathrm{RI}([a,b])$ ook $f + g \in \mathrm{RI}([a,b])$ en

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Opgave 3.37. Als $f \in \mathrm{RI}([a,b])$ dan is ook $x \to |f(x)|$ begrensd en integreerbaar op $[a,b]$ en geldt de "3-hoeksongelijkheid"

$$|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

te vergelijken met (**??**). Bewijs dit rechtstreeks uit de definities en geef een voorbeeld van een begrensde functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ die niet integreerbaar is waarvoor $x \to |f(x)|$ het wel is.

---

[31] Waarom niet?

[32] Is met met $f, g \in \mathrm{RI}([a,b])$ ook $fg \in \mathrm{RI}([a,b])$? Hint: neem f, g eerst positief.

[33] Wat lineair hier betekent kun je wellicht zelf bedenken.

3.5 Verdiepingsmoment: tussensommen

We zijn begonnen met onder- en bovensommen om integralen van monotone functies $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zo eenvoudig mogelijk te behandelen. Voor uniform continue functies kunnen we echter net zo goed kijken naar sommen van de vorm

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \text{met} \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \tag{3.18}$$

gegeven de partitie (3.4) vrij te kiezen voor elke $k = 1, \ldots, N$. Vanzelfsprekend geldt

$$\underline{S}_N \leq S_N \leq \bar{S}_N,$$

met $\underline{S}_N$ en $\bar{S}_N$ als in (3.8) en het bewijs van Stelling 3.24 herlezend is via (3.10) duidelijk dat ook $|S_N - J| \leq \varepsilon(b - a)$ als $x_k - x_{k-1} \leq \delta$ voor alle $k = 1, \ldots, N$.

Het is later een aardige en nuttige oefening om wederom via een rij equidistante partities met $N = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$, met voor ξ_k steeds $\xi_k = x_k$ gekozen, direct en *zonder de ordening van boven- en ondersommen* te gebruiken te laten zien dat er een limietwaarde J bestaat, en daarna voor deze J op dezelfde conclusie uit te komen:

Stelling 3.38. *Als $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uniform continu is dan is er een unieke $J \in \mathbb{R}$ waarvoor voor iedere S_N als in (3.18) geldt dat $|S_N - J| \leq \varepsilon(b - a)$, mits $x_k - x_{k-1} \leq \delta$ voor alle $k = 1, \ldots, N$, waarbij $\delta > 0$ bij $\varepsilon > 0$ gekozen is zoals in de definitie van uniforme continuïteit van $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

4 Differential calculus: linear approximation

You will be familiar with

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{4.1}$$

as the usual definition of the derivative $f'(a)$ of a given realvalued function f of a real variable x in a given point $x = a$ on the real line, and the notation

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{4.2}$$

If the limit of the difference quotient in (4.2) exists it is called the *differential quotient* of f in x, formally denoted as a fraction[1] with denominator df and numerator dx. The difference quotient itself is often denoted as

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

with $\Delta x = h \neq 0$. In what follows we will avoid limits of such difference quotients and think of differentation as a method to best approximate a given (nonlinear) function f by a linear function defined by $Ax + B$, best in terms of the properties of the remainder of error term

$$R_a(x) = f(x) - Ax - B$$

near $x = a$.

4.1 Linear approximations of polynomials

To illustrate[2] this approach consider a difference quotient as above for the function f_7 defined by$f_7(x) = x^7$. A little algebra[3] tells you that

$$\frac{x^7 - a^7}{x-a} = x^6 + ax^5 + a^2x^4 + a^3x^3 + a^4x^2 + a^5x + a^6,$$

which you may rewrite as

$$x^7 = a^7 + (x^6 + ax^5 + a^2x^4 + a^3x^3 + a^4x^2 + a^5x + a^6)(x-a) = \tag{4.3}$$

$$\underbrace{a^7 + 7a^6(x-a)}_{\textit{linear approximation}} + \underbrace{(x^5 + 2ax^4 + 3a^2x^3 + 4a^3x^2 + 5a^4x + 6a^5)(x-a)^2}_{\textit{error term}},$$

[1] Which also suggest $df = f'(x)dx$, see Section 7.2.
[2] See also (BL_7) in Section 1.2.1.
[3] Long division for instance.

in which the first 2 terms can be seen as the best approximation of the form

$$Ax + B$$

to $f_7(x) = x^7$ when x is close to a in meaning to be properly chosen and explained.

The particular choice of A and B follows from putting $x = a$ in the 7 terms in the prefactor of $(x - a)$ in (4.3), but not in $(x - a)$ itself. If you already knew that $f_7'(x) = 7x^6$ you should recognise $A = f_7'(a)$ as computed via (4.1), but in the linear approximation approach A and B appear as the only coefficients which makes the resulting error term[4] contain a factor $(x - a)^2$. Given a this condition defines both A and B uniquely[5].

You will not be surprised that (4.3) and its splitting in a linear term and such an error term generalise to general $n \in \mathbb{N}$ and $f_n(x) = x^n$ as

$$x^n = \underbrace{a^n + na^{n-1}(x-a)}_{Ax+B} + R_{a,n}(x), \tag{4.4}$$

in which you recognise the derivative $f_n'(a) = na^{n-1}$ which you now realise you already had seen before as the coefficient of $(x - a)$. Note that

$$f_n(a) + f_n'(a)(x-a) = \underbrace{f_n'(a)}_{A}\, x + \underbrace{f_n(a) - f_n'(a)a}_{B},$$

so

$$A = na^{n-1} \quad \text{and} \quad B = (1-n)a^n.$$

A nice expression for $R_{a,n}(x)$ you guess from $n = 7$, as I guessed it from first doing $n = 2, 3, 4$. Prove this expression for all $n \in \mathbb{N}$ if you like and then do the following exercise.

Opgave 4.1. Let $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ and $R_{a,n}(x)$ defined by (4.4) for $x, a \in \mathbb{R}$. Show that

$$|R_{a,n}(x)| \leq \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}(x-a)^2$$

if $x, a \in [-r, r]$.

For polynomials

$$P(x) = \sum_{n=0}^{k} \alpha_n x^n = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k$$

[4] A polynomial in x with coefficients depending on the choice of a, A, B.

[5] Of course both A and B depend on a.

of degree $k \geq 2$ the story is quite the same. Simply multiply both sides of (4.4) by α_n and take the sum over n. With some care for $n = 0, 1, 2$ it follows that

$$P(x) = \sum_{n=0}^{k} \alpha_n x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{k} \alpha_n a^n + (\sum_{n=1}^{k} \alpha_n n a^{n-1})(x-a)}_{linear\ approximation\ P(a)+A(x-a)=Ax+B} + \underbrace{\sum_{n=2}^{k} \alpha_n R_{a,n}(x)}_{error\ term\ R_{a,P}(x)} =$$

$$P(a) + \underbrace{P'(a)(x-a)}_{A(x-a)} + R_{a,P}(x) \tag{4.5}$$

if you recognise

$$A = \sum_{n=1}^{k} n\alpha_n a^{n-1} = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \cdots + n\alpha_n x^{n-1} = P'(a). \tag{4.6}$$

The error term satisfies

$$|R_{a,P}(x)| = |\sum_{n=2}^{k} \alpha_n R_{a,n}(x)| \leq \left(\sum_{n=2}^{k} |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} \right) (x-a)^2 = C_{r,P}(x-a)^2$$

for all $x, a \in [-r, r]$. The constant $C_{r,P}$ depends on r and (the coefficients of) the polynomial P only via

$$C_{r,P} = \sum_{n=2}^{k} |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}.$$

Any other choice of A in (4.5) cannot lead to an error estimate of the form

$$|P(a) - A(x-a) - P(x)| \leq C(x-a)^2.$$

In this respect we have defined $P'(a)$ as the unique value of A for which such an estimate does hold, by asking that

$$P(x) = Ax + B + R(x) \quad \text{with} \quad |R(x)| \leq C(x-a)^2 \tag{4.7}$$

and C independent of x on some interval containing a, $[-r, r]$ in this particular example.

Opgave 4.2. Draw graphs of

$$y = Ax + B - C(x-a)^2, y = P(x), y = Ax + B, y = Ax + B + C(x-a)^2$$

for particular choices of P, a and A, B, C that you find. Choose intervals $[-r, r]$ that contain a.

Opgave 4.3. Would you be inclined to think of (4.7) as the appropriate definition for more general functions $x \to P(x)$?

Opgave 4.4. Play with examples in Section 3.3.

4.2 An epsilon-look at the error estimate

Note that given $\varepsilon > 0$ the estimate (4.7) leads to

$$|R(x) \leq C(x-a)^2 \leq \varepsilon|x-a|$$

if

$$|x-a| \leq \delta \quad \text{met} \quad \delta = \frac{\varepsilon}{C} > 0,$$

unless $C = 0$ which leads to $P(x) = Ax + B$. The more general definition drops the implicit dependence of $\delta > 0$ on ε. Changing notation to $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$ and $x = x_0 + h$ we ask that

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + F'(x_0)h + R(h), \tag{4.8}$$

with for every $\varepsilon > 0$ the possibility to choose $\delta > 0$ such that

$$|R(h)| \leq \varepsilon|h| \quad \text{if} \quad |h| \leq \delta \tag{4.9}$$

and $x_0 + h \in [a,b]$. Als dat kan heet de functie F differentieerbaar in x_0. De waarde $F'(x_0)$ heet de *afgeleide* van F in x_0. De geformuleerde eis op (7.4) wordt slordig genoteerd als

$$R(h) = o(|h|) \quad \text{for} \quad |h| \to 0,$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad |h| \leq \delta \implies |R(h)| \leq \varepsilon|h|.$$

Note that we dropped the x_0-dependence from the notation in (7.3).

Om de afgeleide ook als limiet van differentiequotiënten te schrijven introduceren het limietbegrip voor functies.

Definitie 4.5. *Als $I \subset \mathbb{R}$ een interval is en $f : I \to \mathbb{R}$ dan zeggen we voor*[6] *$x_0 \in \bar{I}$ en $L \in \mathbb{R}$ dat*

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

[6] $\bar{I} \subset \mathbb{R}$ is het gesloten interval dat je krijgt door de randpunten van I erbij te stoppen.

als er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x \in I$ de implicatie

$$|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

geldt. We schrijven ook $f(x) \to L$ als $x \to x_0$.

Opgave 4.6. Als $I \subset \mathbb{R}$ een interval is en $F : I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is in $x_0 \in I$, dan is

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

Omgekeerd, als deze limiet bestaat dan is F differentieerbaar in x_0 met afgeleide $F'(x_0)$. Bewijs dit.

4.3 Rekenregels voor de afgeleide

De rekenregels voor de afgeleide functies volgen eenvoudig uit de definitie met lineaire benaderingen, en die lineaire benaderingen worden vaak met $x - x_0$ i.p.v. h geschreven. We behandelen de rekenregels hieronder in het geval van $\mathbb{R}$-waardige functies van $x \in \mathbb{R}$, maar de meeste regels en bewijzen kunnen later overschreven worden voor vectorwaardige functies van meer variabelen. Lees eventueel Sectie 7.6 nog even terug en merk op dat het uiteindelijk de kettingregel is waarvoor je dit zeker wil weten in je begrip van de differentiaalrekening. Het meeste hieronder is na Sectie 7.6 wat dubbelop, maar te leerzaam om over te slaan, ook omdat het hier alleen over functies van één variabele x gaat en de regels voor $F(x)+G(x)$, $F(x)G(x)$, $F(x)/G(x)$ en $F(G(x))$, respectievelijk de som-, produkt-, quotiënt- en kettingregel.

Opgave 4.7. Schrijf voor $F : I \to \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$ de expansie (7.3) als

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + R(x).$$

Herformuleer de conditie op de restterm[7] $R(x)$ die zegt dat F differentieerbaar is in x_0 met afgeleide $F'(x_0)$. Laat zien dat die conditie ook impliceert dat F continu is in x_0.

Als eerste voorbeeld van een rekenregel die we rechtstreeks uit de lineaire benadering halen bekijken we de functie

$$x \to \frac{1}{F(x)},$$

[7] We schrijven $R(x)$ i.p.v. $R(x; x_0)$ nu.

die natuurlijk wel eerst gedefinieerd moet zijn.

Opgave 4.8. Neem in Opgave 4.7 aan dat I een open interval is en dat $F(x_0) \neq 0$ met F continu in x_0. Bewijs dat

$$x \to \frac{1}{F(x)}$$

bestaat op een interval $[a, b] \subset I$ met $a < x_0 < b$ en continu is in x_0. Hint: gebruik eerst de definitie van continuïteit met $\varepsilon = \frac{1}{2}|F(x_0)|$ om het interval $[a, b]$ te maken.

In het bijzonder zegt deze opgave dat iedere $F \in C([a, b])$ die geen nulpunten heeft een "omgekeerde" functie definieert die ook in $C([a, b])$ zit.

Opgave 4.9. Neem in Opgave 4.8 aan dat F differentieerbaar is in x_0. Bewijs dat

$$x \to \frac{1}{F(x)}$$

differentieerbaar is in x_0 met afgeleide

$$-\frac{F'(x_0)}{F(x_0)^2}$$

door

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{1}{F(x_0)} + \frac{F(x_0) - F(x)}{F(x)F(x_0)}$$

uit werken met behulp van de expansie in Opgave 4.7.

Opgave 4.10. Dezelfde vraag als in Opgave 4.9 maar nu voor

$$x \to \frac{1}{|F(x)|}.$$

Opgave 4.11. Schrijf voor $F : I \to \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$ de expansie (7.3) als in Opgave 4.7, en gebruik eenzelfde expansie

$$G(x) = G(x_0) + G'(x_0)(x - x_0) + S(x).$$

voor $G : I \to \mathbb{R}$. Vermenigvuldig beide expansies, werk uit als

$$F(x)G(x) = F(x_0)G(x_0) + (F'(x_0)G(x_0) + F(x_0)G'(x_0))(x - x_0) + T(x),$$

en bewijs dat met F en G ook

$$x \to F(x)G(x)$$

differentieerbaar is in x_0. Hint: de afgeleide in x_0 leest zich onmiddellijk af, laat zien dat de restterm de juiste eigenschappen heeft.

De regel voor de afgeleide van $F(x)G(x)$ heet de *regel van Leibniz* of ook wel de *produktregel*: in elke x waar F en G differentieerbaar zijn is ook het produkt van F en G differentieerbaar met

$$(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x), \tag{4.10}$$

zie ook (7.27).

Opgave 4.12. Dezelfde (gaap) vraag als in Opgave 4.11 voor $x \to F(x) + G(x)$.

Opgave 4.13. Schrijf je bewijzen nog een keer over met $x - x_0$ vervangen door h en zie hoe in de produktregel de twee lineaire benaderingen $F(x_0) + F'(x_0)h$ en $G(x_0) + G'(x_0)h$ met elkaar vermenigvuldigd worden tot

$$F(x_0) + G(x_0) + (F'(x_0)G(x_0) + F(x_0)G'(x_0))h + o(h),$$

waarbij de term met h^2 in $o(h)$ is verdwenen.

Iets lastiger maar ook niet echt moeilijk is de rekenregel voor functies van de vorm $x \to G(F(x))$. Deze regel staat bekend als de *kettingregel*. We beperken ons nu tot open intervallen als definitiegebieden.

Opgave 4.14. Neem $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ met beeld in (c, d) en $G : (c, d) \to \mathbb{R}$ met F differentieerbaar in $x_0 \in (a, b)$ en G differentieerbaar in $y_0 = F(x_0) \in (c, d)$. Vul de expansie voor $y = F(x)$ in in de expansie

$$G(y) = G(y_0) + G'(y_0)(y - y_0) + S(y)$$

en bewijs dat

$$x \to G(F(x))$$

differentieerbaar is in x_0. Hint: de afgeleide in x_0 leest zich af uit

$$G(F(x)) = G(y) = G(y_0) + G'(y_0)(F(x - F(x_0)) + S(y) =$$

$$G(y_0) + G'(y_0)F'(x_0)(x - x_0) + G'(y_0)R(x) + S(y)$$

Laat zien zien dat ook hier de (deels nog uit te werken) restterm de juiste eigenschappen heeft.

Opgave 4.15. Schrijf de lineaire benaderingen ook met $h = x - x_0$ en $k = y - y_0$ als $F(x_0) + F'(x_0)h$ en $G(y_0) + G'(y_0)k$ en zie hoe in de lineaire benadering

$$G(F(x_0 + h)) = G(F(x_0)) + G'(y_0)F'(x_0)h + o(h)$$

de term met h verschijnt door $k = F'(x_0)h$ te substitueren in $G'(y_0)k$. Anders gezegd, verifieer dat

$$h \xrightarrow{F'(x_0)} F'(x_0)h = k \xrightarrow{G'(y_0)} G'(y_0)k = G'(y_0)F'(x_0)h. \tag{4.11}$$

De coëfficiënt $G'(y_0)F'(x_0)$ van $h = x - x_0$ lezen we af als de afgeleide van $G(F(x))$ in x_0.

Met $x = x_0 + h$ is h een coördinaat om het gedrag van $y = F(x)$ en dus ook van $k = F(x) - F(x_0)$ rond $(h, k) = (0, 0)$ te beschrijven. In de kettingregel hebben we met $y = F(x)$ en $z = G(y)$ voor

$$k = F(x) - F(x_0) \quad \text{en} \quad l = G(F(x)) - G(F(x_0))$$

de grafieken

$$k = F'(x_0)h + o(h) \quad \text{en} \quad l = G'(y_0)k + o(k) = G'(y_0)F'(x_0)h + o(h)$$

in het h, k-vlak, het k, l-vlak en het h, l-vlak rond respectievelijk $(h, k) = (0, 0)$, $(k, l) = (0, 0)$ en $(h, l) = (0, 0)$.

Opgave 4.16. Leg uit waarom Opgave 4.9 achteraf overbodig was. Gebruik de vorige opgaven om de eveneens overbodige quotiëntregel voor de afgeleide van

$$x \to \frac{G(x)}{F(x)}$$

in x_0 af te leiden in het geval dat $F(x_0) \neq 0$.

Opgave 4.17. Differentieerbaar in x_0 impliceert continu in x_0 en daarmee dat alle "nieuwe" functies hierboven onder de aannamen ook continu zijn in x_0. Daarvoor was continuïteit van de ingrediënten natuurlijk voldoende. Formuleer en bewijs de voor de hand liggende uitspraken over continuïteit.

4.4 Nice examples: power series

Have a look at the formula above (4.5) in Section 4.1 and Section 1.1.8. With

`(copy/paste in latex, replace ^k by ^\infty)`

we have

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n a^{n-1}(x-a) + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n R_{a,n}(x), \tag{4.12}$$

in which we read of

$$P'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n a^{n-1} \tag{4.13}$$

because

$$|\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n R_{a,n}(x)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}(x-a)^2 \leq \varepsilon |x-a| \tag{4.14}$$

for

$$|x-a| \leq \delta \quad \text{met} \quad \delta \sum_{n=2}^{\infty} |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} = 2\varepsilon. \tag{4.15}$$

The only condition[8] to put is that the sums

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n a^{n-1}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}$$

exists for $|x| \leq r$ and $|a| \leq r$ via the notions in Section 1.1.8. In view of

$$1 \leq n \leq \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{1}{2} n^2 \quad (n \geq 2)$$

this will certainly be the case if the sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\alpha_n| r^n \tag{4.16}$$

exists.

[8] I suggest to introduce the results in Section 5.8 as a fact here.

Opgave 4.18. Determine the allowed values of r for respectively $\alpha_n = 1$, $\alpha_n = \frac{1}{n!}$ en $\alpha_n = n!$.

In (4.16) holds for some $r > 0$, then

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

is differentiable on $[-r, r]$, with (replace a in (4.13) by x)

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1} x^n$$

for all $x \in [-r, r]$. The r-values for which (4.16) exists form an interval $I_2 \subset [0, \infty)$ with $0 \in I_2$. In fact for every $k \in \mathbb{N}$ we can define

$$I_k = \{r \geq 0 : \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\alpha_n| r^n \text{ exists}\}.$$

Opgave 4.19. It is clear that

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots ,$$

Prove the existence of $R \in [0, \infty]$ with for every $k \in \mathbb{N}$ either $I_k = [0, R)$ or $I_k = [0, R]$ and give examples of $R = 0$, $R = 1$ and $R = \infty$.

Summing up:

Stelling 4.20. *Every powerseries expression of the form*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

with $\alpha_n \in \mathbb{R}$ for $n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ has a radius of existence $R \in [0, \infty]$. For $x \in \mathbb{R}$ with $|x| < R$ it holds that

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1} x^n,$$

in which p is the derivative of P on $\{x \in \mathbb{R} : |x| < R\}$ and P is THE primitive of p with $P(0) = \alpha_0$. For $x \in \mathbb{R}$ with $|x| > R$ de terms in both expressions are unbounded and none of the two sums exists.

Thus $P(x)$, with α_0 free, is the only powerseries expression of this form that has $p(x)$ derivative. Stelling 4.20 is really a combined statement about P and p. Of course there might be other primitive functions. In the simplest case that $p(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}$ the answer is no, see Stelling 7.5 and further. Thus P is unique, modulo the choice of $P(0)$, in the class of all differentiable functions.

Met uitdrukkingen zoals $P(x)$ kunnen we nu eenvoudige differentiaalvergelijkingen oplossen. Bijvoorbeeld de *differentiaalvergelijking*

$$F'(x) = F(x). \tag{4.17}$$

Welke functies zijn differentieerbaar met afgeleide gelijk aan zichzelf? Probeer maar een machtreeks. Term voor term uitschrijven helpt om te zien wat er gebeurt. Als

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^6 + \alpha_7 x^7 + \cdots$$

met convergentiestraal R dan is voor $|x| < R$ de afgeleide gelijk aan

$$P'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + 4\alpha_4 x^3 + 5\alpha_5 x^4 + 6\alpha_6 x^5 + 7\alpha_7 x^6 + 8\alpha_8 x^7 + \cdots,$$

en dus is

$$P'(x) - P(x) = (\alpha_1 - \alpha_0) + (2\alpha_2 - \alpha_1)x + (3\alpha_3 - \alpha_2)x^2 + (4\alpha_4 - \alpha_3)x^3 + \cdots,$$

hetgeen alleen maar 0 is als

$$0 = \alpha_1 - \alpha_0 = 2\alpha_2 - \alpha_1 = 3\alpha_3 - \alpha_2 = 4\alpha_4 - \alpha_3 = \cdots!$$

Het uitroepteken staat er niet voor niets bij. Een waarheid als een koe. Toch? Of niet? Ja, wel!

Opgave 4.21. Neem aan dat $r > 0$ en dat $P(x)$ convergent is voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < r$, en dat $P(x) = 0$ voor al die x. Waarom is $\alpha_0 = 0$? Haal vervolgens x buiten haakjes en concludeer dat $\alpha_1 = 0$, waarom? Etc.

Toegepast op de verschilmachtreeks zien we de recurrente betrekking

$$\alpha_n = \frac{\alpha_{n-1}}{n}$$

verschijnen. Als bijvoorbeeld $\alpha_0 = 1$ worden de volgende coëfficienten gegeven door

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \alpha_3 = \frac{1}{2}\frac{1}{3},\ \alpha_4 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4},\ \cdots,$$

m.a.w.

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \quad \text{voor alle} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Stelling 4.22. *Laat $r > 0$. De enige machtreeks die voldoet aan zowel $P'(x) = P(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < r$ als aan $P(0) = 1$ is*

$$P(x) = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \cdots .$$

Opgave 4.23. Laat zien dat de reeks in Opgave 4.22 voor elke $x \in \mathbb{R}$ convergent is. De machtreeks heeft dus convergentiestraal $R = \infty$ en is zijn eigen afgeleide.

Definitie 4.24. *Voor een functie $F : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ zeggen we dat $F(x) \to 0$ als $x \to \infty$, als er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\xi \in [a, \infty)$ bestaat waarmee geldt:*

$$x \geq \xi \implies |F(x)| \leq \varepsilon.$$

.

Opgave 4.25. Laat zien dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\frac{x^n}{\exp(x)} \to 0 \quad \text{als} \quad x \to \infty,$$

de bekende standaardlimiet die zegt dat $\exp(x)$ het wint van elke macht van x.

4.5 De natuurlijke logaritme

Expliciete schattingen zijn handig als je sommen wil nemen zoals in de stap van monomen x^n naar machtreeksen als in (4.12). Bijvoorbeeld om de vraag te beantwoorden voor welke $x \in \mathbb{R}$ de Laurentreeks

$$L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n x^n = \cdots + \frac{\alpha_{-2}}{x^2} + \frac{\alpha_{-1}}{x} + \alpha_0 + \alpha x + \alpha_2 x^2 + \cdots$$

convergent is en term voor term gedifferentieerd kan worden, met $|x|$ niet te groot voor de positieve machten en $|x|$ niet te klein voor de negatieve machten. Verzin hiertoe eerst maar een mooie variant in de vorm

$$\frac{1}{x^7} = \frac{1}{a^7} - \frac{7}{a^8}(x - a) + R_a(x).$$

Misschien doe je dit liever eerst voor de functie

$$x \to \frac{1}{x},$$

die bij de omgekeerde operatie (primitiveren) meteen het buitenbeentje is, want geen afgeleide van een algebraïsche functie!

Definitie 4.26. *Voor $x > 0$ wordt $\ln x$, de natuurlijke logaritme van x, wat onnatuurlijk gedefinieerd door*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{s}\, ds.$$

Opgave 4.27. Leidt rechtsreeks uit de definities af dat voor $0 < a < b$, $f \in \mathrm{RI}([a,b])$ en $c > 0$ geldt dat

$$\int_a^b (f(x)\, dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(\frac{x}{c})\, dx,$$

en gebruik dit om voor $x > 1$ en $y > 1$ de integraal voor $\ln y$ te schrijven als integraal van x tot xy. Concludeer dat

$$\ln xy = \ln x + \ln y.$$

Bewijs dat deze identiteit geldt voor alle $x, y \in \mathrm{IR}^+$. Hint: laat apart zien dat

$$\ln x + \ln \frac{1}{x} = 0$$

voor alle $x > 0$.

Opgave 4.28. Uit de definitie volgt dat $\ln$ een strict stijgende functie is op IR^+. Bewijs en gebruik de ongelijkheid

$$\ln n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

om te laten zien[9] dat $\ln x \to \infty$ als $x \to \infty$. Geef daarvan en daartoe ook een definitie zoals Definitie 4.24. Wat geldt er voor $x \to 0$?

Opgave 4.29. Vanwege Opgave 4.28 en Stelling 7.16 heeft $\ln$ een inverse functie $F : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}^+$. Laat zie dat uit de stelling ook volgt dat $F(0) = 1$ en $F'(y) = F(y)$ voor alle $y \in \mathrm{IR}$. Leg uit waarom $\ln$ maar één inverse functie kan hebben en concludeer dat $F = \exp$.

[9] Kijk nog even naar (**??**).

Opgave 4.30. Laat zien dat $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, en dat met $e = \exp(1)$ gedefinieerd door

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{x}\, dx = 1$$

geldt dat

$$\exp(\frac{p}{q}) = e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}$$

voor alle $p \in \mathbb{Z}$ en alle $q \in \mathbb{N}$. Bij afspraak is $e^x = \exp(x)$ ook voor alle andere $x \in \mathbb{R}$.

Waarom die afspraak? In Opgave 4.30 zijn machten van e^x van e eerst voor $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ uitgewerkt. Voor zulke x vallen $\exp(x)$ en e^x dus samen. Omdat $x \to \exp(x)$ een differentieerbare en dus continue functie is geldt nu dat $e^r = \exp(r) \to \exp(x)$ als $r \to x$ langs $r \in \mathbb{Q}$, hetgeen de algemene consensus dat e^x als limiet van e^r gedefinieerd MOET worden wel rechtvaardigt: bij deze is e^x dus voortaan gelijk aan $\exp(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Over de uitspraak e tot de macht x kan in rede[10] getwist worden.

Voor machten x^α van een willekeurige $x > 0$ is het verhaal precies hetzelfde. Met de hierboven gevonden rekenregels voor exp en ln is eerst

$$x^n = (e^{\ln x})^n = e^{n \ln x}$$

voor $n \in \mathbb{N}$, vervolgens leid je af dat $n \in \mathbb{N}$ door $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ vervangen mag worden en eenzelfde consensus als voor de e-macht is nu gerechtvaardigd:

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad \text{voor} \quad x > 0 \quad \text{en} \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4.18}$$

Het is leuk om daar even reëel mee te spelen. De volgende twee opgaven zijn een eerste kennismaking met *asymptotische formules*. De notatie

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{voor} \quad x \to a \tag{4.19}$$

betekent bij afspraak dat

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \quad \text{als} \quad x \to a,$$

waarbij voor a bijvoorbeeld 0 of ∞ mag worden gelezen. Zulke formules worden ook gebruikt met $n \in \mathbb{N}$ i.p.v. $x \in \mathbb{R}$. Bijvoorbeeld

$$n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{als} \quad n \to \infty, \tag{4.20}$$

[10] Over e tot de macht πi niet natuurlijk, komt geen machtsverheffen bij van pas.

de formule van *Stirling* waarover we hier iets minder uitgebreid dan in [HM] nog over komen te spreken.

Als wat links van het $\sim$ teken lastig te doorgronden is en de rechterkant wel transparant is dan kunnen dit soort uitspraken bijzonder nuttig zijn. Kwestie van smaak soms, want de keuze van $g(x)$ ligt uiteraard niet vast.

Opgave 4.31. Onderzoek de functie $F : x \to x^x$ met $x \in \mathbb{R}^+$ m.b.v. de definitie in (4.18). Schets de grafiek. Bepaal een zo simpel mogelijke functie $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ zodanig dat

$$F(x) - 1 \sim xg(x)$$

als $x \to 0$, i.e.

$$\frac{F(x) - 1}{xg(x)} \to 1.$$

Als we $F(0) = 1$ stellen is F dan (rechts)differentieerbaar in $x = 0$?

Opgave 4.32. Omdat x^x strict stijgend is in x als x voldoende groot is (groter dan wat?) heeft $x \to x^x$ een inverse functie $y \to f(y)$ gedefinieerd voor y voldoende groot. Laat zien dat f gedefinieerd is door de vergelijking $x \ln x = \ln y$, breng $\ln x$ naar de andere kant en gebruik de formule die je dan krijgt voor x weer in de rechterkant teneinde een zo simpel mogelijke $g(y)$ te vinden zodanig dat

$$f(y) \sim \frac{\ln y}{g(y)}$$

als $y \to \infty$. Hint: uitdrukkingen met x en y die je naar 1 wil laten gaan kun je in x uitdrukken en vervolgens via $t = \ln x$ en Opgave 4.25 behandelen.

4.6 Zijstapje: tetratie

Dit is een verhaaltje over a tot de macht a tot de macht a tot de macht a en ga zo maar door, dat voor $a > 1$ niet alleen in verband staat met een echte[11] toepassing, maar ook voor $a \to 0$ laat zien hoe a tot de macht a tot de macht a tot huppeldepup maar niet kan kiezen tussen 0 en 1.

Neem daartoe voor $a > 0$ de rij gegeven door

$$x_0 = 1, \quad x_1 = a, \quad x_2 = a^a, \quad x_3 = a^{a^a}, \quad x_4 = a^{a^{a^a}}, \ldots,$$

[11] Vraag het Henk Knoester van Tejin Twaron of anders Federico Camia (die zag het).

dus x_n, notatie ook wel $x^n = {}^n a$, is gedefinieerd door

$$x_n = a^{x_{n-1}} = F_a(x_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{met} \quad x_0 = 1.$$

Een zogenaamd *discreet dynamisch systeem* waarbij de afbeelding

$$x \to F_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

wordt geitereerd.

Opgave 4.33. Voor $a > 1$ is er een kritieke waarde $a = a_c$ waarvoor de grafiek $y = F_a(x)$ de diagonaal $y = x$ in het x, y-vlak raakt[12]. Bepaal a_c en de limiet van de rij ${}^n a_c$ voor $n \to \infty$. Bewijs de uitspraken die je doet.

Opgave 4.34. Laat zien dat de vergelijking $F_a(x) = x$ voor $1 < a < a_c$ twee oplossingen $\underline{a} < \bar{a}$ heeft, en dat de rij ${}^n a$ voor $n \to \infty$ naar $\underline{a}$ convergeert. Laat zien dat voor $a > a_c$ de rij ${}^n a$ naar oneindig gaat als $n \to \infty$.

Opgave 4.35. Laat zien dat de vergelijking $F_a(x) = x$ voor $0 < a < 1$ één oplossing $x = \underline{a}$ heeft, en dat de rij ${}^n a$ voor $n \to \infty$ naar $\underline{a}$ convergeert als $a > a^*$ met a^* gegeven door een conditie op $F_a'(\underline{a})$. Wat is die conditie? Bepaal a^* exact.

Opgave 4.36. Laat zien dat voor $0 < a < a^*$ de rij ${}^{2n} a$ convergeert naar één van de drie oplossingen van de vergelijking $F_a(F_a(x)) = x$ die geen oplossing is van $F_a(x) = x$, en dat de rij ${}^{2n-1} a$ naar de andere oplossing convergeert. Noem die limieten $\bar{b}$ en $\underline{b}$. Deze hangen van a af. Wat gebeurt er met $\bar{b}$ en $\underline{b}$ als $a \to 0$?

4.7 Meer differentiaalvergelijkingen

De machtreeks voor $\exp(x)$ als oplossing van een differentiaalvergelijking smaakt naar meer.

Stelling 4.37. *Laat $r > 0$. De enige machtreeks die voldoet aan zowel $P''(x) + P(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < r$, als aan $P(0) = 0$ en $P'(0) = 1$, is*

$$P(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots .$$

[12] Lees: $F_a(x) = x, F_a'(x) = 1$.

Opgave 4.38. Bewijs Stelling 4.37. Schrijf $P(x)$ in de fatsoenlijke somnotatie zonder stippels. Wat is de convergentiestraal? Wat is de afgeleide van $\sin$? Noem deze functie maar $\cos$. Wat is de afgeleide van $\cos$?

Dat $\exp(x)$, $\sin x$, $\cos x$ zijn[13] wat ze, moeten zijn, namelijk $e = \exp(1)$ tot de macht x, en sinus en cosinus van een hoek x in radialen, is nog niet meteen duidelijk[14] . Ook willen we wel even zeker weten dat er geen andere functies dan deze machtreeksen zijn met de eigenschappen die $\exp(x), \cos x, \sin x$ als machtreeks uniek definiëren. Eenzelfde vraag is reeds beantwoord voor functies met de eigenschap dat $F'(x) = 0$ voor alle x met $|x| < r$.

De eigenschappen van cos en sin zijn natuurlijk te halen uit het feit dat de reeksen van $\cos x$ en $\sin x$ net als die voor $\exp(x)$ absoluut convergent zijn voor alle $x \in \mathbb{R}$ en dus uitvermenigvuldigd[15] kunnen worden. Dat is wat gepriegel.

Opgave 4.39. Laat zien dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

door voor $\cos x$ en $\sin x$ de machtreeksen in te vullen, de kwadraten[16] uit te werken en op te tellen.

Opgave 4.40. Bewijs de gelijkheid in Opgave 4.39 zonder al dat rekenwerk door op te merken dat $\cos^2 x$ en $\sin^2 x$ als kwadraten van machtreeksen weer machtreeksen zijn. Hint: hun som is dus ook een machtreeks. Wat weet je via Opgave 4.37 van de afgeleide van die machtreeks? Dus?

Bovenstaande opgaven zijn nuttige oefeningen[17], maar inzicht bieden ze niet echt. De machtreeksen zijn oplossingsformules voor een differentiaalvergelijking die met $F''(x) + F(x) = 0$ een notatie heeft die de tenen van een

[13] We zouden eigenlijk $\sin(x)$ en $\cos(x)$ moeten schrijven, maar dat doet vrijwel niemand.

[14] Voor exp inmiddels wel, maar alleen dankzij ln.

[15] Bewijs (met Stelling 5.30) en gebruik daarna dat voor absoluut convergente reeksen

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{m=0}^{\infty} b_m) = \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}). \tag{4.21}$$

[16] Lees $\cos^2 x = (\cos x)^2$ en idem voor sin.

[17] En aanbevolen voor wie niet van formules houdt.

natuurkundige terecht doen krommen. Dit is namelijk de vergelijking voor een harmonische oscillator die we bij voorkeur schrijven als

$$\ddot{x} + x = 0,$$

waarin x de afhankelijke grootheid (plaats) is en t de onafhankelijke grootheid, die overeenkomt met wat wiskundigen de hoek in radialen noemen. Dus $x = x(t)$ en $\ddot{x}$ staat voor de tweede afgeleide van $t \to x(t)$. Oplossingen zijn periodiek met periode 2π. Het verband met cirkels en met name *eenparige* cirkelbewegingen[18] via $y = -\dot{x}$ in het x, y-vlak is natuurlijk de moeite van het bespreken waard en we verwijzen in dit verband naar [HM].

Met name omdat formules als

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

en de vorm van de grafiek van $x = \sin t$ in het t, x-vlak bij voorkeur uit de differentiaalvergelijking gehaald worden en juist niet uit de oplossingsformules. Maar voor wie meer wil rekenen met zulke formules, het is zeker niet verboden, zeer leerzaam zelfs:

Opgave 4.41. Bewijs met de theorie tot nu toe door middel van o.a. machtsreeksberekeningen dat $\sin$ een periodieke functie is met een periode die we wel 2π mogen noemen, en dat $-\sin(-x) = \sin x = \sin(\pi - x) > 0$ voor $0 < x < \pi$. Schets de grafiek van $\sin$.

Terug naar de differentiaalvergelijking $F'(x) = F(x)$: wat nog niet duidelijk is of er nog andere oplossingen zijn dan machtreeksoplossingen. Te prefereren is wellicht een directe uitspraak dat oplossingen van zulke differentiaalvergelijkingen altijd wel machtreeksen moeten zijn. Voor nu is het echter de (later wellicht overbodige[19]) vraag of een functie F die aan $F'(x) = F(x)$ voldoet op een interval I, op dat interval nulpunten kan hebben, zonder[20] op dat zelfde interval de nulfunctie te zijn.

We beantwoorden die vraag nu door juist te kijken naar oplossingen die ergens positief zijn (voor negatief is het argument hetzelfde door naar $-F(x)$ te kijken).

[18] Zie op Valentijnsdag 2017 de Bildungsscheurkalender van Henk Sissing.
[19] Dat zijn soms de belangrijkste vragen...
[20] Als je weet dat $F(x + y) = F(x)F(y)$ ben je natuurlijk wel meteen klaar.

Opgave 4.42. Laat $I \subset \mathbb{R}$ een open interval zijn en $F : I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar met $F'(x) = F(x)$ voor alle $x \in I$ en $(a, b) \subset I$ een maximaal open interval waarop $F(x) > 0$. Dan is $(a, b) = I$. Bewijs dit door de vergelijking op te lossen via scheiding van variabelen onder de aanname dat $F(x) > 0$, gebruikmakend van ondermeer Opgave 4.14 en

$$F'(x) = F(x) \iff \frac{F'(x)}{F(x)} = 1 \iff \ln(F(x)) = x + C \iff F(x) = e^{x+c}$$

Opgave 4.43. Dezelfde vraag als in Opgave 4.42 maar nu voor $F : I \to \mathbb{R}$ die voldoet aan $F'(x) = F(x)g(x)$ met $g : I \to \mathbb{R}$ continu. Los de differentiaalvergelijking ook weer (zoals dat op school genoemd wordt) exact op m.b.v. een primitieve G van g.

Opgave 4.44. Voor $\alpha \in \mathbb{R}$ voldoet de functie $F_\alpha : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^+$ gedefinieerd door $F_\alpha(x) = (1 + x)^\alpha$ aan een differentiaalvergelijking zoals in Opgave 4.43. Schrijf deze in de vorm $(1 + x)F'(x) = \alpha F(x)$ en bepaal een machtreeksoplossing van de vorm

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots .$$

Schrijf de coëfficienten in een vorm waarmee je in het geval $\alpha = n \in \mathbb{N}$ het binomium van Newton herkent. De convergentiestraal van deze machtreeks (voor $\alpha \notin \mathbb{N}_0$) is $R = 1$. Kun je dat aantonen? Waarom volgt nu dat $F_\alpha(x)$ (alleen) voor $|x| < 1$ gelijk is aan de machtreeks[21] die je net hebt uitgerekend?

Opgave 4.45. Schrijf een paar termen uit van[22]

$$\sqrt[n]{1 + x} = 1 + \frac{x}{n} + \cdots \quad \text{en} \quad \frac{1}{\sqrt[n]{1 + x}} = 1 - \frac{x}{n} + \cdots$$

Bovenstaande opgaven bevatten ad hoc argumenten om de oplossing van een eerste orde lineaire differentiaalvergelijking gegeven een randvoorwaarde als machtreeks te identificeren. Voor vergelijkingen als $F''(x)+F(x) = 0$ gaat

[21] Om echt te onthouden is $\alpha = -1$, ook $\alpha = \pm\frac{1}{n}$ komt vaak van pas.
[22] Zie weer [Eves, §2.5] over het gebruik van zulke reeksen voor YBC7289?

het rekenwerk net zo, maar zijn de ad hoc argumenten wat anders, een reden te meer om de ad hoc redenaties te vervangen door een aanpak gebaseerd op integraalvergelijkingen, die we oplossen in de vectoruimte van continue functies op gesloten begrensde intervallen, in $C([a,b])$ dus. Dat doen we in Sectie 14.4.

Een alternatieve vraag om wellicht hier al te stellen blijft hoe je van een functie gedefinieerd als oplossing van zo'n integraalvergelijking, bijvoorbeeld

$$F(x) = 1 + \int_0^x F(s)\, ds, \tag{4.22}$$

meteen ziet dat de functie, in ieder geval voor $|x|$ kleiner dan een te bepalen en zo groot mogelijke r, gegeven wordt door een ondubbelzinnig gedefinieerde machtreeks.

4.8 Meer inverse functies

In Sectie 7.3 hadden we nog niet zoveel functies tot onze beschikking, maar nu wel. Hier volgen wat opgaven om de belangrijkste functies de revue te laten passeren.

Opgave 4.46. Laat zien dat de functie

$$x \to \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

strict stijgend is op $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ en een inverse

$$y \to \arctan y$$

heeft op $\mathbb{R}$ met afgeleide

$$\frac{1}{1+y^2}$$

en leid hieruit af dat

$$\arctan y = y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 - \cdots$$

voor $|y| < 1$.

Opgave 4.47. Laat zien dat de functie

$$x \to \sin x$$

strict stijgend is op $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ en een inverse

$$y \to \arcsin y$$

heeft op $(-1, 1)$ met afgeleide

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

en leid hieruit een machtreeks af voor $\arcsin y$ voor $|y| < 1$.

Opgave 4.48. Ook

$$x \to \cos x$$

is strict montonoon op een maximaal open interval, bijvoorbeeld op $(0, \pi)$. Laat zien dat voor de inverse geldt dat $\arccos y + \arcsin y$ constant is op $(-1, 1)$. Wat is de constante?

4.9 Rare voorbeelden

Er zijn ook functies $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ die in elke $x_0 \in [a, b]$ differentieerbaar zijn met een afgeleide $F'(x_0)$, waarvoor $F' : [a, b] \to \mathbb{R}$ wel als functie

$$x \to F'(x) \tag{4.23}$$

is gedefinieerd maar niet in $C([a, b])$ zit. Dat komt omdat de meest *vreemde functies* differentieerbaar kunnen zijn.

Opgave 4.49. Als $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie is die continu is in $x = 0$ met waarde $g(0) = 0$, dan is de functie $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $R(x) = xg(x)$ differentieerbaar in $x = 0$ met afgeleide $R'(x) = 0$. Laat dit zien rechtstreeks vanuit Definitie 7.1.

Voor de functie g in Opgave 4.49 kun je bijvoorbeeld $g(x) = 0$ voor $x \in \mathbb{Q}$ en $g(x) = x$ voor $x \notin \mathbb{Q}$ nemen. Zo krijg je een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die in geen enkele $x \neq 0$ continu is maar wel differentieerbaar is in $x = 0$.

Opgave 4.50. Definieer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f(0) = 0$ en (voor $x \neq 0$)

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}.$$

Laat zien dat f in elke $x \in \mathbb{R}$ differentieerbaar is maar dat $f_7'(x)$ niet eens begrensd is op het interval $[0,1]$. Hint: gebruik dat de functies $\cos$ en $\sin$ periodiek zijn maar niet constant.

Opgave 4.51. Definieer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f(0) = 0$ en (voor $x \neq 0$)

$$\exp(-\frac{1}{x^2}).$$

Schets de grafiek van f. Laat met de theorie tot nu toe zien dat f afgeleiden $f', f'', \ldots$ van iedere orde heeft en dat in $x = 0$ alle afgeleiden van f gelijk zijn aan 0.

4.10 Stirling's formule via schalen en limieten

We hebben partieel integreren in Sectie 7.10 gebruikt om Taylorbenaderingen te maken, maar partieel integreren wordt natuurlijk ook gebruikt om gewoon integralen uit te rekenen. Een mooi voorbeeld is de integraalformule voor $n!$ met $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 4.52. Bereken

$$\int_0^\infty \exp(-x)\,dx, \quad \int_0^\infty x\exp(-x)\,dx, \quad \int_0^\infty x^2\exp(-x)\,dx, \quad \int_0^\infty x^3\exp(-x)\,dx,$$

en geef voor $n!$ een integraalformule[23]. NB Dit zijn zogenaamde oneigenlijke integralen, zie Definitie **??**. Lees dus

$$\int_0^\infty = \lim_{R\to\infty} \int_0^R$$

en doe daar verder vooral niet te moeilijk over (maar leg wel uit welke al behandelde standaardlimiet je steeds gebruikt).

Met Opgave 4.52 komen we nu terug op (4.20). Waar die formule vandaan komt wordt aanstonds duidelijk.

Opgave 4.53. Schets de grafiek $y = x^n e^{-x}$ (voor n nog niet te groot) in het x, y-vlak. Waar ligt de top van de berg? *Teken plaatje!*

[23] Het is niet verboden om die formule met inductie te bewijzen hoor.

Opgave 4.54. Door de in Opgave 4.52 gevonden integraal voor $n!$ met het maximum van de integrand te schalen en horizontaal te schuiven volgt dat

$$n! = (\frac{n}{e})^n \int_{-n}^{\infty} g_n(x)dx$$

met

$$g_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n e^{-x}$$

Laat dit zien m.b.v. (4.18) en schets de nieuwe grafiek $y = g_n(x)$.

Opgave 4.55. De eerste factor van $g_n(x)$ is de rente op rente benadering van e^x die in [HM] in detail wordt besproken alvorens $\exp(x)$ wordt gedefinieerd als de puntsgewijze limiet van

$$e_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$$

voor $n \to \infty$. Verifieer deze limiet met wat je nu aan tools tot je beschikking hebt ,en ook dat $e_n(x)$ stijgt met n voor $x > -n$.

Bijgevolg stijgt $g_n(x)$ dus naar 1 voor elke $x \in \mathbb{R}$. Omdat $g_n(x)$ stijgend is in x voor $x \in [-n, 0]$ en dalend in x voor $x \geq 0$ is wel duidelijk dat

$$\int_{-n}^{\infty} g_n(x)dx \to \infty$$

als $n \to \infty$. Kunnen we het gebied waarvan deze integraal de oppervlakte geeft horizontaal schalen (met een n-afhankelijke schaalfactor) teneinde wel een eindige limiet te krijgen?

Opgave 4.56. Schrijf daartoe

$$g_n(x) = e^{-\psi_n(x)} \quad \text{met} \quad \psi_n(x) = -\ln(g_n(x)),$$

en verifieer dat

$$\psi_n(x) = x - n\ln(1 + \frac{x}{n}) = n(\frac{x}{n} - \ln(1 + \frac{x}{n})) = n\psi_1(\frac{x}{n}).$$

De rij functies ψ_n ontstaat dus door schalen uit één en dezelfde functie $\Psi = \psi_1$, en die functie heeft als formulevoorschrift

$$\Psi(x) = x - \ln(1 + x). \tag{4.24}$$

Hoe ziet de grafiek van Ψ eruit? Je weet al dat $\Psi(0) = \Psi'(0) = 0$ omdat $g_n(x)$ een maximum ter grootte 1 heeft in $x = 0$. Omdat

$$\Psi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \sim x$$

als $x \to 0$, volgt voor Ψ zelf dat

$$\Psi(x) \sim \frac{1}{2}x^2$$

als $x \to 0$. De grafiek van Ψ wordt verder gekenmerkt door een verticale asymptoot bij $x = -1$ en bijna-lineaire groei voor $x \to \infty$.

Wel een schetsje waard deze grafiek maar belangrijker is dat voor ψ_n nu geldt dat *Teken plaatje!*

$$\psi_n(x) = n\Psi(\frac{x}{n}) \sim \frac{x^2}{2n},$$

niet alleen voor $x \to 0$, maar ook voor $\frac{x}{n} \to 0$, hetgeen steeds grotere x toelaat, maar waarbij in de limiet $n \to \infty$ niets overblijft.

Een schaling waarbij wel wat overblijft lezen we onmiddellijk af. We moeten x zo schalen dat de n in het rechterlid verdwijnt, en dus substitueren we $x = s\sqrt{n}$. Met deze schaling volgt nu dat

$$n! = (\frac{n}{e})^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}})} ds \tag{4.25}$$

In de integrand zien we een nieuwe anders geschaalde versie van Ψ, die we zo hebben gekozen dat voor elke n geldt dat

$$n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{2}s^2, \tag{4.26}$$

nu niet alleen voor $s \to 0$, maar ook voor $\frac{s}{\sqrt{n}} \to 0$. Het fraaie is dat met grotere n deze geschaalde $\Psi(s)$ steeds meer op zijn kwadratische benadering bij $s = 0$ gaat lijken. We zoomen zó in op de oorsprong dat in de limiet alleen de parabool overblijft, juist omdat we (de grafiek van) Ψ verticaal en horizontaal anders schalen. De schaling is zo gekozen dat $\frac{1}{2}s^2$ van schalen niets merkt en in de limiet $n \to \infty$ wordt het linkerlid in (4.26) gelijk aan het rechterlid. De linkergrens van de integraal schuift daarbij op naar $-\infty$.

Wat we nu nog moeten doen om te kunnen concluderen dat

$$n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \tag{4.27}$$

als $n \to \infty$ is bewijzen dat

$$\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}})} ds \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \tag{4.28}$$

als $n \to \infty$. Puntsgewijs geldt weliswaar dat

$$f_n(s) = e^{-n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}})} \to e^{-\frac{1}{2}s^2}$$

als $n \to \infty$, maar dat op zich is niet genoeg om (4.28) te kunnen concluderen.

Opgave 4.57. Bereken de afgeleide van $f_n(s)$ naar n voor vaste s en laat zien dat deze afgeleide een teken heeft dat alleen van het teken van s afhangt. Hint: gebruik de formule voor Ψ pas op het allerlaatst.

We zien nu dat, net als hun integranden, de integralen

$$\int_{-\sqrt{n}}^{0} e^{-n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}})} ds \quad \text{en} \quad \int_{0}^{\infty} e^{-n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}})} ds$$

stijgend respectievelijk dalend zijn in n. Zijn deze rijen convergent met limiet respectievelijk

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \quad \text{en} \quad \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds?$$

Een positief antwoord vertelt ons dan dat (4.27) waar is, en alleen de limietintegraal zelf moet dan nog worden uitgerekend. Wat we nodig hebben zijn een paar niet te moeilijke stellingen over het *verwisselen van integralen en limieten*.

Opgave 4.58. Bewijs (4.27) met behulp van de laatste twee opgaven.

5 Convergente (deel)rijen en zo

So far I avoided the concept of continuity and only spoke of uniform continuity. I now return from that choice. Actually we should do this in the more general context of metric spaces, with $\mathbb{R}$ as the first example of such a metric space: therefore Section 6.1 is to be translated and contains my Leiden approach to do so, with inequalities $< \varepsilon$ and $< \delta$ rather than $\leq \varepsilon$ and $\leq \delta$. New for $\mathbb{R}$ compared to the approach in Section 6.1 is Theorem 5.26. In Section 5.5 I also discuss the normed vector space $C([a, b])$ of uniformly continuous realvalued functions f, with norm

$$f \to \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad \text{and metric} \quad d(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$

Only Section 5.1 is needed to continue with Chapter 7 and my original story line, in which Theorem 7.3, Theorem 7.5 as well as Exercise 7.15 are the key results. The latter two we state here as single theorem.

Stelling 5.1. *Suppose that $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ is continuous. Then the range $F([a, b])$ is an interval containing both $F(a)$ and $F(b)$. If in addition F is differentiable on (a, b) then the difference quotient*

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

appears as a value of $F'(x)$ for some $x \in (a, b)$.

5.1 Toch maar wat meer over continuïteit en limieten?

Uniform continue functies $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zijn dus integreerbaar met dezelfde aanpak als monotone functies. Maar hoe weet je of een functie uniform continu is? Wel, bijvoorbeeld als je een schatting van de vorm

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \tag{5.1}$$

hebt voor alle $x, y \in [a, b]$ met een vaste $\alpha > 0$ en een vaste $C > 0$. In het geval dat $\alpha \in (0, 1)$ spreekt men van uniform *Hölder continu* met exponent α, en als $\alpha = 1$ van uniform *Lipschitz continu*. Het geval $\alpha > 1$ is niet heel relevant[1].

Uniforme continuïteit betreft functies op hun hele domein, hierboven steeds $[a, b]$. *Gewone continuïteit* betreft het gedrag van een functie in de buurt van een gegeven punt.

[1] Waarom niet? Leuke opgave: bewijs dat zulke functies constant zijn.

Definitie 5.2. *Als we in Definitie 3.23 de y vast nemen en gegeven iedere $\varepsilon > 0$, altijd een $\delta > 0$ kunnen vinden waarvoor de implicatie geldt voor alle x met $x \in [a, b]$, dan heet f continu in y. We zeggen dan ook dat*

$$f(y) = \lim_{x \to y} f(x),$$

of ook wel

$$f(x) \to f(y)$$

als $x \to y$ (steeds met $x \in [a, b]$). Als deze uitspraak geldt met uitsluiting van $x = y$, en de functiewaarde $f(y)$ vervangen door een $L \in \mathbb{R}$, dan zeggen we dat L de limiet is van $f(x)$ voor $x \to y$.

In Definitie 5.2 kan $[a, b]$ vervangen worden door een willekeurige $I \subset \mathbb{R}$ en in de uitspraak $f(x) \to L$ hoeft y dan niet per se in I te liggen.

De voor de hand liggende vraag is natuurlijk of een $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die continu is in elke $y \in [a, b]$ ook uniform continu is op heel $[a, b]$. Daartoe herformuleren we nu eerst de definitie van $f(x) \to L$ als $x \to y$ in termen van *convergente rijen*.

Definitie 5.3. *Een door $n \in \mathbb{N}$ genummerde[2] rij reële getallen x_n heet convergent als er een (limiet) $\bar{x} \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat er voor alle $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor de implicatie*

$$n \geq N \implies |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon$$

geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$. Zonder woorden luidt deze uitspraak

$$\exists \bar{x} \in \mathbb{R} \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} \, : \, n \geq N \implies |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon.$$

We zeggen dat $x_n \to \bar{x}$ (als $n \to \infty$).

Opgave 5.4. Laat zien dat een convergente rij reële getallen x_n maar één limiet heeft. Hint: stel niet dan zijn er minstens twee limieten, zeg $\bar{x}$ en $\hat{x}$; gebruik

$$|\bar{x} - \hat{x}| = |\bar{x} - x_n + x_n - \hat{x}| \leq |\bar{x} - x_n| + |x_n - \hat{x}|$$

en kies één geschikte ε om een tegenspraak af te leiden met Definitie 5.3.

[2] Of door $n \in k + \mathbb{N} = \{k + j : j \in \mathbb{N}\}$, met $k \in \mathbb{Z}$.

Opgave 5.5. Laat zien dat iedere convergente rij reële getallen x_n begrensd is, i.e. er is een $M \geq 0$ waarvoor geldt dat $|x_n| \leq M$ voor alle n in $\mathbb{N}$. Hint: pas Definitie 5.3 toe met één $\varepsilon > 0$ naar vrije keuze en kies M zo dat $M \geq |x_n|$ voor alle n kleiner dan de bijbehorende N en $M \geq |x_N| + \varepsilon$. Geef een voorbeeld van een begrensde rij die niet convergent en maak die rij convergent door voldoende veel termen van de rij weg[3] te laten.

Opgave 5.6. Laat $f : I \to \mathbb{R}$ en $y, L \in \mathbb{R}$. De uitspraak $f(x) \to L$ als $x \to y$ is equivalent met de uitspraak dat voor elke rij x_n in I de implicatie

$$x_n \to y \implies f(x_n) \to L$$

geldt. Bewijs dit. Hint: rijgen van definities, noem de ε in de uitspraak dat $x_n \to y$ daartoe maar δ.

NB. Het kan gebeuren in Opgave 5.6 dat $y \notin I$ en dat er geen rijen x_n in I zijn met $x_n \to y$. In dat geval zijn beide uitspraken zinloos[4] voor elke $L \in \mathbb{R}$. Zo'n punt $y \notin I$ heet *geen limietpunt* van I. Opgave 5.6 bewijst de volgende stelling[5]:

Stelling 5.7. *Laat $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$. Dan is f continu in x_0 dan en slechts dan als voor elke rij x_n in I met $x_n \to x_0$ geldt dat $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Opgave 5.8. De enige manier waarop $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ niet uniform continu kan zijn is als er een $\varepsilon > 0$ bestaat waarvoor geen bijbehorende $\delta > 0$ te vinden is waarmee de uitspraak in Definitie 3.23 geldt. Kies nu een willekeurige rij $0 < \delta_n \to 0$. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ zijn er dan $x_n, y_n \in [a, b]$ met wel $|x_n - y_n| \leq \delta_n$ maar niet $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$. Neem nu aan[6] dat $y_n \to \eta \in [a, b]$ en leid een tegenspraak af met de continuïteit van f in η. Hint: laat zien dat ook $x_n \to \eta$; wat geldt er dus voor $f(x_n)$ en $f(y_n)$?

Stelling 5.9. *Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu zijn in elk punt van $[a, b]$. Dan is $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uniform continu.*

Bewijs. Stel dat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ niet uniform continu is. Redeneer dan als in Opgave 5.8: als de rij y_n niet convergent is dan kan de rij convergent

[3] Grapje: denk aan ongewenste data.

[4] Maar wel waar.

[5] Waarin n in $\mathbb{N}$ en 0 beschikbaar is voor x_0 als naam voor de limiet van de rij x_n.

[6] Absurde aanname?

gemaakt worden door voldoende elementen van de rij weg te laten (met andere woorden, neem een deelrij) zodanig dat de rij convergent wordt (en de andere rij dus ook). Gebruik hiertoe Stelling 5.13 die zegt dat *iedere begrensde rij in* $\mathbb{R}$ een convergente deelrij heeft. Noem de limiet van de deelrij η, laat zien dat $\eta \in [a, b]$ en het werk is gedaan.

De in het bewijs gebruikte Stelling 5.13 is belangrijk genoeg om een eigen hoofdstuk te krijgen. Het is de eerste stelling die we formuleren over het bestaan van een limiet van een (in dit geval deel-)rij zonder die limiet al op de een of andere manier bepaald te hebben. Een poging om het convergent zijn van een rij x_n te formuleren *zonder* de limiet in de definitie te gebruiken gaat terug tot Cauchy en correspondeert met we wat tegenwoordig een Cauchyrij noemen. Vergelijk de volgende definitie daarom nauwkeurig met de eerste zin in Definitie 5.3.

Definitie 5.10. *Een door* $n \in \mathbb{N}$ *genummerde rij reële getallen* x_n *heet een Cauchyrij als er voor alle* $\varepsilon > 0$ *een* $N \in \mathbb{N}$ *bestaat waarvoor de implicatie*

$$m, n \geq N \implies |x_n - x_m| \leq \varepsilon$$

geldt voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

In Definitie 5.10 is $m, n \geq N$ te lezen als $m \geq N$ en ook $n \geq N$. Evenzo is $m, n \in \mathbb{N}$ te lezen als $m \in \mathbb{N}$ en ook $n \in \mathbb{N}$. In het volgende hoofdstuk volgt het convergent zijn van Cauchyrijen via Stelling 5.13 uit het begrensd zijn van Cauchyrijen. Voor nu volstaat een eenmalig beroep op Stelling 5.13 zelf.

Opgave 5.11. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uniform continu zijn. Bewijs dat f begrensd is op $[a, b]$.

Opgave 5.12. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu zijn in elk punt van $[a, b]$. Bewijs dat f een maximum M en een minimum m op $[a, b]$ heeft. Hint: omdat f uniform continu is op $[a, b]$, is f begrensd op $[a, b]$. Laat $M = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$. Dan bestaat er een rij x_n in $[a, b]$ met $f(x_n) \to M$. Neem daarvan een convergente deelrij.

In het bewijs van Stelling 5.9 hebben we voor het eerst gebruik gemaakt van de volgende stelling, waarvan het belang in de analyse moeilijk is te onderschatten, ook als je van mening bent dat'ie eigenlijk triviaal is en verder geen betoog behoeft.

Stelling 5.13. *Iedere begrensde rij x_n in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.*

De lezer die de verhaallijn over integraal- en differentiaalrekening niet te veel wil onderbreken kan eventueel de volgende drie secties overslaan en doorlezen in Sectie 5.7 voor een direct bewijs van Stelling 5.13, maar mist dan leerzame oefeningen met kwantoren en een belangrijke techniek uit de analyse: de truc van de diagonaalrij, waarmee meerdere belangrijke stellingen worden bewezen, waaronder een stelling over begrensde rijen in $C([a,b])$.

5.2 Spelen met kwantoren

Voor we laten zien waarom deze stelling eigenlijk triviaal is spelen we eerst nog wat met de kwantoren $\forall$ en $\exists$.

De kale definitie in Definitie 5.3 met kwantoren van het convergent zijn van de rij x_n wordt ook wel getekstzet als

$$\exists_{\bar{x}\in\mathbb{R}}\,\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{N\in\mathbb{N}}\,\forall_{n\in\mathbb{N}} \;:\; n \geq N \implies |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon,$$

hetgeen misschien net iets prettiger oogt dan alles op dezelfde regelhoogte. We kunnen ook zeggen dat $\bar{x} \in \mathbb{R}$ een limiet is van de rij $x_n \in \mathbb{R}$ als geldt dat

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{N\in\mathbb{N}}\,\forall_{n\in\mathbb{N}} \;:\; n \geq N \implies |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon,$$

en vergelijken deze definitie met de kale versie van $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uniform continu:

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,\forall_{x,y\in[a,b]} \;:\; |x-y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \tag{5.2}$$

Beide definities eindigen met een implicatie, maar $\bar{x} \in \mathbb{R}$ limiet van de rij $x_n \in \mathbb{R}$ schrijven we net zo lief als

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{N\in\mathbb{N}}\,\forall_{n\geq N} \;:\; |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon,$$

waarin we stilzwijgend n altijd in $\mathbb{N}$ nemen. De variant op deze uitspraak die Cauchy bedacht, zie Definitie 5.10, is

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{N\in\mathbb{N}}\,\forall_{m,n\geq N} \;:\; |x_n - x_m| \leq \varepsilon,$$

een rij die hieraan voldoet noemen we een Cauchyrij.

De (logische) ontkenning van $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uniform continu is gebruikt in Opgave 5.8. Die ontkenning krijg[7] je door in een keten van zulke kwantoren de verwisseling

$$\forall \leftrightarrow \exists$$

[7] Overtuig zelf hiervan zonder waarheidstabellen.

toe te passen en de laatste uitspraak te ontkennen. Dit geeft

$$\exists_{\varepsilon>0}\,\forall_{\delta>0}\,\exists_{x,y\in[a,b]}\;:\;|x-y|\leq\delta\wedge|f(x)-f(y)|>\varepsilon$$

als ontkenning van de uniforme continuiteit van $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, waarbij het de implicatie is die in de laatste stap ontkend is: x en y voldoen wel $|x-y|\leq\delta$ maar het is niet zo dat $|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$.

Evenzo is de ontkenning van het convergent zijn van de rij $x_n\in\mathbb{R}$ te formuleren met als laatste stap de ontkenning van de implicatie, maar de formulering dat $\bar{x}\in\mathbb{R}$ geen limiet is van de rij $x_n\in\mathbb{R}$ is natuurlijk ook gewoon de ontkenning van de uitspraak zonder implicatie, i.e.

$$\exists_{\varepsilon>0}\,\forall_{N\in\mathbb{N}}\,\exists_{n\geq N}\;:\;|x_n-\bar{x}|>\varepsilon.$$

Dat en-tekentje $\wedge$ voor de ontkenning van een implicatie is dan niet nodig.

Opgave 5.14. Formuleer de logische ontkenningen van alle quantorenuitspraken hierboven.

5.3 Elementaire opgaven over convergente rijen

Een sectie om over te slaan als je de verhaallijn integraal- en differentiaalrekening niet te veel wil onderbreken, maar deze opgaven zijn een must voor de beheersing van de stof.

Opgave 5.15. Iedere convergente rij in $\mathbb{R}$ is begrensd. Bewijs dit.

Opgave 5.16. Iedere Cauchyrij in $\mathbb{R}$ is begrensd. Bewijs dit.

Opgave 5.17. Iedere convergente rij in $\mathbb{R}$ is een Cauchyrij. Bewijs dit.

Opgave 5.18. Als x_n en y_n convergente rijen zijn in $\mathbb{R}$ dan is de rij x_n+y_n ook convergent in $\mathbb{R}$ met de limiet die je verwacht. Bewijs dit.

Opgave 5.19. Als x_n en y_n convergente rijen zijn in $\mathbb{R}$ dan is de rij $x_n y_n$ ook convergent in $\mathbb{R}$ met de limiet die je verwacht. Bewijs dit.

Opgave 5.20. Als x_n een convergente rij is in $\mathbb{R}$ met $x_n \neq 0$ voor alle n dan is de rij $\frac{1}{x_n}$ ook convergent in $\mathbb{R}$ met de limiet die je verwacht, tenzij de limiet van de rij x_n gelijk is aan 0. Bewijs dit.

Opgave 5.21. Als x_n een convergente rij is in $\mathbb{R}$ dan is de rij $|x_n|$ ook convergent in $\mathbb{R}$ met de limiet die je verwacht. Bewijs dit.

5.4 Limietpunten en convergente deelrijen

Het grappige is dat een wellicht per abuis opgeschreven mix van de uitspraak dat $\bar{x} \in \mathbb{R}$ de limiet van de rij $x_n \in \mathbb{R}$ en de uitspraak dat $\bar{x} \in \mathbb{R}$ juist geen limiet is van de rij $x_n \in \mathbb{R}$ precies de definitie is van een nieuw belangrijk begrip: we zeggen dat $\bar{x} \in \mathbb{R}$ *limietpunt* van de rij $x_n \in \mathbb{R}$ is als

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \forall_{N\in\mathbb{N}} \, \exists_{n\geq N} \; : \; |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon, \tag{5.3}$$

hetgeen iets anders is dan $\bar{x} \in \mathbb{R}$ is limiet van de rij $x_n \in \mathbb{R}$, want dat was

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{N\in\mathbb{N}} \, \forall_{n\geq N} \; : \; |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon. \tag{5.4}$$

De uitspraak in (5.3) is er een om goed te lezen. *Je ziet namelijk vast niet meteen deze uitspraak equivalent is met het bestaan van een convergente deelrij van x_n met limiet $\bar{x}$. Om te onthouden nu is dat een rij met een limiet begrensd is en maar één limiet heeft, terwijl een begrensde rij altijd tenminste één limietpunt (de limiet van een convergente deelrij) heeft*[8]. Merk op dat iedere strict stijgende rij $n_k \in \mathbb{N}$ een deelrij van de rij x_n in $\mathbb{R}$ definieert, genummerd door k in x_{n_k}. Als we het hebben over een deelrij van x_n is dit precies wat we bedoelen: we maken de deelrij door uit de door n genummerde rij x_n alle x_n weg te laten waarvoor n niet als n_k in de gegeven strict stijgende rij $n_k \in \mathbb{N}$ voorkomt. De laatste cursief gedrukte uitspraak is een herformulering van Stelling 5.13 waar dit hoofdstuk in eerste instantie over gaat.

[8] En wellicht een heleboel limietpunten, je kunt het zo gek niet verzinnen.

Opgave 5.22. Bewijs dat een limietpunt van de rij x_n altijd de limiet is van een convergente deelrij x_{n_k}.

Opgave 5.23. Bewijs dat iedere convergente rij begrensd is en geef een voorbeeld van een rij $x_n \in [0,1]$ die als limietpunten alle punten in $[0,1]$ heeft.

Bewijs van Stelling 5.13. Neem nu een rij $x_n \in \mathbb{R}$ die begrensd is, zeg zonder beperking der algemeenheid geheel bevat in $[0,1]$. Dan moet tenminste één van de twee intervallen $[\frac{0}{2},\frac{1}{2}]$ of $[\frac{1}{2},\frac{2}{2}]$ voor oneindig veel n het element x_n bevatten. Noem dat interval $I_1 = [\frac{m_1}{2},\frac{m_1+1}{2}]$. Dus $m_1 = 0$ of $m_1 = 1$, al naar gelang het interval waarin die oneindig veel x_n zitten. Nummer de bijbehorend n met een index j als een strict stijgende rij $n_{1j} \in \mathbb{N}$. De eerste index 1 geeft aan dat dit de eerste deelrij is die we kiezen.

Herhaal vervolgens het argument voor deze deelrij maar nu met de intervallen $[\frac{m_1}{2}+\frac{0}{4},\frac{m_1}{2}+\frac{1}{4}]$ en $[\frac{m_1}{2}+\frac{1}{4},\frac{m_1}{2}+\frac{2}{4}]$. Er is dus een verdere deelrij die geheel in één van de twee intervallen zit. Noem het betreffende interval $I_2 = [\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{4},\frac{m_1}{2}+\frac{m_2+1}{4}]$ en de indices van die verdere deelrij $n_{2j} \in \mathbb{N}$. Enzovoorts. Dit geeft

$$x_{n_{kj}} \in I_k = [\sum_{l=1}^{k} \frac{m_l}{2^l}, \sum_{l=1}^{k} \frac{m_l}{2^l} + \frac{1}{2^{k+1}}]$$

voor alle $j \in \mathbb{N}$. Omdat we steeds verdere deelrijen nemen zijn de n_{kj} strict stijgend in j en niet-dalend in k. We zien dat $x_{n_{kk}}$ een deelrij van de (door $n \in \mathbb{N}$ genummerde) rij x_n is omdat $n_{kk} \in \mathbb{N}$ een strict stijgende rij is.

Opgave 5.24. Maak het bewijs af door de laten zien dat de door k genummerde "diagonaalrij" $x_{n_{kk}}$ een convergente deelrij is. Bewijs dat de limiet $\bar{x}$ van deze deelrij een limietpunt is van de rij, dus dat voldaan is aan (5.3).

5.5 Begrensde rijen continue functies

We merken we op dat in onze mooie Banachruimte[9] $C([a,b])$ de uitspraak over convergente deelrijen van begrensde rijen niet waar is. Niet elke begrensde

[9] Met de maximumnorm.

rij $f_n \in C([a,b])$ heeft een deelrij die in de maximumnorm convergent is[10]. Maar wel als de rij aan deze extra aanname voldoet:

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{\delta>0} \, \forall_{n\in\mathbb{N}} \, \forall_{x,y\in[a,b]} \, : \, |x-y| \leq \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon. \tag{5.5}$$

De rij f_n heet dan equicontinu op $[a,b]$.

De stelling van Ascoli-Arzéla zegt nu dat iedere begrensde en op $[a,b]$ equicontinue rij $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ een uniform convergente[11] deelrij heeft met limiet $\bar{f}$ in $C([a,b])$. Deze stelling is iets minder[12] triviaal maar je bewijst hem met Stelling 5.13, en weer een "diagonaalargument".

Opgave 5.25. Moeilijk: formuleer en bewijs de Stelling van Ascoli-Arzéla zoals hierboven verwoord. Hint: neem zonder beperking der algemeenheid $[a,b] = [0,1]$ en gebruik diagonaalargumenten om een deelrij f_{n_k} te maken die in elk binaire getal

$$\frac{k}{2^l}$$

convergeert. Met de equicontinuiteit van de rij f_n kun je daarna bewijzen dat f_{n_k} een Cauchyrij is in de maximumnorm.

5.6 Overaftelbaarheid van de reële getallen

De diagonaalargumenten hierboven zijn varianten op het argument in het bewijs dat ($\mathbb{Q}$ wel maar) $\mathbb{R}$ geen aftelbare verzameling is. Een bekend bewijs uit het ongerijmde gaat uit van een aftelling van alle getallen tussen 0 en 1 met

$$r_k = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n_{kj}}{10^j},$$

waarbij de decimalen n_{kj} in een blok

[10] Verzin een voorbeeld met functies f_n die alleen waarden tussen 0 en 1 aannemen.
[11] Moeilijke woorden voor convergentie in de maximumnorm.
[12] Lees: gewoon moeilijk.

$$\begin{array}{ccccccccc}
n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} & n_{15} & n_{16} & n_{17} & n_{18} & \cdots \\
n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} & n_{25} & n_{26} & n_{27} & n_{28} & \cdots \\
n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} & n_{35} & n_{36} & n_{37} & n_{38} & \cdots \\
n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} & n_{45} & n_{46} & n_{47} & n_{48} & \cdots \\
n_{51} & n_{52} & n_{53} & n_{54} & n_{55} & n_{56} & n_{57} & n_{58} & \cdots \\
n_{61} & n_{62} & n_{63} & n_{64} & n_{65} & n_{66} & n_{67} & n_{68} & \cdots \\
n_{71} & n_{72} & n_{73} & n_{74} & n_{75} & n_{76} & n_{77} & n_{78} & \cdots \\
n_{81} & n_{82} & n_{83} & n_{84} & n_{85} & n_{86} & n_{87} & n_{88} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

gezet worden dat naar rechts en naar onder doorloopt. Gegeven de doorlopende diagonaalrij n_{kk} kies je dan decimalen d_k met $|d_k - n_{kk}| = 2$ of zo. Het getal

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{10^j}$$

kan dan niet in de rij r_k voorkomen.

5.7 Directer bewijs voor de convergente deelrijstelling

Wat nu volgt is de uitwerking van een opgave die Han Peters me ooit gaf: bewijs dat een rij x_n altijd een monotone deeltij heeft.

Als een rij $x_n \in \mathbb{R}$ begrensd is dan heeft'ie een kleinste bovengrens $M_1 \in \mathbb{R}$. Kan het zijn dat M_1 geen rijelement is? Vast wel, en als dat het geval is dan moeten er dus rijelementen dicht van onder bij M_1 liggen. Bijvoorbeeld boven de $M_1 - 1$, dus zeg dat x_{n_1} het eerste rijelement is waarvoor

$$M_1 - 1 < x_{n_1} < M_1$$

geldt. Omdat x_{n_1} zelf geen bovengrens kan zijn, is er dus ook een eerste n_2 waarvoor

$$M_1 - 1 < x_{n_1} < x_{n_2} < M_1,$$

en dan geldt $n_2 > n_1$ want anders was x_{n_1} niet de eerste in de rij die boven[13] $M_1 - 1$ ligt. En zo gaat dat verder. De conclusie is dat een kleinste bovengrens M_1 van een rij $x_n \in \mathbb{R}$ die zelf niet in de rij voorkomt, de limiet is van een strict stijgende rij x_{n_k} in $\mathbb{R}$, met n_k een strict stijgende rij n_k in $\mathbb{N}$.

[13] Voor de beeldvorming zien we $\mathbb{R}$ hier even als verticale getallenlijn.

Wat nu als we aannemen dat de rij x_n zulke strict stijgende deelrijen helemaal niet heeft? Dan is M_1 dus een rijelement, zeg $M_1 = x_{n_1}$ (met een totaal andere n_1 dan hierboven[14]). Maar de deelrij x_n die begint bij $n = n_1+1$ heeft dan een kleinste[15] bovengrens M_2 die op zijn hoogst gelijk is aan M_1, en die M_2 moet weer aangenomen worden door een x_{n_2} met $n_2 > n_1$. Dat gaat zo weer door en dus is er dan een strict stijgende rij n_k in $\mathbb{N}$ waarvoor x_{n_k} een niet-stijgende rij in $\mathbb{R}$ is.

We concluderen dat iedere begrensde rij x_n in $\mathbb{R}$ een (niet per se strict) monotone deelrij x_{n_k} heeft, en als je er even over nadenkt dan geldt de uitspraak voor elke rij in $\mathbb{R}$. Deze stelling, die Han weer kende uit het boek Elementary Analysis van Ross, trivialiseert[16] Stelling 5.13, wederom vanwege het bestaan van grootste ondergrenzen en kleinste bovengrenzen van begrensde verzamelingen in $\mathbb{R}$, en dus onthouden we hem!

Stelling 5.26. *Iedere rij x_n in $\mathbb{R}$ heeft een monotone deelrij.*

Voor wie de twee secties hierboven heeft overgeslagen, de stelling in Opgave 5.25 is wel erg relevant voor later, maar merk nu in de context van rijen en reeksen in $\mathbb{R}$ vooral op hoe de conclusies aan het eind van Sectie **??** met het bestaan van kleinste bovengrenzen samenhangen. Daarom na de volgende opgaven nog een belangrijke subsectie over (onvoorwaardelijke) convergentie van reeksen.

Opgave 5.27. Vul de details in: iedere Cauchyrij x_n in $\mathbb{R}$ is begrensd, heeft een monotone en dus convergente deelrij, en is daarmee convergent.

Opgave 5.28. Achteraf merken we nu op dat Stelling 5.26 ook geldt voor rijen in $\mathbb{Q}$, want $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Dus dat moet te bewijzen zijn zonder die kleinste bovengrenzen die alleen maar in $\mathbb{R}$ altijd bestaan. Denk daar maar eens over na.

---

[14] Nog afgezien van het feit dat die n_1 hierboven nu niet meer hoeft te bestaan.

[15] Als $s_k = \sup_{n\geq k} x_n$ dan is s_k een niet-stijgende rij met limiet

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} s_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

[16] Maakt'ie ook het diagonaalargument voor de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ overbodig?

5.8 Onvoorwaardelijke convergentie

Dat gezeur over die convergentie van reeksen willen we zo veel mogelijk vermijden. Maar toch. We willen nu eenmaal met aftelbare sommen als

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{5.6}$$

rekenen alsof het getallen zijn en alles mag[17]. En wat moet mogen is

$$a_0 + a_1 = a_1 + a_0,$$

de volgorde van optellen moet niet uitmaken. Voor sommen als in (5.6) betekent dit dat we willen dat

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)} \tag{5.7}$$

voor elke bijectie[18] $\phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, maar waarom zou dit zo moeten zijn in de alledaagse wiskundige werkelijkheid?

De basale aanname die we steeds maken is (**??**), i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

te lezen als dat de rij partiële sommen

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|$$

begrensd is, met dus een kleinste bovengrens die we T noemen. Bij iedere $\varepsilon > 0$ is er dan een $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ waarvoor met $m = N_\varepsilon$ geldt dat

$$T - \varepsilon < \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |a_n| \leq T, \tag{5.8}$$

want anders was T geen *kleinste* bovengrens. Bijgevolg is

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{m} |a_n| < \varepsilon \tag{5.9}$$

[17] Lees: goed is.

[18] Ongetwijfeld kent de lezer deze tot het algemene cultuurgoed behorende term.

voor alle $m > N_\varepsilon$, want anders was T geen *bovengrens*.

Hopelijk betekent dit voor

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \quad \text{en} \quad S_N^\phi = \sum_{n=0}^{N} a_{\phi(n)}$$

en

$$T_N = \sum_{n=0}^{N} |a_n| \quad \text{en} \quad T_N^\phi = \sum_{n=0}^{N} |a_{\phi(n)}|$$

dat

$$S_N \to S, \quad S_N^\phi \to S, \quad T_N \to T, \quad T_N^\phi \to T \tag{5.10}$$

als $N \to \infty$, en

$$|S| \leq T, \tag{5.11}$$

maar voorlopig weten we behalve $|S_N| \leq T$ en $|S_N^\phi| \leq T$ alleen dat $T_N \to T$.

Het gaat dus nog om convergentie van de andere drie in (5.10). Hoe zit het met T_N^ϕ? De bijectie $\phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ is een permutatie van $\mathbb{N}_0$. Als we

$$\mathbb{N}_0 = \{n = \phi(m) : \, m \in \mathbb{N}_0\}$$

aftellen met $m \in \mathbb{N}_0$, dan hebben we vroeg of laat, zeg met $m = 0, 1 \ldots, M_\varepsilon$, alle $n \in \mathbb{N}_0$ tot en met N_ε gehad. Bijgevolg is

$$T - \varepsilon < T_{N_\varepsilon} \leq T_{M_\varepsilon}^\phi \leq T.$$

Voor de gewone partiële sommen hebben we

$$|S_{M_\varepsilon}^\phi - S_{N_\varepsilon}| \leq \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon$$

want $S_{M_\varepsilon}^\phi - S_{N_\varepsilon}$ is een eindige som van termen a_n met alleen maar $n > N_\varepsilon$, en evenzo is voor alle $m > N_\varepsilon$

$$|S_m - S_{N_\varepsilon}| \leq \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon.$$

Dan staat het er eigenlijk al wat we willen.

Opgave 5.29. Gebruik (5.8) en (5.9) en met $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, om te laten zien dat ook $T_N^\phi \to T$, en dat S_N en S_N^ϕ convergeren, naar één en dezelfde $S \in \mathbb{R}$, eerst langs (verschillende) deelrijen N_k.

Hiermee zijn (5.10) en (5.11) bewezen, en we vatten het resultaat samen in een nog iets algemenere stelling die toereikend is voor wat we later nog nodig hebben, en die ook geldt voor aftelbare sommen van complexe getallen.

Stelling 5.30. *Laat a_n genummerd door $n \in \mathbb{N}_0$ een rij in $\mathbb{R}$ zijn. Als de partiële sommen*

$$T_N = \sum_{n=0}^{N} |a_n|$$

een door $N \in \mathbb{N}_0$ genummerde begrensde rij vormen, dan zijn voor elke bijectie $\phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ de rijen

$$S_N^\phi = \sum_{n=0}^{N} a_{\phi(n)} \quad \textit{en} \quad T_N^\phi = \sum_{n=0}^{N} |a_{\phi(n)}|$$

convergent, met limieten respectievelijk S en T die niet van ϕ afhangen, en er geldt dat $|S| \leq T$. We schrijven

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)} \quad \textit{en} \quad |\sum_{n=0}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = T.$$

De uitspraak over de rijen S_N^ϕ en T_N^ϕ geldt ook voor (iedere) bijectie $\phi : \mathbb{N}_0 \to A$ als A een (dan per definitie) aftelbare verzameling is, en voor de getallen $a_\alpha \in \mathbb{R}$ met $\alpha \in A$ geldt dat

$$\sum_{n=0}^{N} |a_{\phi(n)}|$$

een begrensde rij is. In dat geval schrijven we

$$S = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha, \quad T = \sum_{\alpha \in A} |a_\alpha|, \quad \textit{met wederom} \quad |S| \leq T.$$

6 Al of niet metrische topologie

Een aardig dictaatje is hier te vinden, uit de tijd dat Leiden de R nog in de naam had:

`http://www.few.vu.nl/~jhulshof/NOTES/anal.pdf`

Hieronder neem ik het over met wat aanvullingen en correcties:

6.1 Metrische ruimten; continue afbeeldingen

Aanvullend materiaal voor het college Analyse 1

J. Hulshof (destijds RUL)

Cursief wat opmerkingen van 24 jaar later ingevoegd tijdens het geven van het college Analyse 3 in het tweede jaar, met verwijzingen naar het boek Principles of Topology van Croom.

1. Inleiding. In deze syllabus behandelen we een aantal fundamentele onderwerpen uit de analyse. Uitgangspunt hierbij is de volgende algemene probleemstelling:

Laat X een puntverzameling zijn en A een niet-lege deelverzameling van X, eventueel X zelf. Zij $f: A \to \mathbb{R}$ een reëelwaardige functie. Hoe en onder wat voor veronderstellingen kunnen we dan concluderen dat de functie f op A een globaal maximum aanneemt, m.a.w. bestaat er een punt $x_0 \in A$, zo dat

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A?$$

Om deze vraag te beantwoorden beschouwen we het supremum van f op A,

$$M = \sup\{f(x) : \ x \in A\} \ \in \ \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Wat we van M nu willen weten is ten eerste of M eindig is, en zo ja, of de waarde M ook door de functie f wordt aangenomen. Omdat M het supremum is van alle door f aangenomen functiewaarden, kunnen we M benaderen met deze functiewaarden. We onderscheiden twee gevallen.

(i) $M < +\infty$. Dan bestaat er voor elk natuurlijk getal n een $x_n \in A$, zodat

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}.$$

(ii) $M = +\infty$. Dan bestaat er voor elk natuurlijk getal n een $x_n \in A$, zodat

$$f(x_n) > n.$$

In beide gevallen geeft dit ons een rij punten, genoteerd als $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, in A. Als we nu kunnen concluderen dat, eventueel door een aantal van deze punten uit de rij weg te laten, deze punten voor grote waarden van $n \in \mathbb{N}$ steeds dichter komen te liggen bij een "limietpunt"dat zelf ook in A ligt, en dat de waarde van f in dat limietpunt gelijk is aan

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

dan hebben we in één klap de beide bovenstaande vragen met ja beantwoord. In deze syllabus zullen we de voor bovenstaande probleemstelling relevante begrippen behandelen, met hier en daar een zijstapje.

In de vorige alinea staat de zinsnede "dichterbij". Aangezien we van X alleen maar hebben aangenomen dat X een puntverzameling is, heeft dit zonder verdere veronderstellingen geen betekenis. Een natuurlijke manier om dit de verhelpen is de invoering van een zogenaamde afstandsfunctie of metriek op X. Dit leidt dan tot de definitie van een metrische ruimte (Sectie 2). De deelverzamelingen waarvoor altijd een limietpunt van een rij bestaat blijken de zogenaamde rijkompakte verzamelingen te zijn (Sectie 3). Voor functies op (deelverzamelingen van) metrische ruimten kan het begrip "continu"worden gedefinieerd (Sectie 5), waarmee de bovenstaande limietovergang kan worden gerechtvaardigd. Als voorbeeld behandelen we de gevallen dat $X = \mathbb{R}$ en $X = \mathbb{R}^N$ (Sectie 6). In de appendix komen nog enige iets meer geavanceerde onderwerpen met betrekking tot kompaktheid aan de orde.

De schrijver van deze syllabus is van mening dat iedere student in de wiskunde of theoretische natuurkunde, onafhankelijk van wat hij/zij in de doctoraalfase als afstudeerrichting kiest, zich de basisstof in Sectie 1 tot en met 6 van deze syllabus moet eigen maken. In de meeste theoretische analyse boeken is deze stof, althans voor het geval $X = \mathbb{R}^N$, terug te vinden in de inleidende hoofdstukken. Zie bijvoorbeeld het boek "Mathematical Analysis, a modern approach to advanced calculus"van T.M. Apostol (Addison-Wesley 1957), waarin bijna alle analyse die in de eerste twee jaar van de studie aan de orde komt, is terug te vinden, of "Principles of Mathematical Analysis"van W. Rudin (McGraw Hill 1964). Voor meer algemene metrische (en topologische) ruimten zijn er o.a. de boeken "Topology and Normed Spaces"van G.J.O. Jameson (Wiley 1974) en "Introduction to Topology and Modern Analysis"van G.F. Simmons (McGraw Hill 1963).

Als voorkennis wordt verondersteld dat de lezer bekend is met de elementaire verzamelingsleer, begrippen als aftelbaar oneindig en overaftelbaar oneindig, en met de axioma's voor de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ en de reële getallen $\mathbb{R}$. Hoofdstuk 1 uit het boek "Calculus 1 2nd edition" van T.M. Apostol (Wiley 1967) is ruim voldoende.

2. Metrische ruimten. Laat X weer een puntverzameling zijn.

Definitie 2.1. Een functie $d: X \times X \to \mathbb{R}$ heet een *metriek* op X als
(i) $\forall x, y \in X$:

$$d(x,y) \geq 0 \text{ en } d(x,y) = 0 \iff x = y.$$

(ii) $\forall x, y \in X$:

$$d(x,y) = d(y,x).$$

(iii) $\forall x, y, z \in X$:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \text{(driehoeksongelijkheid)}.$$

Als $d: X \times X \to \mathbb{R}$ een metriek is, dan heet het paar (X, d) een *metrische ruimte*.

Het is duidelijk dat op een verzameling X meerdere metrieken kunnen zijn gedefinieerd. Toch spreekt men vaak over de metrische ruimte X i.p.v. over de metrische ruimte (X, d). Aangenomen is dan dat over de stilzwijgend gemaakte keuze van de metriek d geen misverstand kan bestaan. In het vervolg is X nu steeds een metrische ruimte met metriek d.

Voorbeeld 2.2. $X = \mathbb{R}$ is de verzameling van de reële getallen, met $d(x,y) = |x - y|$.

Opmerking 2.3. Iedere deelverzameling van een metrische ruimte is met dezelfde metriek weer een metrische ruimte.

Definitie 2.4. Laat $A \subset X$.
(i) Een punt $a \in A$ heet een *inwendig punt* van A als

$$\varepsilon xists\delta > 0: \quad B_\delta(a) = \{x \in X: d(x,a) < \delta\} \subset A.$$

De verzameling $B_\delta(a)$ heet de open bol met straal δ en middelpunt a.
(ii) Een punt $a \in A$ heet een *geisoleerd punt* van A als

$$\exists \delta > 0: \quad B_\delta(a) \cap A = \{a\}.$$

(iii) Een punt $p \in X$ heet een *ophopingspunt* van A als

$$\forall \delta > 0 \; \exists a \in A: \quad a \neq p \text{ en } d(a,p) < \delta.$$

(iv) Als elk punt van A een inwendig punt van A is, dan heet A een *open deelverzameling* van X.
(v) Als het complement van A,

$$A^c = X - A = \{x \in X : x \notin A\},$$

open is, dan heet A een *gesloten deelverzameling* van X.

In het vervolg zullen we kortweg zeggen dat A open (gesloten) is als A een open (gesloten) deelverzameling van X is.

LET OP! *Definitie 2.4 benoemt eigenschappen van punten $a \in A$ en $p \in X$ met $A \subset X$ en X een metrische ruimte. Maar A is zelf ook weer een metrische ruimte en dus te zien in de rol van X hierboven. Je kunt de grotere X dan verder vergeten bij het doen van uitspraken over deelverzamelingen van A. Bijvoorbeeld over $A \subset A$, net zoals je uitspraken over X kunt doen, gezien als deelverzameling van de metrische ruimte X.*

Voorbeeld: *De gehele getallen vormen een verzameling waarvoor geldt dat $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. In $\mathbb{Z}$ is elk punt een geisoleerd punt en elke bol met straat $\frac{1}{2}$ een singleton, dus $\{0\}$ is een open deelverzameling van $\mathbb{Z}$ maar geen open deelverzameling van $\mathbb{R}$.*

Stelling 2.5. (i) Iedere open bol is een open verzameling.
(ii) Een verzameling A in X is open dan en slechts dan als A een vereniging van open bollen is.

Bewijs. Opgave.

Stelling 2.6. (i) X is open, de lege verzameling is open.
(ii) De vereniging van elke collectie open deelverzamelingen is open.
(iii) De doorsnede van elk eindig aantal open deelverzamelingen is open.

Bewijs. Opgave.

Stelling 2.7. (i) X is gesloten, de lege verzameling is gesloten.
(ii) De doorsnede van elke collectie gesloten deelverzamelingen is gesloten.
(iii) De vereniging van elk eindig aantal gesloten verzamelingen is gesloten.

Bewijs. Opgave.

Stelling 2.8. Laat $A \subset X$. Dan is A gesloten dan en slechts dan als A al zijn ophopingspunten bevat.

Bewijs. Neem eerst aan dat A gesloten is en laat p een ophopingspunt zijn van A. We moeten laten zien dat $p \in A$. Stel niet. Dan $p \in A^c$. Maar A^c is open, dus p is een inwendig punt van A^c. Zodoende is er een $\delta > 0$ waarvoor

$B_\delta(p) \subset A^c$, in tegenspraak met de veronderstelling dat p een ophopingspunt is van A. Dus p ligt wel in A.

Neem vervolgens aan dat A een verzameling is die al zijn ophopingspunten bevat. We tonen aan dat A gesloten is door te bewijzen dat A^c open is. Zij $p \in A^c$. Dan is p geen ophopingspunt van A, dus er is een $\delta > 0$ zo dat $B_\delta(p)$ geen punten van $A - \{p\}$ bevat, en wegens $p \in A^c$ betekent dit dat $B_\delta(p) \subset A^c$. m.a.w. p is een inwendig punt van A^c. Dit geldt voor elke $p \in A^c$, en dus is A^c open. Q.e.d.

Definitie 2.9. Een rij $(x_n)_{n=1}^\infty$ in X heet *convergent* als er een $x_0 \in X$ is zo dat

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad n \geq n_\varepsilon \implies d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Het punt x_0 heet de *limiet* van de rij.

Stilzwijgend zijn n, n_ε, m en met andere letters in het midden van het alphabet genoteerde variabelen vaak elementen van $\mathbb{N}$. De definitie wordt vaak geschreven zonder de subindex ε:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \quad n \geq N \implies d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Stelling 2.10. Als de rij $(x_n)_{n=1}^\infty$ in X convergent is, dan is de limiet x_0 eenduidig bepaald, notatie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{of} \quad x_n \to x_0.$$

Bewijs. Neem aan dat de rij twee verschillende limieten heeft, zeg x_0 en x_0'. Omdat $x_0 \neq x_0'$, is $d(x_0, x_0') > 0$. Kies $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} d(x_0, x_0')$. Dan is er een n_ε zo dat $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_\varepsilon$. Evenzo is er een n_ε' zo dat $d(x_n, x_0') < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_\varepsilon'$. Met behulp van de driehoeksongelijkheid volgt nu

$$d(x_0, x_0') \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, x_0') < \varepsilon + \varepsilon < d(x_0, x_0').$$

voor $n \geq \max(n_\varepsilon, n_e')$, tegenspraak. Q.e.d.

In plaats van "de rij $(x_n)_{n=1}^\infty$ is convergent", zegt men ook wel dat "$\lim_{n\to\infty} x_n$ bestaat".

Stelling 2.11. Als de rij $(x_n)_{n=1}^\infty$ in X convergent is, dan is de rij begrensd, d.w.z. bevat in een vaste (open) bol $B_\delta(a) \subset X$.

Bewijs. Opgave.

Stelling 2.12. Laat $A \subset X$ gesloten zijn. Als de rij $(x_n)_{n=1}^\infty$ in A convergent is in X, dan ligt de limiet in A.

Bewijs. Opgave.

Stelling 2.13. Laat $A \subset X$ en $p \in X$. De volgende drie uitspraken zijn equivalent:
(i) p is een ophopingspunt van A.
(ii) Er bestaat een rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $A - \{p\} = \{x \in A : \; x \neq p\}$ die convergent is met p als limiet.
(iii) Iedere (niet-lege) open bol met middelpunt p bevat oneindig veel punten van A.

Bewijs. ($i \implies ii$). Neem aan dat p een ophopingspunt van A is. We construeren de rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in A. Kies $\varepsilon_1 > 0$. Dan is er een $a_1 \in A - \{p\}$ met $d(a_1, p) < \varepsilon_1$. De rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wordt nu verder inductief gedefinieerd door voor $n = 1, 2, \ldots$, nadat a_n gekozen is, $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}d(a_n, p)$ te stellen, en $a_{n+1} \in A - \{p\}$ met $d(a_{n+1}, p) < \varepsilon_{n+1}$ te kiezen. Opgave: laat zien dat $\varepsilon_{n+1} < \frac{1}{2}\varepsilon_n$ en dat de rij naar p convergeert.

($ii \implies iii$). Opgave.

($iii \implies i$). Triviaal.

Correctie! *In de 1993-versie stond in Stelling 2.13 en in het bewijs daarvan hier en daar nog een a waar een p moest staan.*

Het gebruik van definities met de quantor voor alle ($\forall$). *Belangrijk is om te onthouden dat een definitie die begint met $\forall \delta > 0$ geldt "iets" waarbij δ een rol speelt, pas echt gebruikt is als voor een rij $\delta_n \downarrow 0$ dat "iets" gebruikt is. En in plaats van δ's kunnen natuurlijk ook ε's gebruikt worden.*

Variaties op het bewijs. *Het dalend kiezen van de rij $\varepsilon_n > 0$ in ($i \implies ii$) kan natuurlijk op vele manieren. Met $\varepsilon_1 = 1$ en vervolgens*

$$\varepsilon_{n+1} = \min(d(a_n, p), \frac{1}{n+1})$$

voor $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ werkt het bewijs net zo goed. Met die constructie volgt dan meteen dat $\varepsilon_n \leq \frac{1}{n}$. In het als opgave te geven bewijs van $a_n \to p$ moet je voor alle $\varepsilon > 0$ een N vinden zoals onder Definitie 2.9. Kies daartoe N met $\frac{1}{N} < \varepsilon$ (waarom kan dat?) en gebruik de bijbehorende ε_N gedefinieerd zoals hier direct boven.

De Archimedische eigenschap van de verzameling van de reële getallen. *Waarom bestaat er voor elke ε eigenlijk een n met $\frac{1}{n} < \varepsilon$? Wel, indien niet dan zou er een $\varepsilon > 0$ zijn met $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$ en dus $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. De (niet-lege) verzameling $\mathbb{N}$ zou dan naar boven begrensd zijn in $\mathbb{R}$ en in $\mathbb{R}$ een kleinste bovengrens S hebben. Dan is $S - \frac{1}{2}$ geen bovengrens en dus bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ met $S - \frac{1}{2} < N \leq S$ en bijgevolg $N + 1 > S + \frac{1}{2}$. Om dat $N + 1 \in \mathbb{N}$ kan S dus geen bovengrens zijn van $\mathbb{N}$, laat staan de kleinste.*

Zonder epsilons kan het dus ook. *De nu bewezen uitspraak dat onder elke* $\varepsilon > 0$ *altijd een* $\frac{1}{n}$ *zit met* $n \in \mathbb{N}$ *wordt de Archimedische eigenschap van* $\mathbb{R}$ *genoemd en maakt dat iedere definitie die begint met* $\forall \varepsilon > 0$ *en eindigt met* $< \varepsilon$ *kan worden vervangen door een definitie die begint met* $\forall n \in \mathbb{N}$ *en eindigt met* $< \frac{1}{n}$. *Alleen komen we dan al snel letters in het midden van het alphabet te kort.*

Om welk axioma voor, of eigenschap van de verzameling van de reële getallen ging het? *De Archimedische eigenschap geldt dankzij het axioma over het bestaan van kleinste bovengrenzen in* $\mathbb{R}$ *voor naar bovengrensde niet-lege deelverzamelingen van* $\mathbb{R}$. *In het boek van Croom wordt dit besproken in Sectie 2.1.*

Croom *gebruikt in zijn Sectie 3.2 het woord limietpunt als ander woord voor ophopingspunt. Ik reserveer de term limietpunt voor het gebruik zoals in Definitie 3.1 hieronder: limiet van een convergente deelrij van een gegeven rij. Dus rijen kunnen limietpunten hebben en verzamelingen ophopingspunten. Een rij in (*A *of)* X *is strict genomen ook geen deelverzameling van (*A *of)* X *maar een functie of afbeelding van* $\mathbb{N}$ *naar (*A *of)* X. *Croom's index verwijst voor limit point naar pagina 66 waar Stelling 3.6 komt na de definitie onderaan pagina 65, en daar zie je dat limietpunt bij Croom een andere naam is voor ophopingspunt. Een naamgeving wellicht verdedigbaar door de uitspraak dat bij een ophopingspunt* p *van* A *in* X *altijd een rij* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *te vinden is waarvoor* $d(a_n, p)$ *strict dalend is in* n *en convergeert naar* 0. *Merk op dat voor* $n \to \infty$ *de equivalentie*

$$a_n \to p \iff d(a_n, p) \to 0$$

vanuit de definitie van convergentie vanzelfsprekend is.

Definitie A-1. *Laat weer* $A \subset X$ *met* X *een metrische ruimte. De afsluiting van* A *is de vereniging van* A *met al zijn ophopingspunten, notatie* $\bar{A}$. *Dus* $p \in \bar{A}$ *betekent dat de implicatie*

$$p \notin A \implies p \text{ is een ophopingspunt van } A$$

moet gelden.

Opgave A-2. *Bewijs dat* $\bar{A}$ *gesloten is in* X. *Hint: bewijs dat een ophopingspunt van* $\bar{A}$ *ook een ophopingspunt van* A *is gebruik Stelling 2.8.*

Opgave A-3. *De sterkere uitspraak is dat* $\bar{A}$ *de kleinste gesloten verzameling in* X *is die* A *bevat: bewijs dat* $\bar{A}$ *de doorsnede is van alle gesloten deelverzamelingen* F *van* X *met* $A \subset F$. *Hint: die doorsnede* D *is van vanwege Stelling 2.7 gesloten dus vanwege Opgave A-2 is* $D \subset \bar{A}$. *Kan* A *ophopingspunten hebben die niet in die doorsnede liggen?*

Croom noemt de verzameling van alle ophopingspunten de afgeleide verzameling van A, zonder verdere notatie, en schrijft $cl(A)$ voor $\bar{A}$.

We merken nog eens op dat de bovenstaande begrippen in principe afhangen van de keuze van de metriek op X. Toch kunnen verschillende metrieken tot hetzelfde leiden.

Definitie 2.14. Laat X een metrische ruimte zijn met metriek d, en laat $\bar{d}$ een andere metriek op X zijn. Dan heten d en $\bar{d}$ *equivalent* op X als er een reëel getal $\lambda > 0$ bestaat zo dat

$$\frac{1}{\lambda} d(x,y) \leq \bar{d}(x,y) \leq \lambda d(x,y) \quad \forall x, y \in X.$$

Opgave 2.15. Laat zien dat bij overgang op een equivalente metriek op X de in deze Sectie geintroduceerde begrippen (open, gesloten, convergent, etc.) niet veranderen. Hetzelfde geldt voor de begrippen die in de volgende drie secties worden behandeld (rijkompaktheid, volledigheid en continuiteit).

Op grond van het voorafgaande is het duidelijk dat voor het welslagen van de in de inleiding geschetste bewijsmethode, de geslotenheid van A vereist is. Dit staat echter los van de vraag of de in de inleiding geconstrueerde rij een limietpunt heeft.

3. Rijkompakte verzamelingen. We gaan nu de deelverzamelingen A karakteriseren waarvoor de in de inleiding geschetste bewijsmethode zal slagen.

Definitie 3.1. Laat $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij zijn in X.
(i) Als $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ een strict stijgende rij natuurlijke getallen is, dan heet de rij $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ een *deelrij* van $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
(ii) Als $x_0 \in X$ de limiet is van een convergente deelrij van $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, dan heet x_0 een *limietpunt* (ook wel: rijophopingspunt) van $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Stelling 3.2. Een rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in X heeft een convergente deelrij met limiet x_0 dan en slechts dan als

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall n \ \exists k \geq n : \quad d(x_k, x_0) < \varepsilon.$$

Bewijs. Opgave.

Definitie 3.3. Laat $A \subset X$. A heet *rijkompakt* als iedere rij in A een limietpunt in A heeft.

Er is nog een andere definitie van kompaktheid die niet uitgaat van de metriek op X, maar van de open deelverzamelingen van X. In de appendix zullen we deze definitie behandelen, en laten zien dat de beide definities voor deelverzamelingen van metrische ruimten hetzelfde betekenen.

Stelling 3.4. Gesloten deelverzamelingen van rijkompakte verzamelingen zijn rijkompakt.

Bewijs. Merk eerst op: als $G \subset A \subset X$, dan kan het gesloten zijn van G op twee manieren worden opgevat: gesloten in A of gesloten in X. Opgave: laat zien dat, als A gesloten is in X, dan

$$G \text{ is gesloten in } A \iff G \text{ is gesloten in } X.$$

Stel dat $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij is in G. Omdat A rijkompakt is, bestaat er een convergente deelrij met limiet in A. Daar G gesloten is ligt de limiet in G. Conclusie: elke rij in G heeft een convergente deelrij met limiet in G. Q.e.d.

Stelling 3.5. (i) Laat (X_1, d_1) en (X_2, d_2) twee metrische ruimten zijn. Dan is het Cartesisch produkt X van X_1 en X_2,

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) : \quad x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\},$$

weer een metrische ruimte t.a.v. de metriek gedefinieerd door

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \quad \forall x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in X = X_1 \times X_2.$$

(ii) Als A_1 rijkompakt is in X_1 en A_2 rijkompakt is in X_2, dan is $A = A_1 \times A_2$ rijkompakt in $X = X_1 \times X_2$.

Bewijs. Opgave.

Stelling 3.6. Laat A een rijkompakte deelverzameling zijn van X. Dan is A gesloten en begrensd.

Bewijs. Opgave.

4. Volledigheid.

Definitie 4.1. Een rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in X heet *een Cauchyrij* als

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \quad m, n \geq n_\varepsilon \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Stelling 4.2. Iedere convergente rij is een Cauchyrij.

Bewijs. Zij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ een convergente deelrij met limiet x_0. Laat $\varepsilon > 0$, en gebruik de definitie van convergentie met $\frac{1}{2}\varepsilon$. Dan,

$$\forall m, n \geq n_{\frac{1}{2}\varepsilon} : \quad d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + d(x_0, x_n) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ was willekeurig, dus de rij is een Cauchyrij. Q.e.d.

Stelling 4.3. Iedere Cauchyrij is begrensd.

Bewijs. Opgave.

Stelling 4.4. Als een Cauchyrij een limietpunt heeft, dan is de Cauchyrij convergent.

Bewijs. Laat $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ een Cauchrij zijn die een convergente deelrij heeft. Laat $\varepsilon > 0$ en gebruik de definitie van Cauchyrij. Dus

$$\forall m, n \geq n_\varepsilon : \quad d(x_m, x_n) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Anderzijds, omdat de rij een convergente deelrij heeft, zeg met limiet x_0, bestaat er een $k_\varepsilon > n_\varepsilon$ zodat

$$d(x_{k_\varepsilon}, x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Beide ongelijkheden combinerend vinden we

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \quad d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{k_\varepsilon}) + d(x_{k_\varepsilon}, x_0) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Definitie 4.5. Als iedere Cauchyrij in X convergent is, dan heet X *volledig*.

Om na te gaan of een rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in een volledige metrische ruimte X convergent is, hoeft men slechts na te gaan dat de rij een Cauchyrij is. Daarbij is het niet nodig om a priori de limietwaarde te kennen. Het bewijs van een belangrijke stelling in de analyse, de Banach contractie stelling, berust op dit principe:

Stelling 4.6. Laat X een volledige metrische ruimte zijn, en $T: X \to X$ een contractie, d.w.z. een afbeelding met de eigenschap dat

$$\exists \theta \in [0,1) \ \forall x, y \in X \quad d(T(x), T(y)) \leq \theta d(x, y).$$

Dan is er precies één vast punt van T, d.w.z. een punt $\bar{x}$ in X met de eigenschap dat $T(\bar{x}) = \bar{x}$. Bovendien geldt voor elke $x \in X$ dat de rij gedefinieerd door

$$x_1 = T(x), \quad x_{n+1} = T(x_n) \ (n = 1, 2, \dots),$$

convergent is met limiet $\bar{x}$.

Bewijs. Merk eerst op dat er hoogstens een vast punt kan zijn, immers als $\bar{x}$ en $\bar{y}$ vaste punten zijn, dan

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(T(\bar{x}), T(\bar{y})) \leq \theta d(\bar{x}, \bar{y}) \implies d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \implies \bar{x} = \bar{y}.$$

Laat nu $x \in X$ willekeurig en laat de rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de in de stelling gedefinieerde rij zijn. We gaan bewijzen dat dit een Cauchyrij is. Neem hiertoe twee natuurlijke getallen m, n met $m < n$. Dan, door herhaald toepassen van de driehoeksongelijkheid,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

We gebruiken de notatie

$$T^0(x) = x, \quad T^1(x) = T(x), \quad T^2(x) = T(T(x)), \quad T^3(x) = T(T(T(x))), \quad \text{etc.}$$

Omdat

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(T^k(x), T^{k+1}(x)) \leq \theta^k d(x, T(x)),$$

volgt nu dat

$$d(x_m, x_n) \leq (\theta^m + \theta^{m+1} + \cdots + \theta^{n-1}) d(x, T(x)) \leq \frac{\theta^m}{1-\theta} d(x, T(x)) \to 0 \quad \text{als } m \to \infty.$$

Dus $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ is een Cauchyrij. Omdat X volledig is heeft deze rij een limiet $\bar{x}$, dus $T^n(x) \to \bar{x}$. Maar dan geldt ook dat $T^{n+1}(x) \to \bar{x}$, terwijl

$$d(T^{n+1}(x), T(\bar{x})) = d(T(T^n(x)), T(\bar{x})) \leq \theta d(T^n(x), \bar{x}) \leq d(T^n(x), \bar{x}) \to 0.$$

Dit impliceert dat $T^{n+1}(x) \to T(\bar{x})$. Omdat de limiet van een convergente rij uniek bepaald is, kunnen we dus concluderen dat $\bar{x} = T(\bar{x})$. Q.e.d.

Er is nog een andere karakterisatie van het begrip volledigheid, die wordt gegeven door de volgende stelling.

Stelling 4.7. (Cantor) Een metrische ruimte X is volledig dan en slechts dan als voor elke dalende rij gesloten deelverzamelingen

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \ldots,$$

met de eigenschap dat

$$\operatorname{diam}(F_n) = \sup_{x,y \in F_n} d(x, y) \to 0 \text{ als } n \to \infty,$$

geldt dat de doorsnede

$$\cap_{n=1}^{\infty} F_n$$

precies één punt bevat.

5. Continue afbeeldingen.

Definitie 5.1. Laat X en Y metrische ruimten zijn, $A \subset X$, en $f : A \to Y$ een afbeelding. (i) f heet *continu in* $a \in A$, als

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A : \quad d(x,a) < \delta \implies d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

(ii) f heet continu in A als f continu is in elke $a \in A$.

Stelling 5.2. Laat X en Y metrische ruimten zijn, $A \subset X$, $f : A \to Y$ een afbeelding, en $a \in A$. Dan is f continu in a dan en slechts dan als voor elke rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in A met $a_n \to a$ in X geldt dat $f(a_n) \to f(a)$ in Y.

Bewijs. Neem aan dat f continu is in a en laat $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij zijn in A met $a_n \to a$. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig, en laat $\delta > 0$ de bijbehorende δ uit de definitie van continuiteit van f in a zijn. Gebruik deze δ nu als ε in de definitie van convergentie. Dan

$$n \geq n_\delta \implies d(a_n, a) < \delta \implies d(f(a_n), f(a)) < \varepsilon.$$

Dus de rij $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ convergeert naar $f(a)$.

Anderzijds, als f niet continu is in a, dan

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists a_\delta \in A : \quad d(a_\delta, a) < \delta \text{ en } d(f(a_\delta), f(a)) \geq \varepsilon.$$

Kies nu $\delta = \frac{1}{n}$, en noem de bijbehorende a_δ nu a_n, dan is $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij in A met $a_n \to a$, terwijl de rij $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ niet convergeert naar $f(a)$. Q.e.d.

Stelling 5.3. Laat X en Y metrische ruimten zijn, en $f : X \to Y$ een afbeelding. Dan is f continu op X dan en slechts dan als het inverse beeld onder f van iedere open deelverzameling van Y weer een open deelverzameling van X is.

Bewijs. Neem aan dat f continu is, en zij B een open verzameling in Y. We moeten bewijzen dat het inverse beeld onder f van B open is. We laten zien dat elk punt van $A = f^{-1}(B)$ een inwendig punt is. Laat hiertoe $a \in A$ en $b = f(a) \in B$. Omdat B open is, is b een inwendig punt van B, dus er bestaat een $\varepsilon > 0$ met $B_\varepsilon(b) \subset B$. Kies de bij ε horende δ uit de definitie van continuiteit. Dan $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(b)$ waardoor $B_\delta(a) \subset A = f^{-1}(B)$. Dit geldt voor elke $a \in A$, dus A is open.

Omgekeerd, als het inverse beeld van elke open verzameling open is, is te bewijzen dat f continu is in elk punt van X. Laat hiertoe $a \in X$ en $b = f(a)$, en zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is $B_\varepsilon(b)$ open in Y, dus $A = f^{-1}(B_\varepsilon(b))$ is open in X, en omdat $a \in A$, is er een $\delta > 0$ zo dat $B_\delta(a) \subset A$. Met deze δ is dan aan de uitspraak in de definitie van continuiteit voldaan. Q.e.d.

Tot nu toe hebben we gesproken over afbeeldingen $f : X \to Y$. Vaak worden afbeeldingen ook functies genoemd, met name in het geval dat $Y = \mathbb{R}$. We keren nu terug naar de vraagstelling in de inleiding.

Stelling 5.4. Laat $A \subset X$, en $f : A \to \mathbb{R}$ een continue functie. Als A rijkompakt is, dan heeft f een maximum in A.

Bewijs. Met dit bewijs waren we al begonnen in de inleiding. Dus laat $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de rij zijn waarvan de functiewaarden het supremum M van f op A benaderen, zoals precies gemaakt in de inleiding. Omdat A rijkompakt is, heeft deze rij een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ met limiet $a \in A$. Vanwege de continuiteit van f in a is de rij $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ convergent met limiet $f(a)$. Omdat een convergente rij begrensd is sluit dit de mogelijkheid $M = +\infty$ uit, zo dat

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M.$$

Dit impliceert dat de rij $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ convergeert naar M. Maar een deelrij convergeert naar $f(a)$. Dus $f(a) = M$. Q.e.d.

Stelling 5.5. Laat X en Y metrische ruimten zijn, $A \subset X$, en $f : A \to Y$ een continue afbeelding. Als A rijkompakt is in X, dan is het beeld van A onder f,

$$R(f) = \{f(a) : \quad a \in A\},$$

rijkompakt in Y.

Bewijs. Opgave.

Definitie 5.6. Laat X en Y metrische ruimten zijn, $A \subset X$, en $f : A \to Y$ een afbeelding. Dan heet f *uniform continu in* A, als

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in A : \quad d(x,y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Stelling 5.7. Laat X en Y metrische ruimten zijn, $A \subset X$, en $f : A \to Y$ een continue afbeelding. Als A rijkompakt is in X, dan is f uniform continu in A.

Bewijs. Stel niet, dan

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in A : \quad d(x,y) < \delta \;\text{ en }\; d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon.$$

Kies $\delta = \frac{1}{n}$ en laat x_n en y_n de bijbehorende x en y zijn zoals in de regel hierboven. Omdat A rijkompakt is heeft de rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, zeg met limiet $a \in A$. Dan is ook de rij $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergent met dezelfde limiet. (Waarom?) Maar nu geldt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(a),$$

terwijl $d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon$, tegenspraak. Q.e.d.

6. Het geval $X = \mathbb{R}$ en $X = \mathbb{R}^N$. We hebben gezien dat rijkompakte deelverzamelingen van X altijd gesloten en begrensd zijn. Als $X = \mathbb{R}$, geldt ook het omgekeerde. We laten dit eerst zien voor een gesloten begrensd interval.

Stelling 6.1. (Heine-Borel) Laat $a, b \in \mathbb{R}$. Dan is het gesloten begrensde interval

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x \leq b\}$$

rijkompakt.

Bewijs. Laat $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij zijn in $[a, b]$. We moeten bewijzen dat deze rij een convergente deelrij heeft met limiet in $[a, b]$. We delen hiertoe het interval in twee gelijke stukken, d.w.z. in

$$[a, \frac{a+b}{2}] \quad \text{en} \quad [\frac{a+b}{2}, b].$$

Dan bevat tenminste één van deze twee intervallen voor oneindig veel waarden van n het rijelement x_n. Als we dit interval $[a_1, b_1]$ noemen, kunnen we dus een deelrij van $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ kiezen die volledig bevat is in $[a_1, b_1]$. Noteer deze rij als $(x_n^1)_{n=1}^{\infty}$. Dit argument herhalende, krijgen we een dalende rij intervallen

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots,$$

en bijbehorende steeds verdere deelrijen, genoteerd als $(x_n^j)_{n=1}^{\infty}$, met dezelfde eigenschap, namenlijk dat elke deelrij $(x_n^j)_{n=1}^{\infty}$ steeds volledig bevat is in $[a_j, b_j]$.

Vervolgens nemen we de zogenaamde diagonaalrij, dat is de rij $(x_n^n)_{n=1}^{\infty}$. Dit is zelf weer een deelrij van de oorspronkelijke rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, en er geldt dat $x_n^n \in [a_n, b_n]$.

Nu is $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een begrensde niet-dalende rij getallen, en $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ een begrensde niet-stijgende rij getallen. Dus bestaan

$$\alpha = \sup_n a_n \quad \text{en} \quad \beta = \inf_n b_n,$$

$$a \leq \alpha \leq \beta \leq b, \quad \text{en} \quad \alpha, \beta \in [a_n, b_n] \quad \text{voor elk natuurlijk getal } n.$$

Bovendien is $|\beta - \alpha| \leq b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$ voor elk natuurlijk getal n, dus $\alpha = \beta$.

Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een n_ε zodat

$$\alpha - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq \alpha = \beta \leq b_{n_\varepsilon} < \beta + \varepsilon.$$

Maar dan geldt voor elke $n \geq n_\varepsilon$ dat

$$\alpha - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq x_n^n \leq b_n \leq b_{n_\varepsilon} < \beta + \varepsilon.$$

Dus

$$x_n^n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon), \text{ m.a.w. } |x_n^n - \alpha| < \varepsilon.$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig was betekent dit dat de (deel)rij $(x_n^n)_{n=1}^\infty$ convergent is met limiet $\alpha \in [a, b]$. Q.e.d.

Gevolg 6.2. (Bolzano-Weierstrass) Iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.

Stelling 6.3. Laat $A \subset \mathbb{R}$. Dan geldt

$$A \text{ is rijkompakt} \iff A \text{ is gesloten en begrensd.}$$

Bewijs. Opgave.

Stelling 6.4. Laat A een gesloten begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ zijn. Als $f : A \to \mathbb{R}$ een continue functie is, dan heeft f een maximum in A.

Bewijs. Opgave.

Stelling 6.5. Iedere Cauchyrij in $\mathbb{R}$ is convergent (m.a.w. $\mathbb{R}$ is volledig).

Bewijs. Opgave.

Stelling 6.6. (absoluut convergente reeksen zijn convergent) Als $(a_n)_{n=1}^\infty$ een rij is in $\mathbb{R}$, en

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |a_n|$$

bestaat, dan bestaat ook

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Bewijs. Opgave. Hint: laat zien dat de rij $(s_k)_{k=1}^\infty$, gedefinieerd door

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n,$$

een Cauchyrij is.

De laatste vijf stellingen gelden ook voor de metrische ruimte

$$\mathbb{R}^N = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) : \ x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathbb{R}\}, \quad (N \in \mathbb{N})$$

met de standaard Euclidische metriek

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_N-y_N)^2}.$$

Dit kunnen we inzien door $\mathbb{R}^N$ op te vatten als het herhaald Cartesisch produkt van $\mathbb{R}$ met zich zelf. Echter, de produktmetriek zoals gedefinieerd in Sectie 3, is niet de Euclidische metriek, maar

$$d_{prod}(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\cdots+|x_N-y_N|.$$

Opgave 6.7. Laat zien dat deze twee metrieken equivalent zijn, en bewijs Stelling 6.2 tot en met 6.6 voor $\mathbb{R}^N$.

Appendix. Kompaktheid en rijkompaktheid.

Definitie. Laat $A \subset X$.
(i) Een door een verzameling I geindexeerde collectie (open) deelverzamelingen $\{O_i: \ i \in I\}$ van X heet een *(open) overdekking* van A als

$$A \ \subset \ \cup_{i\in I} O_i.$$

(ii) Als iedere open overdekking $\{O_i: \ i \in I\}$ van A een eindige deeloverdekking van A bevat, d.w.z.

$$\exists i_1, i_2, \ldots, i_m \in I: \quad A \ \subset \ \cup_{j=1,2,\ldots,m} O_{i_j},$$

dan heet A *kompakt* .

Stelling. Laat $A \subset X$. Dan

$$A \text{ is kompakt} \iff A \text{ is rijkompakt.}$$

Bewijs. ($\Longrightarrow$). Stel A is kompakt en laat $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ en rij zijn in A. We moeten bewijzen dat A een convergente deelrij met limiet in A heeft. Stel niet, dan is er voor elke $p \in A$ een $\varepsilon_p > 0$ en een n_p zodanig dat $a_n \notin B_{\varepsilon_p}(p)$ voor alle $n > n_p$. Neem nu als open overdekking van A de zojuist gevonden open bollen, dus

$$\{B_{\varepsilon_p}(p): \ p \in A\}.$$

Omdat A kompakt is heeft deze overdekking een eindige deeloverdekking, dus er zijn $p_1, p_2, \ldots, p_m$ in A zodat

$$A \subset B_{\varepsilon_{p_1}}(p_1) \cup B_{\varepsilon_{p_2}}(p_2) \cup \cdots \cup B_{\varepsilon_{p_m}}(p_m),$$

waardoor A op zijn hoogst $n_1+n_2+\cdots+n_m$ punten van de rij kan bevatten, m.a.w. de rij bevat slechts eindig veel verschillende punten van A, en tenminste een punt moet dus oneindig vaak voorkomen. Dus kunnen we een deelrij maken waarin dit punt alleen maar voorkomt, en dit is dan de gezochte deelrij.

($\Leftarrow$) Dit heeft wat meer voeten in de aarde. Daartoe eerst het volgende.

Definitie. Laat A een deelverzameling zijn van een metrische ruimte X. Dan heet A *aftelbaar kompakt* als voor elke rij open verzamelingen $(O_n)_{n=1}^{\infty}$ met

$$A \subset \cup_{n=1}^{\infty} O_n,$$

er een index k is zo dat

$$A \subset \cup_{n=1}^{k} O_n.$$

Stelling. Als $A \subset X$ rijkompakt is, dan is A aftelbaar kompakt.

Bewijs. Neem aan dat A rijkompakt is maar niet aftelbaar kompakt. Dan is er een rij open verzamelingen $(O_n)_{n=1}^{\infty}$ van A die A geheel bedekt, en die geen eindige deeloverdekking heeft. Dat betekent dat er voor elk natuurlijk getal k een punt p_k in A is met

$$p_k \notin \cup_{n=1}^{k} O_n.$$

Omdat A rijkompakt is heeft de rij $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ een convergente deelrij met limiet p in A. Dus moet er een m zijn waarvoor $p \in O_m$. Omdat O_m open is zijn er dus oneindig veel punten van de rij $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ die in O_m liggen. Voor $n > m$ is dit in tegenspraak met de keuze van p_n. Q.e.d.

Definitie. Laat A een deelverzameling zijn van een metrische ruimte X. Dan heet A *totaal begrensd* als er voor elke $\varepsilon > 0$ een eindige deelverzameling $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ van A bestaat met

$$A \subset B_\varepsilon(p_1) \cup B_\varepsilon(p_2) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(p_n).$$

Stelling. Als $A \subset X$ rijkompakt is, dan is A totaal begrensd.

Bewijs. Stel A is niet totaal begrensd. Dan is er een $\varepsilon > 0$ waarvoor geen eindige verzameling als in de definitie kan worden gevonden. Kies nu $p_1 \in A$. Inductief kiezen we nu voor $n = 1, 2, \ldots$ een punt $p_{n+1} \in A$ met de eigenschap dat

$$p_{n+1} \notin B_\varepsilon(p_1) \cup B_\varepsilon(p_2) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(p_n).$$

Maar dan is $d(p_i, p_j) \geq \varepsilon$ voor alle $i \neq j$. Dus de rij $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ kan geen convergente deelrij hebben, in tegenspraak met de rijkompaktheid van A. Q.e.d.

Definitie. Een metrische ruimte X heet *separabel* als er een rij is in X zo dat elk punt van X een limietpunt is van deze rij.

Stelling. Als $A \subset X$ totaal begrensd is, dan is A separabel.

Bewijs. Voor elke k bestaat er een eindige deelverzameling A_k van A zo dat elk punt van A dichter dan $\frac{1}{k}$ bij een punt van A_k ligt. Maak nu een rij door eerst de elementen van A_1 te kiezen, dan de elementen van A_2, A_3, enzovoort. Dan is elk punt van A een limietpunt van de aldus verkregen rij. Q.e.d.

Stelling. Als $A \subset X$ separabel is, dan heeft elke open overdekking van A een aftelbare deeloverdekking.

Bewijs. Laat $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij zijn in A met de eigenschap dat elk punt van A limietpunt is van deze rij, en laat $\{O_i : \ i \in I\}$ een open overdekking zijn van A. Dan is elk punt p in A bevat in een O_i. Kies nu een natuurlijk getal m zo groot dat $B_{\frac{2}{m}}(p) \subset O_i$, en daarna een n zo dat $d(p_n, p) < \frac{1}{m}$. Dan is

$$p \in B_{\frac{1}{m}}(p_n) \subset O_i.$$

Laat J de verzameling zijn van de paren natuurlijke getallen (m, n) die we zo tegenkomen als p de verzameling A doorloopt. Dan is J aftelbaar en

$$A \subset \cup_{(m,n)\in J} B_{\frac{1}{m}}(p_n).$$

Maar voor elke $(m, n) \in J$ is er tenminste één O_i die $B_{\frac{1}{m}}(p_n)$ bevat. Kies er voor elke $(m, n) \in J$ precies één. Dit geeft een aftelbare deelcollectie die A overdekt. Q.e.d.

Uit bovenstaande stellingen volgt dat als $A \subset X$ rijkompakt is, dat A ook "gewoon"kompakt is.

Leiden, juni 1993.

6.2 Metrische ruimten

Onze genormeerde ruimten X, waaronder $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ en ook $C([a,b])$ met de maximumnorm, maar helaas niet $R([a,b])$ met de 1-norm, zijn voorbeelden van metrische ruimten met het afstandsbegrip gedefinieerd door de metriek

$$(x,y) \stackrel{d}{\to} d(x,y) = |x-y|, \tag{6.1}$$

een afbeelding[1] d van $X \times X$ naar $[0,\infty)$ met de eigenschappen dat voor alle $x,y,z \in X$ geldt dat

$$(i) \quad d(x,y) = 0 \iff x = y; \quad (ii) \quad d(x,y) = d(y,x);$$

$$(iii) \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,x). \tag{6.2}$$

Iedere niet-lege deelverzameling A van X is zo een metrische ruimte, waarbij we de algebraische vectorruimte operaties nu vergeten.

Definitie 6.1. *Een metrische ruimte is een niet-lege verzameling X met een afbeelding $d : X \times X \to [0,\infty)$ waarvoor (i),(ii) en (iii) uit (6.2) hierboven gelden voor alle $x,y,z \in X$.*

Opgave 6.2. Zie Opgave 14.3. De ε, N-definitie van $d(x_n, x_m) \to 0$ als $m,n \to \infty$ definieert wat een Cauchyrij in X is. Geef die definitie. Geef ook de definitie van het convergent zijn van de rij x_n in X.

We gebruiken hieronder de notatie $x_n \to x$ voor $x_1, x_2, x_3, \ldots, x \in X$ zonder er steeds $n \to \infty$ bij te zetten en spreken over ook een rij x_n zonder te vermelden dat $n \in \mathbb{N}$ (of een andere deelverzameling van $\mathbb{Z}$ van de vorm $m + \mathbb{N}$ met $m \in \mathbb{Z}$, bijvoorbeeld $\mathbb{N}_0$).

Opgave 6.3. Een flauwe opgave om aan de de notaties, definities en axioma's te wennen: laat zien dat als $x_n \to x$ en $x_n \to y$ (alles in X) voor de limieten x en y geldt dat $x = y$. De limiet van een convergente rij is dus uniek.

Met convergente rijen kunnen we voor metrische ruimten X en Y zeggen wat het voor een afbeelding

$$F : X \to Y$$

betekent om continu te zijn in $a \in X$.

[1] De d van distance, a van afstand doen we maar niet.

Definitie 6.4. *Een afbeelding F van een metrische ruimte X naar een (niet per se andere) metrische ruimte Y heet continu in $a \in X$ als de implicatie*

$$x_n \to a \implies F(x_n) \to F(a)$$

geldt voor elke rij x_n in X. Als dit het geval is voor elke $a \in X$ dan zeggen we dat $F : X \to Y$ continu is.

Opgave 6.5. Als X, Y, Z metrische ruimten en

$$X \xrightarrow{F} Y \quad \text{en} \quad Y \xrightarrow{G} Z$$

afbeeldingen dan is de afbeelding

$$X \xrightarrow{G \circ F} Z \quad \text{gedefinieerd door} \quad X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z$$

continu in $a \in X$ als F continu is in a en G continu is in $b = F(a)$. Hint: triviaal, leg uit.

Definitie 6.6. *Een metrische ruimte heet rijkompakt als elke rij in X een convergente deelrij heeft, en volledig als elke Cauchyrij in X convergent is (in beide gevallen met limiet in X dus).*

Opgave 6.7. Bewijs dat rijkompakte metrische ruimten volledig zijn.

Opgave 6.8. Als X en Y metrische ruimten zijn, met X rijkompakt, dan is iedere continue $F : X \to Y$ uniform continu, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, a \in X : \, d(x, a) \leq \delta \implies d(F(x), F(a)) \leq \varepsilon.$$

Bewijs dit door een eerder bewijs (van Stelling 5.9) over te schrijven.

Opgave 6.9. Als X een rijkompakte metrische ruimte is, dan heeft iedere continue $F : X \to \mathbb{R}$ een globaal maximum en een globaal minimum op X. Bewijs ook dit door een eerder bewijs over te schrijven.

6.3 Omgevingen, open en gesloten verzamelingen

Continuiteit kunnen we ook met open verzamelingen beschrijven. In het standaardjargon heet een deelverzameling $G \subset X$ van een metrische ruimte X gesloten als voor iedere rij x_n in G met $x_n \to x \in X$ de limiet x in G zit (je kan G niet uit door limieten te nemen). Een verzameling $O \subset X$ heet open[2] als zijn complement gesloten is.

Opgave 6.10. Bewijs dat in een Banachruimte iedere rijkompakte deelverzameling begrensd en gesloten is en dat in $\mathbb{R}^n$ ook de omgekeerde uitspraak geldt.

Uit Opgave 6.9 en Opgave 6.10 volgt dat de stelling over maxima en minima van continue functies op gesloten begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.

Stelling 6.11. *Laat $K \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ begrensd en gesloten zijn en $F : K \to \mathbb{R}$ continu zijn. Dan zijn er $a, b \in K$ met $F(a) \leq F(x) \leq F(b)$ voor alle $x \in K$. De punten a en b heten de minimizer en de maximizer voor F, en de waarden $F(a)$ en $F(b)$ het minimum en het maximum van F.*

Opgave 6.12. De collectie $\mathcal{G}$ van alle gesloten deelverzamelingen van een metrische ruimte X heeft drie belangrijke eigenschappen:

$$(i) \quad \emptyset \in \mathcal{G},\, X \in \mathcal{G}; \quad (ii) \quad G_1, G_2 \in \mathcal{G} \implies G_1 \cup G_2 \in \mathcal{G};$$

en (voor elke indexverzameling I)

$$(iii) \quad G_i \in \mathcal{G}\ \forall i \in I \implies \cap_{i \in I} G_i \in \mathcal{G}.$$

Bewijs dit via de definitie dat $G \in \mathcal{G}$ als voor iedere rij x_n in G met $x_n \to x \in X$ voor de limiet geldt $x \in G$.

Opgave 6.13. De collectie $\mathcal{O}$ van alle open deelverzamelingen van een metrische ruimte X heeft de volgende eigenschappen:

$$\emptyset \in \mathcal{O},\, X \in \mathcal{O}; \quad O_1, O_2 \in \mathcal{O} \implies O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O};$$

en (voor elke indexverzameling I)

$$O_i \in \mathcal{O}\ \forall i \in I \implies \cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

[2] Minder gelukkige naamgeving, sorry, is niet anders.

Bewijs dit via de definitie dat $O \in \mathcal{O}$ als

$$O^c = \{x \in X : x \notin O\} \in \mathcal{G}.$$

Opgave 6.14. Laat zien dat in een metrische ruimte X een deelverzameling $O \subset X$ open is dan en slechts dan als voor elke $a \in O$ er een $r > 0$ is zo dat

$$\bar{B}_r(a) = \{x \in A : d(x,a) \leq r\} \subset O.$$

Bewijs ook dat $\bar{B}_r(a)$ gesloten is.

Om te weten welke verzamelingen open zijn moet je dus weten wat de gesloten bollen $\bar{B}_r(a)$ zijn maar niet eens dat. Heb je bijvoorbeeld twee normen en noemen we de bijbehorende bollen $\bar{B}_r(a)$ en $\bar{K}_s(a)$ dan krijgen we precies dezelfde open verzamelingen als elke $\bar{B}_r(a)$ met $r > 0$ altijd een $\bar{K}_s(a)$ bevat met $s > 0$ en omgekeerd. Is X een vectorruimte over $\mathbb{R}$ met twee normen dan noemen we die normen equivalent als ze dezelfde collectie $\mathcal{O}$ definieren. Via Opgave 6.12 leidt dat tot deze karakterisatie van equivalente normen op X.

Opgave 6.15. Als twee normen

$$x \to |x|_1 \quad \text{en} \quad x \to |x|_2$$

dezelfde collectie $\mathcal{O}$ van open verzamelingen definieren dan zijn er constanten A_1 en A_2 zo dat voor alle $x \in X$ geldt

$$|x|_1 \leq A_2 |x|_2 \quad \text{en} \quad |x|_2 \leq A_1 |x|_1.$$

Bewijs dit. Terzijde, omgekeerd geldt ook en is makkelijker.

Opgave 6.16. Laat zien dat in een metrische ruimte X een deelverzameling $O \subset X$ open is dan en slechts dan als voor elke $a \in O$ er een $r > 0$ is zo dat

$$B_r(a) = \{x \in A : d(x,a) < r\} \subset O.$$

Bewijs ook dat $B_r(a)$ open is.

Stelling 6.17. *Laat X en Y metrische ruimten zijn en $F : X \to Y$. Dan is F continu dan en slechts dan als alle inverse beelden van open verzamelingen in Y open zijn in X.*

Opgave 6.18. Wel een kluifje: bewijs Stelling 6.17. Triviaal daarna is dat als X, Y, Z metrische ruimten zijn en

$$X \xrightarrow{F} Y \quad \text{en} \quad Y \xrightarrow{G} Z$$

continue afbeeldingen, dat de afbeelding

$$X \xrightarrow{G \circ F} Z \quad \text{gedefinieerd door} \quad X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z$$

continu is. Waarom? Zie nog even Opgave 6.5.

In $\mathbb{R}^2$ hebben we behalve the standaardnorm

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{x \cdot x} \quad \text{voor} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

afkomstig van het standaardinprodukt

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

de normen

$$|x|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p} \quad \text{voor} \quad p \geq 1 \quad \text{en} \quad |x|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|).$$

Als deze normen zijn equivalent.

Opgave 6.19. Bewijs dat al deze p-normen equivalent zijn en teken in het x_1, x_2-vlak de gesloten eenheidsbollen $\bar{B}^p = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|_p \leq 1\}$ voor $p = 1, 2$ en $p = \infty$, en voor nog twee p's naar keuze. Blader nog even terug naar Opgave 6.15 en de karakterisatie daaronder en boven van open verzamelingen met behulp bollen, gesloten of open, zoals $B_\varepsilon^p(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0|_p < \varepsilon\}$ met $\xi \in \mathbb{R}^2$ en $\varepsilon > 0$.

Opgave 6.20. De bollen B^1 en B^∞ zijn ook te beschrijven als doorsnijdingen van open halfvlakken van de form $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) < b\}$ met $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineair gegeven door $f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2$ en $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$. Laat dat zien.

Opgave 6.21. Een alternatieve manier om te zeggen dat een $O \in \mathbb{R}^2$ open is te zeggen dat er voor elke $\xi \in O$ drie[3] open halfvlakken K_1, K_2, K_3 zijn zoals in Opgave 6.20, waarvoor geldt

$$\xi \in K_1 \cap K_2 \cap K_3 \subset O.$$

Waarom definieert dit dezelfde open verzamelingen? Geef ook zo'n definitie van open in $\mathbb{R}^3$.

Opgave 6.22. Een verzameling W in een genormeerde ruimte X heet zwak open als er voor elke $\xi \in W$ geldt dat er er eindig veel open halfvlakken zijn zo dat geldt

$$\xi \in K_1 \cap \cdots \cap K_n \subset W.$$

Bewijs dat voor deze zwak open verzamelingen W dezelfde eigenschappen gelden als in Opgave 6.13. Met eindige doorsnijdingen van open halfvlakken is dus een topologie te maken: een collectie van "open" verzamelingen die voldoet aan de "axioma's" in Opgave 6.13. In het geval dat $X = \mathbb{R}^n$ zijn alle normen op X en deze topologie equivalent.

`https://www.youtube.com/watch?v=fmTcSGuk04o`

Opgave 6.23. Bewijs dat iedere norm $x \to |x|$ op $\mathbb{R}^2$ equivalent is met de 2-norm. Hint: laat eerst zien dat $x \to |x|$ op $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ een positief minimum en maximum heeft.

Opgave 6.24. Laat X_1 en X_2 genormeerde ruimten zijn. Bewijs dat

$$X_1 \times X_2 = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$$

met de voor de hand liggende bewerkingen weer een genormeerde ruimte is met (equivalente) normen (voor $p \geq 1$)

$$x \to \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p} \quad \text{en} \quad x \to \max(|x_1|, |x_2|).$$

[3] $3 = 2 + 1$.

Opgave 6.25. Laat X_1 en X_2 genormeerde ruimten zijn en $X = X_1 \times X_2$. Bewijs dat iedere $f \in X^*$ van de vorm

$$x = (x_1, x_2) \xrightarrow{f} f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

is met $f_1 \in X_1^*, f_2 \in X_2^*$. Met andere woorden $X^* = X_1^* \times X_2^*$.

Opgave 6.26. Laat X_1 en X_2 genormeerde ruimten zijn en $f \in X^* = X_1^* \times X_2^*$. Bepaal de norm van f in X^* als voor de norm op $X = X_1 \times X_2$ de norm $x \to |x_1| + |x_2|$ genomen wordt. Zelfde vraag voor $x \to \max(|x_1|, |x_2|)$.

7 Van integraal- naar differentiaalrekening

Wat voor eigenschappen heeft de functie $F : [a, b] \to \mathrm{I\!R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^x f(s)\, ds \tag{7.1}$$

als $f \in \mathrm{R\!I}([a, b])$? Om deze vraag te beantwoorden schrijven we, voor een vaste $x_0 \in [a, b]$ en een variable h, de integraal met bovengrens $x_0 + h$ als

$$F(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(s)\, ds = \underbrace{\int_a^{x_0} f(s)\, ds}_{F(x_0)} + \int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\, ds.$$

Als M een bovengrens is voor de waarden die $|f(x)|$ aanneemt voor $x \in [a, b]$ dan geldt voor de tweede term dat

$$|\int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\, ds| \leq M|h|,$$

en dus is F uniform Lipschitz continu op $[a, b]$, want met $x = x_0 + h$ en $y = x_0$ volgt

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$$

voor alle $x, y \in [a, b]$.

Dit scherpen we aan door

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + f(s) - f(x_0))\, ds$$

$$= F(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\, ds + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(s) - f(x_0))\, ds$$

te schrijven. Met

$$R(h; x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} (f(s) - f(x_0))\, ds, \tag{7.2}$$

volgt nu dat

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + f(x_0)h + R(h; x_0), \tag{7.3}$$

waarin we de eerste twee termen zien als *lineaire*[1] *benadering* van $F(x_0 + h)$ als h klein is.

[1] Beter: affien. De afbeelding $h \to f(x_0)h$ is lineair, $h \to F(x_0) + f(x_0)h$ niet.

Hoe groot kan de *restterm* (7.2) zijn? Als f continu is in x_0, dan is er gegeven iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodanig dat

$$|f(s) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \text{als} \quad |s - x_0| \leq \delta.$$

Voor de s in de integrand is dit laatste zeker het geval als $|h| \leq \delta$ en met de 3-hoeksongelijkheid voor integralen volgt dan dat

$$|R(h; x_0)| \leq \varepsilon |h| \quad \text{als} \quad |h| \leq \delta \tag{7.4}$$

en $x_0 + h \in [a, b]$. Deze uitspraak wordt genoteerd als

$$R(h; x_0) = o(h) \quad \text{als} \quad h \to 0,$$

spreek uit: $R(h; x_0)$ is *kleine* o van h voor h gaat naar nul[2].

Definitie 7.1. *Een functie $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heet differentieerbaar in $x_0 \in [a, b]$ als er een getal $f(x_0) \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat (7.3) geldt voor alle $x = x_0 + h \in [a, b]$, met een restterm $R(h; x_0)$ waarvoor geldt dat $R(h; x_0) = o(h)$ als $h \to 0$.*

In deze definitie kan $[a, b]$ vervangen worden door een willekeurig interval $I \subset \mathbb{R}$. Als $x_0 = a$ dan wel $x_0 = b$ spreken we van rechts- dan wel linksdifferentieerbaar. Alleen $h \geq 0$ dan wel $h \leq 0$ zijn dan toegestaan. De waarde $f(x_0)$ heet de *afgeleide* van F in x_0, notatie $F'(x_0) = f(x_0)$.

In Hoofdstuk 4 komen we uitgebreid te spreken over de basale rekenregels voor en voorbeelden van differentieerbare functies. De enige rekenregel die we hier zometeen al nodig hebben is:

Opgave 7.2. Als $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ en $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn in $x_0 \in [a, b]$, dan is ook de verschilfunctie $F - G$ differentieerbaar in $x_0 \in [a, b]$ met $(F - G)'(x_0) = F'(x_0) - G'(x_0)$. Bewijs dit.

De andere rekenregels voor differentieerbare functies zullen we in dit hoofdstuk al tegenkomen als bijprodukten in de behandeling van een eerste vorm van de kettingregel in Sectie 7.6 na de impliciete functies in Sectie 7.4 die hier eerder aan de orde komen dan doorgaans gebruikelijk.

De afgeleide kan voor zo'n vaste x_0 gezien worden als een lineaire afbeelding[3] van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, gegeven door

$$h \to F'(x_0)h. \tag{7.5}$$

[2] Niet te verwarren met de grote O van h die nog komt (en je misschien al gezien hebt).

[3] Voor $F : X \to \mathbb{R}$ wordt dit $F'(x_0) : X \to \mathbb{R}$ in Sectie 14.2.

Als F in elke $x_0 \in [a,b]$ *differentieerbaar* is, met afgeleide $F'(x_0)$, dan is daarmee een functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd die de afgeleide functie van F wordt genoemd. De functie F heet dan een *primitieve functie* voor f (ook wel: anti-afgeleide van). Daarvan hebben we met (7.1) hierboven een belangrijk voorbeeld al gezien, en dat is meteen een eerste *hoofdstelling* van de integraalrekening.

Stelling 7.3. *Definieer voor $f \in \mathrm{RI}([a,b])$ de functie $F \in C([a,b])$ door*

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,ds.$$

Dan is F differentieerbaar in elke $x_0 \in [a,b]$ waar f continu is, met afgeleide $F'(x_0) = f(x_0)$.

Stelling 7.3 zegt dus dat iedere continue functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een primitieve functie heeft. Met de functie F uit de stelling geldt[4] dat

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{7.6}$$

omdat $F(a) = 0$. Tellen we bij deze F een constante op dan blijft (7.6) natuurlijk waar omdat we in het rechterlid een verschil van F-waarden hebben staan. Maar geldt (7.6) nu ook voor *alle* primitieve functies van f? Het antwoord is ja, maar daar is een nieuwe stelling voor nodig die nog veel meer toepassingen heeft. Een stelling over *differentiequotiënten*, differentiequotiënten waarvan we de limiet[5] pas nemen in het volgende hoofdstuk, zie Opgave 4.6. Deze subsectie besluiten we met een opgave waarin we de boel omdraaien:

Opgave 7.4. Gebruik Opgave 3.9 en de resultaten hierboven om te laten zien dat de afgeleide van $x \to x^n$ gelijk is aan $x \to nx^{n-1}$. Hint: niet de definitie van differentieerbaarheid zelf gebruiken nu. Beperk je argumenten tot het geval $x \geq 0$.

7.1 De middelwaardestelling

Zijn er functies die differentieerbaar zijn op een interval met afgeleide overal nul, maar zelf niet constant? De stelling die dit uitsluit is de middelwaardestelling:

[4] In je achterhoofd: vergelijk dit met Opgave 3.9.

[5] De limiet van een differentiequotiënt krijgt pas daar de naam differentiaalquotiënt.

Stelling 7.5. *Laat $F \in C([a,b])$ differentieerbaar zijn op het open interval (a,b). Dan is er een ξ in (a,b) zodanig dat*

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi)$$

Onthoud de uitspraak in deze stelling bijvoorbeeld als dat een differentiequotiënt (alleen van $\mathbb{R}$-waardige functies!) altijd een afgeleide is in een tussenpunt, en teken een plaatje van de grafiek met (niet zo maar) twee lijnen die allebei dezelfde richtingscoëfficiënt hebben. *Teken plaatje!*

Deze middelwaardestelling is een gevolg van de uitspraak in Opgave 5.12 over maxima en minima van functies $F \in C([a,b])$, en een uitspraak over de afgeleide in het geval dat zo'n extreme waarde wordt aangenomen in een $x_0 \in (a,b)$ waar F differentieerbaar is. De volgende opgaven laten dat zien.

Stelling 7.6. *Laat $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ een functie zijn. Als er een punt $x_0 \in (a,b)$ is waarin F differentieerbaar is, en ook geldt dat $F(x) \leq F(x_0)$ voor alle $x \in (a,b)$, dan is $F'(x_0) = 0$.*

Definitie 7.7. *Een $x_0 \in (a,b)$ waarin $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is met $F'(x_0) = 0$ heet een stationair punt van F en F heet dan stationair in x_0.*

Opgave 7.8. Bewijs Stelling 7.6 rechtstreeks vanuit Definitie 7.1.

Opgave 7.9. Bewijs Stelling 7.5 in het geval dat $F(a) = F(b) = 0$ (dit geval staat bekend als de Stelling van Rolle[6]). Hint: gebruik Stelling 7.6 en Opgave 5.12. Onderscheid de gevallen $m < 0 \leq M$, $m \leq 0 < M$ en $m = 0 = M$.

Opgave 7.10. Herleid het algemene geval in Stelling 7.5 tot het resultaat in Opgave 7.9 door van F een lineaire[7] functie G met $G(x) = \alpha x + \beta$ af te trekken, met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zo gekozen dat $F(a) = G(a)$ en $F(b) = G(b)$.

Opgave 7.11. Als $(a,b) \subset \mathbb{R}$ een interval is en $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie met $F'(x) = 0$ voor alle $x \in (a,b)$ dan is er een $C \in \mathbb{R}$ zo dat $F(x) = C$ voor

[6] Read about Rolle in wikipidia.

[7] Beter gezegd: een functie waarvan de grafiek een rechte lijn is.

alle $x \in (a, b)$. Bewijs deze niet-triviale uitspraak! Wat betekent deze uitspraak in het licht van Opgave 7.2 voor twee differentieerbare functies F en G van (a, b) naar $\mathbb{R}$ waarvoor geldt dat $F'(x) = G'(x)$ voor alle $x \in (a, b)$?

7.2 Integralen via primitieve functies

Met $I = [a, b]$ verwijst Definitie 7.1 naar het voorbeeld gedefinieerd door (7.1), waarin F differentieerbaar in elk punt $x_0 \in [a, b]$ waar f continu is. In het geval dat een functie $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ de eigenschap heeft dat $F' \in C([a, b])$ concluderen we nu dat

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(s)\, ds. \tag{7.7}$$

Links en rechts in (7.7) staan immers twee functies die als afgeleide $F' = f$ hebben: de integraal in het rechterlid is met $F'(x) = f(x)$ precies de formule (7.1) waarmee we begonnen zijn en tot Stelling 7.3 zijn gekomen, waarna ook (7.6) volgde.

De functie

$$x \to F(x) - \int_a^x F'(s)\, ds$$

heeft dus als afgeleide de nulfunctie en is daarmee vanwege Stelling 7.5 toegepast op iedere $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [a, b]$ constant op $[a, b]$. In Opgave 7.11 is dit argument uitgespeld. Door $x = 0$ in te vullen zien we dat de constante $F(a)$ is. Zo komen we tot een *tweede hoofdstelling* van de integraalrekening:

Stelling 7.12. *Voor $f \in C([a, b])$ geldt dat*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

als F een primitieve functie is van f. Als G een andere primitieve is dan de primitieve F gedefinieerd door (7.1), dan is $F - G$ constant op $[a, b]$.

Bewijs. Wie goed leest ziet dat het bewijs hierboven al gegeven is: de functie F gedefinieerd door (7.1) is op grond van Stelling 7.3 een primitieve waarvoor vanwege (7.6) de uitspraak in Stelling 7.12 geldt; als G een andere primitieve[8] is dan geldt vanwege Stelling 7.5 (nu zonder Opgave 7.11 maar met Opgave 7.2) toegepast op de verschilfunctie dat $F(b) - G(b) = F(a) - G(a)$ en dus

[8] Bij afspraak boven Stelling 7.3 een functie die differenteerbaar is op heel $[a, b]$.

$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. Opgave 7.11 geeft tenslotte weer de uitpraak dat $F - G$ constant is.

Kijk nog eens naar Opgave 3.9. De formule in Stelling 7.12 wordt ook wel geschreven als

$$\int_{[a,b]} dF = F(x)\Big|_a^b \quad \text{met} \quad dF = F'(x)dx = f(x)dx \tag{7.8}$$

en

$$F(x)\Big|_a^b = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a),$$

een formele notatie met de d van F die later in de vectorcalculus nog (algemenere) betekenis zal krijgen. De uitdrukking $f(x)dx$ heet een 1-vorm, $F = F(x)$ heet een 0-vorm, en een 1-vorm kan de d van een 0-vorm zijn. Een en ander is hier nog van latere zorg: te weten als we bij integraal- en differentiaalrekening met twee of meer variabelen onvermijdelijk uitdrukkingen met dx en dy voor onze kiezen krijgen, waarbij de d van $F(x,y)$ iets met dx en dy moet zijn, dus $dF = f(x,y)dx + g(x,y)dy$. Met expressies $f(x,y)dx$ en $g(x,y)dy$ die niet alleen bij elkaar opgeteld worden maar ook met elkaar vermenigvuldigd.

Zoals gezegd, van later zorg, maar merk nu alvast op dat in Stelling 7.12 de uitdrukking links kan worden gezien als

$$\int_a^b \quad \text{werkend op} \quad f(x)dx,$$

en de uitdrukking rechts als

$$\Big|_a^b \quad \text{werkend op} \quad F(x),$$

een wisselwerking tussen "integralen" en differentiaalvormen, waarin verwisselen van a en b een minteken geeft. Zie in dit verband ook Definitie 3.31 en Opgave 3.33 daaronder.

Opgave 7.13. Als I een interval is en $f : I \to \mathbb{R}$ de eigenschap heeft dat $f \in \mathbb{R}\mathrm{I}([a,b])$ voor elk gesloten interval $[a,b] \subset I$, dan varieert $\int_a^b f$ continu met a en b. Leg nog een keer uit wat dat betekent en waarom.

Opgave 7.14. Stelling 7.12 kan ook geformuleerd worden voor $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar, i.e. $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ is differentieerbaar en $x \to F'(x)$ definieert een continue functie op $[a,b]$. Herschrijf de uitspraak

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx$$

via de substitutie

$$x = (1-t)a + tb = a + t(b-a)$$

als

$$F(b) - F(a) = \int_0^1 F'((1-t)a+tb)(b-a)\, dt = \int_0^1 F'((1-t)a+tb)\, dt\, (b-a), \quad (7.9)$$

en bewijs deze uitspraak rechtstreeks vanuit de definities, dus zonder het regeltje

$$dx = (b-a)dt$$

te gebruiken.

De formule (7.9) zal nog terugkomen[9], ook met b en a variabel, niet alleen met a en b in $\mathbb{R}$, en niet alleen met $\mathbb{R}$-waardige functies. Zo'n *differentie* $F(b) - F(a)$ kan altijd als een integraal van $t = 0$ tot $t = 1$ geschreven worden, als de integrand maar continu is. Maar alleen voor $\mathbb{R}$-waardige functies kunnen we vervolgens zeggen dat de integraal in ligt tussen het minimum en het maximum van de integrand, en dus gelijk moet zijn aan een waarde van $F'(x)$ op het interval $[a, b]$: een $F'(\xi)$ met $\xi \in [a, b]$. Een net iets zwakkere uitspraak dan in Stelling 7.5, onder een veel sterkere aanname dan in Stelling 7.5 , nog steeds exclusief voor $\mathbb{R}$-waardige functies.

Merk op dat als $x \to F'(x)$ zelf Lipschitz continu is op $[a, b]$, met Lipschitz constante L, de eerste integraal in (7.9) met $b = x$ herschrijft als

$$\int_0^1 F'(a)(x-a)\, dt + \int_0^1 (F'((1-t)a+tx) - F'(a))(x-a)\, dt,$$

waarmee

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + R(x; a) \quad (7.10)$$

met

$$R(x; a) = \int_0^1 (F'((1-t)a+tx) - F'(a))(x-a)\, dt,$$

en dus

$$|R(x; a)| \leq \int_0^1 Lt|x-a|^2\, dt = \frac{L}{2}|x-a|^2. \quad (7.11)$$

In (7.10) zien we een lineaire benadering met een restterm, die in (7.11) expliciet wordt afgeschat op een constante keer $|x-a|^2$. We schrijven dit als,

$$R(x; a) = O(|x-a|^2),$$

[9] In principe is vanaf hier de sprong naar Sectie 13.6 mogelijk.

spreek uit *grote O van* $x - a$ in het kwadraat. Zo'n schatting is voldoende om convergentie van de methode van Newton te bewijzen onder milde voorwaarden, zie Sectie 7.8. Merk op dat $O(|x-a|^2) = o(|x-a|)$ als $x \to a$ maar i.h.a. niet[10] $o(|x-a|) = O(|x-a|^2)$.

7.3 Inverse functies

Als I een open interval is met $F : I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar en $F'(x) > 0$ voor alle $x \in I$, dan volgt uit de middelwaardestelling (Stelling 7.5) dat F strict monotoon stijgend is op I. Voor iedere $[a,b] \subset I$ met $a < b$ is het beeld onder F van $[a,b]$ dus bevat in $(F(a), F(b))$, het beeld van (a,b) onder F in $(F(a), F(b))$, en kan elke waarde $c \in (F(a), F(b))$ maar één keer[11] worden aangenomen.

Wordt elke waarde $c \in (F(a), F(b))$ ook daadwerkelijk aangenomen? Het antwoord is ja[12] en daarvoor is alleen maar nodig dat $F \in C([a,b])$. Zie Hoofdstuk 10 van [HM] of [BE] over die fundamenten van de wiskunde. Of maak de volgende opgave.

Opgave 7.15. Laat $F \in C([a,b])$ en neem aan dat $F(a) < c < F(b)$. Beschouw de kleinste bovengrens ξ van de niet-lege verzameling x-waarden in $[a,b]$ waarvoor $F(x) < c$, dus

$$\xi = \sup\{x \in [a,b] : F(x) < c\}.$$

Bewijs dat $F(\xi) = c$.

Stelling 7.16. *Laat $F \in C([a,b])$ en neem aan dat F differentieerbaar is met $F'(x_0) > 0$ in elke $x_0 \in (a,b)$. Dan bestaat er een functie $G \in C([F(a), F(b)])$ met $G(F(x)) = x$ voor alle $x \in [a,b]$, $F(G(y)) = y$ voor alle $y \in [F(a), F(b)]$ en G is differentieerbaar in elke $y_0 \in [F(a), F(b)]$ met afgeleide gedefinieerd door $F'(x_0)G'(y_0) = 1$ als $y_0 = F(x_0)$ (en $x_0 = G(y_0)$).*

Opgave 7.17. Het bestaan van G volgt onmiddellijk[13] uit de overwegingen boven de stelling en de opgave. We hoeven alleen nog te laten zien dat G differentieerbaar is. Neem daartoe zonder beperking der algemeenheid het geval dat $x_0 = 0$, $F(0) = 0 = y_0$ (dus $G(0) = 0$), en $F'(x_0) = 1$. Maak[14] het bewijs af door $F'(0) = 1$ te relateren aan het liggen van de grafiek $y = F(x)$ tussen $y = (1+\varepsilon)x$ en $x = (1+\varepsilon)y$ in de

Teken plaatje!

[10] Het is gelijkteken wordt hier op een niet-symmetrische manier gebruikt!
[11] Men zegt dan wel eens dat F injectief is.
[12] Men zegt dan wel eens dat F surjectief is.
[13] F en G zijn allebei zowel injectief als surjectief en heten daarom *bijecties*.
[14] Na discussie met Thomas Rot is Sectie 8.7 toegevoegd, zou te lezen moeten zijn.

buurt van $(x, y) = (0, 0)$ voor gegeven willekeurige $\epsilon > 0$. Zorg dat je herformulering symmetrisch is in x en y en concludeer dat $G'(0)$ bestaat en gelijk is aan 1.

Opgave 7.18. Reduceer het algemene geval via geschikte hulpfuncties tot het speciale geval $F(0) = 0$ en $F'(0) = 1$ in Opgave 7.17.

Opgave 7.19. De functies $x \to x^n$ op $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ met $n \in \mathbb{N}$ hebben inverse functies. Gebruik Opgave 7.4 en Stelling 7.17 om de afgeleiden van de inverse functies $y \to \sqrt[n]{y}$ te bepalen.

Op dit moment hebben we nog niet zoveel andere voorbeelden. Maar zie later en verderop Sectie 4.8, en leg Stelling 7.16 daar dan nog eens naast. Wel is het aardig om hier op te merken dat lineaire benaderingen[15] van wortels al 300 jaar voor Christus voorkwamen, zie [Eves, §2.17].

7.4 Impliciete functies

Als voor een functie van twee reële variabelen, zeg

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{F} \mathbb{R},$$

geldt dat $F(0, 0) = 0$, dan heeft de vergelijking

$$F(x, y) = 0$$

in het algemeen nog meer oplossingen in de *buurt*[16] van $(x, y) = (0, 0)$. In deze sectie gaat het over het vinden van die andere oplossingen. De aanpak die we presenteren is in wezen hetzelfde als[17] die voor $F : X \times Y \to Y$.

Een bijzonder geval van de vraagstelling is het geval waarin

$$F(x, y) = g(y) - x,$$

en we dus eigenlijk vragen naar de inverse functie f van een gegeven functie g, maar anders dan in de vorige sectie gaat het nu om de inverse in de buurt van een gegeven punt (het punt $(0, 0)$ als $g(0) = 0$) op de grafiek van g, en *niet* om een globale inverse.

[15] Equivalent met $\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x + \cdots$.
[16] Lees: in een omgeving van, zie de appendix, Section 6.
[17] Voor Banachruimten X en Y, bijvoorbeeld $X = \mathbb{R}^n$ en $Y = \mathbb{R}^m$.

Voor we een (locale *impliciete functie*) stelling formuleren schetsen we eerst de *methode van Newton* voor het vinden van die oplossingen[18], waarbij we aannemen dat voor vaste x in de buurt van $x = 0$ de functie

$$y \to F(x, y)$$

differentieerbaar is in de buurt van $y = 0$. De afgeleide noteren we nu niet met $F'(x, y)$ maar met $F_y(x, y)$. Het subscript y geeft aan dat het om de afgeleide naar y gaat. Docent en student kunnen het onderstaande natuurlijk eerst in het speciale geval $F(x, y) = g(y) - x$ doen, met $F_y(x, y) = g'(y)$. Niet wezenlijk anders, maar lichter kwa notatie. Het eindresultaat is dan een locale *inverse functie* stelling[19].

Neem voor zo'n vaste x in de *startwaarde* $y_0 = 0$ de lineaire benadering van $F(x, y)$ als functie van y rond $y = y_0$. Stel nu niet $F(x, y)$ maar die lineaire benadering gelijk aan 0, los daaruit $y = y_1$ op, en gebruik de lineaire benadering van $F(x, y)$ rond $y = y_1$ om dan weer y_2 te vinden, en ga zo door. Als y_{n-1} al gevonden is en $F_y(x, y_{n-1})$ weer inverteerbaar[20] als afbeelding

$$h \to F_y(x, y_{n-1})h$$

van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, dan geeft dit een volgende y_n uniek gedefinieerd door

$$F(x, y_{n-1}) + F_y(x, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) = 0.$$

Voor $n = 1, 2, \ldots$ geldt dan dat

$$y_n = y_{n-1} - (F_y(x, y_{n-1}))^{-1} F(x, y_{n-1}), \quad \text{beginnend met} \quad y_0 = 0. \tag{7.12}$$

In het algemeen[21] breekt dit proces, dat de methode van Newton wordt genoemd, niet af.

Als y_n vervolgens convergeert, en de x-afhankelijke limiet y een zogenaamde impliciete functie

$$x \to y = f(x) \tag{7.13}$$

definieert waarvoor (hopelijk) geldt dat

$$F(x, f(x)) = 0, \tag{7.14}$$

dan kan daarna ook nog de vraag gesteld worden onder welke voorwaarden f continu of differentieerbaar is in $x = 0$.

[18] Convergentie van die methode bespreken we pas in Sectie 7.8.
[19] In de algemene situatie volgt de impliciete ook uit de inverse functiestelling.
[20] Hier hetzelfde als $F_y(x, y_{n-1}) \neq 0$ aannemen zodat $(F_y(x, y_{n-1}))^{-1} = \frac{1}{F_y(x, y_{n-1})}$.
[21] Probeer het maar met een voorbeeldje.

Een rechtstreeks maar lastig bewijs van (snelle) convergentie van de rij y_n waarmee $y = f(x)$ gemaakt moet worden is mogelijk via een schatting van de vorm

$$|y_{n+1} - y_n| \leq C|y_n - y_{n-1}|^2,$$

afgeleid uit o.a. een aanname op de tweede[22] afgeleide van $y \to F(x, y)$. Zo'n aanname doen we hier echter niet want voor het *aangepaste schema*

$$y_n = y_{n-1} - (F_y(0,0))^{-1} F(x, y_{n-1}) \tag{7.15}$$

kan (langzamere) convergentie eenvoudiger bewezen worden zonder zo'n aanname.

Behalve een voldoende kleine bovengrens op $|F(x, 0|$ en de inverteerbaarheid van $F_y(0, 0)$, gebruikt het convergentiebewijs dat nu volgt alleen de continuïteit[23] van

$$(x, y) \to F_y(x, y)$$

in $(x, y) = (0, 0)$. Dit zal voldoende blijken om in de buurt van $(0, 0)$ alle oplossingen van $F(x, y) = 0$ te vinden, als x-afhankelijke limieten van de rijen y_n gedefinieerd door (7.15), beginnende met

$$y_0 = 0 \quad \text{en} \quad y_1 = -(F_y(0,0))^{-1} F(x, 0).$$

Merk op dat als $y_1 = y_0 = 0$ meteen ook volgt dat $0 = y_0 = y_1 = y_2 = \cdots$ en dat in dat geval $y = y_0 = 0$ zelf al de oplossing is van $F(x, y) = 0$. We spellen nu eerst uit hoe convergentie van de rij y_n bewezen kan worden, en nemen daarbij aan dat $y_1 \neq y_0$, want $y_1 = y_0$ is alleen maar het geval als $F(x, y_0) = 0$. Hoe groot kan y_1 nu zijn als $F(x, y_0) = F(x, 0) \neq 0$? Wel, als $|(F_y(0, 0))^{-1}| \leq M$ dan geldt voor y_1 dat

$$|y_1| = |(F_y(0,0))^{-1}|\,|F(x,0)| \leq M\,|F(x,0)|$$

en als $F(x, y_1)$ gedefinieerd is volgt ook dat

$$|y_2 - y_1| = |(F_y(0,0))^{-1}|\,|F(x,y_1)| \leq M\,|F(x,y_1)|,$$

als we (7.15) gebruiken met $n = 2$.

Als we echter (7.15) gebruiken met $n = 1$ *en* $n = 2$ dan volgt

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= y_1 - (F_y(0,0))^{-1} F(x, y_1) - y_0 + (F_y(0,0))^{-1} F(x, y_0) \\ &= (F_y(0,0))^{-1} \left(F(x, y_0) - F(x, y_1) + F_y(0,0) y_1 - F_y(0,0) y_0 \right), \end{aligned}$$

[22] In feite: Lipschitz continuïteit van $y \to F_y(x, y)$, zie (7.10) en (7.11).

[23] Nog niet gedefinieerd wat dat is, maar dat kun je wellicht al bedenken nu.

waarin we $(F_y(0,0))^{-1}$ aan de voorkant buiten haakjes hebben gehaald en in de grote factor die overblijft in de eerste twee termen het verschil $F(x,y_0) - F(x,y_1)$ herkennen. Dat verschil kunnen we schrijven als

$$F(x,y_0) - F(x,y_1) = \int_0^1 F_y(x, ty_0 + (1-t)y_1)\, dt\, (y_0 - y_1),$$

de integraal die we krijgen door (7.9), de *middelwaardestelling in integraalvorm*[24], voor vaste x toe te passen op de functie $y \to F(x,y)$ met $a = y_1$ en $b = y_0$. Samen met de derde en vierde term herschrijft de hele factor nu als

$$\int_0^1 \left(F_y(x, ty_0 + (1-t)y_1) - F_y(0,0)\right)\, dt\, (y_0 - y_1),$$

door de andere twee termen binnen de integraal te brengen. We concluderen dat

$$y_2 - y_1 = (F_y(0,0))^{-1} \int_0^1 \left(F_y(x, ty_0 + (1-t)y_1) - F_y(0,0)\right)\, dt\, (y_0 - y_1).$$

Tot hier is alleen de continuïteit voor vaste x van $y \to F_y(x,y)$ gebruikt, op een nog te kiezen (x,y)-domein dat nu kan worden gekozen door continuïteit van $(x,y) \to F_y(x,y)$ in $(0,0)$ te eisen[25], en daarmee het bestaan van $F_y(x,y)$ voor (x,y) in de buurt van $(0,0)$. Om precies te zijn, we nemen dan aan dat er voor iedere $\eta > 0$ een $\varepsilon > 0$ is waarmee voor alle x en y in $\mathbb{R}$ de implicatie

$$|x| \leq \varepsilon \text{ en } |y| \leq \varepsilon \implies |F_y(0,0) - F_y(x,y)| \leq \eta \tag{7.16}$$

geldt. Daarmee volgt dat voor x, y_0, y_1 met $|x| \leq \varepsilon$, $|y_0| \leq \varepsilon$ en $|y_1| \leq \varepsilon$ de integraal in absolute waarde hoogstens gelijk kan zijn η en dus dat

$$|y_2 - y_1| \leq M\eta\, |y_1 - y_0| \quad \text{met} \quad M = |(F_y(0,0))^{-1}| > 0,$$

i.e. de grootte van het tweede stapje is begrensd door

$$\theta = M\eta$$

keer de grootte van het eerste stapje.

Voor deze conclusie is in het bijzonder ook aangenomen dat $y \to F(x,y)$ voor alle x met $|x| \leq \varepsilon$ differentieerbaar in elke y met $|y| \leq \varepsilon$. Merk ook op

[24] Om later het bewijs te kunnen overschrijven voor $F : X \times Y \to Y$.

[25] In het geval dat $F(x,y) = g(y) - x$ is dit geen extra eis natuurlijk.

dat we hier i.p.v. een ε, δ-definitie een η, ε-definitie van continuïteit gebruiken. Dat is omdat uiteindelijk de limiet $y = f(x)$ van de rij y_n straks ook nog moet voldoen aan $|y| \leq \varepsilon$, voor x met $|x| \leq \delta$, $\delta > 0$ bij $\varepsilon > 0$ nog te kiezen[26], om f continu in $x = 0$ te krijgen.

Als vervolgens ook geldt dat $|y_2| \leq \varepsilon$, dan geeft hetzelfde argument dat

$$|y_3 - y_2| \leq \theta\, |y_2 - y_1|,$$

enzovoorts. Zolang $|y_n| \leq \varepsilon$ volgt dat[27]

$$|y_{n+1}| = |y_{n+1} - y_0| \leq |y_{n+1} - y_n| + \cdots + |y_1 - y_0| \leq$$

$$(\theta^n + \cdots + 1)|y_1 - y_0| < \frac{|y_1 - y_0|}{1-\theta} \leq \frac{M|F(x,0)|}{1-\theta} \leq \varepsilon$$

als $\theta < 1$, en $F(x,0)$ voldoet aan

$$|F(x,0)| \leq \frac{\varepsilon}{M}(1-\theta) = \frac{\varepsilon}{M}(1 - M\eta) = \varepsilon(\frac{1}{M} - \eta) = \tilde{\varepsilon}. \tag{7.18}$$

De laatste ongelijkheid wordt geforceerd door bij deze positieve $\tilde{\varepsilon}$ de bijbehorende $\tilde{\delta} > 0$ van de continuïteit van $x \to F(x,0)$ in $x = 0$ te nemen en x te beperken tot $|x| \leq \tilde{\delta}$. We nemen dus aan dat $x \to F(x,0)$ in $x = 0$ continu is[28].

Kies nu $\eta = \eta_0 < \frac{1}{M}$ vast en laat zoals in (7.16) hierboven ε_0 de bijbehorende ε zijn. Deze ene η_0 en ε_0 zijn genoeg om nu de convergentie te bewijzen. Neem daartoe $\tilde{\varepsilon}_0$ bij η_0 en ε_0 zoals in (7.18), en vervolgens $\tilde{\delta}_0$ bij $\tilde{\varepsilon}_0$ gegeven middels de continuïteit van $x \to F(x,0)$ in $x = 0$. Neem tenslotte voor δ_0 het minimum van ε_0 en $\tilde{\delta}_0$.

De (aannamen voor de) schattingen hierboven zijn nu hieronder alleen nog nodig voor x met $|x| \leq \delta_0$ en y met $|y| \leq \varepsilon_0$. Voor iedere x met $|x| \leq \delta_0$ volgt nu dat de x-afhankelijke som

$$\sum_{n=0}^{\infty}(y_{n+1} - y_n)$$

absoluut convergent is, en dus[29] ook gewoon convergent. Maar dat betekent dat de x-afhankelijke rij y_n, gedefinieerd door $y_0 = 0$ en (7.15) voor $n \in \mathbb{N}$,

[26] Dit *rijgen* van de kleine Griekse letters hebben we eerder gezien in Opgave 5.6.

[27] Gebruik de meetkundige reeks

$$1 + \theta + \theta^2 + \cdots = \frac{1}{1-\theta}. \tag{7.17}$$

[28] Geen extra eis in het speciale geval $F(x,y) = x - g(y)$ natuurlijk.

[29] De eerste keer dat we dit gebruiken!

convergeert naar een limiet $y = f(x)$ met $|y| \leq \varepsilon_0$. Deze y nu moet de unieke oplossing van $F(x, y) = 0$ in

$$\bar{B}_{\varepsilon_0} = \{y \in \mathrm{I\!R} : \ |y| \leq \varepsilon_0\}$$

zijn.

In feite hebben we hierboven laten zien dat de x-afhankelijke afbeelding Φ gedefinieerd door

$$y \xrightarrow{\Phi} y - (F_y(0,0))^{-1} F(x, y), \tag{7.19}$$

voor x in een geschikt gekozen x-interval, op een geschikt gekozen maar niet van x afhankelijk y-interval precies één y op zichzelf afbeeldt. Zo'n y wordt een *vast punt* van Φ genoemd en, omdat $(F_y(0,0))^{-1}$ als inverse van $F_y(0,0)$ zelf inverteerbaar is, zijn vaste punten van $y \to \Phi(x, y)$ precies de oplossingen van $F(x, y) = 0$.

De facto blijkt dat Φ voldoet aan een schatting van de vorm

$$|\Phi(x, y) - \Phi(x, \tilde{y})| \leq \theta |y - \tilde{y}| \tag{7.20}$$

met $\theta < 1$. De afbeelding $y \to \Phi(x, y)$ heet dan strict contractief, i.e. uniform Lipschitz continu met Lipschitz constante $\theta < 1$. Dat kan hier met één en dezelfde constante voor alle x in de buurt van 0.

Merk nog een keer goed op dat $F(x, y) = 0$ via (7.19) equivalent is met $y = \Phi(x, y)$ omdat $(F(0,0))^{-1}$ als inverse van $F(0,0)$ inverteerbaar is. Daar $y \to \Phi(x, y)$ op $\bar{B}_{\varepsilon_0}$ voor alle x met $|x| \leq \delta_0$ uniform Lipschitz continu is met Lipschitz constante $M\eta_0 < 1$, is er voor iedere zulke x hoogstens één zo'n $y \in \bar{B}_{\varepsilon_0}$ met $y = \Phi(x, y)$. Voor de limiet $y = f(x)$ geldt vanwege de continuïteit[30] van $y \to \Phi(x, y)$ inderdaad dat

$$y = \lim_{n \to \infty} y_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \Phi(x, y_n) = \Phi(x, y).$$

De formule direct boven (7.18) geeft via de nu geslaagde limietovergang $y_{n+1} \to y = f(x)$ dat $f : \bar{B}_{\delta_0} \to \bar{B}_{\varepsilon_0}$ welgedefinieerd is en voldoet aan

$$|f(x)| \leq \frac{M|F(x,0)|}{1 - \theta} = \frac{|F(x,0)|}{\frac{1}{M} - \eta_0}. \tag{7.21}$$

Met de grafiek $y = f(x)$ van f op $\bar{B}_{\delta_0}$ hebben we dus precies alle oplossingen van $F(x, y) = 0$ in $\bar{B}_{\delta_0} \times \bar{B}_{\varepsilon_0}$ te pakken: *Teken plaatje!*

$$\forall (x, y) \in \bar{B}_{\delta_0} \times \bar{B}_{\varepsilon_0} : \quad F(x, y) = 0 \iff y = f(x). \tag{7.22}$$

[30] Die volgt uit de differentieerbaarheid.

Hiermee is het bewijs van het bestaan van de impliciete functie f wel klaar. Het enige dat we gebruikt hebben om in (7.22) de nulverzameling van F in een geschikt gekozen omgeving $\bar{B}_{\delta_0} \times \bar{B}_{\varepsilon_0}$ van $(x, y) = 0$ als een grafiek van de vorm $y = f(x)$ te karakteriseren met $f : \bar{B}_{\delta_0} \to \bar{B}_{\varepsilon_0}$ continu in $x = 0$, is dat

$F(0, 0) = 0$;
$x \to F(x, 0)$ is continu in $x = 0$;
$(x, y) \to F_y(x, y)$ is continu in $(x, y) = (0, 0)$;
$y \to F_y(x, y)$ is een continue functie voor x vast[31];
$F_y(0, 0)$ is inverteerbaar.

Omgekeerd is gegeven zo'n f de functie gedefinieerd door $(x, y) \to f(x) - y$ een i.h.a. andere (eenvoudigere) functie die precies aan de aannamen op de algemene F voldoet om f bij F te maken zoals hierboven.

7.5 Differentieerbare impliciete functies

Met het eindresultaat in Sectie 7.4 zijn we nog niet tevreden[32], want het enige dat we van $x \to f(x)$ nu weten is de continuiteit in $x = 0$, via de continuiteit van $x \to F(x, 0)$ en (7.21).

Om ook *differentieerbaarheid* van $x \to f(x)$ in $x = 0$ te krijgen schrijven we, wederom met (7.9),

$$
\begin{aligned}
0 = F(x, f(x)) &= F(x, 0) + F(x, f(x)) - F(x, 0) \\
&= F(x, 0) + \int_0^1 F_y(x, tf(x))f(x)\,dt \\
&= F(x, 0) + F_y(0, 0)f(x) + R(x),
\end{aligned}
$$

waarin

$$R(x) = \int_0^1 (F_y(x, tf(x)) - F_y(0, 0))f(x)\,dt,$$

en waarmee de aanname dat $x \to F(x, 0)$ differentieerbaar is in $x = 0$ voor de hand ligt. In dat geval weten we dat $F(x, 0) = O(|x|)$ en via (7.21) ook dat

$$f(x) = O(|x|) \quad \text{als} \quad x \to 0,$$

hetgeen alvast een sterke uitspraak is dan de continuiteit van $x \to f(x)$ in $x = 0$.

[31] Waarbij $|x| \leq \delta_0$ en $|y| \leq \varepsilon_0$, met $\delta_0 > 0$ en $\varepsilon_0 > 0$ als in de constructie van (7.22).
[32] Hoewel resultaat nu al geschikt is voor (15.23) en het Lemma van Morse, Sectie 15.1.

Neem nu aan dat $(x, y) \to G(x, y) = F_y(x, y)$ continu is in $(x, y) = (0, 0)$, hierboven geformuleerd met η en ε in (7.16), maar nu weer gewoon met een ε, δ-definitie.

Definitie 7.20. *Een functie $(x, y) \to G(x, y)$ heet continu in $(0, 0)$ als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zodanig dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$ de implicatie*

$$|x| \leq \delta \text{ en } |y| \leq \delta \implies |G(x, y) - G(0, 0)| \leq \varepsilon$$

geldt.

Voor $x \in \mathbb{R}$ met $|x| \leq \delta$ en $|f(x)| \leq \delta$ geldt dus dat

$$|R(x)| \leq \varepsilon |f(x)|,$$

en de continuiteit van $f(x)$ in $x = 0$ geeft dat er $\hat{\delta} \in (0, \delta]$ is zodanig dat deze afschatting geldt voor $|x| \leq \hat{\delta}$. We concluderen nu dat aan

$$R(x) = o(|x|) \quad \text{als} \quad x \to 0$$

is voldaan, zie (7.4). Maar nu geldt

$$0 = F(x, f(x)) = F_x(0, 0)x + r(x) + F_y(0, 0)f(x) + R(x),$$

met ook $r(x) = o(|x|)$ voor $x \to 0$ omdat $x \to F(x, 0)$ differentieerbaar is in $x = 0$. Links en rechts de inverse van $F_y(0, 0)$ toepassen en differentieerbaarheid van f in $x = 0$ volgt.

Opgave 7.21. Onder de sterkere aanname dat $(x, y) \to F_y(x, y)$ continu is in $(x, y) = (0, 0)$, en de extra aanname dat $x \to F(x, 0)$ differentieerbaar is in $x = 0$, is de impliciete functie $x \to f(x)$ differentieerbaar in $x = 0$ met

$$f'(0) = -(F_y(0, 0))^{-1} F_x(0, 0).$$

Bewijs dit nu verder zelf.

In het convergentiebewijs hebben we gebruikt dat *absoluut convergente reeksen* convergent zijn. Per definitie wordt voor een rij $a_n \in \mathbb{R}$ de som S van de bijbehorende reeks gedefinieerd door

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n,$$

als deze limiet bestaat. De volgende opgave moet je een keer gemaakt hebben. Wellicht is dit de eerste keer. Je hebt hem hierna nog vaker nodig. Zie ook Sectie 5.7 en Opgave 5.27.

Opgave 7.22. Neem aan dat voor een rij $a_n \in \mathbb{R}$ geldt dat er een $M \geq 0$ is waarvoor geldt dat

$$T_N = \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq M$$

voor alle $N \in \mathbb{N}$. Bewijs dat er een kleinste $M \geq 0$ is waarvoor dit geldt, en dat deze kleinste M de limiet is van T_N als $N \to \infty$, genoteerd als

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Bewijs ook dat

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

een Cauchyrij is, en dus convergent met een unieke limiet S, die genoteerd als

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

voldoet aan

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Blijft nog de vraag hoe het in de andere x-waarden zit met de impliciete functie die we nu gemaakt hebben. Natuurlijk willen we een uitspraak die zegt dat, voor x eventueel wat dichter in de buurt van $x = 0$, dat

$$f'(x) = -(F_y(x, f(x)))^{-1} F_x(x, f(x)), \tag{7.23}$$

en dat het rechterlid in (7.23) continu van x afhangt. Het enige dat daarvoor nodig is dat $F_y(x, y)$ in de buurt van $(x, y) = (0, 0)$ continu en inverteerbaar is en dat $x \to F(x, y)$ voor y in de buurt van $y = 0$ differentieerbaar is in elke x in de buurt van 0. Daarover doen we nu moeilijk, met als belangrijkste hulpmiddel (7.17).

Opgave 7.23. De inverteerbaarheid van $A = F_y(x, y)$ in de buurt van van $(x, y) = (0, 0)$ volgt uit de inverteerbaarheid van $A_0 = F_y(0, 0)$. Bewijs dit met algebra en convergente *meetkundige reeksen*. Gebruik van de inverse B_0 van A_0 alleen dat $A_0 B_0 = B_0 A_0 = 1$. Delen is streng verboden evenals de regel $|AB| = |A|\,|B|$ (voor willekeurige A en B). Je mag wel de ongelijkheid $|AB| \leq |A|\,|B|$ gebruiken. Laat zien dat er een B is met $AB = BA = 1$, onder de aanname dat $|A - A_0|$ klein genoeg is in termen van o.a. $|B_0|$, en dat

$$A \to A^{-1}$$

continu is in $A = A_0$.

Na deze opgave[33] kunnen we voor $x = x_0$ in de buurt van $x = 0$ rond (x_0, y_0) met $y_0 = f(x_0)$ alles hierboven herhalen onder de aanname dat $F_x(x_0, y_0)$ bestaat en F_y continu is in (x_0, y_0). Tenslotte is voor het continu zijn van

$$x \to f'(x) = -(F_y(x, f(x)))^{-1} F_x(x, f(x))$$

in $x = x_0$ ook de continuïteit van $(x, y) \to F_x(x, y)$ in (x_0, y_0) nodig. Kortom, *uiteindelijk* zegt de *impliciete functiestelling* dat in de buurt van een een willekeurig punt (x_0, y_0) waar $(x, y) \to F_x(x, y)$ en $(x, y) \to F_y(x, y)$ allebei bestaan en continu zijn, niet alleen in (x_0, y_0) maar in die hele buurt, in een iets kleinere buurt de oplossingen van $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ worden gegeven als grafiek van een continu differentieerbare functie $x \to f(x)$, mits in dat éne punt (x_0, y_0) de partiële afgeleide$F_y(x_0, y_0)$ inverteerbaar is.

Stelling 7.24. *Hierboven staat de definitieve versie van de impliciete functiestelling die je nu zelf kunt formuleren.*

Opgave 7.25. Formuleer Stelling 7.24, ook voor het geval dat $F(x, y) = g(y) - x$ met $g(0) = 0$. Dit speciale geval is de inverse functiestelling, die zegt dat de inverse functie f van g in een omgeving van $x = 0$ als continu differentieerbare functie is gedefinieerd met de afgeleide die je verwacht.

Opgave 7.26. Alleen in het geval dat y en dus $F(x, y)$ in dezelfde 1-dimensionale $\mathbb{R}$ liggen, kan in plaats van (7.9) direct de gewone middelwaardestelling (Stelling 7.5) gebruikt worden, op alle plekken waar (7.9) gebruikt is, om tot dezelfde resultaten (onder wellicht iets zwakkere aannamen) te komen. Ga dit na.

Opgave 7.27. De formule (7.23) kan gezien worden als een differentaalvergelijking voor $x \to f(x)$. Neem een beetje mooie $F(x, y)$ naar keuze, bepaal F_x en F_y, zet $f(x) = y$ in (7.23), en schrijf (7.23) op een apart blaadje als

$$\frac{dy}{dx} = G(x, y)$$

[33] Waarom doen we zo moeilijk in deze opgave? Zie Sectie 8.3.

met $G(x, y)$ zo vereenvoudigd dat je niet meer ziet met welke $F(x, y)$ je begonnen bent. Geef aan een collega met de vraag: los even op als je kan.

7.6 Totale afgeleide, ketting- en Leibnizregel

In Opgave 7.21 is het bewijs voor het bestaan van een unieke impliciete functie f met $f(0) = 0$, waarvoor geldt dat

$$x \to F(x, f(x))$$

constant is in de buurt van $x = 0$, afgerond met de differentieerbaarheid van f in $x = 0$. Voldoende hiertoe is de aanname dat

$x \to F(x, 0)$ differentieerbaar[34] is in $x = 0$;
$(x, y) \to F_y(x, y)$ continu is in een omgeving van $(0, 0)$;
$F_y(0, 0)$ inverteerbaar is.

De continuiteit van F_y is hier gemakshalve wat sterker geformuleerd dan aan het eind van Sectie 7.4. We bekijken nu wat de eerste twee aannames voor de functie $(x, y) \to F(x, y)$ zelf betekenen.

Met de definitie van differentieerbaarheid van $x \to F(x, 0)$ in $x = 0$, en de middelwaardestelling[35] schrijven we

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x, 0) + F(x, y) - F(x, 0) = F(0, 0) + F_x(0, 0)x + R(x) + F_y(x, \eta)y \\ &= F(0, 0) + F_x(0, 0)x + F_y(0, 0)y + \underbrace{R(x) + (F_y(x, \eta) - F_y(0, 0))y}_{R(x,y)}, \end{aligned}$$

voor een η tussen 0 en y en met $R(x) = o(x)$ als $x \to 0$.

Dit leest zich nu als

$$F(x, y) = F(0, 0) + F_x(0, 0)x + F_y(0, 0)y + R(x, y) \tag{7.24}$$

met

$$R(x, y) = o(r) \quad \text{als} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0, \tag{7.25}$$

precies wat we voortaan de *(totale) differentieerbaarheid* van $(x, y) \to F(x, y)$ in $(0, 0)$ noemen. Merk op dat in (7.24) het lineaire stuk te schrijven is als

$$F_x(0, 0)x + F_y(0, 0)y = \begin{pmatrix} F_x(0, 0) \\ F_y(0, 0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

waarin de vector met de partiële afgeleiden de *gradiënt*[36] van F in $(0, 0)$ wordt genoemd.

[34] Differentieerbaarheid van de "partiële functie" $x \to F(x, 0)$ in $x = 0$.
[35] Hier dus met Stelling 7.5, maar zie Opgave 7.28.
[36] Notatie ∇F, spreek uit nabla F.

Opgave 7.28. Laat $r > 0$ en neem aan dat voor x met $|x| \leq r$ geldt dat $y \to F(x,y)$ differentieerbaar is voor $|y| \leq r$ met $y \to F_y(x,y)$ continu, en $(x,y) \to F_y(x,y)$ continu is in $(0,0)$. Bewijs de differentieerbaarheid van $(x,y) \to F(x,y)$ in $(x,y) = (0,0)$ met (7.9), dus zonder x-afhankelijke tussenpunten η te gebruiken.

In (7.24) staat een al precies gemaakte lineaire benadering van $F(x,y)$ rond $(0,0)$ met een restterm die voldoet aan (7.25). Natuurlijk kunnen uitdrukking als $x \to F(x, f(x))$ ook naar x gedifferentieerd worden met de nog te behandelen kettingregel, als $x \to f(x)$ en $(x,y) \to F(x,y)$ (totaal) differentieerbaar zijn. Die kettingregel komt uitgebreid aan de orde in Hoofdstuk 8, en is gebaseerd op Opgave 4.14 in Sectie 4.3. Het kan geen kwaad deze regel hier al in een speciaal geval te behandelen.

Voor functies van de vorm

$$t \to F(x(t), y(t))$$

luidt de kettingregel dat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(x(t),y(t)) &= F_x(x(t),y(t))x'(t) + F_y(x(t),y(t))y'(t) \\ &= x'(t)F_x(x(t),y(t)) + y'(t)F_y(x(t),y(t)), \end{aligned} \tag{7.26}$$

te onthouden als F differentiëren naar elke t-afhankelijke variabele, daarna doordifferentiëren naar t, en alles optellen. Als $t \to (x(t), y(t))$ toevallig een kromme parametrizeert waarlangs F constant is dan volgt in $t = 0$ dat

$$F_x(0,0)x'(0) + F_y(0,0)y'(0) = \begin{pmatrix} F_x(0,0) \\ F_y(0,0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = 0,$$

waarin de tweede vector de raakvector aan de kromme in $(0,0)$ genoemd wordt[37], waar de gradiënt van F in $(0,0)$ dan loodrecht op staat.

Allebei de vormen in (7.26) zijn nuttig. Je kunt ervoor kiezen de afgeleide van de eerste schakel in de ketting systematisch[38] voor of systematisch na de afgeleide(n) van de tweede schakel in de ketting te zetten. Zie eventueel alvast (13.20) en (13.21) en wat daarna volgt. Het bijzonder geval dat $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$ hebben we hierboven gezien met de impliciete functie f waarmee $F(t, f(t))$ constant is.

In het geval dat $F(x,y) = xy$ zien we

$$(x(t)y(t))' = \frac{d}{dt}(x(t)y(t)) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t) \tag{7.27}$$

[37] Tenzij deze vector de nulvector is.

[38] Willen we co- of willen we contravariante differentiaalrekening?

verschijnen, de produktregel van Leibniz[39].

Bewijs van deze kettingregel. Toch maar meteen een bewijsje van (7.26) hier, zonder beperking der algemeenheid in $t = 0$. Dus neem aan dat $t \to x(t)$ en $t \to y(t)$ differentieerbaar zijn in $t = 0$, en dat $(x, y) \to F(x, y)$ totaal differentieerbaar is in $(x(0), y(0))$ en, wederom zonder beperking der algemeenheid, dat $0 = x(0) = y(0) = F(0, 0) = 0$. Dan volgt met de differentieerbaarheid van $x(t)$ en $y(t)$ in $t = 0$, via de expansies

$$x(t) = x'(0)t + r(t) \quad \text{en} \quad y(t) = y'(0)t + s(t), \tag{7.28}$$

voor de samengestelde functie dat

$$F(x(t), y(t)) = F_x(0, 0)x(t) + F_y(0, 0)y(t) + R(x(t), y(t)) =$$

$$F_x(0, 0)(x'(0)t + r(t)) + F_y(0, 0)(y'(0)t + s(t)) + R(x(t), y(t))$$
$$= (F_x(0, 0)x'(0) + F_y(0, 0)y'(0))t + S(t),$$

waarin

$$S(t) = F_x(0, 0)r(t) + F_y(0, 0)s(t) + R(x(t), y(t))$$

kleine o van t moet zijn als $t \to 0$. Per definitie is dat het geval voor $r(t)$ en $s(t)$, de resttermen uit de lineaire benaderingen van $x(t)$ en $s(t)$ rond $t = 0$.

Opgave 7.29. Bewijs nu zelf met (7.28) en de aannames op $r(t), s(t)$ en $R(x, y)$ dat $R(x(t), y(t)) = o(t)$ als $t \to 0$. Daarmee is het bewijs dan klaar.

Zoals al opgemerkt volgt met $F(x, y) = xy$ de Leibniz regel (7.27). Met $x(t) = y(t)$ volgt natuurlijk ook de kettingregel voor

$$t \to x(t) \to F(x(t)) = \phi(t),$$

met

$$\phi'(t_0) = F'(x(t_0))x'(t_0) \tag{7.29}$$

als $t \to x(t)$ differentieerbaar is in t_0 en $x \to F(x)$ differentieerbaar is in $x(t_0)$. Ook de quotiëntregel is nu niet moeilijk meer, misschien eerst voor

$$t \to \frac{y(t)}{1 + x(t)}$$

met

$$x \to \frac{1}{1 + x}$$

als leuke oefening vooraf.

[39] Die schrijven we liever met x en y steeds in dezelfde volgorde.

7.7 Stationair onder randvoorwaarde

Als we twee functies Φ and F van x en y hebben die allebei (totaal) differentieerbaar zijn in $(x,y) = (0,0)$, en een[40] functie f van x die differentieerbaar is in $x = 0$, waarvoor geldt dat

$$F_x(0,0) + F_y(0,0)f'(0) = 0, \tag{7.30}$$

hetgeen zeker geldt als $F(x, f(x))$ constant is, dan is

$$x \xrightarrow{\phi} \phi(x) = \Phi(x, f(x))$$

met de kettingregel differentieerbaar in $x = 0$, met

$$\phi'(0) = \Phi_x(0,0) + \Phi_y(0,0)f'(0). \tag{7.31}$$

Als $F_y(0,0)$ inverteerbaar is volgt nu uit (7.30) en (7.31) dat

$$\phi'(0) = 0 \iff \Phi_x(0,0) = \Phi_y(0,0)(F_y(0,0))^{(-1)}F_x(0,0) \tag{7.32}$$

de karakterisatie is voor het stationair zijn van $\phi(x)$ in $x = 0$.

Inverteerbaar betekent hier voor $F_y(0,0) \in \mathbb{R}$ gewoon dat $F_y(0,0) \neq 0$, waarmee

$$\phi'(0) = 0 \iff \Phi_x(0,0)F_y(0,0) = \Phi_y(0,0)F_x(0,0).$$

Het criterium voor $\phi'(0) = 0$ is dus dat de gradiënt van Φ in $(0,0)$ een veelvoud is van de gradiënt van F.

Opgave 7.30. Bewijs de laatste uitspraak, die zegt dat $\phi'(0) = 0$ in dit geval, dus onder de aanname dat $F_y(0,0) \neq 0$, equivalent is met het bestaan van een $\lambda \in \mathbb{R}$ waarmee

$$\begin{pmatrix} \Phi_x(0,0) \\ \Phi_y(0,0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} F_x(0,0) \\ F_y(0,0) \end{pmatrix}.$$

Een soortgelijk uitspraak is te doen voor functies $x = g(y)$ met $y \to F(g(y), y))$ constant en het stationair zijn van

$$y \xrightarrow{\psi} \psi(y) = \Phi(g(y), y)$$

[40] Bijvoorbeeld met de inverteerbaarheid van $F_y(0,0)$ gemaakte impliciete functie.

in $y = 0$, onder de aanname dat $F_x(0,0) \neq 0$.

We komen nog terug op het stationair zijn van functies $\Phi : X \to \mathbb{R}$ onder randvoorwaarde(n) in Sectie 8.3: Opgave 7.30 is een eerste voorbeeld van de *multiplicatorenstelling* van Lagrange, die hier in het geval dat $X = \mathbb{R}^2$ zegt dat de gradiënt van Φ loodrecht moet staan op de door de randvoorwaarde gedefinieerde verzameling. De wiskundige formulering daarvan in Euclidische ruimten kan niet zonder de impliciete functies zoals gemaakt in de vorige sectie. De stelling zelf beperkt zich niet tot ruimten waarin een inprodukt voorhanden is en kent ook formuleringen in Banachruimten.

7.8 Zijstapje: convergentie van Newton's methode

We borduren nog wat verder op de methode van Newton waar we in Sectie 7.4 mee begonnen zijn, maar doen dat zonder x-afhankelijkheid in $F(x,y)$. En dus noemen we de y maar weer x en gebruiken maar eens een kleine f in plaats van een grote F: voor f van x, is $f(x) = 0$ nu de op te lossen vergelijking.

Voor zo'n functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voor een gegeven $\varepsilon_0 > 0$ differentieerbaar is op

$$\bar{B}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \varepsilon\},$$

met $x \to f'(x)$ uniform Lipschitz continu op $\bar{B}_{\varepsilon_0}$, en een rij x_n in $\bar{B}_{\varepsilon_0}$ van Newton- of andere iteraties die de oplossing x van $f(x) = 0$ moeten benaderen, schrijven we (7.10) over als

$$f(x_n) = \underbrace{f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})}_{\text{lineaire benadering}} + R(x_n; x_{n-1}), \tag{7.33}$$

waarin

$$|R(x_n; x_{n-1})| \leq \frac{L}{2}|x_n - x_{n-1}|^2,$$

met L de Lipschitz constante van f' op $\bar{B}_{\varepsilon_0}$. We nemen nu ook aan dat voor alle $x \in \bar{B}_{\varepsilon_0}$ geldt dat

$$|(f'(x))^{-1}| \leq C$$

voor een positieve constante $C > 0$.

Introduceer nu

$$p_n = |x_n - x_{n-1}| \quad \text{and} \quad q_n = |f(x_n)|, \tag{7.34}$$

en neem x_n gedefinieerd door het Newton schema[41]

$$x_n = x_{n-1} - (f'(x_{n-1}))^{-1} f(x_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{7.35}$$

[41] Het is hier niet nodig om aan raaklijnen te denken maar het mag wel.

met $x_0 = 0$. Dan zit $x_n \in \bar{B}_{\varepsilon_0}$ zolang

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n \leq \varepsilon_0, \tag{7.36}$$

en in dat geval volgt

$$p_n \leq Cq_{n-1} \quad \text{en} \quad q_n \leq \frac{1}{2}Lp_n^2, \tag{7.37}$$

omdat (7.35) de lineaire benadering in (7.33) nul stelt.

De ongelijkheden in (7.37) worden nu in stelling gebracht beginnende met

$$q_0 = |f(0)| \quad \text{en} \quad p_1 \leq Cq_0 = C|f(0)|, \tag{7.38}$$

door (7.37) en (7.38) te combineren als

$$p_n \leq \mu p_n^2 \quad \text{met} \quad \mu = \frac{1}{2}LC \quad \text{and} \quad p_1 \leq C|f(0)|, \tag{7.39}$$

en de vraag is voor welke $\bar{P} = \bar{P}(\mu)$ we kunnen concluderen dat de implicatie

$$C|f(0)| \leq \bar{P} \implies \sum_{n=1}^{\infty} p_n \leq \varepsilon_0 \tag{7.40}$$

geldt.

Hoe groter $\bar{P}$, hoe sterker de uitspraak in de zin dat grotere $|f(0)|$ toegestaan zijn om een oplossing $x \in B_{\varepsilon_0}$ van $f(x) = 0$ te vinden via (7.35) startend vanaf $x_0 = 0$. De grootste $\bar{P}$ vinden we door in (7.39) en (7.40) overal gelijkheden te nemen. Dat geeft

$$p_n = \mu p_{n-1}^2 \quad \text{voor} \quad n \in \mathbb{N}; \quad p_1 = \bar{P}\,; \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \varepsilon_0. \tag{7.41}$$

Via $\xi_n = \mu p_n$ en $\xi_n = \xi_{n-1}^2$ is dit equivalent met

$$\mu\varepsilon_0 = G(\mu\bar{P}) \quad \text{met} \quad G(\xi) = \xi + \xi^2 + \xi^4 + \xi^8 + \xi^{16} + \cdots, \tag{7.42}$$

maar dit geeft geen simpele formule $\bar{P} = \bar{P}(\mu, \varepsilon_0)$.

Opgave 7.31. Gebruik nu

$$G(\xi) \leq \frac{\xi}{1-\xi}$$

om een simpele conditie van de vorm $|f(0)| \leq \ldots$ in termen van C en L te formuleren, die convergentie $x_n \to x \in \bar{B}_{\varepsilon_0}$ garandeert met $f(x) = 0$.

In Hoofdstuk 3 van [HM] wordt de bij de functie $x \to f(x)$ horende Newtonafbeelding

$$x \to x - \frac{f(x)}{f'(x)} = F(x)$$

in detail onderzocht voor simpele functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, bijvoorbeeld voor $f(x) = x^2 - 2$. Die analyse, die weer[42] terugvoert tot kleitabletten, zullen we hier niet herhalen. Over discrete dynamische systemen gedefinieerd door schema's van de vorm

$$x_n = F(x_{n-1}) \tag{7.43}$$

komen we nog wel te spreken in Sectie 4.6.

7.9 Integralen met parameters

Een niet onbelangrijk onderwerp is hoe integralen van parameters afhangen. Eerst maar even zien hoe het zit met de eigenschappen van een integraal met vaste grenzen, voor het gemak 0 en 1, en een integrand met een parameter. We beschouwen[43]

$$j(t) = \int_0^1 F(x,t)\,dx$$

met, voor elke t in een t-interval $[0,1]$, de functie $x \to F(t,x)$ continu op een x-interval $[0,1]$. Daan weten we zeker dat $j(t)$ welgedefinieerd is.

We gebruiken nu maar eens middelwaardestelling in de vorm van Stelling 7.5 zelf, toegepast voor iedere vaste $x \in [0,1]$ op $t \to F(x,t)$, die voor dit argument differentieerbaar moet zijn op $[0,1]$, of op een kleiner interval dat 0 bevat maar niet van x afhangt. Dan is

$$F(t,x) = F(0,x) + F_t(\tau,x)\,t,$$

met $\tau = \tau(x) \in (0,t)$. We kunnen dus schrijven

$$F(t,x) = F(0,x) + F_t(0,x)t + R(t,x), \tag{7.44}$$

met

$$R(t,x) = (F_t(\tau(x),x) - F_t(0,x))t.$$

Als nu in (7.44) voor vaste t alles continu is in x dan geldt

$$j(t) = \int_0^1 F(t,x)\,dx = \int_0^1 (F(0,x) + F_t(0,x)t + R(t,x))\,dx$$

[42] In [Eves §2-5,2.7,6-6] zien we Heron's methode voor $\sqrt{2}$ teruggaan tot YBC7289!

[43] Dit woord gebruiken we te weinig.

$$= j(0) + t\int_0^1 F_t(x,0)\,dx + \int_0^t R(t,x)\,dx \qquad (7.45)$$
$$= j(0) + t\int_0^1 F_t(x,0)\,dx + r(t),$$

waarin

$$r(t) = \int_0^t R(t,x)\,dx.$$

Tot nu toe is daarbij alleen gebruikt dat $x \to F(t,x)$ en $x \to F_t(0,x)$ continu zijn op $[0,1]$ om de integralen te laten bestaan. De integraal $r(t)$ van $R(t,x)$ in (7.45) is dan ook continu. De tweede uitdrukking met $\tau(x) \in (0,t)$ boven (7.44) kan nu gebruikt worden om $r(t) = o(t)$ voor $t \to 0$ te krijgen.

Voor deze restterm $r(t)$ willen we dat $|r(t)| \leq \varepsilon t$ voor t klein genoeg, en daarvoor is (misschien niet nodig maar zeker wel) voldoende dat voor $(t,x) \to F_t(t,x) = f(t,x)$ geldt dat

$$|f(t,x) - f(0,x)| \leq \varepsilon \qquad (7.46)$$

voor alle $x \in [0,1]$ tegelijk, en dat voor alle $t \in (0,\delta)$, met $\delta > 0$ bij ε te vinden.

Opgave 7.32. Neem aan dat $(t,x) \to f(t,x)$ in elk punt $(0,x)$ met $x \in [0,1]$ continu is. Bewijs dat er voor alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zodanig dat (7.46) geldt voor alle $t \in (0,\delta)$ en alle $x \in [0,1]$. Hint: denk aan het bewijs dat uniforme continuïteit op gesloten begrensde intervallen uit continuïteit volgt en redeneer uit het ongerijmde zoals in Opgave 5.8. Bij de $\epsilon > 0$ waarvoor de uitspraak niet geldt is een rij punten (t_n, x_n) te vinden met $0 < t_n \to 0$. Neem een convergente deelrij van x_n, formuleer de tegenspraak en de volgende stelling is bewezen.

Stelling 7.33. *Niet eenvoudig om te onthouden, maar laat $(t,x) \to F(t,x)$ gedefinieerd zijn voor $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ met $a < b$, en $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ met $t_0 \in \mathbb{R}$ en $\delta > 0$. Neem aan dat voor iedere vaste $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ de functie $x \to F(t,x)$ continu is op $[a,b]$ en*

$$j(t) = \int_a^b F(t,x)\,dx$$

dus bestaat. Als voor iedere vaste $x \in [a,b]$ de functie $t \to F(t,x)$ differentieerbaar is op $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ en $(t,x) \to F_t(t,x)$ continu is in iedere (t_0,x) met $x \in [a,b]$, dan is $t \to j(t)$ differentieerbaar in t_0 met $j'(t_0) = \int_a^b F_t(t_0,x)\,dx$.

Stelling 7.34. *Makkelijker te onthouden is: als F en F_t bestaan en continu zijn op $I \times [a,b]$, met I een t-interval, dan is $j : I \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar met*

$$j'(t) = \int_a^b F_t(t,x)\,dx.$$

Opgave 7.35. Laat zien dat $t \to \int_a^b f(t,x)\,dx$ continu is op een interval I als $t \to f(t,x)$ continu is op $I \times [a,b]$. Hieruit volgt de continuïteit van j' in de laatste uitspraak van Stelling 7.34. Hint: gebruik een argument zoals in Opgave 7.32.

7.10 Partieel integreren en Taylorpolynomen

We verlaten hier nu de analyse om een stukje calculus te doen, waaruit vervolgens weer een belangrijke stelling volgt die tot de analyse gerekend kan worden. De regel voor partieel integreren is via Stelling 7.12 de tegenhanger van de produktregel van Leibniz, zie (7.27), waarin van alle drie de termen de integraal over een t-interval $I = [\alpha, \beta]$ kan worden genomen, als bijvoorbeeld $t \to x'(t)$ en $t \to y'(t)$ continu zijn op I. Na herordenen volgt dat

$$\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\,dt = [x(t)y(t)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta x'(t)y(t)\,dt. \tag{7.47}$$

We passen deze regel nu toe in een leerzaam voorbeeldje met andere letters voor de variabelen.

Voor gegeven $f \in C([0,1])$ is het randwaardeprobleem gegeven door

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{voor alle} \quad 0 \le x \le 1, \quad \text{en} \quad u(0) = u(1) = 0 \tag{7.48}$$

uniek oplosbaar, door f twee keer te primitiveren en de twee vrije integratieconstanten zo te kiezen dat de dubbele primitieve u in $x = 0$ en $x = 1$ gelijk is aan 0. Het is instructief om dit in detail te doen.

Een keer primitiveren geeft

$$u'(x) = u'(0) - \underbrace{\int_0^x f(s)\,ds}_{F(x)},$$

met een nog onbepaalde $u'(0)$, en de primitieve van F van f die voldoet aan $F(0) = 0$, waarna nog een keer primitiveren geeft dat

$$u(x) = u'(0)x - \int_0^x F(s)\,ds,$$

$u'(0)$ nog steeds onbepaald, $x \to \int_0^x F(s)\,ds$ de primitieve van F die 0 is in $x = 0$, en $u(1) = 0$ nog niet gebruikt.

Met de produktregel van Leibniz is $F(s)$ te schrijven als

$$\underbrace{1\,F(s)}_{G'(s)F(s)} = \underbrace{(s-a)'}_{G'(s)}F(s) = (\underbrace{(s-a)}_{G(s)}F(s))' - \underbrace{(s-a)}_{G(s)}F'(s)$$

$$= \underbrace{((s-a)F(s))'}_{(G(s)F(s))'} - \underbrace{(s-a)f(s)}_{G(s)F'(s)}$$

(afgeleiden naar s). Onder de formules is aangegeven dat we 1 zien als $G'(s)$ met $G(s) = s - a$ en a nog vrij te kiezen.

De primitieve van $F(x)$ is dus te schrijven als

$$\int_0^x F(s)\,ds = [(s-a)F(s)]_0^x - \int_0^x (s-a)f(s)\,ds = \int_0^x (x-s)f(s)\,ds. \quad (7.49)$$

Met $a = x$ volgt dat

$$u(x) = u'(0)x - \int_0^x (x-s)f(s)\,ds$$

en door $x = 1$ in te vullen vinden we dat

$$u'(0) = \int_0^1 (1-s)f(s)\,ds.$$

Daarmee is

$$u(x) = \int_0^1 (1-s)f(s)\,ds\,x - \int_0^x (x-s)f(s)\,ds$$

$$= x\int_x^1 (1-s)f(s)\,ds + (1-x)\int_0^x sf(s)\,ds = \int_0^1 A(x,s)f(s)\,ds.$$

In deze laatste formule wordt

$$A(x,s) = \begin{cases} (1-x)s & \text{als } 0 \le s \le x \\ (1-s)x & \text{als } x \le s \le 1 \end{cases} \quad (7.50)$$

de kern van de oplossingsoperator[44] wordt genoemd. Deze operator geeft u in termen van f als

$$u(x) = \int_0^1 A(x,s)f(s)\,ds. \quad (7.51)$$

[44] De kern A is te vergelijken met een (symmetrische) matrix, maar dat voor nu terzijde.

We hebben hierboven (7.51) met (7.50) afgeleid als oplossing voor (7.48) via de produktregel voor de afgeleide van $s \to F(s)G(s)$. Ook als je de regel voor partieel integreren ben vergeten, Stelling 7.12 toepassen op de produktregel van Leibniz voor primitieven functies F en G van $f = F'$ en $g = G'$ in $C([a,b])$ geeft je snel dat

$$\int_a^b F(x)G'(x)\,dx = \left[F(x)G(x)\right]_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)\,dx, \tag{7.52}$$

de bekende regel voor *integration by parts*.

Partieel integreren is voor alles en nog wat handig. Bijvoorbeeld voor herhaald primitiveren zoals hierboven. Daarover nu een serie opgaven die leiden tot de *Stelling van Taylor* over polynomiale benaderingen van voldoende vaak continu differentieerbare functies.

Opgave 7.36. Neem $f \in C([a,b])$ en definieer

$$F_1(x) = F(x) = \int_a^x f(s)\,ds \quad \text{en} \quad F_2(x) = \int_a^x F_1(s)\,ds.$$

Laat met (7.52) zien dat

$$F_2(x) = \int_a^x (x-s)f(s)\,ds.$$

Hint: de integratievariabele is s en de 1 die je niet ziet voor $F_1(s)$ is de afgeleide naar s van $s - x$.

Opgave 7.37. Definieer in de context van Opgave 7.36

$$F_{n+1}(x) = \int_a^x F_n(s)\,ds \quad (n = 1, 2, 3 \dots),$$

en laat met herhaald partieel integreren zien dat

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-s)^{n-1} f(s)\,ds.$$

Hint: voor F_3 moet je twee keer partieel integreren, voor F_4 drie keer, et cetera. En dan zie je wel hoe het gaat.

Opgave 7.38. De formule in Opgave 7.37 produceert de zoveelste primitieve van f als een gewone in plaats van een meervoudige integraal. Verander het schema nu in

$$F_0(x) = f(x), \quad F_n(x) = b_n + \int_a^x F_{n-1}(s)\,ds \quad (n = 1, 2, 3 \dots), \tag{7.53}$$

en geef weer een formule voor $F_n(x)$ zoals hierboven (met meer termen natuurlijk). Bij constructie is $F_n(a) = b_n$, $F_n'(a) = b_{n-1}$, $F_n''(a) = b_{n-2}$, …, en je ziet hier een zogenaamde Taylorbenadering van orde $n-1$ staan voor een functie waarvan de eerste $n-1$ afgeleiden in a gegeven zijn door b-tjes. Verifieer nu dat voor elke n keer continue differentieerbare functie gedefinieerd op een interval I dat 0 bevat voor $x \in I$ geldt dat

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-s)^{n-1} f^{(n)}(s)\,ds.$$

De laatste term is de restterm. Als $M = M_n(x,a)$ en $m = m_n(x,a)$ het maximum respectievelijk het minimum zijn van $f^{(n)}(s)$ als s varieert van $s = a$ naar $s = x$, dan zit deze term tussen

$$\frac{M}{n!}(x-a)^n \quad \text{en} \quad \frac{m}{n!}(x-a)^n$$

in. Omdat $f^{(n)}(s)$ tussen $s = a$ en $s = x$ alle waarden tussen $M = M_n(x,a)$ en $m = m_n(x,a)$ aanneemt, is er een zekere maar i.h.a. verder niet nader te bepalen $s = \sigma$ tussen $s = a$ en $s = x$ waarvoor de restterm gelijk is aan

$$\frac{f^{(n)}(\sigma)}{n!}(x-a)^n.$$

Kortom,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\sigma)}{n!}(x-a)^n}_{\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-s)^{n-1} f^{(n)}(s)\,ds.}, \tag{7.54}$$

met σ tussen a en x.

Het resultaat in formule (7.54) is ook te bewijzen *zonder* de aanname dat $f^{(n)}$ continu is, met een σ strict tussen a en x. In het geval dat $n = 1$ reduceert de uitspraak dan tot de middelwaardestelling (Stelling 7.5), en het is weer een slimme toepassing van diezelfde in Sectie 7.1 bewezen middelwaardestelling waarmee (7.54) kan worden bewezen. In sommige analyse colleges gebeurt dat wellicht nog.

7.11 Meer calculus: substitutieregels voor integralen

In de vorige secties was partieel integreren de tegenhanger voor de Leibnizregel voor de afgeleide van het produkt van twee differentieerbare functies. Merk op dat in (7.47), geschreven als

$$\int_\alpha^\beta x(t)\,\underbrace{y'(t)\,dt}_{dy} = [x(t)y(t)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta y(t)\,\underbrace{x'(t)\,dt}_{dx},$$

een tweede regel zich aandient als we gebruik maken van de notaties besproken na Stelling 7.12.

De integraal links suggereert een omschrijving naar een integraal met y als nieuwe variabele, en de integraal rechts een integraal met x als nieuwe variabele. De betreffende regel correspondeert via Stelling 7.12 met de kettingregel zoals geformuleerd in (7.29) en is af te lezen uit

$$\int_\alpha^\beta \underbrace{F'(x(t))}_{f(x(t))}\,x'(t)\,dt = F(x(\beta)) - F(x(\alpha)) = \int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} F'(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{F'(x)}_{f(x)}\,dx,$$

en geldt sowieso voor continue functies $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en continu differentieerbare surjectieve functies $t \to x(t)$ met $x(\alpha) = a$ en $x(\beta) = b$ in de vorm

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)\,dt. \tag{7.55}$$

De voor hand liggende naam van (7.55) is de *substitutieregel*: is de integraal in het linkerlid slecht hanteerbaar, dan kan een substitutie van de vorm $x = x(t)$ soms uitkomst brengen. Omgekeerd kan het zijn dat in een integraal over een t-interval een factor van de vorm $x'(t)$ staat en dat $t \to x(t)$ inverteerbaar is, en een slecht hanteerbare t-integraal kan worden omgeschreven naar een beter hanteerbare x-integraal.

7.12 Conclusie

We hebben in dit hoofdstuk de belangrijkste aspecten van de theorie onder de differentiaalrekening voor functies van $x \in \mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ wel behandeld. Met lineaire benaderingen en zonder differentiaalquotiënten. Omdat we ook het bestaan van differentieerbare impliciete functies hebben behandeld, hebben we de facto bijna alles dat essentieel is voor de theorie onder de differentiaalrekening voor functies van x en y ook al gezien.

Totale differentieerbaarheid van

$$(x,y) \to F(x,y)$$

in een (x_0, y_0) volgde, let wel, pas na het behandelen van de impliciete functiestelling voor oplossingen $y = f(x)$ van $F(x, y) = 0$, uit aannamen zwakker dan de makkelijker en bij voorkeur te onthouden aanname dat

$$F_x(x, y) \quad \text{en} \quad F_y(x, y)$$

in de buurt van (x_0, y_0) bestaan en continu zijn in (x_0, y_0). Vervolgens hebben we voor functies $F(x, y)$, $\Phi(x, y)$ en $f(x)$ met

$$x \to F(x, f(x))$$

constant, het stationair zijn van

$$x \to \Phi(x, f(x))$$

geformuleerd in termen van de gradiënten van Φ en F.

Daarmee is het belangrijkste[45] wel gedaan. Wel zullen we nog tweede orde afgeleiden nodig hebben voor een criterium dat het positief/negatief zijn van $F''(x_0)$ in een stationair punt van $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, waar per definitie $F'(x_0) = 0$, generaliseert, essentieel voor de studie van extreme waarden. In zo'n criterium voor $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in een punt waar $F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0$ komen dan onvermijdelijk ook gemengde tweede orde partiële afgeleiden voor[46]. Dat de volgorde van zulke afgeleiden bij functies van meer variabelen niet uitmaakt is essentieel, en komt al eerder aan de orde als we van (complex) differentieerbare functies van $z = x + iy \in \mathbb{C}$ naar $w = u + iv \in \mathbb{C}$ willen laten zien dat hun reële en imaginaire delen u en v toch wel tamelijk bijzondere functies van x en y zijn.

De reële stelling waar het dan nog om gaat is dat de totale differentieerbaarheid van

$$(x, y) \to F_x(x, y) \quad \text{en} \quad (x, y) \to F_y(x, y)$$

in een (x_0, y_0) voldoende is voor

$$F_{xy}(x_0, y_0) = F_{yx}(x_0, y_0),$$

ook geformuleerd als

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

in (x_0, y_0), met kromme d's voor partiële afgeleiden. Hiermee hebben we het dan voorlopig wel gehad voor wat betreft de streng wiskundige onderbouwing van differentiaalrekening voor functies van meer variabelen[47] en kan

[45] TO DO: werk wat hierna komt goed uit voor ϕ in (7.31).

[46] Stelling 15.6 zegt wanneer $F(x, y)$ lokaal eigenlijk een kwadratische functie IS.

[47] Integraalrekening, en samenhang met differentiaalrekening, is een ander verhaal.

de calculus beginnen dan wel doorgaan, met het uitpakken van al bewezen resultaten.

In de laatste twee secties hebben de twee belangrijkste regels uit de calculus voor de 1-dimensionale integraalrekening afgeleid door de met analyse bewezen stellingen over differentiaalrekening via de hoofdstellingen van de integraalrekening toe te passen. Daar was verder geen analyse meer voor nodig.

7.13 Wat uitwerkingen

Opgave 7.15. Hoe doen we dit? Als $F(\xi) < c$ dan is $\xi < b$ omdat $F(b) > c$. Neem bij een $\epsilon > 0$ met $\epsilon < c - F(\xi)$ de bijbehorende $\delta > 0$ uit de definitie van continuiteit. Dan is $F(x) - F(\xi) \leq |F(x) - F(\xi)| \leq \epsilon < c - F(\xi)$ voor alle $x \in [a, b]$ met $|x - \xi| \leq \delta$ en in het bijzonder is dus $\xi + \delta < b$ en $F(\xi + \delta) < c$, een tegenspraak met de aanname dat ξ een bovengrens is. Dus $F(\xi) \geq c$. Stel $F(\xi) > c$. Neem dan bij $\epsilon > 0$ met $\epsilon < F(\xi) - c$ de bijbehorende $\delta > 0$ uit de definitie van continuiteit. Dan is $F(\xi) - F(x) \leq |F(x) - F(\xi)| \leq \epsilon < F(\xi) - c$ voor alle $x \in [a, b]$ met $|x - \xi| \leq \delta$. Voor die x-waarden geldt dus dat $F(x) > c$. Omdat $F(a) < c$ volgt $\xi - \delta > a$. Maar nu is $\xi - \delta$ ook een bovengrens, in tegenspraak met ξ zijnde de kleinste bovengrens. De enige mogelijkheid is dus dat $F(\xi) = c$.

Opgave 7.17. Zonder beperking der algemeenheid nemen we nu aan dat $x_0 = 0 = F(x_0)$ en $F'(0) > 0$. De differentieerbaarheid van F in $x = 0$ betekent dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zodanig dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| \leq \delta$ geldt dat
$$|F(x) - F'(0)x| \leq \varepsilon |x|,$$
hetgeen voor positieve x equivalent is met
$$(F'(0) - \varepsilon)x \leq F(x) \leq (F'(0) + \varepsilon)x.$$
De grafiek $y = F(x)$ ligt voor $x \in [0, \delta]$ dus in de driehoek begrensd door de lijnen $y = (F'(0) - \varepsilon)x$, $y = (F'(0) + \varepsilon)x$ en $x = \delta$.

We kunnen de ongelijkheden voor $x \in [0, \delta]$ schrijven als
$$\frac{1}{F'(0) + \varepsilon} F(x) \leq x \leq \frac{1}{F'(0) - \varepsilon} F(x),$$
en omdat we al weten dat F en G elkaars inverse functies zijn volgt nu dat
$$\frac{1}{F'(0) + \varepsilon} y \leq G(y) \leq \frac{1}{F'(0) - \varepsilon} y,$$

voor y in een interval $[0,\eta]$, waarbij we $\eta = (F'(0)-\varepsilon)\delta$ kunnen kiezen. Met die keuze van η ligt de grafiek $x = G(y)$ voor $y \in [0,\eta]$ in de driehoek begrensd door dezelfde twee "scheve" lijnen en de lijn $y = \eta$.

De ongelijkheden voor $G(y)$ gelden voor $y \in [0,\eta]$. Toewerkend naar de definitie van differentieerbaarheid van G in $y = 0$ volgt

$$(\frac{1}{F'(0)+\varepsilon} - \frac{1}{F'(0)})\,y \le G(y) - \frac{y}{F'(0)} \le (\frac{1}{F'(0)-\varepsilon} - \frac{1}{F'(0)})\,y,$$

i.e.

$$-\frac{\varepsilon}{F'(0)(F'(0)+\varepsilon)}\,y \le G(y) - \frac{y}{F'(0)} \le \frac{\varepsilon}{F'(0)(F'(0)-\varepsilon)}\,y$$

als

$$0 \le y \le \eta = (F'(0)-\varepsilon)\delta.$$

Om academische gezeur over delen door 0 te vermijden beperken we onze ε nu door

$$0 < \varepsilon \le \frac{F'(0)}{2}$$

waarmee voor η volgt dat

$$\eta \ge \frac{F'(0)\delta}{2},$$

en vervolgens voor $G(y)$ dat

$$-\frac{\varepsilon}{F'(0)^2}\,y \le G(y) - \frac{y}{F'(0)} \le \frac{2\varepsilon}{F'(0)^2}\,y \quad \text{als} \quad 0 \le y \le \frac{F'(0)\delta}{2}.$$

Verifieer nu (voor $y < 0$ is het argument precies hetzelfde) dat

$$|G(y) - \frac{y}{F'(0)}| \le \frac{2\varepsilon}{F'(0)^2}\,|y| \quad \text{als} \quad |y| \le \frac{F'(0)\delta}{2},$$

met nog steeds dezelfde $\delta > 0$ bij $0 < \varepsilon \le \frac{F'(0)}{2}$. We concluderen dat G in $y = 0$ differentieerbaar is met

$$G'(0) = \frac{1}{F'(0)},$$

de positieve voorfactoren bij ε en δ doen er immers niet toe.

8 Analyse met meer variabelen

In dit hoofdstuk doen we vooral differentiaal- en wat integraalrekening voor functies van meer variabelen. We beginnen in $\mathbb{R}^2$ met rechthoekige coördinaten $x, y \in \mathbb{R}$ en maken veelvuldig gebruik van de transformatie

$$x = r\cos\theta;$$

$$y = r\sin\theta,$$

waarmee punten $(x, y) \neq (0, 0)$ in het vlak via hun afstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ tot de oorsprong $(0, 0)$ en hoek θ tussen de halfrechte

$$\{(tx, ty) : t \geq 0\}$$

en de positieve x-as beschreven worden. Ook identificeren we indien gewenst $\mathbb{R}^2$ met de verzameling $\mathbb{C}$ van de *complexe getallen*

$$z = x + iy$$

en schrijven $|z| = r$ voor wat de *absolute waarde* van z genoemd wordt, de afstand van z tot de oorsprong $z = 0$. De hoek $\theta = \arg z$ heet het *argument* en is voor iedere $z \neq 0$ modulo 2π uniek bepaald.

Naast de gewone optelling

$$w + z = (u + iv) + (x + iy) = u + x + i(v + y) = (u + x, v + y) = (u, v) + (x, y)$$

is er de wat complexere vermenigvuldiging

$$wz = (u+iv)(x+iy) = ux-vy+i(uy+vx) = (ux-vy, uy+vx) = (u, v)(x, y)$$

gebaseerd op de rekenregel $i^2 = -1$, voor $w = u + iv = (u, v)$ en $z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Hiermee wordt $\mathbb{C}$ een lichaam[1] dat algebraisch gesloten is. Erg fijn is het regeltje dat bij vermenigvuldigen van twee complexe getallen de absolute waarden vermenigvuldigd en de argumenten opgeteld moeten worden om absolute waarde en argument van het produkt te krijgen.

Opgave 8.1. Schrijf $z_j = r_j(\cos\theta_j + i\sin\theta_j)$ voor $j = 1, 2$ en gebruik de somregels voor cos en sin om te laten zien dat

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Dit regeltje is een van de vele redenen om

$$\cos\theta + i\sin\theta = \exp(i\theta)$$

te schrijven en $\exp(z) = \exp(x)\exp(iy)$.

[1] Lees: heeft dezelfde rekenregels als $\mathbb{R}$. Ook geldt $|w + z| \leq |w| + |z|$ en $|wz| = |w|\,|z|$.

De poolcoördinaten zijn overigens niet nodig[2] om tot het inzicht te komen dat voor vaste $\gamma \in \mathbb{C}$ de afbeelding

$$z \to \gamma z \tag{8.1}$$

een draaivermenigvuldiging is, zie (8.11) en Opgave 8.4.

8.1 Zijstapje: de hoofdstelling van de algebra

De uitspraak dat $\mathbb{C}$ algebraisch gesloten is betekent dat elk polynoom

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k z^k + z^n \tag{8.2}$$

met $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ en $n \geq 2$ een nulpunt $z_1 \in \mathbb{C}$ heeft, en vervolgens geldt met dank aan de staartdeling dat

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k z^k + z^n = (z - z_1)Q(z)$$

waarin

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n-2} \beta_k z^k + z^{n-1},$$

met $\beta_0, \ldots, \beta_{n-2} \in \mathbb{C}$. Herhaald toepassen geeft

$$P(z) = \Pi_{k=1}^{n}(z - z_k) \quad \text{met} \quad z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}. \tag{8.3}$$

Deze uitspraak wordt helaas de *hoofdstelling van de algebra* genoemd. Een sympathieke wiskundige geboren in Reeuwijk heeft meer dan 50 verschillende bewijzen van deze stelling verzameld. Geen daarvan is echt algebraisch en het bewijs dat nu volgt is er daar één van. Ik vond het toen ik probeerde het standaardbewijs met complexe functies te vermijden. Dat complexe bewijs zie je doorgaans bij een college over complexe functietheorie als toepassing van de Stelling van Liouville die zegt dat er geen begrensde complex differentieerbare functies $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zijn behalve de constante functies. Zie ook

`www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Fund_theorem_of_algebra.html`

[2] Waar zijn die hoeken eigenlijk wel voor nodig?

Een vergelijkbare stelling zegt dat er geen positieve harmonische[3] functies $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ zijn. Dat bewijs probeerde ik hier in stelling te brengen en toen ging het argument een eigen leven leiden. Uiteindelijk maakt het alleen gebruik van Stelling 6.11 in de appendix, die voor het geval $N = 1$ overeenkomt met Opgave 5.12, de opgave die de exercities na Definitie 5.2 afsluit.

Didaktisch wel aardig is dat je het bewijs eerst kunt doen voor een tweedegraads polynoom[4] zonder wortelformules[5] te gebruiken, en dan ziet dat het voor elke hogere graad hetzelfde gaat. Hieronder doe ik het echter meteen voor het algemene geval en dat is min of meer hoe Argand het deed.

Als $z \to P(z) = p(x, y) + iq(x, y)$ geen nulpunten heeft in $\mathbb{C}$ dan is

$$(x, y) = x + iy = z \to |P(z)| > 0$$

vanwege enig voorwerk als in Opgave 4.17 een continue strict positieve $\mathbb{R}$-waardige functie op $\mathbb{R}^2$ die op cirkels van de vorm $x^2 + y^2 = r^2$ naar beneden begrensd is middels[6]

$$|P(z)| = |\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k z^k + z^n| \geq |z^n| - |\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k z^k| \geq r^n - \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k| r^k$$

$$\geq r^{n-1}(r - \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|) \to \infty$$

als $r \to \infty$. Maar dan heeft $(x, y) \to |P(z)|$ op iedere disk

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

een strict positief globaal minimum dat voor grote r niet meer verandert als r nog groter genomen wordt, en dus een globaal minimum op $\mathbb{R}^2$, zeg in $z = z_0$.

Stel nu $w = z - z_0$ en

$$Q(w) = \frac{P(z)}{P(z_0)}.$$

Dan is

$$Q(w) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k w^k \tag{8.4}$$

[3] Functies met $\Delta f = 0$, zie (8.14) en Sectie 13.4.
[4] Met $z^2 + 1$ bijvoorbeeld, als je de lachers op je hand wil krijgen.
[5] Die zijn er niet voor graad vijf en hoger.
[6] Bewijs en gebruik $|a + b| \geq |a| - |b|$ voor $a, b \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

met $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{C}$, $\gamma_n \neq 0$, en $w \to |Q(w)|$ heeft nu een globaal minimum ter grootte $Q(0) = 1$.

Hetzelfde geldt[7] voor $z \to |Q(z)|$ en dus neemt $u + iv = w = Q(z) = Q(x + iy)$ geen w-waarden aan met $u^2 + v^2 < 1$. Maar met Opgave 8.1 is $\gamma_k = c_k \exp(i\phi_k)$ en dus

$$w = Q(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} c_k r^k \exp(i(\phi_k + k\theta)), \tag{8.5}$$

een uitdrukking[8] waarin de ϕ_k-tjes als parameters[9] gezien kunnen worden met r klein maar vast genomen. En dat geeft een tegenspraak:

Opgave 8.2. Leidt nu een tegenspraak af door aan te tonen dat er waarden met $u^2 + v^2 < 1$ worden aangenomen. Hint: er is een eerste c_k die niet nul is, en voor r klein is die term groter dan de rest van de som.

8.2 Differentiaalrekening, ook met complexe getallen

In Sectie 4.4 hebben we gezien, uitgaande van het voorbeeld $x \to x^7$, dat

$$x \to \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$$

voor iedere keuze van $\alpha_n \in \mathbb{R}$ voor $n \in \mathbb{N}_0$ een functie definieert op een

$$B_R = \{x \in \mathbb{R} : |x| < R\}$$

met $R \in [0, \infty]$, een functie waarmee voor wat betreft differentiaalrekening mag worden gerekend als met polynomen. Het punt om hier te maken is dat, met een search en replace waarbij het linker gedeelte van

$$x, x_0, a, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \leftrightarrow \quad z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0, c = a + bi, \gamma_n = \alpha_n + i\beta_n \in \mathbb{C}$$

wordt vervangen door het rechtergedeelte[10], de hele vrijwel algebraische behandeling van differentiaalrekening van machtreeksen gewoon doorgaat, met het begrip complex differentieerbaar voor functies

$$H : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

[7] We komen letters te kort, dus hergebruiken we ze hier maar voor de *dummy* variabele.
[8] Niet zo fraai aan het bewijs is het gebruik van die niet-algebraische poolcoördinaten.
[9] Ptolemaeus had dit wel mooi gevonden.
[10] Ik probeer systematisch te zijn met het alphabet voor zolang het duurt.

overgeschreven van gewoon differentieerbaar voor $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

We beginnen dus met de complexe versie van (7.3) in de vorm

$$w = H(z) = H(z_0) + \gamma(z - z_0) + T(z; z_0) \tag{8.6}$$
$$= H(z_0) + H'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

als $z \to z_0$, en pakken dit nu uit, waarbij $w = u + iv$ en u en v dus functies van x en y zijn, $u = F(x, y)$ en $v = G(x, y)$, en[11] $H(z) = F(x, y) + iG(x, y)$.

We kunnen H dan natuurlijk ook zien als vectorwaardige functie

$$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

via de identificatie $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, met componenten $H_1 = F$ en $H_2 = G$ als functies van[12] $x_1 = x$ en $x_2 = y$.

Voor zulke functies hebben we ook de gewone aanpak van differentieerbaarheid, met lineaire expansies

$$H_1(x_1, x_2) = H_2(a_1, a_2) + A_{11}(x_1 - a_1) + A_{12}(x_2 - a_2) + R_1(x_1, x_2; a_1, a_2);$$

$$H_2(x_1, x_2) = H_2(a_1, a_2) + A_{21}(x_1 - a_1) + A_{22}(x_2 - a_2) + R_2(x_1, x_2; a_1, a_2),$$

en resttermen $R_{1,2}$ die klein moeten zijn in verhouding tot het lineaire stuk[13] als $x_1 \to a_1$ en $x_2 \to a_2$. Dat zeggen we zo wat precieser, maar eerst nog een opgave om te laten zien waar de observaties hierboven toe leiden als je een eenvoudige voorbeeldje uitwerkt.

Opgave 8.3. Werk $w = \exp(z) = \exp(x+iy)$ uit met de machtreeks voor $\exp(z)$ en verifieer dat $\exp(z) = \exp(x)\exp(iy)$ met $\exp(iy) = \cos x + i \sin x$. Leg uit waarom dit leidt het invoeren van de meerwaardige[14] functie

$$w \to \log w = \ln |w| + i \arg w.$$

In vectorvorm schrijven we de expansies voor H_1 en H_2 als $H(x_1, x_2) =$

$$\begin{pmatrix} H_1(x_1, x_2) \\ H_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_2(x_1, x_2) \\ H_2(a_1, a_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}(x_1 - a_1) + A_{12}(x_2 - a_2) \\ A_{21}(x_1 - a_1) + A_{22}(x_2 - a_2) \end{pmatrix} + R,$$

[11] Met toevallig de H van holomorf.

[12] Variabelen nummeren we met alphabet en indices, al naar wat uitkomt.

[13] De termen met de coëfficiënten $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$.

[14] Een kniesoor die er op let: meerwaardige functies zijn geen functies.

waarin ook $R = R(x_1, x_2; a_1, a_2)$, net als $H(x_1, x_2)$ en $H(a_1, a_2)$, weer een 2-vector is. Met $h_i = x_i - a_i$ is het lineaire stuk in de expansie voor $H(x_1, x_2)$ hierboven in matrixnotatie[15] gelijk aan

$$Ah = \begin{pmatrix} A_{11}h_1 + A_{12}h_2 \\ A_{21}h_1 + A_{22}h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \tag{8.7}$$

en af te schatten via bijvoorbeeld

$$|A_{11}h_1 + A_{12}h_2| \leq \sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2}\,\sqrt{h_1^2 + h_2^2};$$

$$|A_{21}h_1 + A_{22}h_2| \leq \sqrt{A_{21}^2 + A_{22}^2}\,\sqrt{h_1^2 + h_2^2},$$

als

$$|A_{11}h_1 + A_{12}h_2|^2 + |A_{21}h_1 + A_{22}h_2|^2 \leq (\underbrace{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{21}^2 + A_{22}^2}_{|A|^2})(h_1^2 + h_2^2),$$

ofwel

$$|Ah|_2 \leq |A|_2\,|h|_2, \tag{8.8}$$

waarin de "absolute waarde strepen" met subindex 2 nu voor Euclidische lengte van $h = x - a$, Ah en ook A staan[16], steeds de wortel uit de som van de kwadraten van de entries, ook voor de matrix A geintroduceerd in (8.7), die we steeds ook zien als (lineaire) afbeelding[17]

$$h \xrightarrow{A} Ah.$$

De conditie voor differentieerbaarheid[18] is met

$$H(x) = H(a) + A(x - a) + R(x; a) \quad \text{dat} \quad |R(x; a)|_2 = o(|x - a|_2) \tag{8.9}$$

als $|x - a|_2 \to 0$. Dit is typografisch nu niet meer te onderscheiden van de differentieerbaarheid van $H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, met bijvoorbeeld $m = n = 1$. Ook voor $H : X \to Y$ met X en Y genormeerde ruimten, $A : X \to Y$ lineair en continu[19], ziet het er, afgezien van de subindex 2, precies hetzelfde uit, zie eventueel al Sectie 14.2.

[15] Spot the matrix.

[16] Dus $|h|_2^2 = h_1^2 + h_2^2$ en $|A|_2^2 = A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{21}^2 + A_{22}^2$.

[17] Wat moet je hier van matrices weten? Deze afspraak en de matrixnotatie als in (8.7).

[18] Vergelijk ook met (7.25) in Sectie 7.6, waar $a = (0, 0)$ genomen is in (7.24).

[19] Lineaire afbeeldingen zijn dan niet meer automatisch continu!

Door per component van H steeds één variabele tegelijk te variëren zien we dat A de afgeleiden van de partiële functies

$$x_1 \to H_1(x_1, x_2),\ x_2 \to H_1(x_1, x_2),\ x_1 \to H_2(x_1, x_2),\ x_2 \to H_2(x_1, x_2)$$

geëvalueerd in $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$ als entries heeft, dus

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = H'(x) = DH(x) = \frac{\partial H}{\partial x} \tag{8.10}$$

als $m = n = 2$. In Sectie 13.3 komen we hier nog op terug. We zien $A = H'(x)$ als lineaire afbeelding[20] van in dit geval $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$, die we identificeren met zijn Jacobimatrix $DH(x)$, een matrix die we ook graag noteren met $\frac{\partial H}{\partial x}$. In die Jacobimatrix staan in de rijen (horizontaal) de coördinaten van de gradiënten van de $\mathbb{R}$-waardige functies H_1 en H_2.

Vergelijk dit nu met (8.6), waarin, met $h = x - x_0$ en $k = y - y_0$, de lineaire term herschrijft als

$$\gamma(z - z_0) = (\alpha + i\beta)(h + ik) = \alpha h - \beta k + i(\beta h + \alpha k),$$

en correspondeert met

$$\begin{pmatrix} \alpha h - \beta k \\ \beta h + \alpha k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \tag{8.11}$$

met daarin de matrix die de afbeelding (8.1) beschrijft. In het bijzonder staat in de eerste kolom het beeld van de eerste eenheidsvector, en in de tweede kolom het beeld van de tweede eenheidsvector.

Opgave 8.4. Overtuig jezelf ervan dat (8.1) een draaivermenigvuldiging is, i.e. de samenstelling van een rotatie rond de oorsprong en een puntvermenigvuldiging vanuit de oorsprong.

We zien nu dat (8.9) dan moet gelden met een bijzondere vorm voor de 2×2 matrix A. Dat formuleren we als stelling.

Stelling 8.5. *Laat $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differentieerbaar zijn in (a_1, a_2) met lineaire benadering gegeven door (8.7). Dan is H gezien als $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ook complex differentieerbaar in (a_1, a_2) dan en slechts dan als voor de matrix A geldt dat*

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = A_{11} = A_{22} = \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = A_{12} = -A_{21} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_1},$$

de afgeleiden geëvalueerd in $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$.

[20] Wat moet je met zulke A kunnen? Vooral de inverse uitrekenen, zie Sectie 8.3.

Is H op deze manier complex differentieerbaar, dan schrijven we nu even liever $(x,y)=(x_0,y_0)$ dan $(x_1,x_2)=(a_1,a_2)$. Via

$$z = x+iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{en} \quad w = u+iv \in \mathbb{C} \leftrightarrow (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

en met

$$\alpha + i\beta = H'(z_0)$$

geldt dan dat α en β gegeven worden door

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{en} \quad \beta = -\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{8.12}$$

waarbij u en v als functies van x en y voldoen aan de zogenaamde Cauchy-Riemann vergelijkingen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{8.13}$$

in $(x,y)=(x_0,y_0)$.

Zijn deze partiële afgeleiden zelf differentieerbaar[21] in $(x,y)=(x_0,y_0)$ dan volgt dat

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

als de volgorde van differentiëren er niet toe doet, en net zo voor $v(x,y)$. In dat geval geldt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \Delta v \tag{8.14}$$

in (x_0,y_0).

Op de differentiaaloperator Δ, die de *Laplaciaan* heet, komen we nog uitgebreid terug, en juist daarom willen we nu wel even zeker weten hoe het zit met de volgorde van de partiële afgeleiden. Dit is daarom zo'n beetje de laatste stelling uit de analyse over differentiaalrekening die we echt nodig hebben.

Stelling 8.6. *Laat $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de eigenschap hebben dat*

$$(x,y) \to \frac{\partial v}{\partial x} = v_x(x,y) \quad \text{en} \quad (x,y) \to \frac{\partial v}{\partial y} = v_y(x,y)$$

differentieerbaar zijn in (x_0,y_0). Dan bestaan in (x_0,y_0) de tweede orde partiële afgeleiden en geldt

$$v_{yx}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = v_{xy}(x_0,y_0).$$

[21] Geldt onder de aanname dat f complex differentieerbaar is in de buurt van (x_0,y_0)!

Bewijs. Neem zonder beperking der algemeenheid $(x_0, y_0) = (0, 0)$. De aanname impliceert dat de eerste orde partiële afgeleiden bestaan in de buurt van $(0, 0)$. Voor $x \neq 0$ en $y \neq 0$ voldoende klein geldt vanwege de middelwaardestelling (Stelling 7.5), toegepast op

$$y \to v(x, y) - v(0, y)$$

voor zekere (ook x-afhankelijke) η tussen 0 en y, en de differentieerbaarheid van v_y in $(0, 0)$ dat

$$v(x, y) - v(0, y) - v(x, 0) + v(0, 0) = (v_y(x, \eta) - v_y(0, \eta))y$$

$$= (v_y(0, 0) + v_{yx}(0, 0)x + v_{yy}(0, 0)\eta + R(x, \eta) - v_y(0, 0) - v_{yy}(0, 0)\eta - R(0, \eta))y$$

$$= (v_{yx}(0, 0)x + R(x, \eta) - R(0, \eta))y,$$

waarin

$$R(x, \eta) = o(\sqrt{x^2 + \eta^2}) \quad \text{en dus ook} \quad R(0, \eta) = o(\eta) \quad \text{als} \quad \sqrt{x^2 + \eta^2} \to 0.$$

De differentieerbaarheid van

$$(x, y) \to v_y(x, y)$$

in $(0, 0)$ is hier dus twee keer gebruikt, met dezelfde "resttermfunctie" R. Omdat $|\eta| \leq |y|$ concluderen we dat

$$v(x, y) - v(0, y) - v(x, 0) + v(0, 0) = v_{yx}(0, 0)xy + y\, o(r)$$

$$= v_{yx}(0, 0)xy + o(r^2) = v_{xy}(0, 0)xy + o(r^2) \tag{8.15}$$

als $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$.

De tweede versie onder (8.15) volgt door de rollen van x en y te verwisselen. Merk op dat het eerste gelijkteken op de regel in (8.15) hierboven van links naar rechts moet worden gelezen. Als een restterm y keer kleine o van r is, dan is die term zeker kleine o van r^2, en zo bewijst (8.15) dat $v_{yx}(0, 0) = v_{yx}(0, 0)$.

Opgave 8.7. Zie (7.4) en gebruik de definitie van kleine o om de conclusie dat $v_{yx}(0, 0) = v_{yx}(0, 0)$ te rechtvaardigen.

Twee keer differentieerbare functies $u(x, y)$ en $v(x, y)$ die op een open[22] verzameling van $\mathbb{R}^2$ voldoen aan (8.14) heten harmonisch. Bijgevolg zijn de functies

$$(x, y) \to \mathrm{Re}(x + iy)^n \quad \text{en} \quad (x, y) \to \mathrm{Im}(x + iy)^n$$

harmonisch op heel $\mathbb{R}^2$. Dit zijn de zogenaamde homogene harmonische polynomen van graad $n = 1, 2, 3, \ldots$ die in (8.17) nog terugkomen.

Twee keer differentieerbaar betekent hier dat de afbeelding

$$(x, y) \to (\frac{\partial u}{\partial x} \, \frac{\partial u}{\partial y})$$

zelf weer differentieerbaar is. Met de kettingregel[23] zijn dan ook

$$(x, y) \to (\frac{\partial u}{\partial x} \, \frac{\partial u}{\partial y}) \to \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{en} \quad (x, y) \to (\frac{\partial u}{\partial x} \, \frac{\partial u}{\partial y}) \to \frac{\partial u}{\partial y}$$

differentieerbaar en dus heeft $\Delta u = 0$ betekenis als

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{8.16}$$

zonder dat daar een v bij hoort[24] via een complexwaardige functie.

Niet-constante oplossingen van (8.16) zijn er in overvloed. Bijvoorbeeld de homogene *harmonische polynomen*

$$x, y, x^2 - y^2, 2xy, x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3, x^4 - 6x^2y^2 + y^4, 4x^3y - 4xy^3, \ldots \tag{8.17}$$

van respectievelijk graad $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$ hierboven.

8.3 Randvoorwaarden en de methode van Lagrange

Dit onderwerp is al begonnen in Sectie 7.7 waar we de formule

$$\Phi_x = \Phi_y (F_y)^{(-1)} F_x \tag{8.18}$$

in $(x, y) = (0, 0)$ hebben afgeleid voor het stationair zijn van

$$x \stackrel{\phi}{\to} \phi(x) = \Phi(x, f(x))$$

in $x = 0$ met de in Sectie 7.6 gevonden impliciete functie

$$y = f(x)$$

[22] Zie Opgave 6.14 in Hoofdstuk 6 voor een definitie van open.

[23] Triviaal toegepast op een ketting waarin de tweede schakel lineair is.

[24] Althans niet a priori.

als lokale beschrijving van $F(x,y)=0$ in de buurt van $(x,y)=(0,0)$.

De continuiteit van de partiële afgeleiden

$$(x,y) \to F_x(x,y) \quad \text{en} \quad (x,y) \to F_y(x,y)$$

in de buurt van $(0,0)$, en de inverteerbaarheid van F_y in $(0,0)$ waren voldoende voor een bewijs dat de niveauverzameling

$$S = \{(x,y) : \; F(x,y) = F(0,0)\} \tag{8.19}$$

in de buurt van $(x,y)=(0,0)$ beschreven wordt als de grafiek van een impliciet gedefinieerde continu differentieerbare functie f.

De verzameling S is zo lokaal geparametriseerd door

$$x \to X(x) = (x, f(x))$$

met een 2×1 Jacobimatrix $\frac{\partial X}{\partial x}$. De parameterisatie is lokaal een bijectie tussen S en een omgeving van $x=0$, en dat is dankzij de inverteerbaarheid van de 1×1 matrix

$$A = F_y \tag{8.20}$$

in $(0,0)$.

Differentieerbaarheid van

$$(x,y) \to \Phi(x,y)$$

was vervolgens voldoende voor (8.18) als noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor $\phi'(x)=0$, niet alleen in $x=0$ maar in de hele omgeving van $x=0$ waar $f(x)$ gemaakt en $F_y(x,f(x))$ inverteerbaar is, en daar deden we een beetje moeilijk over in Opgave 7.23, waar *delen door* werd vermeden met meetkundige reeksen.

Dat had een reden want met bijvoorbeeld

$$x \in \mathbb{R}^2, \; y \in \mathbb{R}^3,$$

$$F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3, \; \Phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R},$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \; \phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

zijn de stellingen en bewijzen hetzelfde als in Secties 7.4, 7.5, 7.6, 7.7. In het bijzonder geldt dat voor het bestaan van de functie f en conditie (8.18) als karakterisatie voor het stationair zijn van de functie

$$x \xrightarrow{\phi} \Phi(x, f(x)).$$

We laten nu eerst zien hoe dat uitpakt als de multiplicatoren methode van Lagrange en lezen (8.18) daartoe als een uitspraak voor Jacobimatrices en de bijbehorende lineaire afbeeldingen. Als je vertrouwd bent met matrixrekening kun je het volgende overslaan en verder lezen vanaf (8.23), de getransponeerde versie van (8.18).

In het algemeen is een[25] $m \times n$ reële matrix A een blok met reële entries a_{ij}, de verticale index i lopend van 1 tot en met m, de horizontale index j van 1 tot en met n. Als lineaire afbeelding stuurt A dan een n-vector $x \in \mathbb{R}^n$ met coördinaten $x_1, \ldots, x_n$ naar een een m-vector $y \in \mathbb{R}^m$ met coördinaten

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

We zeggen dat

$$A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

de verzameling van lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$, die zelf weer een vectorruimte vormen.

Is B een reële $n \times p$ matrix met entries b_{jk}, de verticale index j lopend van 1 tot en met n, de horizontale index k van 1 tot en met p, dan is per definitie AB de $m \times p$ matrix met entries

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \tag{8.21}$$

met bijbehorende lineaire afbeelding[26]

$$A \circ B : \mathbb{R}^p \xrightarrow{B}: \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m.$$

Klappen we beide blokken om door met de eerste index juist horizontaal, en met de tweede index verticaal te nummeren, dan krijgen we *getransponeerde* matrices A^T en B^T met entries $a^T_{ji} = a_{ij}$ en $b^T_{kj} = b_{jk}$, leest (8.21) als de entries van $B^T A^T$, en is $(AB)^T = B^T A^T$.

In het bijzonder geval dat $m = n = p$ kan het voorkomen dat $AB = I$, de $n \times n$ matrix met op de diagonaal alleen maar 1-en en voor de rest alleen maar 0-en. Met I correspondeert de lineaire afbeelding $I = I_n$ die elke $x \in \mathbb{R}^n$ naar zichzelf stuurt. *Wat je van lineaire albegra nu echt moet weten*[27] is niet alleen dat in dat geval de lineaire afbeelding $A \circ B$ gelijk is aan de afbeelding

[25] Met m en n in $\mathbb{N}$ natuurlijk.
[26] A voorafgegaan door B.
[27] Een bewijs zou bij Lineaire Algebra in een van de eerste colleges moeten zitten.

I_n, maar ook dat A en B nu elkaars inverse zijn als lineaire afbeeldingen: $A \circ B = B \circ A = I_n$, $B = A^{(-1)}$, $A = B^{(-1)}$. En hetzelfde geldt dan voor de getransponeerden. Uitspraken die alleen te maken hebben met het oplossen van vergelijkingen van de vorm $Ax = y$ met A een vierkante matrix, en daarop komen we in Sectie 8.5 nog terug.

Met nog een derde $p \times r$ matrix C met entries c_{kl} is $(AB)C$ de matrix met entries

$$\sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}, \tag{8.22}$$

hetgeen ook de entries zijn van $A(BC)$ door de sommatie volgorde te verwisselen. Kortom $(AB)C = A(BC)$ en dus schrijven we ABC voor het produkt van A, B en C. De bijbehorende lineaire afbeelding is $A \circ B \circ C$. Transponeren geeft dan weer dat $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, en dat gebruiken we nu voor (8.18).

We schrijven (8.18) getransponeerd als

$$\nabla_x F \, (\nabla_y F)^{(-1)} \, \nabla \Phi_y = \nabla_x \Phi, \tag{8.23}$$

waarin

$$\nabla_x F, \nabla_y F, \nabla_x \Phi, \nabla_y \Phi$$

de getransponeerde matrices zijn van de “partiële” Jacobimatrices

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

behorende bij F_x, F_y, Φ_x, Φ_y.

Uitpakken[28] van de notatie geeft

$$\nabla_x F = (\nabla_x F_1 \ \nabla_x F_2 \ \nabla_x F_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

en hetzelfde voor $\nabla_y F$, een bij aanname in $(0,0,0,0,0)$ vierkante inverteerbare 3×3 matrix, waarvan de inverse als afbeelding de gradiëntvectoren

$$\nabla_y F_1, \nabla_y F_2, \nabla_y F_3$$

terugstuurt[29] naar de eenheidsvectoren e_1, e_2, e_3 in $\mathbb{R}^3$.

Schrijf nu $\nabla_y \Phi \in \mathbb{R}^3$ als lineaire combinatie[30]

$$\nabla_y \Phi = \lambda_1 \nabla_y F_1 + \lambda_2 \nabla_y F_2 + \lambda_3 \nabla_y F_3, \tag{8.24}$$

[28] Meer is het niet, maar ga dat wel na!

[29] Ga na: de kolomvectoren van een matrix A zijn de beelden onder A van de e-tjes.

[30] Dit kan vanwege de inverteerbaarheidseis op F_y.

met $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Dan volgt dat $\nabla_x F\,(\nabla_y F)^{(-1)}$ in het linkerlid van (8.23) werkt op (8.24) als

$$\nabla_y \Phi \xrightarrow{(\nabla_y F)^{(-1)}} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \xrightarrow{\nabla_x F} \lambda_1 \nabla_x F_1 + \lambda_2 \nabla_x F_2 + \lambda_3 \nabla_x F_3 = \nabla_x \Phi$$

vanwege (8.23), hetgeen met (8.24) combineert tot

$$\nabla \Phi = \lambda_1 \nabla F_1 + \lambda_2 \nabla F_2 + \lambda_3 \nabla F_3, \tag{8.25}$$

simpelweg[31] omdat het voor ∇_x en ∇_y apart geldt! Het stationair zijn van

$$\Phi : S \to \mathbb{R}$$

in $(0,0)$ is zo equivalent met het bestaan van multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ waarvoor (8.25) geldt in $(0,0,0,0,0)$.

8.4 Toepassing: de ongelijkheid van Hölder

In (8.8) was

$$|Ah|_2 \leq |A|_2\, |h|_2$$

een bijzonder geval van

$$|AB|_2 \leq |A|_2\, |B|_2,$$

met A en B die op elkaar passen in de zin dat AB als produktmatrix bestaat, zie de uitleg rond (8.21), en (8.30) war verderop. In het speciale geval dat $A = a$ een rijmatrix is met entries a_i en $B = b$ een kolommatrix met entries b_i, staat hier dat

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq \sqrt[2]{\sum_i |a_i|^2}\,\sqrt[2]{\sum_i |b_i|^2},$$

een ongelijkheid die bekend staat als de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz[32], en die zegt dat het inprodukt van twee vectoren in absolute waarde op zijn hoogst gelijk is aan het produkt van hun lengten uitgerekend met Pythagoras. Let wel, deze ongelijkheid wordt standaard bij elk eerste Lineaire Algebra college bewezen, en vervolgens gebruikt om te laten zien dat de Pythagorasnorm aan de driehoeksongelijkheid voldoet, en op die ongelijkheid is alles wat we tot nu doen wel zo'n beetje gebaseerd. Wat nu volgt voor algemenere exponenten is dus niet zomaar een alternatief bewijs van de ongelijkheid van

[31] Er hoeft dus geen 3×3 matrix geinverteerd te worden.....

[32] Die elkaar royaal niet gekend hebben.

Cauchy-Schwarz zelf, want we stellen nu alleen de vraag voor welke andere waarden van p en q ook geldt dat

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq |a|_{p} \, |b|_{q}, \tag{8.26}$$

als $|a|_{p}$ en $|b|_{q}$ gedefinieerd zijn door (we vermijden de wortels)

$$|a|_{p}^{p} = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \quad \text{en} \quad |b|_{q}^{q} = \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q.$$

Met $p = q = 2$ is (8.26) ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.

Merk op dat voor elke $p > 0$ en $q > 0$ de ongelijkheid (8.26) schaalt met a en b. De vraag voor welke p en q de ongelijkheid geldt kan dus beantwoord worden door het linkerlid te bekijken op de verzameling van vectoren a en b gegeven door $|a|_{p} = |b|_{q} = 1$, ofwel

$$\phi(a_1, \ldots, a_n) = |a_1|^p + \cdots + |a_n|^p = 1;$$

$$\psi(b_1, \ldots, b_n) = |b_1|^q + \cdots + |b_n|^q = 1,$$

twee randvoorwaarden waaronder we het maximum en het minimum van de functie

$$(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \xrightarrow{F} a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

zoeken. We weten dat dat maximum en minimum bestaan want de randvoorwaarden definiëren een begrensde gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}^{2n}$ en F is continu.

De randvoorwaarden worden gegeven door de functies ϕ en ψ die echter alleen voor $p > 1$ en $q > 1$ continu differentieerbaar zijn, omdat de afgeleide van $x \to |x|^p$ gelijk is aan $x \to px^{p-1}$, waarbij we even de tijdelijke afspraak maken dat we voor $r > 0$ de functie $x \to x^r$ als oneven functie definiëren. Met twee Lagrange multiplicatoren λ en μ krijgen we nu de $2n$ vergelijkingen

$$b_i = \lambda p a_i^{p-1}; \quad a_i = \mu q b_i^{q-1} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

om op te lossen samen met

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |b_i|^q = 1.$$

Opgave 8.8. Neem aan dat $(p-1)(q-1) \neq 1$. Bewijs dat in dat geval voor de oplossingen van deze vergelijkingen geldt dat alle $|a_i|$ aan elkaar gelijk zijn en alle $|b_i|$ aan elkaar gelijk zijn, en dat bijgevolg

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| = n(\frac{1}{n})^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = n^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{8.27}$$

Leid hieruit af dat (8.26) geldt voor $p > 1$ en $q > 1$ met $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

8.5 Aftelbare sommen van vierkante matrices

Het enige dat we na Opgave 7.23 nog moeten doen om zeker te weten dat alles uit Secties 7.4, 7.5, 7.6, 7.7 hier overgeschreven kan worden, is hoe het zit met meetkundige reeksen als

$$I + A + A^2 + A^3 + \cdots , \tag{8.28}$$

met A een vierkante matrix, bijvoorbeeld een 2×2 matrix als in (8.7). Die vraag verdient nu deze aparte sectie. In de volgende sectie behandelen we dan de impliciete functiestelling voor $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$.

Voor een 2×2 matrix als in (8.7) hebben we voor de bijhorende lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ een schatting van de vorm (8.8). Je gaat eenvoudig na[33] dat voor elke $n \times n$ matrix en elke reële n-vector h geldt dat

$$|Ah|_2 \leq M|h|_2, \tag{8.29}$$

waarin $M \geq 0$ gedefinieerd is door

$$M^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2,$$

zeg maar de Pythagoraslengte van A, dus $M = |A|_2$. De kleinste M waarvoor (8.29) geldt heet de operatornorm van A, notatie $|A|_{op}$, waarbij we A nu zien als lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^n$. Deze $|A|$ is dus de grootst mogelijke verhouding tussen de Euclidische lengtes van Ah en h.

We zeggen weer dat

$$A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = L(\mathbb{R}^n),$$

[33] Voor mijn part met volledige inductie.

waarmee de verzameling $L(\mathbb{R}^n)$ gedefinieerd is, niet alleen een lineaire vectorruimte over $\mathbb{R}$, maar ook een genormeerde algebra, vanwege de extra bewerking

$$(A, B) \to AB,$$

en de eigenschappen van de operatornorm

$$A \to |A|_{op}.$$

Het is eenvoudig om rechtstreeks uit de definities te zien dat niet alleen

$$|A|_{op} = 0 \iff A = 0, \quad |\lambda A|_{op} = |\lambda|\, |A|_{op} \geq 0, \quad |A + B|_{op} \leq |A|_{op} + |B|_{op},$$

maar ook

$$|AB|_{op} \leq |A|_{op}\, |B|_{op}$$

voor alle $A, B \in L(\mathbb{R}^n)$ en $\lambda \in \mathbb{R}$.

Merk op dat $L(\mathbb{R}^n)$ als vectorruimte hetzelfde[34] is als $\mathbb{R}^{n^2}$, met de standaard Pythagorasnorm

$$A \to |A|_2$$

gegeven door

$$|A|_2^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

Aardig is dat ook

$$|AB|_2 \leq |A|_2\, |B|_2 \tag{8.30}$$

geldt[35], maar omdat $|A|_{op} \leq |A|_2$ voor alle $A \in L(\mathbb{R}^n)$ gebruiken we in Opgave 8.10 liever de kleinere norm $|\cdot|_{op}$ waarvoor deze ongelijkheid ook geldt.

.

Opgave 8.9. Bewijs dat er een $\mu_n \in (0, 1]$ bestaat waar mee geldt dat

$$\mu_n |A|_2 \leq |A|_{op} \leq |A|_2$$

voor alle $A \in L(\mathbb{R}^n)$. Hint[36]: stel niet, dan kun je op

$$\{A \in L(\mathbb{R}^n) : |A|_{op} = 1\}$$

de Pythagorasnorm $|A|_2$, en dus ook een van de lengtes van de kolomvectoren willekeurig groot krijgen, en dat zal toch een tegenspraak moeten geven met $|A|_{op} = 1$.

[34] Of je de entries nu in een blok of in een kolom of rij zet maakt niet echt uit.

[35] Bewijs dat dit zo is!

[36] Terzijde: $|A|_{op}$ is de wortel uit de grootste eigenwaarde van $A^T A$.

Opgave 8.10. Neem aan dat $A \in L(\mathbb{R}^n)$ voldoet aan $|A|_{op} < 1$. Laat zien dat voor de reeks in (8.28) geldt dat

$$(I - A)(I + A + A^2 + A^3 + \cdots) = I,$$

en leg uit waarom

$$(I + A)^{(-1)} = I - A + A^2 - A^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} (-A)^j$$

als $|A|_{op} < 1$, hetgeen zeker het geval is als $|A|_2 < 1$.

De details van de impliciete functiestelling voor vectorwaardige functies van meer variabelen en de multiplicatorenmethode van Lagrange kun je nu wel invullen. Maar ook zie je met een wat suggestieve notatie dat de machtreeks

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

van de functie

$$x \xrightarrow{f} (1 - x)^{-1}$$

correspondeert met

$$A \xrightarrow{f} \sum_{j=0}^{\infty} A^j = I + A + A^2 + A^3 + \cdots . \tag{8.31}$$

Voor welke functies f en welke $A \in L(\mathbb{R}^n)$ is $f(A)$ op een natuurlijke manier gedefinieerd met rekenregels die uit de rekenregels voor de functies volgens? Een vraag om op terug te komen, maar voor machtreeksen[37] kun je een partieel antwoord wel geven nu.

8.6 Impliciete functiestelling in Euclidische ruimten

We gebruiken de notatie

$$x \in X = \mathbb{R}^n,\ y \in Y = \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \in X \times Y = \mathbb{R}^{n+m},$$

en formuleren de impliciete functiestelling in de buurt van een vast punt $(x, y) = (a, b)$. Omdat we net als in (7.23) continue differentieerbaarheid van de impliciete functie willen hebben eisen we nu meteen dat $(x, y) \to F_x(x, y)$ en $(x, y) \to F_y(x, y)$ continu zijn in een omgeving van $(x, y) = (a, b)$, en dat is hetzelfde[38] als F continu differentieerbaar op die omgeving.

[37] Denk als eerste aan $\exp(A)$.

[38] Daar komen we nog op terug in algemenere context.

Stelling 8.11. *(Impliciete functiestelling) Laat voor $r > 0$ de functie F continu differentieerbaar zijn op $\bar{B}_r(a) \times \bar{B}_r(b)$. Als $F_y(a,b)$ inverteerbaar is dan bestaan er $\delta_0 > 0$ en $\varepsilon_0 > 0$, en een continu differentieerbare functie $f : \bar{B}_{\delta_0}(a) \to \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$, zodanig dat*

$$\{(x,y) \in \bar{B}_{\delta_0}(a) \times \bar{B}_{\varepsilon_0}(b) : F(x,y) = F(a,b)\} = \{(x, f(x)) : x \in \bar{B}_{\delta_0}(a)\},$$

waarbij geldt dat $f'(x) = -(F_y(x, f(x)))^{-1} F_x(x, f(x))$ voor alle $x \in \bar{B}_{\delta_0}(a)$.

Het bewijs kan nu worden overgeschreven van de bewijzen in Secties 7.4 en 7.5. In het bijzonder wordt de samengestelde functie $x \to F(x, f(x))$ niet gedifferentieerd om de uitdrukking voor $f'(x)$ af te leiden.

Omdat in de constructie van $y = f(x)$ eerst $0 < \varepsilon_0 \leq r$ en daarna $\delta_0 > 0$ klein genoeg gekozen wordt, en vervolgens δ_0 nog kleiner moet worden gekozen om $f'(x) = -(F_y(x, f(x)))^{-1} F_x(x, f(x))$ gedefinieerd te hebben voor $|x| \leq \delta_0$, zal in het algemeen niet gelden dat $\delta_0 > \varepsilon_0$. De facto kan Stelling 8.11 dus gelezen worden als het bestaan van $0 < \delta_0 \leq \varepsilon_0 \leq r$ waarvoor de uitspraken in de stelling gelden.

Passen we Stelling 8.11 toe op

$$F(x,y) = x - g(y),$$

dan krijgen we de inverse functiestelling via de uitspraak

$$\{(x,y) \in \bar{B}_{\delta_0}(a) \times \bar{B}_{\varepsilon_0}(b) : g(y) = x\} = \{(x, f(x)) : x \in \bar{B}_{\delta_0}(a)\},$$

waarbij geldt dat $f'(x) = (g'(f(x))^{-1}$ voor alle $x \in \bar{B}_{\delta_0}(a)$. Merk op dat de oplossing $y = f(x)$ van $x = g(y)$ nu wordt geconstrueerd met

$$y_{n+1} = y_n - g'(0)^{-1}(g(y_n) - x),$$

startend vanaf $y_0 = 0$. We formuleren het resultaat voor $X = Y = \mathbb{R}^n$ en $g : Y \to Y$.

Stelling 8.12. *(Inverse functiestelling) Laat voor $r > 0$ de functie $g : Y \to Y$ continu differentieerbaar zijn op $\bar{B}_r(b)$ en laat $a = g(b)$. Als $g'(b)$ inverteerbaar is dan bestaan er $0 < \delta_0 \leq \varepsilon_0 \leq r$, en een continu differentieerbare injectieve functie $f : \bar{B}_{\delta_0}(a) \to \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$, zodanig dat voor alle $(x,y) \in \bar{B}_{\delta_0}(a) \times \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$ geldt: $x = g(y) \iff y = f(x)$. Bovendien geldt dat $f'(x) = (g'(f(x))^{-1}$ voor alle $x \in \bar{B}_{\delta_0}(a)$.*

N.B. Stelling 8.11 geeft de $f : \bar{B}_{\delta_0}(a) \to \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$ in Stelling 8.12 alleen als continu differentieerbare functie. Omdat $y = f(x)$ voor $x \in \bar{B}_{\delta_0}(a)$ geldt echter $x = g(y) = g(f(x))$, dus f is injectief op $\bar{B}_{\delta_0}(a)$, en vanwege $f'(x) = (g'(f(x))^{-1}$ is $f'(x)$ inverteerbaar in elke $x \in \bar{B}_{\delta_0}(a)$.

Voor g werkt dit argument niet zonder meer: om $x = g(y)$ in $y = f(x)$ in te mogen vullen moet $g(y)$ wel in het domein van f liggen. Stelling 8.12 kan echter nog een keer worden toegepast (draai de rollen van x en y om) om $0 < \varepsilon_1 \leq \delta_1 \leq \delta_0$ en een continu differentieerbare $g_1 : \bar{B}_{\varepsilon_1}(b) \to \bar{B}_{\delta_1}(a)$ te vinden zodanig dat voor $(x, y) \in \bar{B}_{\delta_1}(a) \times \bar{B}_{\varepsilon_1}(b)$ weer geldt: $x = g_1(y) \iff y = f(x)$. Met de eerdere equivalentie $x = g(y) \iff y = f(x)$ voor alle $(x, y) \in \bar{B}_{\delta_0}(a) \times \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$ zien we dat $g_1 = g$ op $\bar{B}_{\varepsilon_1}(b)$. Net als eerder voor $f : \bar{B}_{\delta_0}(a) \to \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$ volgt nu dat g_1 en dus g injectief is op $\bar{B}_{\varepsilon_1}(b)$. Samenvattend concluderen we dat in de keten

$$\bar{B}_{\varepsilon_1}(b) \xrightarrow{g} \bar{B}_{\delta_1}(a) \to \bar{B}_{\delta_0}(a) \xrightarrow{f} \bar{B}_{\varepsilon_0}(b) \xrightarrow{g} X = Y = \mathbb{R}^n$$

behalve f ook g in de eerste schakel injectief is. Het tweede pijlte (zonder bovenschrift) is de inclusieafbeelding. De keten kan steeds naar links worden uitgebreid. Om precies te zijn, nu maar eens startend met een continu differentieerbare

$$\mathbb{R}^n \supset \bar{B}_{\delta_0}(a) \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \tag{8.32}$$

en $f'(a)$ inverteerbaar, hebben we met $b = f(a)$ een doorlopend diagram

$$\begin{array}{ccc}
\bar{B}_{\delta_0}(a) & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\
\uparrow & & \uparrow \\
\bar{B}_{\delta_1}(a) & \xleftarrow{g} & \bar{B}_{\varepsilon_1}(b) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\bar{B}_{\delta_2}(a) & \xrightarrow{f} & \bar{B}_{\varepsilon_2}(b) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\bar{B}_{\delta_3}(a) & \xleftarrow{g} & \bar{B}_{\varepsilon_3}(b) \\
\uparrow & & \uparrow
\end{array}$$

De door Stelling 8.12 gemaakte continu differentieerbare

$$\bar{B}_{\varepsilon_1}(b) \xrightarrow{g} \bar{B}_{\delta_1}(a)$$

en iedere schakel behalve de bovenste f zijn injectief (maar in het algemeen niet surjectief), met inverteerbare $f'(x)$ en $g'(y)$ (vanwege $f'(x) = (g'(f(x))^{-1}$ en $g'(y) = (f'(g(y))^{-1}$). Teruglopend langs de horizontale functiepijltjes en de verticale inclusiepijltjes worden de epsilons en delta's alleen maar kleiner[39]. Over het beeld van ieder bolletje onder f dan wel g is nog wel wat te zeggen natuurlijk, maar eerst kijken we in Sectie 8.8 naar andere vragen waarbij Stelling 8.11 een rol speelt.

Opgave 8.13. Leid Stelling 8.11 af uit Stelling 8.12. Hint: maak m.b.v. F een functie $\tilde{F} : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, waarvan de laatste m componenten gegeven worden door $F(x,y)$ en de eerste n door x zelf.

8.7 Flashback

Exercise 7.17 concerned a bijection between two closed intervals $[a,b]$ and $[c,d]$. Compared to (8.32) and the discussion that follows now think of $n=1$ and $[a,b]$ as a closed ball in $\mathbb{R}$, and a bijection

$$f : [a,b] \to [c,d]. \tag{8.33}$$

By definition $[c,d]$ is the image under f of $[a,b]$ and vise versa $[a,b]$ is the image under the inverse function g of $[c,d]$. The inverse function exists because f is assumed to be a bijection[40]. Thus, unlike the discussion of (8.32), the present discussion is *not* about the existence of the inverse function. It already exists by assumption. Instead we ask, in Opgave 7.17 that is, about the differentiability of g in some $y_0 = f(x_0)$ with $x_0 \in (a,b)$ and f differentiable in x_0 with $f'(x_0) \neq 0$. The positive answer to this question is that g is differentiable in y_0 and that

$$f'(x_0)g'(y_0) = 1, \tag{8.34}$$

a statement which is symmetric in f and g. The exercise calls for a proof of this statement that will not involve the continuity[41] of f and g and relies on a reformulation of the special case that $f(0)=0$ and $f'(0)=1$ which is symmetric in x and y, whence the diffferentiability of g in $y=0$ with $g'(0)=1$ will be immediate.

To establish the positive answer you should first make you life that easy by showing[42] that without loss of generality you may assume that $0 = x_0 = y_0 = 0 = f(0)$, and that $f'(x_0) = 1$, meaning that

$$f(x) = x + o(x) \quad \text{as} \quad x \to 0, \tag{8.35}$$

[39] In Section 8.7 below we discuss the case $n=1$ in relation to Section 7.3.
[40] In dimension $n>1$ we rarely have bijections between balls of course.
[41] But do prove that f and g are continuous without any further assumptions.
[42] You really should.

i.e.

$$\forall\epsilon > 0\,\exists\delta > 0: \quad |x| \le \delta \implies |f(x) - x| \le \epsilon|x|. \tag{8.36}$$

The inequality for $|f(x) - x|$ means that

$$(1-\epsilon)x \le y \le (1+\epsilon)x \quad \text{if} \quad 0 \le x \le \delta \quad \text{and} \quad y = f(x), \tag{8.37}$$

and the other way around for $-\delta \le x \le 0$. We want to replace this statement by an equivalent statement which is symmetric in x and y, and thereby also equivalent to

$$g(y) = y + o(y) \quad \text{as} \quad y \to 0. \tag{8.38}$$

How do we get the equivalent symmetric statement? Clearly the condition $y = f(x)$ already is symmetric because

$$y = f(x) \iff x = g(y),$$

but the inequalities with x and y are not. Note though that

$$(1-\epsilon)x \le y \le (1+\epsilon)x \implies (1-\epsilon)x \le y \le \frac{1}{1-\epsilon}x$$

if $x \ge 0$ and $0 < \epsilon < 1$. In other words (8.36) implies that

$$\forall\epsilon \in (0,1)\,\exists\delta > 0: \quad \begin{array}{c} 0 \le x \le \delta \\ y = f(x) \end{array} \implies (1-\epsilon)x \le y \le \frac{1}{1-\epsilon}x, \tag{8.39}$$

and likewise[43] for $-\delta \le x \le 0$.

Next observe that (8.39) and its version for $x \le 0$ in turn imply

$$\forall\epsilon \in (0,1)\,\exists\delta > 0: \quad |x| \le \delta \implies |f(x) - x| \le \frac{\epsilon}{1-\epsilon}|x|, \tag{8.40}$$

since

$$\frac{1}{1-\epsilon} = 1 + \frac{\epsilon}{1-\epsilon}.$$

But (8.40) and (8.36) are equivalent, by setting

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{1-\epsilon},$$

and thus (8.39) and its version for $x \le 0$ make up for an equivalent definition of (8.35) stating that

$$\forall\epsilon \in (0,1)\,\exists\delta > 0: \quad G_\delta = \{(x,y) : 0 < |x| \le \delta,\ y = f(x)\} \subset S_\epsilon, \tag{8.41}$$

[43] With the same δ given $0 < \epsilon < 1$, and with reversed inequalities for y.

in which

$$S_\epsilon = \{(x,y) \neq (0,0) : \frac{1}{1-\epsilon} \leq \frac{y}{x} \leq 1-\epsilon\} \tag{8.42}$$

is clearly symmetric in x and y. Now choose $\tilde{\delta} > 0$ such that, for the same $\epsilon \in (0,1)$, it holds that

$$F_{\tilde{\delta}} = \{(x,y) : \; 0 < |y| \leq \tilde{\delta}, \, x = g(y)\} \subset S_\epsilon.$$

How? Draw a picture to see that

$$\tilde{\delta} = (1-\epsilon)\delta$$

does the job. This completes the proof.

8.8 Karakterisaties van deelvarieteiten

Lineaire deelvarieteiten van $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ zijn per definitie oplossingsverzamelingen van lineaire vergelijkingen. Denk aan punten, lijnen en vlakken als de niet-triviale voorbeelden in $\mathbb{R}^3$. Bij lineaire algebra heb je gezien dat, behalve in het geval van punten, deze niet-triviale lineaire deelvarieteiten, na eventueel hernummeren van de coördinaten, altijd te beschrijven zijn als grafiek van een lineaire functie

$$y = Ax + b, \tag{8.43}$$

waarbij $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $A :\in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineair, $b \in \mathbb{R}^m$, en $N = n + m$ met $n, m \in \mathbb{N}$.

Aan (8.43) is nog niet te zien of we matrixnotatie gebruiken. Als we x en y zien als kolomvectoren dan is (8.43) te lezen met A een matrix bestaande uit m rijen en n kolommen. In (8.43) staan dan m vergelijkingen die geschreven kunnen worden in de vorm $Ax - y = b$ voor $(x,y) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, i.e.

$$(A \;\; -I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \in \mathbb{R}^m,$$

met $C = (A \;\; -I)$ een (wat bijzondere) matrix met m rijen en N kolommen, waarvan de eerste n kolommen de matrix A vormen, en de laatste m kolommen een diagonaal matrix met -1 op de diagonaal. Die matrix C werkt op kolomvectoren

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Zo gelezen is (8.43) dus een voorbeeld van een stelsel van m lineaire vergelijkingen voor N onbekenden $z_1, z_2, \ldots, z_{\mathrm{N}}$.

Uitgeschreven met puntjes is dat stelsel

$$C_{11}z_1 + C_{12}z_2 + \cdots + C_{1N}z_{\mathrm{N}} = b_1;$$

$$C_{21}z_1 + C_{22}z_2 + \cdots + C_{2\mathrm{N}}z_{\mathrm{N}} = b_2;$$

$$\vdots$$

$$C_{m1}z_1 + C_{m2}z_2 + \cdots + C_{m\mathrm{N}}z_{\mathrm{N}} = b_m.$$

In het voorbeeld heeft de coëfficiëntenmatrix C maximale rang, hetgeen equivalent is met het kunnen kiezen van m kolommen van C die samen een inverteerbare (vierkante) matrix vormen, hier de laatste m kolommen, en is y door inverteren van in dit geval $-I$ in x uit te drukken. Dat is net als in het algemene geval, waarin $C = (A\ B)$ en B inverteerbaar is, en oplossen via $y = B^{-1}(b - Ax)$ weer een grafiek van de vorm (8.43) produceert. We zien hier dus de equivalentie van $Cz = b$ en $y = Ax + b$ als beschrijvingen in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ van de niet-triviale lineaire deelvarieteiten anders dan de singletons, waarbij C bij aanname maximale rang heeft.

8.8.1 Niet per se lineaire deelvarieteiten

Voor niet-lineaire deelvarieteiten[44] stellen we nu de vraag of er ook zo'n equivalentie is, uitgaande van de niet-lineaire versie van $Cz = b$, geschreven zoals in de impliciete functiestelling, dus[45]

$$F(z) = F(x, y) = 0,$$

met $F : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}^m$ continu differentieerbaar. Omdat (8.43) een beschrijving is zonder verdere condities op A gebruiken we de niet-lineaire versie van (8.43) om af te spreken wat we onder een deelvarieteit $M \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ willen verstaan: we zeggen dat een n-dimensionale deelvarieteit $M \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ een verzameling is die in de buurt van elk punt van M na hernummeren van de coördinaten te schrijven is zoals de verzameling waar $F(x, y) = F(a, b)$ in Stelling 8.11, dus als de grafiek van een continu differentieerbare functie[46]. Hierbij is de dimensie $n \in \{1, \ldots, \mathrm{N} - 1\}$ vast gekozen en sluiten we het analagon van singletons uit[47].

[44] We moet nog een definitie geven van wat we daaronder verstaan!

[45] Er is een reden waarom we hier liever y achter x schrijven.

[46] Preciezer: M heet dan een C^1-deelvarieteit, en een hypersurface if $n = \mathrm{N} - 1$.

[47] Dat analogon zou een deelverzameling van geisoleerde punten zijn.

Opgave 8.14. Laat $F : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}^m$ continu differentieerbaar zijn. Als voor alle $z \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ met $F(z) = 0$ geldt dat $F'(z)$, gezien als matrix, maximale rang heeft, dan is $\{z \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} : F(z) = 0\}$ een n-dimensionale deelvarieteit van $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, met $n + m = \mathrm{N}$. Bewijs dit.

Opgave 8.15. Geef een voorbeeld van een n-dimensionale deelvarieteit $M \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ die niet gegeven wordt door een functie F zoals in Opgave 8.14.

Een standaardvoorbeeld bij Opgave 8.14 is de rand van een bol in $\mathbb{R}^n$ met middelpunt $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en straal $\delta > 0$, beschreven door

$$(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 - \delta^2 = 0. \tag{8.44}$$

Opgave 8.16. Bewijs dat de verzameling van $x \in \mathbb{R}^n$ die voldoen aan (8.44) een $(n - 1)$-dimensionale deelvarieteit is.

Er zijn drie equivalente manieren om te zeggen dat $M \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ een n-dimensionale deelvarieteit is

(A) M is lokaal de grafiek van een continu differentieerbare

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad (n + m = \mathrm{N}),$$

gegeven door $y = f(x)$ na hernummeren in $z = (x, y)$.

(B) M is lokaal de nulverzameling van een continu differentieerbare

$$F : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to \mathbb{R}^m \quad (n + m = \mathrm{N}),$$

F_y inverteerbaar in de betreffende hernummerde $z = (x, y) \in M$.

(C) M is lokaal het beeld[48] van een continu differentieerbare injectieve

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}},$$

met Φ' van maximale rang.

Stelling 8.11 liet al (B) $\Longrightarrow$ (A) zien, en (A) $\Longrightarrow$ (B) geldt omdat (A) een speciaal geval is van B met $F(x, y) = g(y) - x$. Evenzo is (A) een speciaal

[48] Als afbeelding naar dat beeld heeft Φ een inverse die een kaart op M genoemd wordt.

geval van C met $\Phi(x) = (x, f(x))$. Om de implicatie (C) $\implies$ (A) te laten zien en zo het kringetje rond te maken gebruiken we Stelling 8.12, maar hebben we ook de kettingregel nodig, de regel die meestal vóór de impliciete functiestelling wordt behandeld.

De *kettingregel* generaliseert de regel in Opgave 4.14, zie ook Sectie 7.6, Opgave 4.15 en later Opgave 14.19. Met de opmerking dat (4.11) gelezen moet worden met matrices[49] is de regel met bewijs en al over te schrijven en nu meteen[50] toepasbaar. We zien Φ daartoe nu als

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

met, na hernummeren weer, $\Phi(x) = (\Psi(x), \chi(x))$, $\Psi : \bar{B}_r(a) \to \mathbb{R}^n$ en $\chi : \bar{B}_r(a) \to \mathbb{R}^m$ continu differentieerbaar, en $\Psi'(a)$ inverteerbaar in a, bij aanname van de maximale rang van $\Phi'(x)$ in $x = a$. Stelling 8.12, toegepast op $g = \Psi$ met $y = x$, geeft nu een continu differentieerbare injectieve functie f die we ϕ noemen, $\phi : \bar{B}_{\delta_0}(\Psi(a)) \to \mathbb{R}^n$, met $\phi'(\xi)$ inverteerbaar voor alle $\xi \in \bar{B}_{\delta_0}(\Psi(a))$, al gebruiken we dat verder niet, en $\Psi(\phi(\xi)) = \xi$ voor alle $\xi \in \bar{B}_{\delta_0}(\Psi(a))$. Zo parametriseert

$$\xi \to \Phi(\phi(\xi)) = (\Psi(\phi(\xi)), \chi(\phi(\xi))) = (\xi, f(\xi))$$

met $f(\xi) = \chi(f(\xi))$ nu ook M in de buurt van $b = \Psi(a)$ en is M lokaal dus gegeven door de grafiek van $f : \bar{B}_{\delta_0}(b) \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. De continue differentieerbaarheid van f volgt uit de kettingregel, en het is de eerste keer dat we die hier gebruiken. Hiermee is het bewijs van

$$\text{(A)} \iff \text{(B)} \iff \text{(C)}$$

klaar.

Opgave 8.14 betrof het geval dat M met één F als in (B) globaal te beschrijven is zoals bijvoorbeeld in Opgave 8.16. In Stelling 8.12 en de daaropvolgend discussie werd zo'n bol met rand en al injectief afgebeeld door een injectieve continu differentieerbare functie f (met $f'(x)$ inverteerbaar voor alle x in die gesloten bol) naar een deelverzameling van (een bol in) $\mathbb{R}^n$. Is het beeld van de rand van de bol nu ook weer een $(n-1)$-dimensionale deelvarieteit?

Opgave 8.17. Laat $M \subset \mathbb{R}^n$ een deelvarieteit zijn en $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continu differentieerbaar in een omgeving van elk punt van M. Als $f'(x)$ inverteerbaar is voor elke $x \in M$ en f injectief is op M, dan is het beeld van f ook een deelvarieteit.

---

[49] Beter: lineaire afbeeldingen, in dit hele hoofdstuk de facto matrices.

[50] Nou ja, aan het eind van het argument dat nu komt.

Opgave 8.18. Precies als Opgave 8.17, maar met $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en $f'(x)$ van maximale rang voor elke $x \in M$.

8.8.2 Beelden (van randen) van bollen

Stelling 8.12 leidde met $0 < \varepsilon_1 \leq \delta_1 \leq \delta_0 \leq \varepsilon_0$ tot een keten

$$\bar{B}_{\varepsilon_1}(b) \xrightarrow{g} \bar{B}_{\delta_1}(a) \xrightarrow{f} \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$$

waarin beide afbeeldingen injectief maar in het algemeen niet surjectief zijn. De kleinere δ_1 en ε_1 waren nodig voor de injectiviteit van g op de kleinere (gesloten) bol $\bar{B}_{\varepsilon_1}(b)$.

De randen $\partial B_{\varepsilon_1}(b)$ en $\partial B_{\varepsilon_0}(a)$ hebben als beeld de deelvarieteiten $g(\partial B_{\varepsilon_1}(b))$ en $f(\partial B_{\varepsilon_0}(a))$. In het geval dat g en f lineaire afbeeldingen zijn en $a = b = 0$, ga je eenvoudig na dat deze beelden te zien zijn als grafiek over de eenheidssfeer

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}.$$

Als $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zo'n inverteerbare lineaire afbeelding is, dan kun je een gladde hoogtefunctie $h : S^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ maken zodanig dat het beeld van (de bolrand) $\partial B_1(0)$ onder A van de vorm

$$S_h = \{h(x)x : x \in S^{n-1}\} \tag{8.45}$$

is, al moeten we nog precies maken wat we hier met gladheid van h bedoelen. Je maakt de functie h door voor elke $x \in S^{n-1}$ de halfrechte

$$\{\lambda x : \lambda > 0\}$$

met $A(\partial B_1(0))$ te snijden, waarbij je x misschien liever een andere naam wil geven als je denkt in termen van $y = Ax$.

Opgave 8.19. Laat $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een inverteerbare lineaire afbeelding zijn. Bewijs dat er voor elke $\xi \in S^{n-1}$ precies een $\lambda > 0$ is waarvoor $\lambda\xi \in A(\partial B_1(0))$. Door $\lambda = h_A(\xi)$ te stellen is $h_A : S^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ gedefinieerd. Het beeld van $\partial B_\delta(0)$ onder A heeft als hoogtefunctie $\xi \to \delta h_A(\xi)$.

De eerdere vragen over $g(\partial B_{\varepsilon_1}(b))$ en $f(\partial B_{\varepsilon_0}(a))$ geven aanleiding tot de vraag of de uitspraak in Opgave 8.19 ook waar is voor het beeld van de rand van een voldoende klein gekozen bol $\bar{B}_{\delta_1}(0)$ onder het beeld van een continue differentieerbare functie $F : \bar{B}_\delta(0) :\to \mathbb{R}^n$ van de vorm

$$F(x) = Ax + R(x) \quad \text{met} \quad R(x) = o(|x|) \quad \text{voor} \quad |x| \to 0.$$

Op grond van Stelling 8.12 weten we dat F injectief is op een kleinere bol $\bar{B}_{\delta_0}(0)$ met $F'(x)$ invertbaar (niet alleen voor $x = 0$ maar ook) voor alle $x \in \bar{B}_{\delta_0}(0)$. De volgende opgave is een klein project waarin ook Stelling 8.11 gebruikt moet worden, nog uit te werken in een definitieve versie van dit basisboek.

Opgave 8.20. Bewijs de uitspraak in Opgave 8.19 voor het beeld $F(\partial B_{\delta_1}(0))$ van de rand van een voldoende kleine bol $\bar{B}_{\delta_1}(0)$. Laat zien dat de hoogtefunctie h die je maakt continu differentieerbaar is in de buurt van ieder punt op S^{n-1}, als functie van geschikt gekozen coördinaten in een omgeving van dat punt.

8.8.3 Overgang op andere coördinaten

Als een punt P in n-dimensionale deelvarieteit M van $\mathbb{R}^N$ zowel in het beeld van een Φ als van een Ψ ligt zoals in beschrijving (C) in Sectie 8.8.1, zeg met $\Phi(\xi)$ en $\Psi(\eta)$, en $P = \Phi(0) = \Psi(0)$, met 0 een inwendig punt van de in (C) gebruikte domeinen van Φ en Ψ, dan wordt het verband tussen ξ en η in de buurt van 0 gegeven door uitspraken zoals in Stelling 8.12.

8.8.4 Meer dan continu differentieerbaar

Om uit te werken nog. Als $F : X \to Y$ continu differentieerbaar is, met bijvoorbeeld $X = \mathbb{R}^m$ en $Y = \mathbb{R}^n$, dan is $x \to F'(x)$ een continue functie (of afbeelding) van X naar

$$L(X,Y) = \{A : X \to Y : A \quad \text{is lineair}\},$$

waarin we als norm op $L(X,Y)$ naar keuze de normen

$$|A|_{op} = \max_{|x|\leq 1} |Ax| \quad \text{of} \quad |A|_2 = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$$

kunnen gebruiken. Deze F' kan weer continu differentieerbaar zijn en in dat geval is ook

$$\tilde{F} : (x,h) \to (F(x), F'(x)h)$$

continu differentieerbaar. In het geval dat $X = Y$ is inverteerbaarheid van F' in $x = x_0$ equivalent met inverteerbaarheid van $\tilde{F}'$ in $(x,h) = (x_0, 0)$. Dit leidt tot een formulering van Stelling 8.12 voor twee keer continu differentieerbare functies. Ook de impliciete functiestelling krijgt zo een twee keer differentieerbare versie, en deelvarieteiten kunnen vervolgens C^2 zijn in plaats van C^1. Of C^k met $k \in \mathbb{N}$.

8.9 Integralen over rechthoeken

Integraalrekening voor continue functies

$$u : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R},$$

met $[a, b] \times [c, d]$ een rechthoek in $\mathbb{R}^2$ gaat met partities P als in (3.4) voor $[a, b]$, en

$$c = y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_{\mathrm{M}} = b \tag{8.46}$$

voor $[c, d]$.

Om kort te gaan, met onder- en bovensommen, of met tussensommen van de vorm

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \sum_{l=1}^{\mathrm{M}} u(\xi_k, \eta_l)(x_k - x_{k-1})(y_l - y_{l-1}),$$

met tussenwaarden $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ en $\eta_l \in [y_{l-1}, y_l]$, volgt het bestaan van één unieke $J \in \mathbb{R}$ die de integraal van u over $[a, b] \times [c, d]$ genoemd wordt, met notatie (en stelling over het vrij mogen kiezen van de integratievolgorde)

$$J = \int_{[a,b]\times[c,d]} u = \int_a^b \int_c^d u(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b u(x, y)\, dx\, dy. \tag{8.47}$$

De herhaalde integralen worden uitgewerkt met de technieken en regels voor gewone integralen.

We maken daar hier nu verder geen woorden aan vuil maar wijzen wel nog even op de details in de hier gebruikte notaties in relatie tot de discussie na Stelling 7.12 en Opgave 3.33 onder Definitie 3.31.

8.9.1 Notationele kwesties met die d-tjes

Anders dan de notatie suggereert is (8.47) geen uitdrukking met de onder Stelling 7.12 aangekondigde 2-vormen. In (8.47) is de herhaalde integraal immers te lezen als

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b u(x, y)\, dx \right\} dy,$$

een integraal van een integraal, net als de herhaalde integraal direct daarvoor, met de afsluitende accolade stevig tussen dx en dy in. Beide herhaalde integralen zijn gelijk aan

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} u,$$

gedefinieerd via Riemannsommen en een limietovergang, met een notatie waarin $dxdy$ of $dydx$ als produkt van dx en dy vermeden is.

Opgave 8.21. Net als in Opgave 3.33 kun je je nu drie assen (nu in de ruimte in plaats van in het vlak) voorstellen die loodrecht op elkaar staan in hun gemeenschappelijke snijpunt $x = y = z = 0$, met richtingen nog te kiezen, maar dat pas nadat je op de x-as a en b gemarkeerd hebt, op de y-as c en d, en de grafiek van zo maar een continue functie zonder nulpunten en tekenwisselingen hebt gekozen. Nu zijn er acht gevallen waarin je de integraal kunt relateren aan de inhoud ingesloten door $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = 0$ en $z = u(x, y)$. Kijk nu naar de tekens van $b - a$ en $d - c$, zeg maar van dx en dy, in de twee gevallen dat zowel u als de integraal positief zijn, en laat zien dat ze hetzelfde teken hebben: zeg maar $dxdy > 0$.

Opgave 8.22. Neem nu eventueel voor het gemak $a = c = 0$, $|b| = |d| = 1$. In het geval dat $dxdy$ en $u(x, y)$ allebei positief zijn is er een orienterende ordening tussen de drie assen die overeenkomt met de correpondentie

positieve x-as	$\leftrightarrow$	middelvinger
positieve y-as	$\leftrightarrow$	wijsvinger
positieve z-as	$\leftrightarrow$	duim

op je linkerhand. Overtuig jezelf daarvan en ook van het volgende: teken je een x-as en een y-as op het schoolbord die elkaar loodrecht snijden in $x = y = 0$ dan vertellen de positieve x-as en de positieve y-as als geordend assenpaar welke kant van het bord $z > 0$ heeft; bij de standaardkeuze met x naar rechts en y naarboven komt de positieve z-as naar voren het bord uit. Het bijbehorende assenkruis heet dan rechtsdraaiend[51].

Als je wil rekenen met formules waarin produkten van dx en dy voorkomen dan kun je in het licht van Opgave 8.21 en Opgave 8.22 tot de conclusie komen dat het handig is om af te spreken dat

$$dxdy = -dydx,$$

zonder de afsluitende accolade tussen dx en dy, in de zin dat

$$J = \int_{[a,b]\times[c,d]} u = \iint_{[a,b]\times[c,d]} u(x, y)\, dxdy,$$

gezien als

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} \quad \text{werkend op} \quad u(x, y)\, dxdy,$$

gelijk is aan

$$-\iint_{[a,b]\times[c,d]} u(x, y)\, dydx,$$

[51] Dit is moeilijk voor jongens.

gezien als

$$-\iint_{[a,b]\times[c,d]} \quad \text{werkend op} \quad u(x,y)\,dydx,$$

waarbij die werking dan precies gedefinieerd moet worden op zo'n manier dat onder coördinatentransformaties de integralen transformeren op een manier die consistent is met wat er gebeurt met de inhouden waar het verhaal mee begonnen is. Maar dat hebben we hier nog niet behandeld.

8.9.2 Formele d-algebra zonder betekenis?

Ondertussen spreekt de algebra voor differentiaalvormen deels voor zich. Na $du = u'(x)dx$ voor $u = u(x)$ hebben we natuurlijk ook

$$du = u_x dx + u_y dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{8.48}$$

als de d van de 0-vorm $u = u(x,y)$, een uitdrukking van de vorm

$$fdx + gdy = f(x,y)dx + g(x,y)dy,$$

een 1-vorm waarvan de d via

$$d(f(x,y)dx + g(x,y)dy)$$

vraagt[52] om een som en produktregel met d van $f(x,y)$ en $g(x,y)$, en een nog te definiëren d van dx en dy.

Voor de hand als som- en daarna twee keer de produktregel ligt

$$d(fdx + gdy) = d(fdx) + d(gdy) =$$

$$dfdx + fddx + dgdy + gddy =$$

$$f_x dxdx + f_y dydx + g_x dxdy + g_y dydy + fddx + gddy.$$

Als $dxdy = -dydx$ volgt dan

$$d(fdx + gdy) = f_x dxdx + g_y dydy + (g_x - f_y)dxdy + fddx + gddy.$$

Met $y = x$ leest $dxdy = -dydx$ nu toch echt als $dxdx = -dxdx$, dus $dxdx = 0 = dydy$ als consistent voor te schrijven tweede rekenregel ligt dan ook voor de hand. Daarmee reduceert het bovenstaande tot

$$d(fdx + gdy) = (g_x - f_y)dxdy + fddx + gddy,$$

[52] Wat d is dat kun je straks weten.

en blijft de vraag wat ddx en ddy dan wel mogen zijn.

Keine blasse Ahnung zou ik zeggen dus doe dan maar NUL. Dan wordt de werking van d op 1-vormen

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy \xrightarrow{d} (g_x(x,y) - f_y(x,y))dxdy,$$

en dus

$$u(x,y) \xrightarrow{d} u_x(x,y)dx + u_y(x,y)dy \xrightarrow{d} (u_{yx}(x,y) - u_{xy}(x,y))dxdy = 0.$$

Der blasse Ansatz $ddx = ddy = 0$ gibt $ddu = 0$ voor alle $u = u(x,y)$.

Ik zou zeggen: machen wir. Dus $d^2 = 0$[53], en met $f = f(x,y), g = g(x,y)$ hebben we in de notatie met partiële differentiaalquotiënten nu dat

$$f \xrightarrow{d} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \quad fdx + gdy \xrightarrow{d} (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dxdy, \quad gdxdy \xrightarrow{d} 0 \tag{8.49}$$

Opgave 8.23. Doe de algebra voor

$$f \xrightarrow{d} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

$$fdx + gdy + hdz \xrightarrow{d} (\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z})dydz + (\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dxdy,$$

$$fdydz + gdzdx + hdxdy \xrightarrow{d} (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z})dxdydz,$$

$$hdxdydz \xrightarrow{d} 0,$$

met $f = f(x,y,z), g = g(x,y,z), h = h(x,y,z)$, gebruikmakend van de som- en produktregel voor d, $dxdy = -dydx, dxdz = -dzdx, dydz = -dzdy$, en $ddx = ddy = ddz = 0$. Verifieer dat niet alleen $ddf = 0$ maar ook $dd(fdx + gdy + hdz) = 0$: dd maakt alles nul en zo hoort dat kennelijk.

Opgave 8.24. Doe de algebra nog een keer voor $F \xrightarrow{d} F'(x)dx$ en $f(x)dx \xrightarrow{d} 0$ met $f(x)$ en $F(x)$.

[53] Daar kan i een puntje aan zuigen.

8.9.3 Transformaties en parametrisaties

Als $x \to f(x) = F'(x)$ en $t \to x'(t)$ continu zijn met bijvoorbeeld $x(0) = a$ en $x(1) = b$, dan is

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b dF = F(b) - F(a) = F(x(1)) - F(x(0)) =$$

$$[F(x(t))]_0^1 = \int_0^1 F'(x(t))x'(t)\,dt = \int_0^1 f(x(t))x'(t)\,dt,$$

waarin we

$$dx = x'(t)dt \tag{8.50}$$

als een stukje van de formele d-algebra in Sectie 8.9.2 herkennen.

Een 1-vorm $f(x)dx$ in x wordt via $t \to x(t)$ zo teruggetrokken tot een 1-vorm

$$f(x)dx = f(x(t))x'(t)dt \tag{8.51}$$

in t. Evenzo wordt de 1-vorm

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

via $t \to x(t)$ en $t \to y(t)$ met dezelfde algebra teruggetrokken tot een 1-vorm

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = (f(x(t),y(t))x'(t) + g(x(t),y(t))y'(t))dt \tag{8.52}$$

in t.

De gelijktekens in (8.51) en zeker (8.52) zijn wat dubieus, het is wellicht beter om (8.51) en (8.52) nu als afbeeldingen te lezen, bijvoorbeeld

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy \xrightarrow{terugtrekken} (f(x(t),y(t))x'(t) + g(x(t),y(t))y'(t))dt,$$

waarbij het terugtrekken gebeurd via de afbeelding in kwestie, in dit voorbeeld $t \to (x(t),y(t))$, die van 1 naar 2 variabelen gaat.

Nemen we in plaats van een 1-vorm een 2-vorm, zeg $dxdy$ zelf, dan geeft terugtrekken via dezelfde $t \to (x(t),y(t))$ dat

$$dxdy \to x'(t)dt\,y'(t)dt = x'(t)y'(t)dtdt = 0.$$

Weinig zinvol wellicht, maar met

$$(r,\theta) \to (x(r,\theta), y(r,\theta))$$

krijgen we

$$dxdy \to (\frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta)(\frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta) = (\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta})drd\theta, \tag{8.53}$$

met de determinant[54] van de Jacobimatrix.

In het geval dat $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ wordt dit

$$dxdy \to rdrd\theta,$$

op grond van een algebra die zich (ook) voor coördinatentransformaties genereert uit de regeltjes die we in de d-algebra hebben geponeerd.

Merk op dat (8.52) niet met een coördinatentransformatie kan corresponderen maar (8.53) wel, en lees de afleiding van (8.52) nog eens terug met t vervangen door ϕ in bijvoorbeeld $[0, 2\pi]$. Met $x(0) = x(2\pi)$ en $y(0) = y(2\pi)$ kun je dit voorbeeld nu goed vergelijken met (8.53) waarin r vast is genomen, alvorens verder te ontdekken hoe de terugtrekalgebra werkt voor

$$(\theta, \phi) \to (x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi) \tag{8.54}$$

en 2-vormen in x, y, z.

Opgave 8.25. Trek $f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz$ terug naar een 2-vorm in θ en ϕ.

8.9.4 Een transformatiestelling

Voor $R \subset \mathbb{R}^2$ en $f : R \to \mathbb{R}$ geldt dat

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_Q f(x(r,\theta), y(r,\theta))\,(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta})drd\theta,$$

als

$$Q \xrightarrow{(r,\theta)\to(x,y)} R$$

aan wat aannamen voldoet. Voorbeeld: Sectie 13.1. Hoe doen we dit? Onderstaande is om de gedachten te bepalen.

Met een bijectie

$$(x, y) \xrightarrow{\Phi} (u, v)$$

[54] Plus of min de oppervlakte van de ruit opgespannen door de twee kolomvectoren.

tussen $R \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$ en $A \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$ is wat we willen een uitspraak die de integraal

$$\iint_A g(u,v)\,dudv$$

relateert aan een integraal met $g(u(x,y),v(x,y))$ en $dxdy$ over R, liefst meteen al met de conventie dat $dudv = -dvdu$ en $dxdy = -dydx$.

Als de bijectie niet-lineair is dan zijn R en A zeker niet allebei een rechthoek, laat staan van de vorm zoals in Sectie 8.9, dus neem in eerste instantie alleen R van die vorm. We nemen R gesloten, dus met de rand erbij, en Φ gedefinieerd[55] op heel $\mathbb{R}^2$, met continue partiële afgeleiden. Voor het gemak nemen we $R = [0,1] \times [0,1]$.

Zie nu Opgave 7.25 en lees i.p.v

$$F(x,y) = g(y) - x \quad \text{nu} \quad F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x,y) - u \\ \Phi_2(x,y) - v \end{pmatrix}.$$

De uitgepakte versie van de stelling die je daar bewezen hebt is de inverse functiestelling die we nu nodig hebben. Die stelling zegt dat als in (x_0,y_0) de Jacobimatrix

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

inverteerbaar is, in een omgeving van $(u_0,v_0) = (\Phi_1(x_0,y_0), \Phi_2(x_0,y_0))$ de inverse functie

$$(u,v) \xrightarrow{\Phi^{(-1)}} (x,y)$$

bestaat en continu differentieerbaar is. De Jacobimatrix van de inverse afbeelding is de inverse van de Jacobimatrix van Φ.

Voor de te formuleren transformatiestelling nemen we nu aan dat de Jacobimatrix $J(x,y)$ in elk punt van R inverteerbaar is. Daarmee is A een gebied in $\mathbb{R}^2_{u,v}$ met vier randen geparametriseerd[56] door

$$x \to \Phi(x,0), \quad y \to \Phi(1,y), \quad x \to \Phi(x,1), \quad y \to \Phi(0,y).$$

Bij partities

$$(P) \quad 0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{\mathrm{N}} = 1 \quad \text{met} \quad \mathrm{N} \in \mathbb{N},$$

[55] Zonder beperking der algemeenheid, maar dat moet nog blijken.
[56] Het alternatief dat later nog komt wellicht is:

$$t \to \Phi(t,0), \quad t \to \Phi(1,t), \quad t \to \Phi(1-t,1), \quad t \to \Phi(1-t,0),$$

$$(Q) \quad 0 = y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_{\mathrm{M}} = 1 \quad \text{met} \quad \mathrm{M} \in \mathbb{N},$$

horen $(\mathrm{M}+1)(\mathrm{N}+1)$ parametrisaties

$$x \to \Phi(x, y_j) \quad \text{en} \quad y \to \Phi(x_i, y) \quad (i = 0, \ldots, \mathrm{M},\ j = 0 \ldots, \mathrm{N}),$$

die een rooster van vervormde rechthoekjes S_{ij} maken in A.

De goede definitie van Riemann integreerbaarheid van $g : A \to \mathbb{R}$ moet[57] nu geven dat met

$$M_{ij} = \sup_{S_{ij}} g \quad \text{en} \quad m_{ij} = \inf_{S_{ij}} g$$

geldt dat

$$\sum_{ij} m_{ij}|S_{ij}| \leq \iint_A g \leq \sum_{ij} M_{ij}|S_{ij}|,$$

waarin S_{ij} de oppervlakte is van S_{ij}, hetgeen we herschrijven als

$$\sum_{ij} m_{ij}\frac{|S_{ij}|}{|R_{ij}|}|R_{ij}| \leq \iint_A g \leq \sum_{ij} M_{ij}\frac{|S_{ij}|}{|R_{ij}|}|R_{ij}|,$$

en opmerken dat ook geldt dat

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f \quad \text{en} \quad m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f$$

met $f = g \circ \Phi$.

Het is niet zo moeilijk[58] om precies te maken dat

$$\frac{|S_{ij}|}{|R_{ij}|} \sim |\det J(x_i, y_i)| \tag{8.55}$$

als $\mathrm{M}, \mathrm{N} \to \infty$ om op de Riemann integreerbaarheid van

$$(x, y) \to f(x, y)|J(x, y)|$$

over R uit te komen MET gelijkheid van de integralen:

$$\iint_R f|\det J| = \iint_A g.$$

[57] Moet nog blijken!

[58] Zie e.g. Sectie 5 van Hoofdstuk III in het Advanced Calculus boek van Edwards.

9 Standing at the crossroads of PDE and FA

This chapter relates to the courses in Functional Analysis and Partial Differential Eqations as given in the bachelor pogrammes in Amsterdam, as well as courses run under the same name in the national mastermath programme. Have a look at Section 7.10, in particular at the solution method for (7.48), which clearly does not generalise to the problem of solving

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega \quad \text{with} \quad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{9.1}$$

for given $f : \Omega \to \mathrm{I\!R}$ and $\Omega \subset \mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}$ on a bounded open set with boundary $\partial\Omega$.

Moreover, even is $\partial\Omega$ is smooth, it does not in general hold that (9.1) has a twice differentiable solution which solves the partial differential equation $-\Delta u = f$ for the given $f \in C(\bar{\Omega})$. Below we show another way of solving (7.48) which does generalise to a large class of problems including (9.1). This technique is based on integration by parts[1] and the theory of Hilbert spaces, mainly the unique and obvious generalisation[2] of the inner product space $\mathrm{I\!R}^2$ with the dimension 2 replaced by the first infinite cardinal.

Als we de vergelijking in (7.48) vermenigvuldigen met een functie $v \in C^1[0,1]$ dan bestaan onder de aanname dat $u \in C^2[0,1]$ en $f \in C^0[0,1]$ beide integralen

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$$

en kan de linkerkant partieel geintegreerd worden. Het resultaat is

$$-[u'(x)v(x)]_0^1 + \underbrace{\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx}_{\text{symmetrisch in } u,v} = \underbrace{\int_0^1 f(x)v(x)\,dx}_{\text{symmetrisch in } f,v}, \tag{9.2}$$

waarbij de lelijke eerste term verdwijnt als we de extra aanname maken dat $v(0) = v(1) = 0$.

De oplossing $u \in C^2[0,1]$ van (7.48) heeft dus de eigenschap dat $u(0) = u(1) = 0$ en

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in C_0^1[0,1], \tag{9.3}$$

waarin

$$C_0^1[0,1] = \{v \in C^1[0,1] : v(0) = v(1) = 0\},$$

[1] Now have a look at (10.11).

[2] In different guises.

en de gelijkheid in (9.3) kan voor elke $u \in C_0^1[0,1]$ geverifieerd worden. Kortom, we zouden dus kunnen afspreken om $u \in C_0^1[0,1]$ een oplossing van (7.48) te noemen als aan (9.3) voldaan is.

Rechts in (9.3) zien we een integraal die te zien is als een inwendig product van f en v, dat we kunnen noteren als

$$f \cdot v = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx, \tag{9.4}$$

waarmee (7.48) zich uiteindelijk herschrijft als

$$u \in C_0^1[0,1], \quad \underbrace{u' \cdot v'}_{((u,v))} = \underbrace{f \cdot v}_{(f,v)} \quad \forall v \in C_0^1[0,1], \tag{9.5}$$

een uitdrukking waarin twee inwendige producten voorkomen en $u \in C_0^1[0,1]$ en $f \in C^0[0,1]$ vast zijn, en $v \in C_0^1[0,1]$ willekeurig.

Opgave 9.1. Waarom is $(u,v) \to u' \cdot v'$ wel een inprodukt op $C_0^1[0,1]$ en niet op $C^1[0,1]$?

Opgave 9.2. Laat $L > 0$, bijvoorbeeld $L = 2\pi$ of $L = 1$. De vectorruimte van continue L-periodieke functies noemen we $C(\mathbb{R}_L) = C^0(\mathbb{R}_L)$, en de deelruimte van k keer ($k \in \mathbb{N}$) continu differentieerbare functies noemen we $C^k(\mathbb{R}_L)$. Voor welke $f \in C(\mathbb{R}_L)$ is de vergelijking $-u'' = f$ oplosbaar met u in $C^2(\mathbb{R}_L)$? Is de oplossing uniek? Hint: neem eerst $L = 1$ natuurlijk.

Opgave 9.3. Neem $L = 1$ en los de vergelijking $-u'' = f$ voor f continu, 1-periodiek met $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$: geef een uitdrukking van de vorm (7.51) voor de oplossing u die (ook) voldoet aan $\int_0^1 u(x)\,dx = 0$. Hint: zonder deze laatste conditie is de oplossing niet uniek bepaald en evenzo is de (wederom symmetrische!) kern $A(x,s)$ niet uniek bepaald. Maar wel onder de conditie dat $\int_0^1 A(x,s)\,dx = \int_0^1 A(x,s)\,ds = 0$.

Opgave 9.4. Laat

$$\bar{C}^k(\mathbb{R}_L) = \{u \in C^k(\mathbb{R}_L) : \int_0^L u(x)dx = 0\}$$

en geef een herformulering van $-u'' = f$ voor $f \in \bar{C}^0(\mathbb{R}_L)$ en $u \in \bar{C}^1(\mathbb{R}_L)$ zoals in (9.5).

Hopelijk is duidelijk dat de twee laatste opgaven kwa bewerkelijkheid nogal uiteenliepen. Formuleringen als in (9.5) gebaseerd op *integration by parts*, zonder dat het doel daarvan het uitrekenen van getallen is, bieden een ander en vaak algemener perspectief om eigenschappen van oplossingsoperatoren te begrijpen dan expliciete oplossingsmethoden gebaseerd op primitiveren. In wat volgt zullen we daartoe v als een variabele zien en

$$v \to ((u,v)) \quad \text{en} \quad f \to (f,v)$$

als dezelfde lineaire functie, maar anders gepresenteerd.

Lineaire functies en inprodukten, hoe zit dat? Hoe weet je dat er bij f via dezelfde lineaire functie van v een u hoort? En kan dat algemener? Voor later. Dit hoofdstuk besluiten we met een paar opgaven die laten zien hoe intrinsiek de herformulering als (9.5) verbonden is met de eigenschappen van de oplossingsoperator

$$A : f \xrightarrow{\forall\, v((u,v))=(f,v)} u, \tag{9.6}$$

waarbij het van het specifieke probleem afhangt welke inproducten en welke functieruimten gedefinieerd moeten worden om een A te maken die in simpele gevallen samenvalt met expliciet uitgerekende integraaloperatoren als in (7.51).

Opgave 9.5. Laat zien dat een solver als A in (9.6) de eigenschap heeft dat $((Au,v)) = ((u,Av))$ en $(Af,g) = (f,Ag)$ voor alle u,v en f,g in de nog te kiezen ruimten $V \subset H$ en H waarop de inproducten zijn gedefinieerd met de eigenschappen die we nodig hebben om alles precies te maken.

De operator A is dus symmetrisch[3] met betrekking tot twee inproducten, waaronder het 'gewone' inproduct (9.4) dat in eerste instantie was opgeschreven onder verschillende aannames voor f en v.

Opgave 9.6. Gebruik de symmetrie van A om te laten zien dat eigenvectoren[4] van A bij verschillende eigenwaarden van A loodrecht op elkaar staan.

Opgave 9.7. Gebruik de vorige opgave en Opgave 9.4 om zonder rekenwerk te laten zien dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx \quad (m,n \in \mathbb{N},\ m \neq 0)$$

[3] We praten nog niet over complexwaardige functies hier.

[4] $A\phi = \lambda\phi$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ϕ een (eigen)functie.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

Natuurlijk wist je dit al, waarschijnlijk via $\exp(inx) = \cos nx + i \sin nx$ en de gebruikelijke rekenregeltjes gebaseerd op de somformules[5] voor $\cos(a+b)$ en $\sin(a+b)$ die niet meer tot de tegenwoordig zelden precies gerechtvaardigde basiskennis van de gemiddelde β-student horen. De functie sin kan gedefinieerd worden als de unieke oplossing van het beginwaardeprobleem

$$u'' + u = 0; \quad u(0) = 0; \quad u'(0) = 1, \tag{9.7}$$

en cos als de afgeleide van sin. Alle eigenschappen van cos en sin, i.h.b. de somformules volgen uit deze definities en kunnen gebruikt worden voor de volgende opgave.

Opgave 9.8. Bepaal alle $\lambda > 0$ waarvoor $u'' + \lambda u = 0$ oplossingen van periode 2π heeft en bepaal alle even en oneven oplossingen voor die waarden λ.

De even oplossingen die je zo vindt zijn veelvouden van $c_1 : x \to \cos x$, $c_2 : x \to \cos 2x$, $c_3 : x \to \cos 3x$, $\ldots$, en de oneven oplossingen zijn veelvouden van $s_1 : x \to \sin x$, $s_2 : x \to \sin 2x$, $s_3 : x \to \sin 3x$, $\ldots$, en ieder tweetal van deze functies staat loodrecht op elkaar, zoals we in Opgave 9.7 gezien hebben. En ze zijn gemiddeld allemaal nul, hetgeen betekent dat ze loodrecht staan op de functie $\mathbf{1} : x \to 1$, bijvoorbeeld

$$(\mathbf{1}, s_1) = \mathbf{1} \cdot s_1 = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0.$$

Wat we in vervolg gaan doen is $1, c_1, c_2, c_3, \ldots, s_1, s_2, s_3, \ldots$ zien als vectoren die lijnen door de oorsprong[6] definiëren. En die lijnen zien we als een assenkruis waarmee we een oneindig-dimensionale ruimte opspannen, een ruimte waarin we willen werken zoveel mogelijk als we dat in het platte vlak doen.

[5] Zie Wiskunde in je Vingers, sectie 10.4.

[6] Die oorsprong is de nulfunctie $\mathbf{0} : x \to 0$.

10 Multilinear algebra and integration

This chapter is at the crossroads of analysis and algebra[1]. Let us first state the main analytical result, which concerns a bounded open set $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ with $\partial\Omega \in C^1$ and $v \in C^1(\bar{\Omega})$. We will establish that

$$\int_{\Omega} v_{x_i} = \int_{\partial\Omega} \nu_i \, v. \tag{10.1}$$

The integral on the left in (10.1) is a Riemann integral of the continuous partial derivative

$$v_{x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} = D_i v = \partial_i v$$

of v with respect to the i^{th} variable. It is defined if $\partial\Omega$ is a set with zero N-dimensional measure. This is the case if the bounded closed set $\partial\Omega$ is the zero level set of a function $F \in C^1(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ with $\nabla F(x) \neq 0$ for every[2]

$$x \in \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} : F(x) = 0\} = \partial\Omega.$$

If the bounded open set Ω is given by

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} : F(x) < 0\}, \tag{10.2}$$

the vector

$$\nu = \frac{\nabla F}{|\nabla F|_2}$$

is defined in every point of $\partial\Omega$, and thereby we have a unit vector field on $\partial\Omega$ normal[3] to $\partial\Omega$, which is then a compact C^1-hypersurface[4] in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, and the integral on the right in (10.1) is the integral of the continuous function

$$x \to \nu_j(x) \, v(x)$$

over $\partial\Omega$, as defined for continuous functions on compact n-dimensional manifolds $M \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ such as $M = \partial\Omega$ in Section 10.9 below.

This analytical result is later restated for continuously differentiable vector valued functions

$$\Omega \ni x \xrightarrow{V} \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

at the beginning of Section 11.2 as the Gauss Divergence Theorem in (11.25), while it is first proved in Section 10.1 for functions v that vanish outside an

[1] Written while teaching from Edwards' book Advanced Calculus of Several Variables.
[2] Zero is then called a regular value of F, google Sard's Theorem.
[3] To the local tangent space in every point of.
[4] See Opgave 8.14.

N-dimensional block $[a,b]$ in which $\partial\Omega \cap [a,b]$ is the graph of a C^1-function as explained at the beginning of that section, with $\Omega \cap [a,b]$ on one[5] side of the graph. In the 2-dimensional case $\mathrm{N} = 2$ this formulation avoids the Jordan Curve Theorem[6].

The local statement under (10.42) becomes a global statement dropping the tildes and skipping the intermediate term. It then reads

$$\int_{\partial\Omega} \nu \cdot v \, dS_1 = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) dx_1 \, dx_2, \tag{10.3}$$

which putting $v_2 = -p$ and $v_1 = q$ rewrites as (10.43), the 2-dimensional of the Stokes Curl Theorem, in which the line integral is the integral over $\partial\Omega$ of the inner product of the vectorfield with components p and q and the tangent[7] vectorfield τ with components $-\nu_2$ and ν_1. Renaming p and q as v_1 and v_2 the result

$$\int_{\partial\Omega} \tau \cdot v \, dS_1 = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \, dx_2 \tag{10.4}$$

$$= \int_{\partial\Omega} v_1(x_1, x_2) dx_1 + v_2(x_1, x_2) dx_2,$$

is known as Green's Theorem, the second formulation being valid if $\partial\Omega$ is parameterised by continuously differentiable parameterisations

$$t \to x(t) = (x_1(t), x_2(t))$$

defining normalised tangent and normal vectors

$$\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \nu(t) = \frac{1}{\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}} \begin{pmatrix} x_2'(t) \\ -x_1'(t) \end{pmatrix}$$

with ∇F in $x(t)$ being a positive multiple of $\nu(t)$ if Ω is defined by (10.2).

The local statement in Section 10.1 does indeed lead to the global statement via arguments which involve cut-off functions[8] and partitions of unity, which are discussed as an independent topic in Section 12. These are also needed for a proper definition of integrals over manifolds in Section 10.9, the other analytical tool being the transformation theorem discussed in Section 8.9.4 applied in Section 12.2 to the transformations in Section 12.4.

[5] Which easily leads to mistakes in the direction of ν so be careful.

[6] Which I should discuss in the context of Section 13.6 and polygons, to do.

[7] Edwards writes $\nu = \mathbf{N}$ and $\tau = \mathbf{T}$.

[8] A misnomer, I would call them fading functions.

So far for analysis. In Section 10.10 we rewrite (10.1) as stated in (10.10) in the language of the differential forms introduced in Section 8.9.2 and below formula (10.4) just above. This language is re-presented in the language also used by Edwards in Section 11.1. In Section 11.2 we spell out the algebra to explain how the general Stokes Theorem for integrals of differential forms then follows[9]. This general theorem then has the Stokes Curl Theorem in (11.31) for certain[10] closed closed curves in $\mathbb{R}^3$ as a reformulation without differential forms as a second most commonly occuring example.

10.1 Local integrals with the normal at the boundary

This section is influenced by all the local boundary flattening arguments in Chapter 5 on Sobolev spaces (see Chapter **??** below) in Evans' PDE book, which involve applications of the Gauss Divergence Theorem (in essence integration by parts) stated in an appendix, without proof. The flattening argument introduced here effectively puts that horse in front of the wagon again.

Let Ω be a bounded open set in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} = \mathbb{R}^{n+1}$ and $M = \partial\Omega$ the union of finitely many patches $P = M \cap (a, b)$, each of which, after renumbering, comes with a description of $[a, b] \cap \Omega$ as given by

$$a_{n+1} \leq x_{n+1} < f(x_1, \ldots, x_n) < b_{n+1} \tag{10.5}$$

or

$$a_{n+1} < f(x_1, \ldots, x_n) \leq x_{n+1} < b_{n+1}. \tag{10.6}$$

Then there exist finitely many patches as above such that

$$M \subset P_1 \cup \cdots \cup P_I$$

If $P_i \cap P_j \neq \emptyset$, the transformations used in Section 12.4 respect the local descriptions of Ω, which we can use to compute a unique normal ν which points out of Ω in every patch on $M = \partial\Omega$. Overlapping patches then have the same outward normal vector ν.

In the simplest[11] relevant case with $n < \mathrm{N}$ and $\mathrm{N} > 1$, which is $n = 1$ and $\mathrm{N} = 2$, and $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bounded and open, $M = \partial\Omega$ is a 1-dimensional compact manifold covered by finitely many graphs

$$\{(x, f_i(x)) : a_i < x < b_i\} \quad \text{and} \quad \{(g_j(y), y) : c_j < y < d_j\},$$

[9] Still to be done: integrals over manifolds with boundaries.

[10] The ones obtained as the image of $\partial\Omega$ under injective C^1 maps $\Phi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3$.

[11] What follows will generalise to $\mathrm{N} = n + 1 > 1$.

with $f_i \in C^1([a_i,b_i])$, $g_j \in C^1([c_j,d_j])$. The question we ask is how the integrals

$$\int_\Omega v_x(x,y)\,dxdy \quad \text{and} \quad \iint_\Omega w_y(x,y)\,dxdy \tag{10.7}$$

evaluate in terms of the values of v and w on the boundary $M = \partial\Omega$ for v and w in $C^1(\bar{\Omega})$. Here I use the common notation $dxdy = dydx$. With x_1 and x_2 replacing x and y the notation

$$\int_\Omega v_{x_1} = \int_\Omega v_{x_1}(x)\,dx = \iint_\Omega v_{x_1}(x_1,x_2)\,d(x_1,x_2)$$

(and likewise for the other integral) is more to my liking, but everybody writes $dx_1\,dx_2$ and $dx], dy$, rather than $d(x,y)$.

To answer the question we first consider a piece of the boundary described by $y = f(x)$, with $f \in C^1([a,b])$ and $c < f(x) < d$ for all $x \in [a,b]$, such that

$$\tilde{\Omega} = \Omega \cap ([a,b]\times[c,d]) = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ f(x) < y \le d\}, \tag{10.8}$$

and multiply w by a function $\zeta \in C^1(\mathrm{I\!R}^2)$ as in Section 10.9 which is zero outside a subset $[\tilde{a},\tilde{b}]\times[\tilde{c},\tilde{d}]$ of $(a,b)\times(c,d)$. Denoting the resulting product by $\tilde{w} = \zeta w$ we now evaluate

$$\begin{aligned}\int_\Omega \tilde{w}_y = \iint_{\tilde{\Omega}} \tilde{w}_y(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \left(\int_{f(x)}^d \tilde{w}_y(x,y)dy\right)\,dx \\ &= -\int_a^b \tilde{w}(x,f(x))\,dx \\ &= \int_a^b \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}}_{\nu_y}\,\tilde{w}(x,f(x))\,\underbrace{\sqrt{1+f'(x)^2}dx}_{ds=dS_1} \\ &= \int_\Phi \nu_y \tilde{w}\,ds,\end{aligned}$$

in which we recognised the y-component of the normal vector

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1+f'(u)^2}}\begin{pmatrix}-f'(u)\\ 1\end{pmatrix}$$

and

$$dS_1 = ds = |\Phi'(u)|^2\,du = \sqrt{1+f'(u)^2}\,du$$

evaluated via the parameterisation $\Phi(u) = (u, f(u))$.

For the integral of $\tilde{v} = \zeta v$ we use the new coordinates

$$\xi = x,\ \eta = y - f(x) \quad \text{whence} \quad x = \xi,\ y = \eta - f(\xi) \quad \text{and} \quad dx\,dy = d\xi\,d\eta$$

when transforming the integral over $(x, y) \in \tilde{\Omega}$ to an integral over

$$(\xi, \eta) \in D = \{(x, y - f(x)) :\ a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq d\}.$$

Defining $\phi(\xi, \eta)$ by

$$\phi(\xi, \eta) = \tilde{v}(x, y) \quad \text{we have} \quad v_x(x, y) = \phi_\xi(\xi, \eta) - f'(\xi)\phi_\eta(\xi, \eta)$$

via the chainrule, whence[12]

$$\int_\Omega \tilde{v}_x = \iint_{\tilde{\Omega}} \tilde{v}_x(x, y)\,dx\,dy = \iint_D \left(\phi_\xi(\xi, \eta) - f'(\xi)\phi_\eta(\xi, \eta)\right)\,d\xi\,d\eta$$

$$= \int_0 \left(\int_a^b \phi_\xi(\xi, \eta)\,d\xi\right)\,d\eta - \int_a^b \left(\int_0 f'(\xi)\phi_\eta(\xi, \eta)\,d\eta\right)\,d\xi$$

$$= \int_0 (\phi(b, \eta) - \phi(a, \eta))\,d\eta - \int_a^b f'(\xi) \int_0 \phi_\eta(\xi, \eta)\,d\eta\,d\xi$$

$$= \int_a^b f'(\xi)\phi(\xi, f(\xi))\,d\xi = \int_\Phi \nu_x \tilde{v}\,ds,$$

just as before, after inserting $\sqrt{1 + f'(\xi)^2}$ and recognising $ds = dS_1$ as well as the x-component of the normal vector ν. In conclusion we have

$$\int_\Omega \tilde{v}_x = \int_{\partial\Omega} \nu_x \tilde{v}\,dS_1 \quad \text{and} \quad \int_\Omega \tilde{w}_y = \int_{\partial\Omega} \nu_y \tilde{w}\,dS_1 \tag{10.9}$$

Now look at (10.33), and choose[13] functions $\zeta_0 \in C_c^1(\Omega)$ and $\zeta_1, \cdots, \zeta_I$, such that $0 \leq \zeta_i \leq 1$ for $i = 0, \ldots, I$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_I$ as ζ above, such that

$$\zeta_0 + \zeta_1 + \cdots + \zeta_I \equiv 1 \quad \text{on} \quad \bar{\Omega},$$

to conclude, via $v = \zeta_0 v + \zeta_1 v + \cdots + \zeta_I v$ that

$$\int_\Omega v_{x_i} = \int_{\partial\Omega} \nu_i v\,dS_n \tag{10.10}$$

for $v \in C^1(\bar{\Omega})$ with $M = \partial\Omega$ and ν a globally defined[14] normal vector field on M such that locally a description as above holds.

[12] We drop a conveniently chosen fixed upper bound in the η-integrals from the notation.
[13] This requires a technique we take for granted now.
[14] This is no additional assumption on Ω and its boundary.

In (10.10) we stated the formula for $\Omega \subset \mathrm{IR}^{\mathrm{N}}$ open and $M = \partial\Omega$ a compact $(N-1)$-dimensional manifold. The local proof involves

$$dS_{N-1} = dS_n = \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial u_1})^2 + \cdots + (\frac{\partial f}{\partial u_n})^2}\, du_1 \cdots du_n$$

and the normal vector ν with

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f(u)|^2}} \frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \nu_n = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f(u)|^2}} \frac{\partial f}{\partial u_n},$$

$$\nu_{\mathrm{N}} = \nu_{n+1} = \frac{-1}{\sqrt{1+|\nabla f(u)|^2}}.$$

Formula (10.10) is often called Green's Theorem. Applying it to the product of v and some other function $\zeta \in C^1(\bar{\Omega})$ we obtain the integration by parts formula

$$\int_\Omega v_{x_i}\zeta = \int_{\partial\Omega} \zeta v\, \nu_i dS_n - \int_\Omega \zeta_{x_i} v. \tag{10.11}$$

10.2 The length of curve

In the 1-dimensional case I now follow Edwards and write $x = \gamma(t)$ with $t \in [a,b]$ and $\gamma : [a,b] \to \mathrm{IR}^{\mathrm{N}}$. For any such γ the natural definition of the length would be the smallest upper bound on the set of numbers obtained via

$$\sum_{j=1}^{m} \left|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\right|_2$$

with

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b.$$

Clearly this definition of length is invariant under reparameterisation of γ via strictly monotone bijections $\phi : [a,b] \to [c,d]$ as in Section 7.3. It's not a very hard exercise to show that for continuously differentiable $\gamma : [a,b] \to \mathrm{IR}^{\mathrm{N}}$ the length is given by

$$s(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma'(t)\right|_2 dt,$$

and the change of variables formula applied to $u = \phi(t)$ with $\phi \in C^1([a,b])$ with $\phi'(t) \neq 0$ confirms that

$$\Phi :\, u \to \gamma(\phi^{-1}(u)) \tag{10.12}$$

is in $C^1([c,d])$ with $[c,d] = \phi([a,b])$, and has the same length[15]. Also, if $f = f(x)$ is continuous on $\gamma([a,b]) = \Phi([c,d])$, it follows that

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|_2 \, dt = \int_c^d f(\Phi(u))|\Phi'(u)|_2 \, du = \int_\Phi f ds. \tag{10.13}$$

As a special case we have that

$$s = \phi(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)|_2 \, d\tau$$

defines a reparameterisation for which $\hat{\gamma} = \Phi$ defined by $\gamma(t) = \hat{\gamma}(s) = \Phi(s)$ has

$$|\hat{\gamma}'(s)|_2 = |\Phi'(s)|_2 = 1.$$

Such a reparametrised $\tilde{\gamma}$ is called a unit speed path.

10.3 Line integrals of vector fields along curves

Besides (10.13) as a 1-dimensional example of what is to come in (10.31) we can also define an integral for $F = F(x) \in \mathrm{I\!R}^n$ continuous on $\gamma([a,b])$, namely

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \underbrace{\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|_2}}_{T(t)} |\gamma'(t)|_2 \, dt, \tag{10.14}$$

but Edwards avoids the commonly used notation in the left hand side of (10.14), and instead writes

$$\int_\gamma F \cdot T \, ds,$$

with T the unit tangent vector[16] defined by

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|_2}.$$

For reparametrisations $u = \phi(t)$ with $\phi \in C^1([a,b])$ and $\phi'(t) > 0$ and Φ defined as in (10.12) above you easily verify that the work

$$W = \int_\gamma F \cdot ds = \int_\gamma F \cdot T \, ds = \int_\Phi F \cdot T \, ds = \int_\Phi F \cdot ds.$$

[15] The condition that $\gamma'(t) \neq 0$ also carries over to $\Phi'(u) \neq 0$.
[16] I will use $\tau = T$.

done by the force field F does not change under reparametrisations $u = \phi(t)$ with $\phi'(t) > 0$. Of course

$$W = \int_\gamma F \cdot ds = \int_\gamma F \cdot T\, ds = \int_a^b (F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \cdots + F_n(\gamma(t))\gamma_n'(t))\, dt$$

$$= \int_a^b F_1(\gamma(t)) \underbrace{\gamma_1'(t)\, dt}_{dx_1} + \cdots + \int_a^b F_n(\gamma(t)) \underbrace{\gamma_n'(t)\, dt}_{dx_n}$$

leads to the notational convention

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_\gamma F_1 dx_1 + \cdots + \int_\gamma F_n dx_n = \int_\gamma F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n. \quad (10.15)$$

If $F = \nabla f$ it is then common to write

$$\int_\gamma df = \int_\gamma \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n}_{df} = \int_\gamma \nabla f \cdot ds =$$

$$\int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = f(\gamma(t))\Big|_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

a notation which generalises (7.8), after which d was seen[17] as acting on f to produce $df = f'(x)dx$. Here we have d acting on f as

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n, \quad (10.16)$$

producing what is called a 1-form in Section 1 of Chapter V in Edwards.

These 1-forms act on vectors. Whereas the x-dependent vector

$$F(x) = F_1(x)e_1 + \cdots + F_n(x)e_n \quad (10.17)$$

and the vector

$$v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n$$

have and x-dependent inner product

$$F(x) \cdot v = F_1(x)v_1 + \cdots + F_n(x)v_n,$$

the 1-form

$$\omega = F_1(x)dx_1 + \cdots + F_n(x)dx_n \quad (10.18)$$

[17] Writing f instead of F again.

assigns to the same vector v the same x-dependent scalar

$$F_1(x)v_1 + \cdots + F_n(x)v_n,$$

in which we can insert $x = \gamma(t)$ and $v_i = \gamma_i'(t)$ to get a t-dependent quantity that we can integrate from $t = a$ to $t = b$ to define

$$\int_a^b (F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \cdots + F_n(\gamma(t))\gamma_n'(t))\, dt = \int_\gamma \omega.$$

Thus, ω evaluated in $x = \gamma(t)$ acts on $\gamma'(t)$ and is integrated from $t = a$ to $t = b$ to define $\int_\gamma \omega$. Note a reparameterisation of γ with $u = \phi(t)$ and $\phi'(t) < 0$ changes the sign of the integral.

The notation for ω hides the x-dependence and may look like the abuse of notation in $f = f(x)$, but (13) and (14) in Section 1 of Chapter V in Edwards are mathematically precise[18]. In conclusion we have $\int_\gamma f = \int_\gamma f\, ds$ defined for continuous scalar functions $f = f(x)$ and $\int_\gamma \omega$ for 1-forms $\omega = F_1(x)dx_1 + \cdots + F(x)dx_n$.

10.4 Surface area

We need some linear algebra for integrals over more general surface patches then the ones encountered in Section 10.1 , a surface patch being a set in IR^3 parameterised by a continuously differentiable injective map

$$\Phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathrm{IR}^3, \tag{10.19}$$

with

$$\nabla\Phi = (\nabla\Phi_1\ \nabla\Phi_2\ \nabla\Phi_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

denoting the matrix of which the columns are the gradients of the $\mathrm{N} = 3$ components Φ_1, Φ_2, Φ_3 of Φ with respect to the $n = 2$ variables[19] u_1, u_2 in $\Phi = \Phi(u) = \Phi(u_1, u_2)$, consistent with the notation in Section (8.3).

Momentarily switching to a notation with Φ_1, Φ_2, Φ_3 as functions of u, v, $\nabla\Phi$ is the transpose of the Jacobian matrix

$$(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,\frac{\partial\Phi}{\partial v}),$$

which has column vectors $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$.

[18] We also write $\int_a^b f$ for the integral of a function.

[19] Everything that follows should generalise or trivialise to $1 \le n \le \mathrm{N}$.

In the special linear case with

$$\Phi_i(u,v) = a_i u + b_i v \tag{10.20}$$

the Jacobian matrix is the transpose of

$$\nabla\Phi = A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

the matrix example in (10.28) starting the discussion in Section 10.7 below on

the area $\mathcal{M}_2(a,b)$ of a parallelogram spanned by two vectors a and b

with entries a_1, a_2, a_3 and b_1, b_2, b_3 respectively. This parallelogram is then the image of $[0,1] \times [0,1]$ under Φ defined by (10.20), and its area is then equal to

$$\int_0^1 \int_0^1 \mathcal{M}_2(\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \frac{\partial\Phi}{\partial v})\, dudv, \tag{10.21}$$

the integrand being independent of u, v, as $a = \frac{\partial\Phi}{\partial u}$ and $b = \frac{\partial\Phi}{\partial v}$ are constant vectors is the linear case (10.20).

It will be no surprise that (10.21) will also be used to define the area of the surface patch defined by Φ if Φ is not a linear map from $[0,1]^2$ to $\mathbb{R}^3$, and that everything generalises to $\Phi : [0,1]^n \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ with $1 \leq n < \mathrm{N}$. We expand on the linear case of this generalisation next.

10.5 The transpose, quadratic forms and operator norms

In (8.21) we can put $B = A^T$, the transpose of the matrix A with entries a_{ij} used in

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

which defined $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. This gives

$$S = AA^T \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \quad \text{with entries} \quad s_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj} = s_{ki}. \tag{10.22}$$

Since

$$|A|_{op} = \max_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{|Ax|_2}{|x|_2} = \max_{|x|_2 = 1} |Ax|_2,$$

and likewise for $|A^T|_{op}$, we have

$$|A^T|^2_{op} = \max_{|z|_2=1} \underbrace{|A^T z|^2_2}_{A^T z \cdot A^T z} = \max_{|z|_2=1} AA^T z \cdot z = \max_{|z|_2=1} Sz \cdot z = \max_{0 \neq z \in \mathbb{R}^m} \frac{Sz \cdot z}{z \cdot z}, \tag{10.23}$$

and we note that the bilinear mapping

$$(z, w) \to Sz \cdot w$$

from $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ to $\mathbb{R}$ then satisfies all the axioms of an inner product, except that $Sz \cdot z = 0$ does not imply that $z = 0$.

Opgave 10.1. Rederive the Cauchy-Schwarz inequality for $z, w \in \mathbb{R}^m$ by inspection of the minimum of the nonnegative function

$$\lambda \to |\lambda w - z|^2_2 = (\lambda w - z) \cdot (\lambda w - z),$$

and show that the same reasoning leads to

$$|Sz \cdot w| \leq \sqrt{Sz \cdot z}\,\sqrt{Sw \cdot w}.$$

Note the special case $m = n$ and $S = A = I$ and don't forget to discuss the possibility that the function you use is not a quadratic but a linear function.

For $S = AA^T$ as above we set

$$M = \max_{|z|_2=1} Sz \cdot z,$$

whereby we note that S is a symmetric matrix for which $Sz \cdot z \geq 0$ holds for all $z \in \mathbb{R}^m$. Just like it is easy to prove from the definition of the 2-norm via

$$|w|_2 = \sqrt{w \cdot w}$$

that

$$|z + w|^2_2 + |z - w|^2_2 = 2\,|z|^2_2 + 2\,|w|^2_2,$$

you easily verify that

$$S(z + w) \cdot (z + w) + S(z - w) \cdot (z - w) = 2\,Sz \cdot z + 2\,Sw \cdot w, \tag{10.24}$$

an identity to play with, with $S = AA^T$as above, but also with $S = I$ the identity:

Opgave 10.2. The Cauchy-Schwarz inequality and the definition of the operator norm in Section 8.5 immediately imply that $M \leq |S|_{op}$. Write

$$4\, Sz \cdot w = S(z+w) \cdot (z+w) - S(z-w) \cdot (z-w)$$

and estimate the right hand side in terms of M to obtain that in particular for all $z, w \in \mathbb{R}^m$ with $|z|_2 = |w|_2 = 1$ it holds that $|Sz \cdot w| \leq M$. Conclude that $|S|_p = M$.

The map

$$z \to Q(z) = Sz \cdot z$$

defined by the symmetric matrix S is called a quadratic form. You should never forget the remarkable fact that the maxima of $z \to |Q(z)|$ and $z \to |Sz|$ on the unit ball coincide.

10.6 Eigenvalues of compact symmetric operators

The above carries over to $S : H \to H$ when H is any inner product space and $S : H \to H$ is linear and symmetric with respect to that inner product, and has the property that $Sz \cdot z \geq 0$ for all $z \in H$, except that we no longer know that the maxima exist. Introducing

$$|S|_{op} = \sup_{0 \neq z \in H} \frac{|Sz|}{|z|} = \sup_{0 \neq z \in H} \sqrt{\frac{Sz \cdot Sz}{z \cdot z}} = \sup_{z \cdot z = 1} \sqrt{Sz \cdot Sz}, \tag{10.25}$$

and

$$M = \sup_{z \cdot z = 1} \sqrt{Sz \cdot z}, \tag{10.26}$$

it suffices to have that S is bounded on the unit ball in H to have $M = |S|_{op} < \infty$.

Ignoring the trivial case that $M = 0$ we now observe that the Cauchy-Schwarz inequality in Exercise 10.1 also holds with S replaced by $M - S = MI - S$, I being the identity map, and it thus holds that

$$|(M-S)z \cdot w| \leq \sqrt{(M-S)z \cdot z}\,\sqrt{(M-S)w \cdot w}, \tag{10.27}$$

whence (varying w over the unit ball)

$$|(M-S)z| \leq \sqrt{(M-S)z \cdot z}\,\sqrt{|M-S|_{op}} \leq \sqrt{(M-S)z \cdot z}\,\sqrt{M + |S|_{op}}$$

Taking a sequence $z_n \in H$ with $|z_n| = 1$ and $Sz_n \cdot z_n \to M$, it then follows that the right hand side goes to zero, and thus

$$Mz_n - Sz_n \to 0.$$

If the sequence z_n can be chosen to have Sz_n converging to a limit $y \in H$, it follows that also $Mz_n \to y$ and that $M = |y| > 0$. But then $w = \frac{y}{M}$ is a unit eigenvector of S with eigenvalue M. We have therefore proved the following Theorem.

Stelling 10.3. *If H is an inner product space and $S : H \to H$ is linear, symmetric with $Sz \cdot z \geq 0$ for all $z \in H$, and if for every bounded sequence z_n in H it holds that Sz_n has a convergent subsequence, then*

$$\lambda_1 = \max_{0 \neq z \in H} \frac{Sz \cdot z}{z \cdot z} > 0$$

exists, and λ_1 is an eigenvalue of S whose eigenvectors are the maximizers of the maximum.

Given an eigenvector w_1 with $|w_1| = 1$ it easily follows that S maps

$$H_1 = \{z \in H : z \cdot w_1 = 0\}$$

to itself. Unless $H_1 = \{0\}$ it then follows that

$$\lambda_2 = \max_{z \cdot w_1 = 0 \neq z \in H} \frac{Sz \cdot z}{z \cdot z} \geq 0$$

is also an eigenvalue of S with eigenvector w_2 with $|w_2| = 1$. Note that we cannot exclude that $\lambda_2 = 0$. If this happens than H_1 is the null space of S.

Repeating the argument with

$$H_2 = \{z \in H : z \cdot w_1 = z \cdot w_2 = 0\}$$

we obtain a sequence of eigenvalues

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$$

and a sequence of corresponding mutually perpendicular unit eigenvectors

$$w_1, w_2, \ldots,$$

which either terminate (if H is finite-dimensional) or have the property that $\lambda_n \to 0$ as $n \to \infty$. The latter statement is a consequence of the convergent subsequences assumption.

If we do *not* assume that $Sz \cdot z \geq 0$ for all $z \in H$ then the absolute value of the first eigenvalue is still obtained as

$$|\lambda_1| = \max_{0 \neq z \in H} \frac{|Sz \cdot z|}{z \cdot z} > 0,$$

because, changing from S to $-S$ if necessary, it is no restriction to assume that

$$M = \sup_{0 \neq z \in H} \frac{|Sz \cdot z|}{z \cdot z} = \sup_{0 \neq z \in H} \frac{Sz \cdot z}{z \cdot z},$$

and reason as above. With the Cauchy-Schwarz inequality in (10.27) still holding[20] while the version in Exercise 10.1 fails, the upshot is that we still obtain eigenvalues with

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq 0,$$

with eigenvectors as before. This is essentially the spectral theorem for compact symmetric linear operators S from an inner product space H to itself. It does not require any knowledge of the determinants which will become important next in the finite-dimensional case.

10.7 Singular values and measures of parallelotopes

In the case that $H = \mathbb{R}^m$ the subsequence argument is not needed as the maximizer w for the maximum in Theorem 10.3 exists in view of the compactness of the unit ball in $\mathbb{R}^m$. In particular, in relation to (10.22), we have achieved that $\mathbb{R}^m$ has an orthonormal basis basis of eigenvectors $w_1, \ldots, w_m$ corresponding to eigenvalues $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_m \geq 0$ of AA^T. If $n \geq m$ these eigenvalues are called the singular values of A.

As an example consider the case that

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \tag{10.28}$$

and

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a & a \cdot b \\ b \cdot a & b \cdot b \end{pmatrix} \tag{10.29}$$

The outer product $a \times b$ of these two 3-column vectors a and b with, respectively, entries a_1, a_2, a_3 and entries b_1, b_2, b_3, is defined as the 3-vector with entries

$$a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

and has squared length

$$|a \times b|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = \det(\mathrm{AA^T}),$$

[20] I first saw this Cauchy-Schwarz trick in the appendix of the PDE book of Craig Evans.

as you should verify. That is to say, $\det(\mathrm{AA^T})$ is the sum of all the squares of all the 2×2-determinants of 2×2 submatrices of A. Here we count these 2×2 submatrices modulo the column permutations in (10.28).

As you may know, the length of the outer product $a \times b$ of a and b equals the area of the parallellogram spanned by a and b. Thus this area is the square root of the sum of the squares of the three 2×2-determinants in (10.28). It is precisely this statement that generalises to the n-dimensional measure of a parallelotope spanned by n vectors $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}$.

Stelling 10.4. *Let $1 \leq n \leq \mathrm{N}$. Consider the parallelotope P spanned by the vectors $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}$. After putting these vectors in the columns*[21] *of a matrix A, the n-dimensional measure $\mathcal{M}_n(x_1, \ldots, x_n)$ of P is the square root of the determinant of A^TA, and this determinant in turn is the sum of all the squares of the determinants of all $n \times n$ submatrices, and also equals the product $\sigma_1 \cdots \sigma_n$ of the singular values of A.*

Let us sketch a proof of this statement, first for (10.28), without using the outer product, using the invariance of the area under shear transformations. That is to say, the area of the parallelogram spanned by the vectors a and b is the same as that of the parallelogram spanned by the vectors $a + tb$ and b with $t \in \mathrm{I\!R}$ arbitrary. The same statement holds for the determinant of $S = A^TA$ and the determinant of $S_t = A_t^TA_t$ where A_t is the matrix with column vectors $a + tb$ and b. Indeed, writing $A_t = A + tB$ we have

$$A_t^TA_t = (A + tB)^T(A + tB) = A^TA + tA^TB + tB^TA + t^2B^TB$$

$$= \underbrace{A^TA + tA^TB}_{C_t} + t(\underbrace{B^TA + tB^TB}_{D_t}) = S_t$$

The matrix C_t is the matrix obtained from $S = A^TA$ by adding t times the second (last) row of S to its first row. Therefore C_t and S have the same determinant. In turn, the matrix S_t is obtained from C_t by adding t times the second (last) column of C_t to its first column. Therefore S_t and C_t have the same determinant. It follows that S_t and S have the same determinant. So both the area and the determinant are invariant under this shear transformation, which allows us to restrict our proof to the case in which $a \cdot b = 0$. Then the square of the area is equal to the product of the squares of the lengths of a and b, which is also the determinant of the diagonal matrix with entries $a \cdot a$ and $b \cdot b$. To prove the general statement in the theorem we use repeated shear transformations which leave both the determinant and the measure invariant and reduce the statement to be proved

[21] NB! Compared to (10.28) we switch from A to A^T in the notation.

to the case that $x_i \cdot x_j = 0$ if $i \neq j$ and a corresponding diagonal matrix S with entries $x_1 \cdot x_1, \dots, x_n \cdot x_n$. But this should be obvious from any formal definition of the n-dimensional measure of parallelotopes spanned by n vectors, a definition we happily leave here to be for what it is.

It remains to show that the determinant of the matrix S defined in (10.22) is also equal to the sum of the squares of the determinants of all the maximal square submatrices of A. These are also invariant under the shear transformations used above. Rather than using these transformations to reduce the statement to be proved to the case that the column vectors satisfy $x_i \cdot x_j = 0$ for $i \neq j$ we now use them diagonalise a maximal square part of the matrix A. Note that if the matrix A has no $n \times n$ submatrix with nonzero determinant, then the sum of the squared $n \times n$ determinants is zero, while also it cannot be the case that the column vectors are independent. Then our reduction to the case that the column vectors satisfy $x_i \cdot x_j = 0$ leads to one of these vectors being zero making the n-dimensional measure of P, and thereby the determinant of $A^T A$ zero as well.

Thus we may as well assume that the upper $n \times n$ part of A has nonzero determinant. It is a straightforward linear algebra exercise to show that, most likely after relabeling the first n coordinates, shear transformations bring A in the form

$$A = \begin{pmatrix} \Lambda \\ B \end{pmatrix}$$

where Λ is an $n \times n$ diagonal matrix with nonzero entries $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Here we already assumed that $n < \mathrm{N}$ because otherwise there was nothing to prove[22] in the first place. It now follows that

$$A^T A = \Lambda^2 + B^T B = \Lambda^2 + S,$$

where B is an $m \times n$ matrix with entries b_{ik} and S has entries

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} b_{jk}.$$

We therefore have, writing $B = [B_1, \dots, B_n]$ with $B_1, \dots, B_n$ the column vectors of B and using product notation, that

$$\det(\mathrm{A^T A}) = \underbrace{\Pi_j \lambda_j^2}_{\mathrm{\lambda_j^1 \cdots \lambda_j^n}} + \mathrm{s_{11}} \underbrace{\Pi_{j\neq 1} \lambda_j^2}_{\mathrm{\lambda_j^2 \cdots \lambda_j^n}} + \cdots + \mathrm{s_{nn}} \Pi_{\mathrm{j}\neq \mathrm{n}} \lambda_{\mathrm{j}}^2$$

$$+ \det \begin{pmatrix} \mathrm{s_{11}} & \mathrm{s_{12}} \\ \mathrm{s_{12}} & \mathrm{s_{22}} \end{pmatrix} \Pi_{\mathrm{j}\neq 1,2} \lambda_{\mathrm{j}}^2 + \cdots + \det \mathrm{S} =$$

[22] If you know your determinants.

$$\Pi_j\lambda_j^2 + (B_1\cdot B_1)\Pi_{j\neq 1}\lambda_j^2 + \cdots + \det\begin{pmatrix} \mathrm{B_1\cdot B_1} & \mathrm{B_1\cdot B_2} \\ \mathrm{B_1\cdot B_2} & \mathrm{B_2\cdot B2}\end{pmatrix}\Pi_{\mathrm{j}\neq 1,2}\lambda_{\mathrm{j}}^2 + \cdots ,$$

in which we wrote the term of degree n and only the first terms of degree $2n-2$ and degree $2n-4$ in $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. It should be obvious what the remaining terms are.

On the other hand, the sum of the squared determinants of the $n\times n$ submatrices of A is

$$\Pi_j\lambda_j^2+(b_{11}^2+b_{21}^2+\cdots+b_{m1}^2)\Pi_{j\neq 1}\lambda_j^2+\cdots+\left(\det\begin{pmatrix} \mathrm{b_{11}} & \mathrm{b_{12}} \\ \mathrm{b_{12}} & \mathrm{b_{22}}\end{pmatrix}^2+\cdots\right)\Pi_{j\neq 1,2}\lambda_j^2+\cdots$$

It remains to show that

$$B_1\cdot B_1 = b_{11}^2+b_{21}^2+\cdots+b_{m1}^2,$$

which is clearly the case, and then that

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{B_1\cdot B_1} & \mathrm{B_1\cdot B_2} \\ \mathrm{B_1\cdot B_2} & \mathrm{B_2\cdot B2}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathrm{b_{11}} & \mathrm{b_{12}} \\ \mathrm{b_{12}} & \mathrm{b_{22}}\end{pmatrix}^2 + \cdots + \det\begin{pmatrix} \mathrm{b_{(m-1)1}} & \mathrm{b_{(m-1)2}} \\ \mathrm{b_{m2}} & \mathrm{b_{m2}}\end{pmatrix}^2,$$

etcetera. These are the statements we set out to prove for A, before applying shear transformations, but with shorter columnvectors, namely of length $\mathrm{N}-n$, respectively for two such vectors, up to m such vectors. We can thus systematically reduce the statement we want to proof to lower dimensions of the matrix under consideration, until we reach the easy case that $m=1$.

10.8 Surface integrals

The treatment of Theorem 10.4 above is somewhat different from Edwards' exposition. I now return to (10.21). Generalising to $1\leq n\leq \mathrm{N}$ we consider

$$\int_{[0,1]^n}\mathcal{M}_n(\frac{\partial\Phi}{\partial u})\,du = \int_0^1\cdots\int_0^1\mathcal{M}_n(\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial\Phi}{\partial u_n})\,du_1\cdots du_n \tag{10.30}$$

in which

$$\mathcal{M}_n(\frac{\partial\Phi}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial\Phi}{\partial u_n}) = \mathcal{M}_n(\Phi_{u_1},\ldots,\Phi_{u_n})$$

is given by Theorem 10.4. Here $du = du_1\cdots du_n$ and $\int_{[0,1]^n} = \int_0^1\cdots\int_0^1$ are just notational conventions.

In the special case that $n=1$ we have

$$\mathcal{M}_1(\Phi_u) = \sqrt{\Phi_1'(u)^2+\cdots+\Phi_n'(u)^2},$$

and

$$ds = \mathcal{M}_1(\Phi_u)\,du = \sqrt{\Phi_1'(u)^2 + \cdots + \Phi_n'(u)^2}\,du$$

is a common notation, introduced in Edwards[23] after a change of coordinates defined by

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{\Phi_1'(u)^2 + \cdots + \Phi_n'(u)^2}.$$

While not corresponding to a change of coordinates the notation

$$dS = \mathcal{M}_2(\Phi_u, \Phi_v)dudv,$$

with the S of surface, is also common. Here I will use dS_n for

$$dS_n = \mathcal{M}_n(\frac{\partial \Phi}{\partial u})\,du = \mathcal{M}_n(\Phi_{u_1}, \ldots, \Phi_{u_n})\,du_1 \cdots du_n$$

in (10.30), i.e.

$$\int_\Phi dS_n = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \mathcal{M}_n(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_n})\,du_1 \cdots du_n,$$

and, for a function $f = f(x) = f(x_1, \cdots, x_n)$ which is continuous on

$$\{x = \Phi(u) :\, u \in [0,1]^n\},$$

write

$$\int_\Phi f dS_n = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\Phi(u_1, \ldots, u_n))\mathcal{M}_n(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_n})\,du_1 \cdots du_n, \tag{10.31}$$

the subscript Φ on the integral being at least consistent with the case $n = 1$ and $ds = dS_1$, and in fact coinciding with the notation in the second part of (10.13). Personally I often drop the dS_n from the notation and just write $\int_\Phi f$ instead of $\int_\Phi f dS_n$, and $\int_\gamma f$ if $n = 1$ and $\gamma = \Phi$ is a path in $\mathrm{I\!R}^\mathrm{N}$. Below we will also allow general closed blocks

$$[a,b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

10.9 Integrals of functions over compact manifolds

Section 8.8.1 and Section 12.3 concern 3 descriptions of what it means for $M \subset \mathrm{I\!R}^\mathrm{N}$ to be an n-dimensional manifold in $\mathrm{I\!R}^\mathrm{N}$. We now use characterisation (C) just below Exercise 8.16, and assume in addition that there exist finitely many injective continuously differentiable

$$\Phi_i :\, [a_i, b_i] \to \mathrm{I\!R}^\mathrm{N}$$

[23] In Section V.1 his $\gamma(t)$ would correspond $\Phi(u)$.

defined on blocks $[a_i, b_i]$ as in the elaboration on (C) in Section 12.3 above[24], such that

$$M = \Phi_1((a_1, b_1)) \cup \cdots \cup \Phi_I((a_I, b_I)) = \Phi_1([a_1, b_1]) \cup \cdots \cup \Phi_I([a_I, b_I]), \quad (10.32)$$

and moreover that there exist corresponding smooth functions

$$\zeta_i : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \to [0, 1]$$

with

$$\zeta_1 + \cdots + \zeta_I \equiv 1 \text{ on } M \text{ and } \operatorname{supp} \zeta_i \circ \Phi_i \subset (a_i, b_i)$$

for every $i = 1, \ldots, I$. Here $\operatorname{supp} \zeta_i \circ \Phi_i$ is the support of the function $u \to \zeta_i(\Phi_i(u))$, defined as the closure of the set

$$\{u \in (a_i, b_i) : \zeta_i(\Phi_i(u)) \neq 0\}.$$

We say that $u \to \zeta_i(\Phi_i(u))$ belongs to $C^1_c((a_i, b_i))$, the class of C^1-functions with support contained in the open set (a_i, b_i).

You can think of each function ζ_i as fading the patch $\Phi_i((a_i, b_i))$, making it fade away completely near its boundary where $\zeta_i \equiv 0$, while together the ζ_i leave the whole of M as bright as it was before. Such *brightness* functions ζ_i can be chosen to vanish outside a neighbourhood in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ of the image $\Phi_i(K_i)$, and the collection $\zeta_1, \ldots, \zeta_I$ is called a finite partition of unity on M, which is then (turning[25] a theorem around which says that such partitions exist if M is compact) a closed and bounded subset of $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.

If $f : M \to \mathbb{R}$ is continuous we now wish to define

$$\int_M f dS_n = \int_{\Phi_1} f \zeta_1 dS_n + \cdots + \int_{\Phi_I} f \zeta_I dS_n, \quad (10.33)$$

which requires a theorem that says this is independent of the choice of patches and brightness functions. We leave this issue[26] for now.

Of course the exposition above involves the change of variables theorem and Section 8.8.3. At the end of the day every theorem that we may wish to prove involving integrals of functions over M may be proved by restating and proving a local form only.

Finally we note that if the blocks $[a_i, b_i]$ and the injective continuously differentiable functions $\Phi_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ with $\Phi'(u)$ of maximal rank can be chosen such that[27]

$$M = \Phi_1([a_1, b_1]) \cup \cdots \cup \Phi_I([a_I, b_I]) \quad \text{with} \quad \Phi_i((a_i, b_i)) \cap \Phi_j((a_j, b_j)) = \emptyset \quad (10.34)$$

[24] The index i numbering the blocks now.
[25] Following Steenbrink in his exposition of the Poincaré conjecture in Noordwijkerhout.
[26] But see later sections.
[27] Edwards: a hard theorem says this can be done.

for $i \neq j$, then

$$\int_M f dS_n = \int_{\Phi_1} f\, dS_n + \cdots + \int_{\Phi_I} f dS_n \tag{10.35}$$

is the obvious definition which Edwards uses, and which is what you do in examples.

10.10 More integration of differential forms

We look again at the right hand side of (10.10) with $\mathrm{N} = n+1$, evaluated for $\tilde{v}_i = \zeta v_i$ with ζ a cut-off function vanishing outside and near the boundary of some window

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{\mathrm{N}}, b_{\mathrm{N}}],$$

in which we now assume a local representation of $\Omega \cap [a, b]$ given by[28]

$$(x_1, \ldots, x_n) \in [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \quad \text{and} \quad a_{n+1} \leq x_{n+1} < f(x_1, \ldots, x_n),$$

with $f \in C^1([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n])$ taking values in (a_{n+1}, b_{n+1}), and

$$\Phi(u_1, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, u_n, f(u_1, \ldots, u_n)) \tag{10.36}$$

parameterising $M \cap [a, b] = \partial\Omega \cap [a, b]$. We denote the unit basis vectors by $e_1, \ldots, e_{n+1}$.

For $n = 2$ the vector obtained by the formal determinant manipulation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_2} \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} e_3 + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_2} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_2} \end{vmatrix} e_2 \tag{10.37}$$

is commonly called the cross product of the vectors Φ_{u_1} and Φ_{u_2}, and for $\Phi(u_1, u_2) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$ it evaluates as[29]

$$e_3 - \frac{\partial f}{\partial u_1} e_1 - \frac{\partial f}{\partial u_2} e_2 = -\frac{\partial f}{\partial u_1} e_1 - \frac{\partial f}{\partial u_2} e_2 + e_3, \tag{10.38}$$

which is a positive multiple of the unit vector ν characterised by having its last component positive and being perpendicular to the graph defined by $u_3 = f(u_1, u_2)$. For any continuously differentiable

$$\Phi : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$$

[28] Like (10.5), whereas I did most local arguments using (10.6).

[29] Denoting the partial with subscripts u_1 and u_2.

with Φ_{u_1} and Φ_{u_2} linearly independent, the vector defined by (10.37) is perpendicular to the plane spanned by Φ_{u_1} and Φ_{u_2}, and can be normalised by dividing it by its length, which we recognise as

$$\mathcal{M}_2(\Phi_{u_1}, \Phi_{u_2})$$

in view of Theorem 10.4. If we call this normalised vector ν, which in case of (10.38) is simply[30]

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + f_{u_1}^2 + f_{u_2}^2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial u_1} e_1 - \frac{\partial f}{\partial u_2} e_2 + e_3 \right), \tag{10.39}$$

and consider $\tilde{v}_i$ as the i^{th} component of a vector field $\tilde{v} = \zeta v$ defined on $M \cap [a, b]$, with v a vector field on M, then

$$\int_M \nu \cdot \tilde{v} \; dS_2 =$$

$$\iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left(\tilde{v}_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} + \tilde{v}_2 \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_2} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_2} \end{vmatrix} + \tilde{v}_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} \right) \underbrace{du_1 \, du_2}_{du},$$

which we may be inclined to write as

$$\int_\Phi \tilde{v}_1 \, dx_2 dx_3 + \tilde{v}_2 \, dx_3 dx_1 + \tilde{v}_3 \, dx_1 dx_2 = \int_\Phi \omega, \tag{10.40}$$

with

$$\omega = \tilde{v}_1 \, dx_2 dx_3 + \tilde{v}_2 \, dx_3 dx_1 + \tilde{v}_3 \, dx_1 dx_2,$$

using formal rules such as

$$dx_2 dx_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} \underbrace{du_1 \, du_2}_{du} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} \underbrace{du_1 \, du_2}_{du}.$$

We then have that (10.40) is equal to

$$\int_\Omega \nabla \cdot \tilde{v} = \int_\Omega \nabla \cdot \tilde{v}(x) \, dx = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_3} \right) \underbrace{dx_1 \, dx_2 \, dx_3}_{dx},$$

which we will wish to write as an integral of the differential form

$$d\omega = \left(\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial x_3} \right) \underbrace{dx_1 dx_2 dx_3}_{\neq dx},$$

[30] Please allow the simultaneous use of both expressions in $f_{u_i} = \frac{\partial f}{\partial u_i}$.

in which $dx_1dx_2dx_3$ is part of a 3-form and not be read as $dx = dx_1\,dx_2\,dx_3$.

All of the above generalises[31] to arbitrary $\mathrm{N} = n+1$, e.g. we also have

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial\tilde v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\tilde v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\tilde v_3}{\partial x_3}+\frac{\partial\tilde v_4}{\partial x_4}\right)dx \tag{10.41}$$

$$= \int_\Phi \tilde v_1\,dx_2dx_3dx_4 + \cdots \text{ (cyclicly permutated terms) } \cdots = \int_\Phi \omega,$$

using rules like

$$dx_2dx_3dx_4 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_4}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_4}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} & \frac{\partial x_4}{\partial u_3} \end{vmatrix} \underbrace{du_1\,du_2\,du_3}_{du},$$

and (10.41) should be the integral of the 4-form

$$d\omega = \left(\frac{\partial\tilde v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\tilde v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\tilde v_3}{\partial x_3}+\frac{\partial\tilde v_4}{\partial x_4}\right)dx_1dx_2dx_3dx_4.$$

Clearly such a d-calculus requires rules such as $dx_idx_j = -dx_jdx_i$. I played with the formal rules that one might like to have in Section 8.9, see also the discussion after Stelling 7.12. This notation, used in Edwards, is cumbersome as the difference between spaces or no spaces between dx_i and dx_j is hardly visible, which is a reason to write $dx_i \wedge dx_j$ instead of dx_idx_j.

We conclude with the simplest but slightly confusing case, $n = 1$ and $\mathrm{N} = 2$, when (10.37) should be replaced by

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial u} \\ e_1 & e_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial u}\,e_1 - \frac{\partial\Phi_1}{\partial u}\,e_2, \tag{10.42}$$

which for

$$\Phi(u) = (u, f(u))$$

$$e_2 - f'(u)e_1,$$

and leads to

$$\int_M \nu\cdot\tilde v\; dS_1 = \int_{[a,b]}\left(-\tilde v_1\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial u}+\tilde v_2\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial u}\right)du = \iint_\Omega \left(\frac{\partial\tilde v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\tilde v_2}{\partial x_2}\right)dx_1\,dx_2,$$

in which we dropped the subscripts in a_1, b_1, u_1. Here we have

$$\omega = -\tilde v_1\,dx_2 + \tilde v_2\,dx_1 \quad\text{with}\quad d\omega = \left(\frac{\partial\tilde v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\tilde v_2}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2,$$

[31] This is why we put the unit vectors in the last row of the determimant in (10.37).

and

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega.$$

In x, y notation for $\omega = p(x,y)dx + q(x,y)dy$ we have $d\omega = (q_x - p_y)dxdy$ and

$$\int_{\partial\Omega} p(x,y)dx + q(x,y)dy = \int_{\Omega} (q_x - p_y)dxdy, \tag{10.43}$$

which should make you wonder about

$$\int_{\gamma} p(x,y,z)dx + q(x,y,z)dy + r(x,y,z)dz,$$

for $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ as in Section 10.3. Section 11 below explores what's going on here.

Note that in all these examples the N-form $\omega = f(x)dx_1 \cdots dx_{\mathrm{N}}$ integrated over the domain Ω should sensibly be agreed to give[32]

$$\int_{\Omega} \omega = \int_{\Omega} f(x)dx_1 \cdots dx_{\mathrm{N}} = \int_{\Omega} f.$$

[32] Don't confuse this f with f in the local description above.

11 From Green's to Stokes' curl theorem

Now consider (10.36) as a local description of a manifold M and forget about Ω as being a domain with $M = \partial\Omega$. Instead let Ω be as in (10.1) with $\mathrm{N} = 2$ and let M be the graph of $f : \Omega \to \mathrm{I\!R}$. Assume for simplicity that $\partial\Omega$ is parameterised by a 1-periodic continuously differentiable function $t \to u(t) = (u_1(t), u_2(t))$. Then

$$t \xrightarrow{\gamma} (u_1(t), u_2(t), f(u_1(t), u_2(t))) \tag{11.1}$$

parameterises the "boundary"

$$\partial M = \{\underbrace{(u, f(u))}_{\Phi(u)} :\ u \in \partial\Omega\},$$

and

$$u \xrightarrow{\Phi} (u, f(u)) \tag{11.2}$$

parameterises M, with $u = (u_1, u_2) \in \Omega$.

For

$$F(x) = F_1(x)e_1 + F_2(x)e_2 + F_3(x)e_3$$

we introduce

$$\omega = F_1(x)dx_1 + F_2(x)dx_2 + F_3(x)dx_3$$

as in (10.17) and (10.18) and consider the integral

$$\int_{\partial M} \omega$$

as in (10.15). It evaluates as

$$\int_{\partial M} \omega = \int_0^1 (F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)) + F_3(\gamma(t))\gamma_3'(t)))\, dt$$

$$= \int_0^1 (F_1(u(t), f(u(t))u_1'(t) + F_3(u(t), f(u(t)))f_{u_1}(u(t)u_1'(t))\, dt$$

$$+ \int_0^1 (F_2(u(t), f(u(t))u_2'(t) + F_3(u(t), f(u(t)))f_{u_2}(u(t)u_2'(t))\, dt =$$

$$\int_{\partial\Omega} \zeta = \int_\Omega d\zeta, \tag{11.3}$$

in which

$$\zeta = \left(F_1 + F_3\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) du_1 + \left(F_2 + F_3\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) du_2$$

Next we compute

$$d\zeta = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial f}{\partial u_1} + F_3\frac{\partial^2 f}{\partial u_2 \partial u_1}\right) du_2 du_1$$

$$+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial f}{\partial u_2} + F_3\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}\right) du_1 du_2,$$

which in view of $du_2 du_1 = -du_1 du_2$ reduces to

$$d\zeta = \phi(u_1, u_2) du_1 du_2 \tag{11.4}$$

with $\phi(u_1, u_2)$ given by

$$\phi = -\underbrace{\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)}_{G_1}\frac{\partial f}{\partial u_1} - \underbrace{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)}_{G_2}\frac{\partial f}{\partial u_2} + \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)}_{G_3} \tag{11.5}$$

$$= -G_1\frac{\partial f}{\partial u_1} - G_2\frac{\partial f}{\partial u_2} + G_3.$$

You should note that the *second order derivatives* of (11.2) are dropouts in the calculations that lead to (11.5).

Now compare (11.5) to ν in (10.39) and recall that for Φ given by (11.2) we know that

$$\mathcal{M}_2(\Phi_{u_1}, \Phi_{u_2}) = \sqrt{1 + f_{u_1}^2 + f_{u_2}^2}.$$

Summing up we thus have

$$\int_{\partial M} (F \cdot \tau)\, dS_1 =$$

(hello forms)

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial\Omega} \zeta = \int_{\Omega} d\zeta = \int_{\Omega} \underbrace{\phi\, du_1 du_2}_{d\zeta} =$$

(goodbye forms)

$$\int_{\Omega} \phi = \int_{\Omega} (G \cdot \nu)\, \mathcal{M}_2(\Phi_{u_1}, \Phi_{u_2}) = \int_M (G \cdot \nu)\, dS_2,$$

with G derived from F as indicated in (11.5), and commonly denoted as $G = \nabla \times F$, i.e.

$$\int_{\partial M} (F \cdot \tau)\, dS_1 = \int_M (G \cdot \nu)\, dS_2 \quad \text{with} \quad G = \nabla \times F, \tag{11.6}$$

using the parameterisations as indicated[1]. But don't say goodbye:

11.1 Pullbacks and the action of d

We already saw in the reasoning from (10.15) to (10.16) that d acting on a C^1-function $f = f(x_1, \ldots, x_{\mathrm{N}})$ produces a 1-form

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_{\mathrm{N}}} dx_{\mathrm{N}} = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \tag{11.7}$$

using the convention that we sum over repeated indices. With $f(x_1, \ldots, x_{\mathrm{N}})$ replaced by $u(x, y)$ this is (8.48) in Section 8.9.2. There I played with the d-algebra that emerges whenever you do integration using formal notations such as (7.8), which is just (11.7) with $n = 1$ and $f(x_1, \cdots, x_{\mathrm{N}})$ replaced by $F(x)$.

Now consider a parameterisation $x = \Phi(u)$ as in (C) in Section 8.8.1. We use Φ to pull back expressions with x and $dx_1, \ldots, dx_{\mathrm{N}}$ back to expressions with u and $du_1, \ldots, du_n$, in a way that is consistent with the discussion leading to (10.40) and the formal rules that emerge in the calculations to do so. Thus we certainly want to deal with

$$f(x) = \phi(u) \quad \text{via} \quad x = \Phi(u). \tag{11.8}$$

A mathematician's way to do so is to introduce

$$\phi = \Phi^*(f) = f \circ \Phi, \tag{11.9}$$

the pullback of f via Φ, which then also provides us with

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial \phi}{\partial u_n} du_n. \tag{11.10}$$

If g is another function of x then clearly

$$\Phi^*(f + g) = \Phi^*(f) + \Phi^*(g), \quad \Phi^*(fg) = \Phi^*(f)\Phi^*(g),$$

which suggests as a definition of the pullback of a 1-form $\omega = f_i dx_i$ that

$$\Phi^*(f_i dx_i) = \underbrace{\Phi^*(f_i)}_{\phi_i} \Phi^*(dx_i), \tag{11.11}$$

[1] Figure out that annoying $\pm$ afterwards? We have, depending on the parameterisation:

$$\int_{\partial M} (F \cdot \tau)\, dS_1 = \pm \int_M (G \cdot \nu)\, dS_2.$$

in which $\phi_i(u) = f_i(\Phi(u))$ as before. This definition would imply that

$$\Phi^*(df) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}((\Phi(u))}_{\Phi^*(D_i f)(u)} \Phi^*(dx_i). \tag{11.12}$$

Note that $D_i f$ as notation for the i^{th} first order partial derivative of f has the advantage of not using the variable x in the notation.

On the other hand (11.10) implies via the chain rule that

$$d(\Phi^*(f)) = \frac{\partial}{\partial u_j}(f(\Phi(u))\, du_j = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\Phi(u))\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\, du_j, \tag{11.13}$$

and comparing to (11.12) we see that, if we define the pullback of dx_i under Φ to be

$$\Phi^*(dx_i) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\, du_j, \tag{11.14}$$

it follows that

$$\Phi^*(df) = \Phi^*(df). \tag{11.15}$$

The definition of $\Phi^*(dx_i)$ by (11.14) is just a formalisation of the familiar "rule"

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\, du_j$$

for expressing dx_i in $u, du_1, \ldots, du_n$, just like expressing $f(x)$ in u via (11.8) is formalised by (11.9). It implies that the pullback of the 1-form in (11.11) evaluates as

$$\underbrace{\Phi^*(f_i dx_i) = \phi_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\, du_j}_{with\ \phi_i(u)=f_i(\Phi(u))} = f_i(\Phi(u))\,\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\, du_j = f_i(\Phi(u))\, D_j\Phi_i(u)\, du_j. \tag{11.16}$$

Next we observe that d acting on the resulting 1-form in (11.16) may be evaluated, using the chain rule and $du_k du_j = -du_j du_k$, as

$$d(\Phi^*(f_i dx_i)) = d(f_i(\Phi(u))\,\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\, du_j) = \frac{\partial}{\partial u_k}(f_i(\Phi(u))\,\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j})\, du_k du_j$$

$$= (\frac{\partial}{\partial u_k}(f_i(\Phi(u)))\,\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\, du_k du_j + f_i(\Phi(u))\,\underbrace{\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial u_k \partial u_j}\, du_k du_j}_{zero\ the\ hero!} =$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\Phi(u))\,\frac{\partial \Phi_k}{\partial u_k}\,\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\, du_k\, du_j = \Phi^*(D_k f_i)\,\frac{\partial \Phi_k}{\partial u_k}\,\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\, du_k\, du_j, \tag{11.17}$$

in which we used

$$d(f_i dx_i) = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\, dx_k\, dx_i \tag{11.18}$$

in the u-variables. Recall that this was the definition[2] in Section 8.9.2 of the action of d on 1-forms. With

$$\Phi^*(f_{ij}dx_idx_j) = \underbrace{\Phi^*(f_{ij})}_{\phi_{ij}}\, \Phi^*(dx_idx_j) \tag{11.19}$$

as the obvious defining analog of (11.11), we have that

$$\Phi^*(d(f_idx_i)) = \Phi^*(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\, dx_kdx_i) = \Phi^*(D_kf_i)\, \Phi^*(dx_kdx_i). \tag{11.20}$$

Comparing to (11.20) to (11.17) it follows that

$$\Phi^*(d(f_idx_i)) = d(\Phi^*(f_idx_i)), \tag{11.21}$$

provided we define

$$\begin{aligned}\Phi^*(dx_kdx_i) &= \underbrace{\frac{\partial \Phi_k}{\partial u_k}\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j}\, du_k\, du_j}_{sum\ \ over\ \ 1\leq k,j\leq n} = \underbrace{(\frac{\partial \Phi_k}{\partial u_k}\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial u_k}\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_j})\,\underline{du_k\, du_j}}_{sum\ \ over\ \ 1\leq k<j\leq n} \\ &= \frac{\partial(\Phi_k,\Phi_i)}{\partial u_k \partial u_j}\,\underline{du_k\, du_j},\end{aligned} \tag{11.22}$$

in which the underline indicates that we sum over all k, j with $1 \leq k < j \leq n$. Just as in (11.15) we see that the actions of d and Φ^* commute.

Note that the second order derivatives have disapperared in (11.17). The derivation is typically done under the assumption that $\Phi \in C^2$, also in Edwards, and an additional analysis argument is needed[3] to give meaning to the results if Φ is only in C^1, because the determinants in (11.22) are exactly the determinants that showed up in (10.37) and the subsequent derivation of (10.40), where effectively $dx = dx_1\, dx_2\, dx_3$ is first replaced by a 3-form $dx_1dx_2dx_3$ pulled back to a 2-form du_1du_2, which in turn is replaced by $du = du_1\, du_2$ again.

The step by step generalisation to the action of d and Φ^* on k-forms of any order k is easily made once the reasoning above is understood. For any k-form

$$\omega = f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}$$

[2] Recall the choice to set $ddx_i = 0$, leading to $dd\omega = 0$ for any form ω.

[3] Using approximation arguments.

we have

$$\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*(\omega)) \tag{11.23}$$

Every such form may be written as

$$\omega = f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \cdots dx_{i_k} = \tilde{f}_{i_1,\ldots,i_k} \, \underline{dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}}, \tag{11.24}$$

where in the second expression we sum only over those $i_1, \ldots, i_k$ for which $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq \mathrm{N}$. For instance

$$\omega = f_{ij} \, dx_i dx_j = \underbrace{(f_{ij} - f_{ji})}_{\tilde{f}_{ij}} \, \underline{dx_i dx_j},$$

but this is not compulsory, as the examples

$$\omega = f_1 \, dx_1 + f_2 \, dx_2 + f_3 \, dx_3$$

with cyclic notation for

$$d\omega = \underbrace{(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3})}_{g_1} \, dx_2 dx_3 + \underbrace{(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1})}_{g_2} \, dx_3 dx_1 + \underbrace{(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2})}_{g_3} \, dx_1 dx_2$$

and

$$\zeta = g_1 \, dx_2 dx_3 + g_2 \, dx_3 dx_1 + g_3 \, dx_1 dx_2$$

with

$$d\zeta = (\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3}) \, dx dy dz$$

in Section 11.2 show.

Finally we observe that if we put the coefficients f_1, f_2, f_3 of this ω in a vector $F = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$ and the coefficients g_1, g_2, g_3 in this cyclic representation of $d\omega$ in a vector $G = g_1 e_1 + g_2 e_2 + g_3 e_3$, we obtain that

$$G = \nabla \times F,$$

the curl of F, whereas with the coefficients of η we obtain the coefficient of $d\zeta$ as

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot G,$$

the divergence of G. These appear in the Gauss divergence and the Stokes curl theorems for vectorfields in $\mathbb{R}^3$ in Section 11.2 below[4]. The general statement (11.34) is also called Stokes Theorem. It has both theorems in $\mathbb{R}^3$ and Green's Theorem in $\mathbb{R}^3$ as special cases.

[4] The statement that $dd\omega = 0$ corresponds to the div of a curl being always zero:

$$\nabla \cdot \nabla \times F = 0.$$

11.2 From Gauss' to general Stokes' Theorem

From Section 10.10 and partitions of unity arguments we have that for $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}} = \mathbb{R}^{n+1}$ open and bounded, with $\partial\Omega$ a compact $(N-1)$-dimensional C^1-manifold, and in every $p \in M$, after renumbering, a local description of $\Omega \cap [a,b]$ given by

$$a_{n+1} \leq x_{n+1} < f(x_1, \ldots, x_n) < b_{n+1}$$

or

$$a_{n+1} < f(x_1, \ldots, x_n) \leq x_{n+1} < b_{n+1},$$

with $f \in C^1$ and $p \in (a,b)$, that there exists a globally defined normal vectorfield $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ with $\nu(p)$ pointing out of Ω in every patch as above. For every continuously differentiable $V : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ it now holds that

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot V = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot V \, dS_{N-1}, \tag{11.25}$$

and this statement is called the Gauss Divergence Theorem.

We now use the reformulation with differential forms and pullbacks of forms with $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ with $\mathrm{N} > n+1$ to formulate Stokes' Theorem for integral n-forms over $\Phi(M)$ considered as the boundary of $\Phi(\Omega)$, first for $n+1 = 2$ and $\mathrm{N} = 3$. So let

$$\omega = f_1(x)dx_1 + f_2(x)dx_2 + f_3(x)dx_3 \tag{11.26}$$

and $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Then

$$\Phi^*(dx_1) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_2} du_2; \quad \Phi^*(dx_2) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} du_2;$$

$$\Phi^*(dx_3) = \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_2} du_2,$$

and with $\phi_1 = \Phi^* f_1$, $\phi_2 = \Phi^* f_2$, $\phi_3 = \Phi^* f_3$ we have

$$\Phi^*(F) = (\phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} + \phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} + \phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_1})\, du_1 + (\phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_2} + \phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} + \phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_2})\, du_2$$

$$= p_1(u_1, u_2)du_1 + p_2(u_1, u_2)du_2 = \zeta,$$

a 1-form that can be integrated over $M = \partial\Omega$, and to which (10.43) applies, whence

$$\int_{\partial\Omega} \zeta = \int_{\partial\Omega} p_1(u_1, u_2)du_1 + p_2(u_1, u_2)du_2 = \int_{\Omega} (\frac{\partial p_2}{\partial u_1} - \frac{\partial p_1}{\partial u_2}) du_1 du_2 = \int_{\Omega} d\zeta. \tag{11.27}$$

Observe that the second equality in (11.27) holds in view of (10.43), which is a rewritten version of (11.25) with N = 2, while the first and the third merely substitute $\omega = p_1 du_1 + p_2 du_2$ and evaluate $d\omega$ according to (11.18).

We need

$$\int_{\partial\Omega} \zeta = \int_{\partial\Omega} \Phi^* \omega = \int_{\Phi(\partial\Omega)} \omega, \tag{11.28}$$

and

$$\int_{\Omega} d\zeta = \int_{\Omega} d\,\Phi^* \omega = \int_{\Omega} \Phi^*(d\omega) = \int_{\phi(\Omega)} d\omega \tag{11.29}$$

to conclude for ω given by (11.26) that

$$\int_{dS} \omega = \int_{dS} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 = \int_S d\omega, \tag{11.30}$$

in which $S = \Phi(\Omega)$. It is the last equality in each of (11.28) and (11.29) that has to be checked, the other equalities follow from our d-algebra and the commutation of d and Φ^*.

Let us once more spell out the d-algebra by which (11.18) evaluates as

$$d\omega = (\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3) dx_1$$

$$+(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3) dx_2$$

$$+(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3) dx_3 =$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3 dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 dx_3 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 dx_3$$

$$= (\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}) dx_1 dx_2 + (\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}) dx_2 dx_3 + (\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}) dx_3 dx_1$$

$$(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}) dx_2 dx_3 + (\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}) dx_3 dx_1 + (\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}) dx_1 dx_2$$

$$= g_1 dx_2 dx_3 + g_2 dx_3 dx_1 + g_3 dx_1 dx_2.$$

Comparing to (10.40) we recognise for $F(x) = f_1(x)e_1 + f_2(x)e_2 + f_3(x)e_3$ that

$$\int_{dS} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 =$$

$$\int_S (\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}) dx_2 dx_3 + (\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}) dx_3 dx_1 + (\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}) dx_1 dx_2$$

$$= \int_S G \cdot \nu = \int_S (\nabla \times F) \cdot \nu, \tag{11.31}$$

in which $g_1(x)e_1 + g_2(x)e_2 + g_3(x)e_3 = G(x) = \nabla \times F$ and ν is the normal vector on $S = \Phi(\Omega)$ defined by (10.37).

It thus remains to check the two analytical statements

$$\int_{\partial\Omega} \Phi^*\omega = \int_{\Phi(\partial\Omega)} \omega \quad \text{and} \quad \int_{\Omega} \Phi^*(d\omega) = \int_{\Phi(\Omega)} d\omega, \tag{11.32}$$

which complement the d-algebra presented above, and which are both of the form

$$\int_M \Phi^*\omega = \int_{\Phi(M)} \omega, \tag{11.33}$$

with respectively $M = \partial\Omega$ and $M = \Omega$. For this we need again Section 8.9.4 combined with the usual localisations via partitions of unity. Not very hard but still to be done.

It will be convenient here to have $\Phi(M)$ described by compositions of Φ and patches of M, see the remark at the end of Section 12.4. Also, we still have to deal with integrals over manifolds with boundaries, to obtain

$$\int_{\Phi(\partial\Omega)} \omega = \int_{\Phi(\Omega)} d\omega, \tag{11.34}$$

as the final result in which $M = \Phi(\Omega)$ is a manifold with boundary $\partial M = \Phi(\partial\Omega)$, with $\Omega \in \mathbb{R}^n$ as described at the beginning of this section, Φ a continuously differentiable injective map from $\bar{\Omega}$ to $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ with Jacobian matrix of rank n throughout $\bar{\Omega}$, and ω an n-form with continuously differentiable coefficients. Generalisations to piecewise C^1-boundaries then still have to be discussed.

11.3 More exercises

Laat

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < 1\}. \tag{11.35}$$

Op $\partial\Omega$ is ν de normaalvector met componenten $\nu_x = x$ en $\nu_y = y$ in de notatie zoals in de uitleg in Sectie 10.1 en de route van (10.7) naar (10.9). Met $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = -\sqrt{1-x^2}$, $x = \sqrt{1-y^2}$, en $x = -\sqrt{1-y^2}$ hebben we vier grafieken van functies f zoals in (10.5) and (10.6), op te kiezen domeinen, bijvoorbeeld $[-a, a]$ met $\frac{1}{\sqrt{2}} < a < 1$ if we think in terms of (10.32), or $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ if we think in terms of (10.34).

The graph parameterisations

$$x \to (x, \sqrt{1-x^2}), \quad x \to (x, -\sqrt{1-x^2}), \tag{11.36}$$
$$y \to (\sqrt{1-y^2}, y), \quad y \to (-\sqrt{1-y^2}, y)$$

may look uglier than

$$\phi \to (\cos\phi, \sin\phi), \tag{11.37}$$

which requires only two ϕ-domains, e.g. $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ and $[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ for (10.32), and $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ and $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ for (10.34).

Parameterisations obtained from substitutions like $y = tx$ in the defining equation $x^2 + y^2 = 1$ for $\partial\Omega$ are also handy: from $x^2 + t^2x^2 = 1$ we have

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}};\ y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{and} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}};\ y = -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

parameterising the two semicircles on the left and on the right, and likewise $x = ty$ for the upper and lower semicircle, with t running from $-\infty$ to $+\infty$, and you can put

$$t = \frac{s}{1-s} \quad \text{or} \quad t = -\frac{s}{1-s} \tag{11.38}$$

in each of them to obtain.

$$x = \frac{1-s}{\sqrt{1-2s+2s^2}};\ y = \frac{s}{\sqrt{1-2s+2s^2}}$$

parameterising $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 = 1\}$ with $s \in [0,1]$.

Opgave 11.1. Use the t-parameterisations above to calculate the area of the unit disk via integrals such as $\int x dy$ of $\int y dx$ over $\partial\Omega$. You should get and evaluate integrands[5] like

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

Opgave 11.2. Refering to (10.4) and the subsequent line integral notation with 1-forms, consider the form

$$\omega = (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2)dx + (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2)dy$$

and evaluate $\int_{\partial\Omega} \omega$ for $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ with $\partial\Omega$ parameterised such that (10.42) defines a vector pointing out of Ω.

[5] Recall $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \pi$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^3}\,dt = \frac{3\pi}{8}$, ...

Opgave 11.3. Same as Exercise 11.2 but with

$$\omega = (a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3)dx + (b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3)dy$$

Which coefficients disappear in the calculations? Generalise to the obvious n^{th} order case.

Opgave 11.4. In physics results like (10.3) are usually taken for granted in view of the trivial case that

$$\Omega = (a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$$

is a rectangle parallel to the axes[6]. Verify directly that (10.3) holds for $v : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ continuously differentiable.

Note that Ω in Exercise 11.4 is given by

$$F(x_1, x_2) = (x_1 - a_1)(x_1 - b_1)(x_2 - a_2)(x_2 - b_2) < 0,$$

which has a zero gradient in the corners of Ω, just as (11.41) for Exercise 11.6 below. Here is an example without an F to define Ω.

Opgave 11.5. Suppose that the boundary of a bounded open set $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is given by a periodic solution of a system of differential equations $\dot{x} = P(x, y)$ and $\dot{y} = Q(x, y)$, with $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuously differentiable on $\bar{\Omega}$. Show that

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Edwards has a nice exercise about Descartes' Folium from which I lifted the $y = tx$-trick above. It allows to find the solutions of

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0, \tag{11.39}$$

in the form

$$x = x(t) = \frac{3t}{1 + t^3};\ y = y(t) = \frac{3t^2}{1 + t^3}, \tag{11.40}$$

with $t \in (0, \infty)$, $t \in (-1, 0)$ and $t \in (-\infty, -1)$ giving the smooth parts of the curve. The origin $(0, 0)$ is the intersection of two solution curves, one given

[6] https://www.quora.com/What-is-the-plural-of-axis

by (11.40) with $t \in (-1, 1)$, the other by (11.40) with x and y interchanged. Exercise 2.3 in Chapter V of Edwards is about

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy < 0\}. \tag{11.41}$$

with $\partial\Omega$ given by (11.40) and $t \in [0, \infty)$. You should examine the graphs of x and y as functions of t in (11.40). You can get the area of Ω as

$$-\int_0^\infty y(t)x'(t)\,dt = \int_0^\infty x(t)y'(t)\,dt, \tag{11.42}$$

or the average of the two integrals, which may turn out to be easier, using Green's Theorem the way we derived it. Edwards tells you to cut the folium along the diagonal $y = x$, in which case you have the boundary consisting of two curves, the part described by (11.40) with $0 \le t \le 1$, and the diagonal part given by $y = x = t$ with $0 \le t \le \frac{3}{2}$, which you should parameterise as $y = x = \frac{3}{2} - t$ if you think about it. Still, I wonder whether Edwards actually did the exercise:

Opgave 11.6. Substitute $y = t^{\frac{1}{3}}x$ in the equation for the folium to get x and y in terms of t and evaluate (11.42) above to obtain the value $\frac{3}{2}$ for the area of $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x^3 + y^3 - 3xy < 0\}$.

Opgave 11.7. As Exercise 11.6 but use (11.38) to get the boundary parameterised with $0 \le s \le 1$.

In the last exercise you see that the boundary of (11.41) is actually given by one single parameterisation with the parameter s in the unit interval $[0, 1]$, with $s = 0$ and $s = 1$ both mapped to the origin where the condition for the local description as used in Section 10.1 fails. The same issue occurs in the trivial case of Exercise 11.4.

Note that (11.41) is a special case of an obvious general question with two parameters, these being $p = 3$ and $n = 2$ here[7]. Dropping the coefficient of xy we have for general $p > 2$ that

$$x = s^{\frac{1}{p(p-2)}}\,(1-s)^{\frac{p-1}{p(p-2)}}\ ;\ y = s^{\frac{p-1}{p(p-2)}}\,(1-s)^{\frac{1}{p(p-2)}}\ , \tag{11.43}$$

parameterises the loop in the solution set of $x^p + y^p = xy$, with

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = \frac{1}{p}\,s^{\frac{1}{p-2}-1}(1-s)^{\frac{1}{p-2}-1}, \tag{11.44}$$

[7] See Exercise 11.14.

which looks much better than the individual terms $x\frac{dy}{ds}$ and $y\frac{dx}{ds}$. With the β-function[8] defined by

$$B(x,y) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}\,ds,$$

the area surrounded by $[0,1] \ni s \to (x(s), y(s))$, the loop in

$$x^p + y^p = xy \tag{11.45}$$

is thus equal to

$$A_p = \frac{1}{2p}\,B(\frac{1}{p-2}, \frac{1}{p-2}), \tag{11.46}$$

which gives $\frac{1}{6}$ for $p = 3$ and differs from Exercise 11.6 by a factor 3^2, consistent with (11.40).

Note that in deriving (11.44) from (11.43) you may get lost if you don't introduce

$$\alpha = \frac{1}{p(p-2)} \quad \text{and} \quad \beta = \frac{p-1}{p(p-2)} = (p-1)\alpha$$

and continue your calculations with α and β. I also suggest to write derivatives such as

$$\frac{d}{ds}\,s^\alpha(1-s)^\beta = (\frac{\alpha}{s} - \frac{\beta}{1-s})\,s^\alpha(1-s)^\beta = (\alpha - (\alpha+\beta)s)\,s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1},$$

which will help you to factor out common factors when such expressions have to be combined later on, as you will notice if you tackle this question: how about the volume V_p in $\{(x,y,z) \in \mathrm{IR}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ surrounded by $x^p + y^p + z^p = xyz$ when $p > 3$?

Opgave 11.8. Substitute $y = s^{\frac{1}{p}}x$ and $z = t^{\frac{1}{p}}x$ in $x^p + y^p + z^p = xyz$ to obtain a parameterisation of the solutions with $x, y, z > 0$ in the form

$$x = s^\alpha t^\alpha (1+s+t)^{-p\alpha}, \quad y = s^{(p-2)\alpha} t^\alpha (1+s+t)^{-p\alpha}, \quad z = s^\alpha t^{(p-2)\alpha}(1+s+t)^{-p\alpha},$$

and evaluate

$$xdydz = x(\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial s})$$

as xyz times a factor that you have to computer carefully, to find the correct double integral in s and t that gives the desired volume. The integral is the difference of two similar terms each of which is st to some power times $(1+s+t)$ to some power. Substituting $t = (1+s)x$ both integrals reduce to products of single integrals that reduce to β-functions again.

[8] More on the β-function in [HM].

Just in case, I arrived via

$$xyz = \frac{(st)^{\frac{1}{p-3}}}{(1+s+t)^{\frac{3}{p-3}}}$$

and

$$\frac{1}{yz}(\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial s}) = \frac{1}{p^2(p-3)st}\left(\frac{p}{1+s+t} - 1\right)$$

at

$$\frac{1}{p(p-3)}\underbrace{\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(st)^{\frac{1}{p-3}-1}\,dsdt}{(1+s+t)^{\frac{p}{p-3}}}}_{S(\frac{1}{p-3},\frac{p}{p-3})} - \frac{1}{p^2(p-3)}\underbrace{\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(st)^{\frac{1}{p-3}-1}\,dsdt}{(1+s+t)^{\frac{3}{p-3}}}}_{S(\frac{1}{p-3},\frac{3}{p-3})}.$$

These integrals are known. With

$$B(a,b) = \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1}\,ds$$

we have[9]

$$T(a,b) = \int_0^\infty \frac{s^{a-1}\,ds}{(1+s)^b} = B(a,b-a)$$

and[10]

$$S(a,b) = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(st)^{a-1}\,dsdt}{(1+s+t)^b} = T(a,b)T(a,b-a),$$

so V_p can be expressed in p via β-functions. It should lead to what we get in Exercise 11.13, which is really nice[11].

Opgave 11.9. How general is the $y = tx$-trick in $\mathbb{R}^2$? Let $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be continuously differentiable, and suppose that $F(x_0, y_0)$ for some $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ with $x_0 \neq 0$. Define t_0 by $y_0 = t_0 x_0$ and apply the implicit function theorem to derive a condition that guarantees the existence of a C^1-solution curve of the form $t \to (x(t), y(t) = (x(t), tx(t))$ defined on an t-interval which has t_0 as an interior point.

Don't forget you want to have nonzero speed, which is a second condition on top of the usual condition from the the implicit function theorem. The latter condition will involve a simple combination of x, y, F_x, F_y in (x_0, y_0) with a clear (but local) geometric interpretation.

[9] Via $s = \frac{t}{1-t}$, a substitution I avoided for (11.8).
[10] Via $t = (1+s)\tau$.
[11] There were mistakes in an earlier version and then it did not, but now it does.

Verify that in the end the nonzero speed condition follows from $x \neq 0$ and the condition from the implicit function theorem. Note that if $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ you always realise at least one of $t \to (x(t), y(t) = (x(t), tx(t))$ and $t \to (x(t), y(t) = (ty(t), y(t))$ if this condition is satisfied. Relate your results to polar coordinates.

Opgave 11.10. Verify that computing the area of (11.41) using polar coordinates is even a bigger pain than using the $y = tx$-trick.

Opgave 11.11. In Exercise 11.9 you must have computed the time derivatives of $x(t)$ and $y(t) = tx(t)$. Verify[12] that the derivative of

$$\frac{y(t)}{x(t)}$$

is what it should be, and that the area of such a curve parameterised by $t \in \mathbb{R}$ with $(x(t), y(t) \to (0,0)$ as $t \to 0$ and $t \to \infty$ is given by[13]

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty x(t)^2\, dt,$$

and compute again the area in Exercise 11.6 from the formula for $x(t)$ in (11.40).

Opgave 11.12. Verify (11.46) by putting $y = tx$ in (11.45), solve for x, and set $t^p = s$ in the integral you get from Exercise 11.11 and convert to β-functions.

Opgave 11.13. See Exercise 11.11. How would $F(x,y,z) = 0$ lead to

$$\frac{1}{3}\int_0^\infty \int_0^\infty x(s,t)^3\, dsdt?$$

Hint: in relation to

$$x^p + y^p + z^p = xyz$$

and for

$$x = x(s,t) = \left(\frac{st}{1 + s^p + t^p}\right)^{\frac{1}{p-3}}$$

[12] You should have got $\dot{x} = -\frac{x^2 F_y}{xF_x + yF_y}$, $\dot{y} = \frac{x^2 F_x}{xF_x + yF_y}$

[13] Compare this to a similar formula with polar coordinates.

this integral is equal to[14]

$$V_p = \frac{1}{3p^2}\, B(\frac{1}{p-3}, \frac{1}{p-3})\, B(\frac{1}{p-3}, \frac{2}{p-3}),$$

and you might see a pattern emerge.

Opgave 11.14. Let $p > 4$. The 4-dimensional measure of the bounded open set in $\mathbb{R}^4$ with all coordinates positive and bounded by

$$x_1^p + x_2^p + x_3^p + x_4^p = x_1 x_2 x_3 x_4$$

is

$$\frac{1}{4p^3}\, B(\frac{1}{p-4}, \frac{1}{p-4})\, B(\frac{1}{p-4}, \frac{2}{p-4})\, B(\frac{1}{p-4}, \frac{3}{p-4}),$$

and likewise[15] for

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^p = \Pi_{j=1}^{n}\, x_j$$

in $\mathbb{R}^n$ for $p > n$.

[14] Earlier mistakes have have been corrected....

[15] Exponents and dimensions, another story: Chapter ??.

12 Cut-off functions and partitions of unity

This chapter explains the basic tools for cutting up functions in smaller parts which are localised. This involves two tricks, each of which you can play with.

The first trick concerns an open set $O \subset \mathrm{IR}^{\mathrm{N}}$ and a compact subset $K \subset O$ which should be non-empty[1]. Then every $a \in K$ is contained in an open ball B centered at a such that the closed ball with the same center but twice the radius is contained in O. We denote this larger ball by $2B$. Thus we have

$$K \ni a \in B \subset 2B \subset O.$$

These balls cover K and the (sequential) compactness[2] of K implies that K is covered bij finitely many of such balls, i.e.

$$K \subset B_1 \cup \cdots \cup B_k \subset 2B_1 \cup \cdots \cup 2B_k \subset O.$$

On each such ball $2B_i$ we choose a smooth function $\eta_i \in C_c^\infty(2B)$ with $0 \leq \eta_i \leq 1$ and $\eta_i \equiv 1$ on B_i, and we extend these functions[3] to the whole of IR^{N} by setting $\eta_i \equiv 0$ outside $2B_i$. Then $\eta_i \in C_c^\infty(\mathrm{IR}^{\mathrm{N}})$ for $i = 1, \ldots, k$ and a new function $\chi \in C_c^\infty(\mathrm{IR}^{\mathrm{N}})$ may be defined by[4]

$$1 - \chi(x) = (1 - \eta_1(x)) \cdots (1 - \eta_k(x)). \tag{12.1}$$

Indeed, if x is not contained in the union of the supports of $\eta_1, \ldots, \eta_k$ then all factors in the right hand side of (12.1) are equal to 1 and hence $\chi(x) = 0$. On the other hand, if x is contained in one of the balls B_i then the corresponding factor in the right hand side of (12.1) is equal to zero making the right hand side vanish whence $\chi(x) = 1$. In particular $\chi(x) \equiv 1$ on K. Moreover, since all factors take values in $[0, 1]$ the same holds for $\chi(x)$, for any $x \in \mathrm{IR}^{\mathrm{N}}$. We conclude that

$$\chi \in C_c^\infty(O), \quad \forall x \in \Omega \quad \chi(x) \in [0, 1], \quad \forall x \in K \quad \chi(x) = 1, \tag{12.2}$$

and this is why χ is called a cut-off function for K in O.

The second trick applies the first trick to a finite collection of such sets

$$\emptyset \neq K_1 \subset O_1, \ldots, \emptyset \neq K_m \subset O_m \quad \text{with} \quad \eta_j \in C_c^\infty(O_j) \tag{12.3}$$

cut-off functions as in (12.2). We define $\zeta_j \in C_c^\infty(O_j)$ by

$$\zeta_j(x) = \frac{\chi_j(x)}{\chi_1(x) + \cdots + \chi_m(x)} \tag{12.4}$$

[1] The set K could be the closure of a bounded domain Ω, or its boundary.
[2] This characterisation of compactness was not discussed yet in these notes.
[3] We can use the p-norm to our liking, the choice $p = 2$ allows radially symmetric η_i.
[4] I first saw this elegant trick in Folland's Real Analysis book.

and extend ζ_j to $\mathbb{R}^N$ via $\zeta_j(x) \equiv 0$ outside O_i. Note that below we don't really use the last part of (12.2) as $\chi_j(x) > 0$ for all $x \in K_i$ suffices to obtain the essential properties of the collection $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, which is called a partition of unity. For every x for which one of the $\chi_j(x) > 0$ it follows that

$$\zeta_1(x) + \cdots + \zeta_m(x) = 1. \tag{12.5}$$

Certainly this holds for x in $K_1 \cup \cdots \cup K_m$. On the other hand, outside the union of $O_1, \ldots, O_m$ this sum is by definition equal to zero.

Any function
$$f : K_1 \cup \cdots \cup K_m \to \mathbb{R}$$
splits up via

$$f(x) = f_1 + \cdots + f_m = \zeta_1(x)f(x) + \cdots + \zeta_m(x)f(x),$$

with the smaller parts $f_j = \zeta_j f$ compactly supported in O_j, and ζ_j not harming any smoothness the original function f may enjoy. Adding more K_j to the collection changes the functions ζ_j only via (12.4), with (12.5) remaining valid.

12.1 Partitions of compact manifolds

This section was written before Section 12.3. For Ω and $M = \partial\Omega$ you can jump to the end of this section. We now apply the techniques in Section 12 to a non-empty compact set $M \subset \mathbb{R}^N$ for which (C) in Section 8.8.1 applies in a sense we made more precise in Section 12.3 specifying blocks $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset \mathbb{R}^N$ in which the description (A) of Section 8.8.1 can be given, see (12.13). Below we rather choose blocks $[\tilde{a}_i, \tilde{b}_i] \subset \mathbb{R}^n$, given Φ_i as in (10.32). Thus for each $p \in M$ there exists a continuously differentiable injective

$$\Phi_i : \, [a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R}^N$$

with $\mathcal{M}(\frac{\partial \Phi}{\partial u}) > 0$ such that $p \in \Phi((\tilde{a}, \tilde{b}))$ for some $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset (a, b)$, and in some open neighbourhood O of the compact set $K = \Phi([\tilde{a}, \tilde{b}])$ it holds that

$$x \in M \iff x \in \Phi((a, b)) \tag{12.6}$$

We would now like to consider the sets $\Phi((\tilde{a}, \tilde{b}))$ as open sets covering M, so that by compactness

$$M \subset \Phi_1((\tilde{a}_1, \tilde{b}_1)) \cup \cdots \cup \Phi_m((\tilde{a}_m, \tilde{b}_m)), \tag{12.7}$$

for some finite collection Φ_j, but clearly the sets $\Phi((\tilde{a},\tilde{b}))$ are not open[5] in $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}$, unless $n = \mathrm{N}$. Nevertheless such a finite subcover exists.

To see this first choose $[\underline{a},\underline{b}] \subset (\tilde{a},\tilde{b})$ with $p \in \Phi((\underline{a},\underline{b}))$ and a suitable open neighbourhood $\underline{O}$ of $\underline{K} = \Phi([\underline{a},\underline{b}])$ with $\underline{O} \subset O$ to have the characterisation in (12.6) hold for all $x \in \underline{O}$ as well, and such that $\underline{O}$ does not intersect the (compact) image under Φ of the compact set $[a,b]\backslash(\tilde{a},\tilde{b})$. It then follows that $M \cap \underline{O} \subset \Phi((\tilde{a},\tilde{b}))$ because Φ is injective.

Varying $p \in M$ the open sets $\underline{O}$ cover M and by compactness there exists a finite collection $O_1,\dots,O_m$ such that

$$M \subset \underline{O}_1 \cup \dots \cup \underline{O}_m \subset \Phi_1((\tilde{a}_1,\tilde{b}_1)) \cup \dots \cup \Phi_m((\tilde{a}_m,\tilde{b}_m)),$$

which is the desired finite covering (12.7) consisting of patches.

We can now put $K_j = \Phi_j([\tilde{a}_j,\tilde{b}_j])$ and the corresponding open neighbourhoods O_j of K_j in which (12.6) characterises the elements of M. The description following (10.32) in Section 10.9 with unit blocks then results from Section 12.

We note that we can also have our partition of unity defined using cut-off functions $\chi = \chi(u)$ for $[\tilde{a},\tilde{b}] \subset (a,b)$, such as the blocks appearing in (12.7), but it is then slightly more complicated to formulate (12.4), because each χ_j is then a function of u. This allows us to deal with manifolds which are not necessarily embedded in $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}$.

Finally we observe that any Ω and $M = \partial\Omega$ as in Section 10.1 allow a choice of functions $\zeta_1,\dots,\zeta_I \in C_c^\infty((a_i,b_i))$ with $0 \le \zeta_i \le 1$ and $\zeta_1+\dots+\zeta_I \equiv 1$ on a neighbourhood of $\bar{\Omega}$ such that every for every i either $[a_i,b_i] \subset \Omega$ holds, or $P_i = M \cap (a_i,b_i)$ is a patch such as in Section 10.1.

12.2 Changing partitions

We still have to check that the integrals do not depend on the choice of the partitioning functions $\zeta_1,\dots,\zeta_I$. We observe that (10.33) defines a linear map

$$f \xrightarrow{L} \int_M f\,dS_n \tag{12.8}$$

from $X = C(M)$, the space of continuous real valued functions on M, to $\mathrm{I\!R}$. Note that L is bounded in the sense that $|Lf| \le C|f|_\infty$, just as in Section 3.4, but we will not be using this below[6].

The partition naturally defines linear subspaces

$$X_i = \{\zeta_i f : f \in C(M)\},$$

[5] Of course they should be open in M.

[6] But we will need it to get rid of the annoying assumption $\Phi \in C^2$ in Section 11.1.

and the same holds for any other partition of M, given by say $\eta_1, \ldots, \eta_J$, which also defines a linear map

$$f \xrightarrow{K} \int_M f \, dS_n \tag{12.9}$$

via (10.33), and corresponding linear subspaces Y_j. Now let $\underline{\zeta}_{ij} = \zeta_i \eta_j$, with $i = 1, \ldots, I$ and $j = 1, \ldots, J$. Then

$$f = f \sum_{i=1}^{I} \zeta_i = \sum_{i=1}^{I} \zeta_i f = \sum_{i=1}^{I} \zeta_i f \sum_{j=1}^{J} \eta_j = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \zeta_i \eta_j f, \tag{12.10}$$

whence

$$Lf = L(\sum_{i=1}^{I} \zeta_i f) = \sum_{i=1}^{I} \int_{\Phi_i} \zeta_i f \, dS_n = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \int_{\Phi_i} \zeta_i \eta_j f \, dS_n,$$

and likewise

$$Kf = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{I} \int_{\Psi_j} \eta_j \zeta_i f \, dS_n,$$

and thus it remains to show that

$$\int_{\Phi_i} \zeta_i \eta_j f \, dS_n = \int_{\Psi_j} \eta_j \zeta_i f \, dS_n \tag{12.11}$$

The integral on the left is defined via (10.31) as

$$\int_{\Phi_i} \zeta_i \eta_j f dS_n = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \zeta_i(\Phi_i(u)) \eta_j(\Psi_j(v)) f(\Phi_i(u)) \mathcal{M}_n(\frac{\partial \Phi_i}{\partial u}) \, du_1 \cdots du_n.$$

It should be equal to the integral on the right which is defined via (10.31) as

$$\int_{\Psi_j} \eta_j \zeta_i f dS_n = \int_{c_1}^{d_1} \cdots \int_{c_n}^{d_n} \eta_j(\Psi_j(v)) \zeta_i(\Phi_i(u)) f(\Psi_j(v)) \mathcal{M}_n(\frac{\partial \Psi_j}{\partial v}) \, dv_1 \cdots dv_n.$$

The coordinates v have to be expressed in u and vice versa via coordinate transformations such as the ones in Section 12.4. These were defined in neighbourhoods of a given points $p \in \Phi_i((a,b)) \cap \Psi_j((c,d))$ only. Therefore we need another localisation argument[7] before we can apply Section 8.9.4 to conclude that the two integrals are the same.

[7] Try this one by yourself.

12.3 Again: local descriptions of a manifold

Let us be very precise in what we established for the local descriptions as in (A), (B) and (C) of Section 8.8.1, which correspond to (a,b,c) in III.4 of Edwards. Writing $z = (x, y)$ we take as a starting point that $F = F(z)$ is continuously differentiable on a block

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times [a_{n+1}, b_{n+1}] \times \cdots \times [a_{\mathrm{N}}, b_{\mathrm{N}}] \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

and that for some $p \in (a, b)$ the derivative $F'(p)$ is of maximal rank. Renaming and relabeling the variables in $z = (x, y)$ we can then arrange for the "partial" derivative $F_y(p)$ to be invertible. Theorem 8.11 then implies that there exists $(\tilde{a}, \tilde{b}) \subset (a, b)$ with $p \in (\tilde{a}, \tilde{b})$ and a continuously differentiable function

$$f : [\tilde{a}_x, \tilde{b}_x] \to (\tilde{a}_y, \tilde{b}_y)$$

such that $p = (p_x, p_y) \in (\tilde{a}, \tilde{b})$ and

$$F^{-1}(p) \cap [\tilde{a}, \tilde{b}] = \{(x, f(x)) : x \in [\tilde{a}_x, \tilde{b}_x]\} \subset [\tilde{a}_x, \tilde{b}_x] \times (\tilde{a}_y, \tilde{b}_y), \qquad (12.12)$$

with subscripts indicating the x and the y-parts of p, $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$. Thus in the smaller block $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ the level set of $F(p)$ coincides with the graph of f, and in the same block $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ this graph then coincides with the zero-level set of $\tilde{F}(z) = \tilde{F}(x, y) = y - f(x)$.

As for (C), if we have, with subscripts denoting the x and the y-parts of Φ, that $\Phi(u) = (\Phi_x(u), \Phi_y(u))$ is continuously differentiable on $[a, b]$ with $0 \in (a, b)$ and $p = \Phi(0)$, then via Theorem 8.12 the invertibility of $\Phi'_x(0)$ is sufficient for the existence of $[\underline{a}_x, \underline{b}_x]$ with $p_x \in (\underline{a}_x, \underline{b}_x)$ and a continuously differentiable function $\phi : [\underline{a}_x, \underline{b}_x] \to (a, b)$ such that $\Phi_x(\phi(x)) = x$ for all $x \in [\underline{a}_x, \underline{b}_x]$. Moreover[8], we can choose $[\underline{a}_x, \underline{b}_x]$ such that $\phi((\underline{a}_x, \underline{b}_x))$ is an open set as the inverse image of $(\underline{a}_x, \underline{b}_x)$ under Φ_x.

The function f defined by $f(x) = \Phi_y(\phi(x))$ now defines a graph

$$\{(x, f(x)) : x \in [\underline{a}_x, \underline{b}_x]\}$$

which is a subset of $\Phi([a, b])$. If in addition Φ is injective on $[a, b]$ then the image under Φ of the closed bounded set $[a, b] \backslash \phi((\underline{a}_x, \underline{b}_x))$ is bounded and closed, and does not contain p. Thus there exists a block $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ with $p \in (\tilde{a}, \tilde{b})$ such that $[\tilde{a}_x, \tilde{b}_x] \subset (\underline{a}_x, \underline{b}_x)$ with

$$\Phi([a, b] \backslash \phi((\underline{a}_x, \underline{b}_x))) \cap [\tilde{a}, \tilde{b}] = \emptyset.$$

[8] See the discussion after Theorem 8.12.

The continuity of f implies that we can restrict $\tilde{a}_x$ and $\tilde{b}_x$ a bit further to ensure that $f([\tilde{a}_x, \tilde{b}_x]) \subset (\tilde{a}_y, \tilde{b}_y)$. We note we also have that

$$\Phi([a,b] \backslash \phi((\tilde{a}_x, \tilde{b}_x))) \cap [\tilde{a}, \tilde{b}] = \emptyset,$$

since the additional points in the larger image $\Phi([a,b] \backslash \phi((\tilde{a}_x, \tilde{b}_x)))$ are on the graph of f outside $[\tilde{a}_x, \tilde{b}_x]$. Thus we have arrived from (C) to exactly the same formulation of (A) as above starting from (B): $p \in (\tilde{a}, \tilde{b})$ and

$$\Phi([a,b] \cap [\tilde{a}, \tilde{b}] = \{(x, f(x)) : x \in [\tilde{a}_x, \tilde{b}_x]\} \subset [\tilde{a}_x, \tilde{b}_x] \times (\tilde{a}_y, \tilde{b}_y). \tag{12.13}$$

The two statements (12.12) and (12.13) should be compared to the definition Edwards gives in Section 4 of his Chapter III for $M \subset \mathrm{IR}^{\mathrm{N}}$ to be an n-dimensional manifold. Every $p \in M$ should, after relabeling and renaming in $z = (x, y)$, be contained in an open set O in which

$$P = O \cap M = \{(x, f(x)) : x \in U\},$$

with $U \subset \mathrm{IR}^n$ open and $f : U \to \mathrm{IR}^m$ continuously differentiable, is called a C^1-patch of M. Of course it is then clear that $U \supset [\tilde{a}_x, \tilde{b}_x] \supset (\tilde{a}_x, \tilde{b}_x)$ and $O \supset [\tilde{a}, \tilde{b}] \supset (\tilde{a}, \tilde{b})$ for some $(\tilde{a}, \tilde{b}) \ni p$, and thus it is completely equivalent to ask that $p \in (\tilde{a}, \tilde{b})$ and

$$p \in M \cap [\tilde{a}, \tilde{b}] = \{(x, f(x)) : x \in [\tilde{a}_x, \tilde{b}_x]\} \subset [\tilde{a}_x, \tilde{b}_x] \times (\tilde{a}_y, \tilde{b}_y) \tag{12.14}$$

for some closed block $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ with $(\tilde{a}_x, \tilde{b}_x) \ni p_x$, and some continuously differentiable $f : [\tilde{a}_x, \tilde{b}_x] \to (\tilde{a}_y, \tilde{b}_y)$, exactly as in (12.12,12.13), the patch being

$$M \cap (\tilde{a}, \tilde{b}) = \{(x, f(x)) : x \in (\tilde{a}_x, \tilde{b}_x)\} \ni p = (p_x, f(p_x)). \tag{12.15}$$

In the closed N-block $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ there are no other points of M than the points on the graph of $f : [\tilde{a}_x, \tilde{b}_x] \to (\tilde{a}_y, \tilde{b}_y)$.

12.4 Coordinate transformations

By definition every $p \in M$ is in such a patch as above and typically patches overlap. If p is in two such patches, say with functions f and g, it may happen that f and g are functions of the x-part of z. In that case the patches are parameterised by

$$u \to \Phi(u) = (u, f(u)) \quad \text{and} \quad v \to \Psi(v) = (v, g(v)) \tag{12.16}$$

defined on overlapping blocks with p_x in the interior of the intersection of the blocks, which is an open block itself. The common part of M is then contained in the intersection of the two N-blocks.

Viewing the n-tuples u and v as local coordinates on M near p, a transformation of these coordinates is simply given by $v = u$. In all other cases, we may renumber the variables of $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{N}}$ to have the patches parameterised as

$$u \to \Phi(u) = (u_1, u_2, f_3(u_1, u_2), f_4(u_1, u_2));$$

$$v \to \Psi(v) = (v_1, g_2(v_1, v_3), v_3, g_4(v_1, v_3)),$$

with (u_1, u_2) and (v_1, v_3) in some open block in $\mathrm{I\!R}^n$, or as

$$u \to \Phi(u) = (u_1, f_2(u_1), f_3(u_1));$$

$$v \to \Psi(v) = (g_1(v_2), v_2, g_3(v_2)),$$

with u_1 and v_3 in some open block in $\mathrm{I\!R}^n$. Note that the first case above cannot occur if $\mathrm{N} = n + 1$.

To rewrite Ψ in the form Φ we need the invertibility of respectively

$$\frac{\partial g_2}{\partial v_3} \quad \text{and} \quad \frac{\partial g_1}{\partial v_2}, \tag{12.17}$$

in which case we we obtain respectively

$$w \to \tilde{\Phi}(w) = (w_1, w_2, h_3(w_1, w_2), h_4(w_1, w_2))$$

and

$$w \to \tilde{\Phi}(w) = (w_1, h_2(w_1), h_3(w_1))$$

as local descriptions of the Ψ-patches near p. The definition of what a manifold is then implies that

$$\tilde{\Phi} \equiv \Phi$$

on an open block containing (p_1, p_2) in the first case and p_1 in the second case. It then follows as above that $u = w$ is a coordinate transformation just as $u = v$ for (12.16) while w is obtained from v via a coordinate transformation just as x from u in the proof of (A) from (C) above.

It thus remains to establish the invertibility of the partial Jacobian matrices in (12.17) in p to conclude there exists a local C^1-transformation from u to v near p. Note that these are also the conditions for solving part[9] of $\Phi(u) = \Psi(v)$ via

$$v_1 = u_1,\ v_3 = f_3(u_1, u_2) \quad \text{and} \quad u_1 = v_1,\ u_2 = g_2(v_1, v_3) \tag{12.18}$$

in the first case, and

$$u_1 = g_1(v_2) \quad \text{and} \quad v_2 = f_2(u_1) \tag{12.19}$$

[9] All equations but the last one, which then requires some argument to hold as well.

in the second case. The invertiblity of the partial Jacobian matrices in (12.17) in p follows because otherwise the Ψ-patch cannot achieve all respectively (u_1, u_2)-directions and u_1-directions that occur in the Φ-patch, contradicting the assumption that the Ψ-patch covers all of M in its defining neighbourhood.

The restriction to patches of the form (12.15) looks like an obvious choice for simplicity, but may bother us later when dealing with (11.33), we'll see.

13 Toepassingen met een zuiver toetje

Wat bruggetjes naar hoe de natuurkundigen en scheikundigen het doen, en aan het eind wat complexe functietheorie, met de lijnintegralen alleen maar over rechte lijnstukjes. Voldoende voor de functional calculus waarmee voor z in $f(z)$ ook iets heel anders mag worden ingevuld, bijvoorbeeld een vierkante matrix.

13.1 Integraalrekening in poolcoördinaten

Merk op dat we *in het echte leven* over meer verzamelingen zullen willen integreren dan over rechthoeken. Bijvoorbeeld over heel $\mathbb{R}^2$. Voor niet-negatieve functies $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\iint_{[-R,R]\times[-R,R]} u(x,y)d(x,y)}_{J(R)} = \lim_{R\to\infty} J(R) \tag{13.1}$$

op natuurlijke manier gedefinieerd in $[0,\infty]$ als limiet van een niet-dalende functie $R \to J(R) \geq 0$.

Er is natuurlijk geen enkele reden om een integraal over heel $\mathbb{R}^2$ per se als een limiet van integralen in rechthoekige coördinaten over in dit geval vierkanten te introduceren. Poolcoördinaten zijn vaak veel handiger. Voor Riemannsommen in poolcoördinaten ten behoeve van de rechtstreekse definitie en uitwerking van

$$\iint_{x^2+y^2\leq R^2} u(x,y)d(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^R u(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdr\, d\theta$$

$$= \int_0^R\int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta\, rdr \tag{13.2}$$

gebruiken we

$$0 = r_0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_{\mathrm{M}} = R \quad \text{met} \quad \mathrm{M} \in \mathbb{N} \tag{13.3}$$

en

$$0 = \theta_0 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_{\mathrm{N}} = 2\pi \quad \text{met} \quad \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \tag{13.4}$$

en tussensommen van de vorm

$$\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N} u(\rho_k\cos\phi_l, \rho_k\sin\phi_l)\, \underbrace{\frac{1}{2}(r_k^2 - r_{k-1}^2)(\theta_l - \theta_{l-1})}_{\text{waarom dit dan?}} =$$

$$\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N} u(\rho_k\cos\phi_l,\rho_k\sin\phi_l)\underbrace{\frac{r_k+r_{k-1}}{2}}_{\tilde\rho_k}(r_k-r_{k-1})(\theta_l-\theta_{l-1}),$$

met tussenwaarden $\rho_k,\tilde\rho_k\in[r_{k-1},r_k]$ en $\phi_l\in[\theta_{l-1},\theta_l]$. De details zijn zelf in te vullen. Leuker is deze mooie toepassing van (13.2) in de volgende stelling over harmonische functies.

Opgave 13.1. Een twee keer continu differentieerbare functie $(x,y)\to u(x,y)=u(r\cos\theta,r\sin\theta)$ heet harmonisch als $\Delta u=0$. Laat zien dat

$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r\cos\theta,r\sin\theta)\,d\theta,$$

en dat harmonische functies dus in elk punt het gemiddelde van hun waarden op een diskvormige omgeving zijn. Hint: gebruik Stelling 7.34 als je de integraal van Δu over $\bar B_R$ hebt vertaald naar een integraal met alleen maar $d\theta$.

Ook leuk is dat voor niet-negatieve continue functies $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de integraal

$$\iint_{\mathbb{R}^2}u=\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\le R^2}u(x,y)d(x,y) \tag{13.5}$$

nu net zo natuurlijk gedefinieerd is in $[0,\infty]$ als door (13.1). Alleen een wiskundige vraagt zich dan af dit consistent is. Dat moet en dat mag hoor:

Opgave 13.2. Voor niet-negatieve continue $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ geldt

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\le R^2}u(x,y)d(x,y)=\lim_{R\to\infty}\iint_{[-R,R]\times[-R,R]}u(x,y)d(x,y).$$

Zoek maar uit waarom en onthoud dat

$$\iint_{\mathbb{R}^2}u$$

op twee (eigenlijk vier) manieren is uit te rekenen als dat nodig is, zie (8.47) en (13.2).

13.2 Integraalrekening en kansverdelingen

In de formule van Stirling, zie (4.27), stond nog een integraal die we nu netjes kunnen uitrekenen met behulp van Opgave 13.2 en de functie

$$(x,y) \xrightarrow{u} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

Kort door de bocht opgeschreven concluderen we dat

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,d(x,y)$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2}\, r d\theta dr = \int_0^{\infty} 2\pi e^{-\frac{1}{2}r^2}\, r dr = 2\pi[-e^{-\frac{1}{2}r^2}]_0^{\infty} = 2\pi.$$

Opgave 13.3. Laat met Opgave 13.2 zien dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Bijgevolg hebben

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{en} \quad u(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \tag{13.6}$$

dus de eigenschap dat ze (positief zijn en) en totale integraal gelijk aan 1 hebben. We noemen zulke functies *kansdichtheden*. De dichtheid $f(x)$ hoort bij een stochastische grootheid X waarvoor geldt dat de kans op uitkomst $X \in [a,b]$ gelijk is aan

$$P(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

en

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$$

wordt de cumulatieve verdelingsfunctie van X genoemd.

Een van X onafhankelijke stochastische grootheid Y kan een kansdichtheid $g(y)$ hebben die beschrijft dat de kans op $Y \in [c,d]$ gelijk is aan

$$P(Y \in [c,d]) = \int_c^d g(y)\,dy.$$

De simultane kansdichtheid $u(x,y) = f(x)g(y)$ geeft dan de kans op $X \in [a,b]$ en $Y \in [c,d]$ als

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u = \int_a^b f(x)\,dx \int_c^d g(y)\,dy.$$

De kansdichtheden in (13.6) worden de 1-en 2-dimensionale standaard *normale verdeling* genoemd. Is de functie g hetzelfde als de functie f in (13.6), dan zijn X en Y allebei standaard normaal verdeeld. De twee stochastische grootheden X en Y kunnen op elkaar gedeeld worden. De kans op

$$Q = \frac{Y}{X} \in [a,b]$$

is dan gelijk aan de integraal van $u(x,y)$ over het gebied ingesloten door de lijnen $y = ax$ en $y = bx$.

In het geval dat X en Y standaard normaal verdeeld en onderling onafhankelijk zijn, bestaat die integraal uit twee identieke stukken waarvan er één gegeven wordt door

$$\{(x,y) : x \geq 0,\ ax \leq y \leq bx\},$$

een gebied dat in poolcoördinaten beschreven wordt door θ in een deelinterval van $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

We willen concluderen dat

$$P(Q \in [a,b]) = 2\int_0^\infty \int_{ax}^{bx} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{\arctan a}^{\arctan b} e^{-\frac{1}{2}r^2}\,r d\theta dr = \frac{1}{\pi}(\arctan b - \arctan a) = \int_a^b \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+q^2}\,dq.$$

De stochastische grootheid Q heeft dan een kansdichtheid gegeven door de functie

$$q \to \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+q^2}.$$

Opgave 13.4. Hierboven manipuleerden we met meervoudige oneigenlijke integralen over "taartpunten" in $\mathbb{R}^2$. De daarvoor benodigde theorie vraagt om een uitbreiding van de theorie van integralen over het hele vlak in poolcoördinaten. Dat kun je ook zelf proberen precies te maken nu.

13.3 Gradient, kettingregel, coördinatentransformaties

De *kettingregel* generaliseert de regel in Opgave 4.14, zie ook Sectie 7.6, Opgave 4.15 en later Opgave 14.19. Met de opmerking dat (4.11) gelezen moet worden met matrices[1] is de regel met bewijs en al over te schrijven en nu meteen toepasbaar.

We spellen een en ander nu uit in het geval van coördinatentransformaties, met als belangrijk voorbeeld de overgang op poolcoördinaten die we al gebruikten om $\mathbb{C}$ te beschrijven en in $\mathbb{C}$ te rekenen: ieder punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kunnen we via

$$x = r\cos\theta \quad \text{en} \quad y = r\sin\theta \tag{13.7}$$

zien als gegeven door poolcoördinaten $r, \theta \in \mathbb{R}$ voor $(x, y) \neq (0, 0)$.

Een differentieerbare scalaire functie $F(x, y)$ van x en y is zo automatisch ook een differentieerbare functie van r en θ. In wat volgt zien we (13.7) als transformatie

$$Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

van de onafhankelijke plaatsvariabelen, en $F(x, y) = F(Z(r, \theta))$ als de *afhankelijke* variabele. Buiten de wiskunde, met name in de natuurkunde, is het gebruikelijk om de afhankelijke variabele met hetzelfde symbool te noteren als alleen de onafhankelijke variabelen worden getransformeerd.

13.3.1 Gradient, divergentie en Laplaciaan

Voor $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is de definitie van differentieerbaarheid in de gewone rechthoekige coördinaten x en y en $h = x - x_0$, $k = y - y_0$ te lezen als

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = F(x_0, y_0) + ah + bk + R(h, k; x_0, y_0), \tag{13.8}$$

met $a, b \in \mathbb{R}$ en

$$\frac{R(h, k; x_0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0 \quad \text{als} \quad \sqrt{h^2 + k^2} \to 0, \tag{13.9}$$

zie ook Sectie 7.6 en vergelijk met het uitpakken van (8.9) hierboven. De volgende opgave is misschien nu wat dubbelop, maar dat kan geen enkel kwaad.

Opgave 13.5. Neem voor $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ en $a, b \in \mathbb{R}$ aan dat (13.8) geldt met (13.9). Dan volgt dat

$$\frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} \to a \quad \text{en} \quad \frac{F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0)}{k} \to b$$

[1] Beter: lineaire afbeeldingen, in dit hele hoofdstuk de facto matrices.

als $h, k \to 0$. Laat dit zien.

Meerdere notaties worden gebruikt, zoals

$$a = F_x(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = (\delta_x F)(x_0, y_0) = (D_1 F)(x_0, y_0); \tag{13.10}$$

$$b = F_y(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = (\delta_y F)(x_0, y_0) = (D_2 F)(x_0, y_0), \tag{13.11}$$

waarbij (x_0, y_0) en haakjes vaak worden weggelaten want

$$a = F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = \delta_x F = D_1 F \quad \text{en} \quad b = F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = \delta_y F = D_2 F$$

ziet er gewoon fijner uit.

Als kolomvector schrijven we ook, met

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{13.12}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} e_x + \frac{\partial F}{\partial y} e_y = e_x \frac{\partial F}{\partial x} + e_y \frac{\partial F}{\partial y}, \tag{13.13}$$

de *gradient* van F in (x_0, y_0), geschreven zonder (x_0, y_0). Merk op dat het lineaire gedeelte in (13.8) te schrijven is als

$$ah + bk = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = h \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y}, \tag{13.14}$$

het inprodukt[2] van ∇F en de verschilvector $\binom{h}{k}$.

We zien dus hoe de gradiënt de vector is die de lineaire afbeelding $DF : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ via het inprodukt representeert als

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \xrightarrow{DF} \nabla F \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix},$$

maar ook dat (13.14) te lezen is als de *differentiaaloperator*

$$h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{werkend op} \quad F.$$

[2] Het inprodukt van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven door $\binom{a}{b} \cdot \binom{h}{k} = ah + bk$.

Evenzo zien we ∇ als

$$\nabla = e_x\frac{\partial}{\partial x} + e_y\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{werkend op} \quad F \quad \text{geeft} \quad \nabla F, \tag{13.15}$$

een vectorwaardige differentiaaloperator.

Middels het inprodukt kan ∇ ook werken op een vectorwaardige differentieerbare functie

$$(x,y) \to \begin{pmatrix} V_x(x,y) \\ V_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = V_x e_x + V_y e_y,$$

en wel als

$$\nabla \cdot V = (e_x\frac{\partial}{\partial x} + e_y\frac{\partial}{\partial y}) \cdot (V_x e_x + V_y e_y) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}, \tag{13.16}$$

de *divergentie* van V.

We schrijven hier nu V met subscripten[3] x, y voor de x- en y-coördinaten V_x en V_y van V t.o.v. de orthonormale vectoren (13.12) die samen de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$ vormen. Merk wel op dat V_x en V_y van x en y afhangen maar e_x en e_y niet. De indices x en y staan voor de x-richting en de y-richting, en die richtingen zijn overal in het x, y-vlak hetzelfde.

Elk van de twee termen in ∇ werkt nu alleen op V_x en V_y, en omdat

$$e_x \cdot e_x = e_y \cdot e_y = 1 \quad \text{en} \quad e_x \cdot e_y = e_y \cdot e_x = 0, \tag{13.17}$$

blijven er maar twee termen over in (13.16). Omdat e_x en e_y niet van x en y afhangen geeft elk van de vier termen

$$e_x\frac{\partial}{\partial x} \cdot V_x e_x, \quad e_x\frac{\partial}{\partial x} \cdot V_y e_y, \quad e_y\frac{\partial}{\partial y} \cdot V_x e_x, \quad e_y\frac{\partial}{\partial x} \cdot V_y e_y$$

die we krijgen bij het uitwerken van (13.16) maar één term, te weten

$$e_x\frac{\partial}{\partial x} \cdot V_x e_x = e_x\frac{\partial}{\partial x} \cdot V_x e_x = e_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} V_x e_x = e_x \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} e_x = \frac{\partial V_x}{\partial x} e_x \cdot e_x = \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

voor de eerste,

$$e_x\frac{\partial}{\partial x} \cdot V_y e_y = e_x\frac{\partial}{\partial x} \cdot V_y e_y = e_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} V_y e_y = e_x \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} e_y = \frac{\partial V_x}{\partial y} e_x \cdot e_y = 0$$

voor de tweede, en

$$e_y\frac{\partial}{\partial y} \cdot V_x e_x = 0, \quad e_y\frac{\partial}{\partial x} \cdot V_y e_y = \frac{\partial V_y}{\partial y}$$

[3] Niet te verwarren met het gebruik van subscripten voor partiële afgeleiden!

voor de derde en vierde. Van de vier termen worden er dus nog twee nul vanwege $e_x \cdot e_y = 0$ in (13.17) en de andere twee vereenvoudigen en blijven in die vorm over in (13.16).

Als $V = \nabla F$ differentieerbaar is dan volgt zo dat

$$\nabla \cdot \nabla F = (e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y}) \cdot (\frac{\partial F}{\partial x} e_x + \frac{\partial F}{\partial y} e_y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y} = \Delta F, \quad (13.18)$$

de Laplaciaan van F, die weer gezien kan worden als

$$\Delta F \quad \text{is} \quad \Delta = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{werkend op} \quad F. \quad (13.19)$$

Omschrijven van gradiënt, divergentie en Laplaciaan naar poolcoördinaten is nu een nuttige oefening waarvoor de volgende subsecties van belang zijn. Het is handig om daarbij naar twee net iets anders uitgewerkte notaties voor de kettingregel te kijken, zie ook Sectie 7.6 waar dat voor $t \to F(x(t), y(t)$ al is gedaan.

13.3.2 Kettingregel uitgeschreven voor transformaties

We weten dat we de kettingregel toe mogen passen op

$$(r, \theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta) = (X(r,\theta), Y(r,\theta)) = (x, y) \to F(x, y) = G(r, \theta),$$

door de lineaire benadering van

$$(r, \theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

rond (r_0, θ_0) in te vullen in de lineaire benadering van

$$(x, y) \to F(x, y)$$

rond (x_0, y_0). We doen dit nu met $\tilde{h} = r - r_0$ en $\tilde{k} = \theta - \theta_0$, met weglating van (r_0, θ_0) in de partiële afgeleiden.

Omdat we in deze sectie $F(x, y) = G(r, \theta)$ als onbekende afhankelijke grootheid willen zien, bijvoorbeeld de oplossing van een partiële differentiaalvergelijking, kiezen we nu eerst voor de schrijfwijze zoals rechts in (13.14). De lineaire termen in de expansies

$$X(r_0 + \tilde{h}, \theta_0 + \tilde{k}) = X(r_0, \theta_0) + \tilde{h}\frac{\partial X}{\partial r} + \tilde{k}\frac{\partial X}{\partial \theta} + \cdots,$$

$$Y(r_0 + \tilde{h}, \theta_0 + \tilde{k}) = Y(r_0, \theta_0) + \tilde{h}\frac{\partial Y}{\partial r}\tilde{h} + \tilde{k}\frac{\partial Y}{\partial \theta} + \cdots$$

moeten dan als

$$h=\tilde h\frac{\partial X}{\partial r}+\tilde k\frac{\partial X}{\partial\theta}\quad\text{en}\quad k=\tilde h\frac{\partial Y}{\partial r}+\tilde k\frac{\partial Y}{\partial\theta}$$

in (13.14) worden ingevuld[4], en het resultaat

$$(\tilde h\frac{\partial X}{\partial r}+\tilde k\frac{\partial X}{\partial\theta})\frac{\partial F}{\partial x}+(\tilde h\frac{\partial Y}{\partial r}+\tilde k\frac{\partial Y}{\partial\theta})\frac{\partial F}{\partial y}=$$

$$\tilde h(\frac{\partial X}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial y})+\tilde k(\frac{\partial X}{\partial\theta}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial\theta}\frac{\partial F}{\partial y})$$

is dan volgens de kettingregel gelijk aan

$$\tilde h\frac{\partial G}{\partial r}+\tilde k\frac{\partial G}{\partial\theta}.$$

Er volgt dus dat

$$\frac{\partial G}{\partial r}=\frac{\partial X}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial y}\tag{13.20}$$

$$\frac{\partial G}{\partial\theta}=\frac{\partial X}{\partial\theta}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial\theta}\frac{\partial F}{\partial y},\tag{13.21}$$

in vector-matrixnotatie te schrijven als

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial G}{\partial r}\\ \frac{\partial G}{\partial\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial X}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial X}{\partial\theta}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial\theta}\frac{\partial F}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial X}{\partial r}&\frac{\partial Y}{\partial r}\\ \frac{\partial X}{\partial\theta}&\frac{\partial Y}{\partial\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial F}{\partial y}\end{pmatrix},\tag{13.22}$$

waarin we links een 2 bij 1 matrix zien met de partiële afgeleiden van G, en rechts net zo'n matrix voor F, en een 2 bij 2 matrix voor

$$(r,\theta)\xrightarrow{Z}(X(r,\theta),Y(r,\theta)),$$

met $Z:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ via (13.7) gedefinieerd door

$$Z(r,\theta)=(X(r,\theta),Y(r,\theta))=(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

Horizontaal worden deze matrices genummerd met de variabele grootheden in het beeld, verticaal met die in het domein van de betreffende afbeelding. Precies andersom als in (8.10) dus, omdat we de schrijfwijze rechts in (13.14) hebben gebruikt. Transponeren geeft natuurlijk de vorm die consistent is met (4.11).

De kolomvectoren in (13.22) zien er uit als gradiënten, maar dat is slechts misleidende schijn, zoals we in Sectie 13.3.4 zullen zien.

[4] We gaan er nu niet echt vanuit dat de lezer al met matrices heeft leren rekenen.

13.3.3 Kettingregel met Jacobimatrices

Mooie voorbeelden van matrixprodukten als in (8.22) zien we als we in (13.22) aan beide kanten links $(\tilde{h}\ \tilde{k})$ erbij zetten. Dan is

$$(\tilde{h}\ \tilde{k})\begin{pmatrix}\frac{\partial G}{\partial r}\\ \frac{\partial G}{\partial \theta}\end{pmatrix} = (\tilde{h}\ \tilde{k})\begin{pmatrix}\frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r}\\ \frac{\partial X}{\partial \theta} & \frac{\partial Y}{\partial \theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial F}{\partial y}\end{pmatrix}, \tag{13.23}$$

nu links en rechts uit te werken tot een 1 bij 1 matrix, met daarin precies de twee lineaire stukken die we hierboven aan elkaar gelijkstelden bij het uitwerken van de kettingregel, om tot (13.20) en (13.21) te komen.

Via links en rechts transponeren is (13.23) equivalent met

$$(\frac{\partial G}{\partial r}\ \frac{\partial G}{\partial \theta})\begin{pmatrix}\tilde{h}\\ \tilde{k}\end{pmatrix} = (\frac{\partial F}{\partial x}\ \frac{\partial F}{\partial y})\begin{pmatrix}\frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta}\\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{h}\\ \tilde{k}\end{pmatrix}, \tag{13.24}$$

waarin we de *Jacobimatrices* van G, F en Z herkennen, waarin de beeldvariabelen niet horizontaal maar verticaal genummerd worden, zoals we in (8.10) al gezien hebben. Ook zien we dat de volgorde in (13.24) nu net is als in (4.11), hetgeen prettig is als we $\tilde{h}$ en $\tilde{k}$ zien als variabel.

Als $F(x,y) = G(r,\theta)$ een grootheid is met twee componenten

$$F_1(x,y) = G_1(r,\theta) \quad \text{en} \quad F_2(x,y) = G_2(r,\theta),$$

dan kan (4.11) voor beide componenten in één keer opgeschreven worden als

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial G_1}{\partial r} & \frac{\partial G_1}{\partial \theta}\\ \frac{\partial G_2}{\partial r} & \frac{\partial G_2}{\partial \theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{h}\\ \tilde{k}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta}\\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{h}\\ \tilde{k}\end{pmatrix}, \tag{13.25}$$

en zien we hoe de kettingregel toegepast op

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{Z} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$$

de Jacobimatrix van G produceert via het matrixprodukt van de Jacobimatrices van F en Z.

Deze notatie suggereert om de afhankelijke grootheid $F(x,y) = G(r,\theta)$ als 2-vector te zien, dus

$$F(x,y) = \begin{pmatrix}F_1(x,y)\\ F_2(x,y)\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad G(r,\theta) = \begin{pmatrix}G_1(r,\theta)\\ G_2(r,\theta)\end{pmatrix},$$

en dus ook x, y en r, θ als componenten van de 2-vectoren

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix}r\\ \theta\end{pmatrix}.$$

We blijven echter $F = F(x,y)$ en $G = G(r,\theta)$ schrijven.

13.3.4 Omschrijven van differentiaaloperatoren

De notatie (13.23) is handiger als we zoals gebruikelijk in de natuurkunde aan $F(x,y) = G(r,\theta)$ denken als één en dezelfde afhankelijke grootheid, en niet als een functie zoals gebruikelijk in de wiskunde.

In dat geval ligt het voor de hand om die grootheid af te splitsen uit de notatie in (13.22) en de kettingregel voor coördinatentransformaties te schrijven als

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \tag{13.26}$$

hetgeen de matrixnotatie is voor

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial X}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial X}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y},$$

waaruit de differentiaaloperatoren

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial y}$$

kunnen worden opgelost in termen van de coëfficiënten

$$\frac{\partial X}{\partial r}, \frac{\partial Y}{\partial r}, \frac{\partial X}{\partial \theta}, \frac{\partial Y}{\partial \theta} \quad \text{en de differentiaaloperatoren} \quad \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Opgave 13.6. In het concrete geval van poolcoördinaten geeft dit

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Laat dit zien.

Met Opgave 13.6 zijn we nog niet klaar als we in (13.15)

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y}$$

willen omschrijven naar r en θ. De vraag is ook hoe we e_x en e_y omschrijven naar e_r en e_θ, en daarvoor komt de vraag wat e_r en e_θ eigenlijk zijn.

Een natuurkundige zal hier niet lang over nadenken Teken maar een plaatje en het is evident dat

Teken plaatje!

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

en

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} = e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{13.27}$$

de gradiënt in poolcoördinaten geeft. Daar had'ie de hele kettingregel überhaupt niet voor nodig. Omdat

$$e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = 1 \quad \text{en} \quad e_r \cdot e_\theta = e_\theta \cdot e_r = 0,$$

staan de vectoren e_r en e_θ in ieder punt onderling loodrecht[5], met elk lengte 1, en wijzen in de richtingen waarin het punt $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ loopt als je r respectievelijk θ varieert. De voorfactor $\frac{1}{r}$ compenseert de met r evenredige snelheid bij gelijkmatige toename van θ.

Opgave 13.7. In (13.27) staan twee representaties van dezelfde operator. Door e_x en e_y in e_r en e_θ uit te drukken en Opgave 13.6 te gebruiken kun je zien dat ze inderdaad hetzelfde zijn. Doe dat. Schrijf ook $V = V_x e_x + V_y e_y$ om als $V = V_r e_r + V_\theta e_\theta$.

Opgave 13.8. Laat zien dat de divergentie in poolcoördinaten wordt gegeven door

$$\nabla \cdot V = (e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \cdot (V_r e_r + V_\theta e_\theta) = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}.$$

Hint: Omdat e_r en e_θ van θ afhangen werkt met de produktregel van Leibniz de $e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$ in de factor links nu ook op e_r en e_θ in de factor rechts, en één van die twee geeft na inprodukt met de voorfactor e_θ een bijdrage.

Opgave 13.9. Pas de regel in Opgave 13.8 nu toe op ∇ zelf en laat zien dat

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}}_{\Delta_r} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}}_{\Delta_S}$$

Hint: wellicht eerst Opgave 13.8 toepassen op ∇ als werkend op de afhankelijke grootheid $G = F$, waarvoor de natuurkundige dezelfde letter gebruikt en de wiskundige

[5] Wiskundig is dit per definitie en consistent met wat je ziet als je pijltjes tekent.

dan met $G(r,\theta) = F(r\cos\theta, r\cos\theta)$ in de war raakt, omdat G en F niet dezelfde functies zijn.

In Opgave 13.9 zien we

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_S, \tag{13.28}$$

waarin Δ_r de radiële Laplaciaan is, die ook werkt op functies $R = R(r)$, en Δ_S de Laplace-Beltrami operator op

$$S = \{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2 : \, x^2 + y^2 = 1\},$$

uitgedrukt in de hoekvariabele θ als

$$\Delta_S = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

Het aardige nu is dat de integraal van de Laplaciaan van een nette functie

$$u(x,y) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

over een disk B_R met straal $R > 0$ in poolcoördinaten meteen tot een belangrijke conclusie leidt, maar daarvoor moeten we eerst weten wat meervoudige integralen zijn.

13.4 Harmonische polynomen

We vinden deze polynomen ook als we de Laplace vergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

voor $u = u(x,y)$ met *scheiding van variabelen* in poolcoördinaten oplossen door de operator in Opgave 13.9 los te laten op

$$u(x,y) = R(r)\Theta(\theta), \tag{13.29}$$

en het resultaat gelijk aan nul te stellen. Dit geeft

$$0 = (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2})R(r)\Theta(\theta)$$

$$= \Theta(\theta)(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})R(r) + \frac{R(r)}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Theta(\theta)$$

$$= \Theta(\theta)(R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)) + \frac{R(r)}{r^2}\Theta''(\theta).$$

Als Θ'' een veelvoud is van Θ, zeg

$$-\Theta'' = \mu\Theta \tag{13.30}$$

dan volgt Euler's vergelijking

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) = \mu\frac{R(r)}{r^2} \tag{13.31}$$

voor $R(r)$.

Merk op dat (13.30) gezien kan worden als een (eigenwaarde)probleem voor

$$-\Delta_S = -\frac{d^2}{d\theta}$$

op de eenheidscirkel waar bij Θ een 2π-periodieke functie moet zijn om een functie op de cirkel

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

te definiëren.

Opgave 13.10. Welke μ zijn toegestaan in (13.30) voor oplossingen (13.29) die op heel $\mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd? Leg uit dat je die waarden ook meteen[6] aan de harmonische polynomen kunt zien zonder de precieze vorm van (13.30) te kennen. Schrijf die harmonische polynomen in gescheiden variabelen r en θ als $R(r)\Theta(\theta)$ en verifieer dat $R(r)$ een oplossing is van (13.31) met de bijbehorende μ.

Opgave 13.11. Voor elke $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ en $a_0, \ldots, a_\mathrm{N}$, $b_1, \ldots, b_\mathrm{N}$ in $\mathbb{R}$ is

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)r^n$$

via $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ een harmonische functie. Overtuig jezelf van de juistheid van de informele uitspraak dat deze oplossing in $(0, 0)$ gelijk is aan zijn gemiddelde op elke disk met middelpunt $(0, 0)$.

[6] In $\mathbb{R}^3$ eigenwaarden en -functies van Laplace-Beltrami operator ook via polynomen.

Opgave 13.11 suggereert

$$u(x,y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) r^n$$

als een algemene oplossing voor de Laplacevergelijking op de eenheidsdisk met randvoorwaarde

$$u(\cos\theta, \sin\theta) = f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \tag{13.32}$$

een zogenaamde *Fourierreeks*[7] voor een 2π-periodieke functie $\theta \to f(\theta)$. Ook deze $u(x,y)$ is dan in $(x,y) = (0,0)$ het gemiddelde van $u(x,y)$ op elke disk met middelpunt $(0,0)$ en straal voldoende klein, kleiner dan 1 in dit geval.

Opgave 13.12. In $\mathbb{R}^3$ gebruiken we *bolcoördinaten*

$$x = r \sin\theta \cos\phi;$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi;$$
$$z = r \cos\theta,$$

en

$$e_r = \sin\theta\cos\phi\, e_x + \sin\theta \sin\phi\, e_y + \cos\theta\, e_z$$
$$e_\theta = \cos\theta\cos\phi\, e_x + \cos\theta\sin\phi\, e_y - \sin\theta\, e_z$$
$$e_\phi = -\sin\phi\, e_x + \cos\phi\, e_y.$$

Schrijf e_r, e_θ, e_ϕ al of niet als kolomvectoren, en verifieer dat

$$e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = e_\phi \cdot e_\phi = 1; \quad e_r \cdot e_\theta = e_r \cdot e_\phi = e_\theta \cdot e_\phi = 0.$$

Overtuig jezelf van

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta} e_\phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \tag{13.33}$$

en gebruik (13.33) om voor

$$V = V_r e_r + V_\theta e_\theta + V_\phi e_\phi$$

eerst af te leiden dat

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r} V_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} V_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}\right),$$

[7] Uitgebreid behandeld in de mamanotes van vorig jaar.

en vervolgens via $V = \nabla F$ dat

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}}_{\Delta_r} + \frac{1}{r^2}\underbrace{(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}}_{\Delta_S}).$$

Wederom zien we hier (13.9), maar nu met Δ_S gedefinieerd op

$$S = \{(x,y) \in \mathrm{IR}^2 : \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

De formules in IR^n laten zich nu raden, afgezien wellicht van de exacte vorm van Δ_S in de hoekvariabelen $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$, maar met

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

voor het radiële gedeelte.

Opgave 13.13. In IR^3 gebruiken we bolcoördinaten

$$x = r\sin\theta\cos\phi;$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi;$$

$$z = r\cos\theta,$$

en

$$e_r = \sin\theta\cos\phi\, e_x + \sin\theta\sin\phi\, e_y + \cos\theta\, e_z$$
$$e_\theta = \cos\theta\cos\phi\, e_x + \cos\theta\sin\phi\, e_y - \sin\theta\, e_z$$
$$e_\phi = -\sin\phi\, e_x + \cos\phi\, e_y.$$

Schrijf e_r, e_θ, e_ϕ al of niet als kolomvectoren en verifieer dat

$$e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = e_\phi \cdot e_\phi = 1; \quad e_r \cdot e_\theta = e_r \cdot e_\phi = e_\theta \cdot e_\phi = 0.$$

Overtuig jezelf van

$$\nabla = e_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}e_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}e_\theta\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{13.34}$$

en gebruik (13.34) om voor

$$V = V_r e_r + V_\theta e_\theta + V_\phi$$

eerst af te leiden dat

$$\nabla V = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r}V_r + \frac{1}{r}(\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}V_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}),$$

en vervolgens via $V = \nabla F$ dat

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}}_{\Delta_r} + \frac{1}{r^2}(\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}}_{\Delta_S}).$$

Wederom zien we hier (13.9), maar nu met Δ_S gedefinieerd op

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

De formules in $\mathbb{R}^n$ laten zich nu raden, afgezien wellicht van de exacte vorm van Δ_S in de hoekvariabelen $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$, maar met

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

voor het radiële gedeelte.

13.5 Intermezzo: het waterstofatoom

Met

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}$$

is de stationaire Schrödinger vergelijking voor het waterstofatoom

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi - \frac{e^2}{r}\psi = E\psi, \tag{13.35}$$

waarin m de massa van het electron is, e de lading van het electron, $\hbar$ de constante van Planck. De negatieve waarden van E waarvoor (13.35) een oplossing met

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, y, z)|^2 \, d(x, y, z) = 1$$

heeft zijn de energieniveaus die het electron in gebonden toestand kan aannemen.

We hebben gezien dat

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}}_{\Delta_r} + \frac{1}{r^2}(\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}}_{\Delta_S}).$$

Via

$$\psi(x, y, z) = R(r)P_l(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}),$$

waarin $P_l(x,y,z) = Y(\theta,\phi)$ een harmonisch homogeen polynoom van graad l in x,y,z is, en een nieuwe x en n gedefinieerd door

$$x = \frac{1}{\hbar}\sqrt{-2mE}\,r \quad \text{en} \quad -E = \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2},$$

leidt dit tot

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dR}{dx} - \frac{l(l+1)}{x^2}R + \frac{2n}{x}R = R$$

met $R(x) \sim x^l$ voor $x \to 0$ en $R(x) \sim e^{-x}$ voor $x \to \infty$.

Substitueer daarom $R(x) = x^l e^{-x} u(x)$ en leidt voor $u(x)$ af dat

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (\frac{4l}{x} - 2)\frac{du}{dx} = 2\frac{n-l-1}{x}u.$$

Opgave 13.14. Corrigeer eventuele typo's hierboven. De machtreeksoplossing[8]

$$u(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

breekt af voor een n die van l afhangt. Welke n is dat?

13.6 Lijnintegralen over polygonen en Coursat

We beginnen met formule (7.9) uit Sectie 7.1, al of niet via de "verboden" operaties daarboven, geschreven als

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_0^1 \underbrace{F'((1-t)x_0 + tx_1)}_{f(x(t))}\,\underbrace{(x_1 - x_0)dt}_{dx} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx,$$

waarin, met $x, x(t), x_0, x_1, f(x)$ vervangen door $z, z(t), z_0, z_1, f(z)$,

$$t \to z(t) = (1-t)z_0 + tz_1 \tag{13.36}$$

het interval $[z_0, z_1]$ parametriseert, en

$$\int_0^1 f(z(t))z'(t)dt =$$

$$\int_0^1 f((1-t)z_0 + tz_1)dt\,(z_1 - z_0) = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz. \tag{13.37}$$

[8] Instructief om eerst $\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dR}{dx} = R$ op te lossen.

Dit is een formule die we, zonder dat (7.9) daarvoor nog nodig is, nu kunnen lezen met $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ en $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, met het linkerlid als ondubbelzinnige definitie van het rechterlid: de lijnintegraal

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz$$

over het rechte lijnstuk van z_0 naar z_1, van de functie $z \to f(z)$. Niet meer praten over andere parametervoorstellingen van $[z_0, z_1]$ dan (13.36), tenzij het nodig[9] is zou ik zeggen. Merk op dat $[z_0, z_1]$ voor alle $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ is gedefinieerd, dus $[1, 0]$ heeft nu ook betekenis. Je moet er even aan wennen maar het spreekt vanzelf. Het ligt voor de hand om aan z_0 als het begin- en z_1 als het eindpunt van $[z_0, z_1]$ te denken. Daarmee wordt $[z_0, z_1]$ meer dan alleen een verzameling: $[z_0, z_1]$ is zo een georienteerd lijnstuk.

Opgave 13.15. Laat zien dat

$$\int_{z_0}^{z_1} z\, dz = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

Evalueer vervolgens $\int_{z_0}^{z_1} z^n\, dz$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 13.16. Evalueer $\int_{z_0}^{z_1} z^n\, dz$ voor alle $n \in -\mathbb{N} = \{-1, -2, -3, \cdots\}$. Doe $n = -1$ als laatste[10]. Welke voorwaarde moet je leggen op z_0 en z_1?

Opgave 13.17. Laat zien dat

$$|\int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz| \leq |z_0 - z_1| \max_{z \in [z_0, z_1]} |f(z)|.$$

Integralen gedefinieerd als hierboven door (13.37) kunnen we rijgen tot een integraal over een *polygonaal pad*

$$z_0 \to z_1 \to \cdots \to z_n$$

[9] Quod non.
[10] De eersten zullen de laatsten zijn.

middels

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} f(z)\,dz = \int_{z_0,\ldots,z_n} f(z)\,dz, \quad (13.38)$$

als $z \to f(z)$ een continue functie

$$[z_0, z_1] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n] \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

definieert. In het bijzondere geval dat $z_0 = z_n$ is eenvoudig na te gaan dat hier NUL uitkomt als $n = 2$.

Opgave 13.18. Ga dit na. Hint: neem eerst $z_0 = z_2, z_1 \in \mathbb{R}$ om te zien hoe het moet werken.

Wat deze opgave zegt is dat heen en weer lopen geen bijdrage aan een keten als in (13.38) geeft omdat vrijwel per definitie

$$\int_{z_0,z_1,z_0} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz + \int_{z_1}^{z_0} f(z)\,dz = 0,$$

voor *iedere* $[z_0, z_1] \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ continu. We kunnen integralen dus vereenvoudigen door heen en weer stukjes weg te laten, ook als die niet achter elkaar zitten in het polygonale pad.

Neem nu in je complexe vlak z_0, z_1, z_2, not all on a line[11], en neem aan dat

$$\Delta = \Delta_{z_0,z_1,z_2} = \{t_0 z_0 + t_1 z_1 + t_2 z_2 : t_0, t_1, t_2 \geq 0, t_0 + t_1 + t_2 = 1\} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

continu is. De verzameling Δ bestaat dus uit alle convexe combinaties van z_0, z_1, z_2 gezien als punten in het complexe vlak. Dat is een driehoekige tegel waarvan de rand een driehoek[12] is. *Teken plaatje!*

Laat z_3, z_4, z_5 de middens zijn van $[z_0, z_1]$, $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_0]$, die je krijgt door achtereenvolgens t_2, t_0, t_1 nul, en steeds de andere twee t-tjes $\frac{1}{2}$ te kiezen. Dan is

$$\int_{z_0,z_1,z_2,z_0} f(z)\,dz = \int_{z_0,z_3,z_5,z_4,z_3,z_1,z_4,z_2,z_5,z_0} f(z)\,dz =$$

$$\int_{z_0,z_3,z_5,z_0} f(z)\,dz + \int_{z_3,z_4,z_5,z_3} f(z)\,dz + \int_{z_3,z_1,z_4,z_3} f(z)\,dz + \int_{z_5,z_4,z_2,z_5} f(z)\,dz.$$

[11] Sommigen horen hierbij de stem van Erdös.

[12] Vereniging van 3 lijnstukjes: $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup [z_2, z_0]$, met zo gewenst een orientatie.

De integraal over het gesloten[13] pad

$$z_0 \to z_3 \to z_5 \to z_4 \to z_3 \to z_1 \to z_4 \to z_2 \to z_5 \to z_0$$

is zo enerzijds gelijk aan de integraal over het gesloten pad

$$z_0 \to z_1 \to z_2 \to z_0$$

rond de grote driehoek, en anderzijds de som van vier integralen over de vier gesloten paden

$$z_0 \to z_3 \to z_5 \to z_0, \quad z_3 \to z_4 \to z_5 \to z_3,$$

$$z_3 \to z_1 \to z_4 \to z_3, \quad z_5 \to z_4 \to z_2 \to z_5$$

rond de vier kleinere driehoeken.

Als de oorspronkelijke integraal niet nul was, zeg gelijk[14] aan 1, dan is tenminste één van de vier integralen in absolute waarde minstens gelijk aan $\frac{1}{4}$, en kan daarna met die integraal het argument herhaald worden om een rij geneste driehoeken

$$\Delta = \Delta_{z_0,z_1,z_2} \supset \Delta_{z_0^{(1)},z_1^{(1)},z_2^{(1)}} \supset \Delta_{z_0^{(2)},z_1^{(2)},z_2^{(2)}} \supset \Delta_{z_0^{(3)},z_1^{(3)},z_2^{(3)}} \supset \cdots$$

te maken met

$$|\int_{z_0^{(k)},z_1^{(k)},z_2^{(k)},z_0^{(k)}} f(z)\,dz| \geq \frac{1}{4^k}$$

voor $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Opgave 13.19. Bewijs dat de rijen $z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, z_2^{(k)}$ convergeren naar een limiet in Δ_{z_0,z_1,z_2} als $k \to \infty$.

Zonder beperking der algemeenheid mogen we nu wel aannemen[15] dat deze limiet gelijk is aan 0, i.e.

$$z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, z_2^{(k)} \to 0.$$

Kan het zo zijn dat f complex differentieerbaar is in 0? Zo ja, dan geldt voor $z \in \Delta$ dat

$$f(z) = f'(0)z + R(z)$$

[13] Teken het in je plaatje.
[14] Door $f(z)$ te delen door zijn integraal over de rand van Δ_{z_0,z_1,z_2}.
[15] Schuif de boel anders op.

met $R(z) = o(|z|)$ als $|z| \to 0$.

Maar dan is

$$\int_{z_0^{(k)},z_1^{(k)},z_2^{(k)},z_0^{(k)}} f(z)\,dz = \int_{z_0^{(k)},z_1^{(k)},z_2^{(k)},z_0^{(k)}} f'(0)z\,dz + \int_{z_0^{(k)},z_1^{(k)},z_2^{(k)},z_0^{(k)}} R(z)\,dz$$

$$= \int_{z_0^{(k)},z_1^{(k)},z_2^{(k)},z_0^{(k)}} R(z)\,dz,$$

omdat de eerste integraal nul is vanwege (13.15) toegepast op $\int_{z_0}^{z_1} z\,dz$, $\int_{z_1}^{z_2} z\,dz$, $\int_{z_2}^{z_0} z\,dz$. Dus volgt

$$\frac{1}{4^k} \leq |\int_{z_0^{(k)},z_1^{(k)},z_2^{(k)},z_0^{(k)}} R(z)\,dz| \leq \frac{|z_0 - z_1| + |z_1 - z_2| + |z_2 - z_0|}{2^k} \max_{z\in\delta\Delta^{(k)}} |R(z)|,$$

waarin $\delta\Delta^{(k)}$ de rand is van

$$\Delta^{(k)} = \Delta_{z_0^{(k)},z_1^{(k)},z_2^{(k)},z_0^{(k)}} \ni 0.$$

Omdat $|z|$ op zijn hoogste gelijk is aan de grootste afstand tussen twee punten in $\Delta^{(k)}$ geldt

$$|z| \leq \frac{d}{2^k} \quad \text{met} \quad d = \max_{z,w\in\Delta} |z - w|,$$

en samen met de 2^k die we al hadden krijgen nu ook een bovengrens voor de integraal, met een 4^k in de noemer en een $\varepsilon > 0$ naar keuze in de teller:

Opgave 13.20. Gebruik (de definitie van) $|R(z)| = o(|z|)$ als $|z| \to 0$ om met de laatste twee ongelijkheden een tegenspraak te forceren.

Stelling 13.21. *Voor iedere $f : \Delta_{z_0,z_1,z_2} \to \mathbb{C}$ die complex differentieerbaar is op de gesloten*[16] *driehoek Δ_{z_0,z_1,z_2} met hoekpunten $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ geldt dat*

$$\oint_{z_{012}} f(z)\,dz = \int_{z_0,z_1,z_2,z_0} f(z)\,dz = 0,$$

nu ook met een notatie[17] *die wellicht hierboven al voor de hand lag.*

[16] Voor w op de rand $f(z) = f(w) + f'(w)(z - w) + R(z; w)$ met $z \in \Delta_{z_0,z_1,z_2}$ lezen.
[17] Zie het rondje door de integraalslang heen maar als driehoekje.

Eenzelfde uitspraak geldt voor iedere n-hoek ($n > 3$) gemaakt uit n driehoeken

$$\Delta_{w_0,z_0,z_1}, \Delta_{w_0,z_1,z_2}, \ldots, \Delta_{w_0,z_{n-1},z_0},$$

met

$$\Delta_{w_0,z_0,z_1} \cap \Delta_{w_0,z_1,z_2} = [w_0, z_1], \quad \Delta_{w_0,z_1,z_2} \cap \Delta_{w_0,z_2,z_3} = [w_0, z_2],$$

$$\ldots$$

$$\Delta_{w_0,z_{n-2},z_{n-1}} \cap \Delta_{w_0,z_{n-1},z_n} = [w_0, z_{n-1}], \quad \Delta_{w_0,z_{n-1},z_0} \cap \Delta_{w_0,z_0,z_1} = [w_0, z_0].$$

Als de lijnstukjes waarmee (13.38) is gemaakt de zijden zijn van zo'n door

$$z_n = z_0, \ldots, z_{n-1} \tag{13.39}$$

gemaakte n-hoek met een punt w_0 in de n-hoek waarvoor alle $[w_0, z_k]$ in de veelhoek liggen[18], dan is

$$\oint_{z_0,\ldots,z_n} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{w_0,z_{k-1},z_k,w_0} f(z)\,dz.$$

Als $z \to f(z)$ complex differentieerbaar is in elk punt van

$$P_{z_0,\ldots,z_{n-1}} = \cup_{k=1}^{n} \Delta_{w_0,z_{k-1},z_k},$$

dan volgt zo dat

$$\oint_{z_n=z_0,\ldots,z_n} f(z)\,dz = 0. \tag{13.40}$$

Bovendien kan ieder punt z_k dan met de andere punten vastgehouden naar binnen geschoven worden naar een $\tilde{z}_k$ in de door (13.39) gemaakte veelhoek, waarbij (13.40) niet verandert met eenzelfde argument waarin driehoeken met hoekpunten $z_{k-1}, z_k, \tilde{z}_k, z_{k+1}$ voorkomen. Kortom, (13.40) geldt voor iedere complex differentieerbare

$$f : P_{z_0,\ldots,z_{n-1}} \to \mathbb{C}$$

op ieder domein $P_{z_0,\ldots,z_{n-1}}$ begrensd door lijnstukjes $[z_{k-1}, z_k] \subset P_{z_0,\ldots,z_{n-1}}$.

Merk op dat we op een vanzelfsprekende manier kunnen praten over het links- of rechtsom genummerd zijn van de hoekpunten (13.39), ook als de n-hoek niet gemaakt is zoals boven (13.39) beschreven is. Als er er (maar) eindig veel punten $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ zijn in $P_{z_0,\ldots,z_{n-1}}$ (maar niet op de rand van) waar f niet complex differentieerbaar is, dan het niet moeilijk om na te gaan

[18] De veelhoek is dan convex.

dat (13.40) gelijk is aan de som van de integralen over de randen van kleine driehoekjes

$$\Delta^{(j)} = \Delta_{z_0^{(j)}, z_1^{(j)}, z_2^{(j)}, z_0^{(j)}}$$

in $P_{z_0,\ldots,z_{n-1}}$ waar ζ_j echt in ligt, als die allemaal maar met dezelfde orientatie genomen worden. In dat geval is dus

$$\oint_{z_n = z_0,\ldots,z_n} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{p} \oint_{z_2^{(j)} = z_0^{(j)}, z_1^{(j)}, z_2^{(j)},} f(z)\,dz, \tag{13.41}$$

en we werken dat idee in het geval dat $p = 1$ met een hele bijzondere integrand nu uit in de volgende sectie, teneinde uiteindelijk ook te zien dat de termen in het rechterlid van (13.41) een verrassend simpele vorm krijgen.

13.7 Machtreeksen via een Cauchy integraalformule

Neem nu aan dat

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

een complex differentieerbare functie is op de open eenheidsdisk. Neem een $\zeta \in \mathbb{C}$ met $|\zeta| = \rho < 1$. We laten nu rechtstreeks zien dat

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n,$$

met integraalformules voor de coëfficiënten $a_n \in \mathbb{C}$. De integralen zijn daarbij over regelmatige polygonen in D, met hoekpunten dicht bij de cirkelvormige[19] rand van D.

We leiden de formules of door Stelling 13.21 toe te passen op integralen van

$$z \to \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

over geschikt gekozen driehoeken. Voor iedere $r \in (0,1)$ en $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 3$ definiëren de punten

$$z_k = r \exp(2\pi i \frac{k}{n})$$

de hoekpunten van een regelmatig n-hoek $C_{r,n}$ in D met middelpunt 0. Maak een plaatje met $0 < |\zeta| < r$ en $n = 8$ of zo. Laat k van 0 tot en met n lopen om het kringetje rond[20] te maken. *Teken plaatje!*

[19] Denk aan deze contouren: http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/7244.pdf

[20] Nou ja, rond...

Op dezelfde manier maken

$$w_k = \zeta + \rho \exp(2\pi i \frac{k}{n})$$

de hoekpunten van een regelmatig n-hoek $\zeta + C_{\rho,n}$, met middelpunt ζ dat binnen $C_{r,n}$ ligt als $\rho < r - |\zeta|$. Teken beide polygonen in je plaatje en merk op dat voor iedere complex differentieerbare functie

$$\{z \in D : z \neq \zeta\} \xrightarrow{g} \mathbb{C}$$

nu geldt dat

$$\oint_{z_{0-n}} g(z)\,dz =$$

$$\int_{z_0,z_1,\ldots,z_n=z_0} g(z)\,dz = \int_{w_0,w_1,\ldots,w_n=w_0} g(z)\,dz \tag{13.42}$$

$$= \oint_{w_{0-n}} g(z)\,dz,$$

voor elke $n \geq 3$, waarbij we ook hier de voor de hand liggende notatie[21] met $\oint$ gebruiken voor de integralen van $g(z)$ over de linksom[22] doorlopen n-hoeken.

Opgave 13.22. Bewijs (13.42) door de zigzagintegraal

$$\int_{w_0,z_0,w_1,z_1,\ldots,w_n,z_n} g(z)\,dz$$

mee te nemen in de beschouwingen en de stelling van Coursat toe te passen op in totaal $2n$ driehoekjes.

Nu nemen we voor $g(z)$ het differentiaalquotiënt

$$\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

en concluderen dat

$$\oint_{w_{0-n}} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\,dz = \oint_{z_{0-n}} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\,dz. \tag{13.43}$$

[21] Voor grote n is de veelhoek bijna een rondje.

[22] Dat is maar een woord hier, de punten bepalen de richting.

Opgave 13.23. De integraal in het linkerlid van (13.43) hangt van ρ af. Gebruik de differentieerbaarheid van f in ζ om te laten zien dat

$$\oint_{w_{0-n}} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\,dz \to 0$$

als $\rho \to 0$.

Maar de integraal in het linkerlid van (13.43) is gelijk aan de integraal in het rechterlid en hing niet van ρ af als $\rho < r - |\zeta|$. Hij ging[23] dus niet naar 0 want hij was al 0. Zo reduceert (13.43) tot

$$0 = \oint_{z_{0-n}} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz - \oint_{z_{0-n}} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,dz,$$

en volgt

$$f(\zeta)\oint_{z_{0-n}} \frac{1}{z-\zeta}\,dz = \oint_{z_{0-n}} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz.$$

Opgave 13.24. Laat zien dat

$$\oint_{z_{0-n}} \frac{1}{z-\zeta}\,dz = \oint_{w_{0-n}} \frac{1}{z-\zeta}\,dz = 2\pi i.$$

Hint: de eerste gelijkheid volgt als in Opgave 13.22 en de tweede integraal hangt niet van ζ of ρ af. In het linkerlid kan dus $\zeta = 0$ genomen worden. Op elke $[z_{k-1}, z_k]$ heeft $\frac{1}{z}$ een primitieve: de meerwaardige functie gedefinieerd in Opgave 8.3 die je als het goed is in Opgave 13.16 als laatste hebt gebruikt.

Stelling 13.25. *Als ζ ligt binnen een n-hoek zoals hierboven in de open eenheidsdisk D, en $f : D \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar is, dan is*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{z_{0-n}} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz.$$

This is the Cauchy Integral Formula, maar dan met n-hoeken in plaats van de gebruikelijke cirkels met middelpunt 0 en straal $r < 1$ groot genoeg.

Tenslotte volgt na het invullen van[24] de meetkundige reeksontwikkeling

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z^2} + \frac{\zeta^2}{z^3} + \frac{\zeta^3}{z^4} + \cdots$$

[23] Letterlijk gesproken.

[24] We prefereren weer de notatie met puntjes natuurlijk.

de machtreeksontwikkeling in de vorm als aangekondigd, via

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{z_{0-n}} f(z)(\frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z^2} + \frac{\zeta^2}{z^3} + \frac{\zeta^3}{z^4} + \cdots)\, dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{z_{0-n}} \frac{f(z)}{z}\, dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{z_{0-n}} \frac{f(z)}{z^2}\, dz\, \zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_{z_{0-n}} \frac{f(z)}{z^3}\, dz\, \zeta^2 + \cdots,$$

met

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\oint_{z_{0-n}} \frac{f(z)}{z^{j+1}}\, dz \tag{13.44}$$

voor alle $j \in \mathbb{N}_0$.

Stelling 13.26. *Als $f : D \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar is, dan geldt*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_n z^n$$

met a_j gegeven door (13.44), waarin de integraal nu door $z_k = r\exp(2\pi i \frac{k}{n})$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ wordt gedefinieerd. En achteraf zijn dan zowel $r \in (0, 1)$ als $n \geq 3$ arbitrair.

Het rechtvaardigen van het verwisselen van $\oint$ en $\sum$ is wezen niets anders dan opmerken dat voor elke α en β in $\mathbb{C}$ de verzameling

$$\{f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} : f \text{ is continu}\}$$

een (complexe) Banachruimte is, net zoals $C([a, b])$ een reële Banachruimte is. Het wordt dus tijd voor het volgende hoofdstuk.

Voor hier is het nog de vraag of we de limiet $n \to \infty$ willen nemen in Stelling 13.25 en (13.44) teneinde de $\oint$ te nemen over de cirkel geparametriseerd door

$$z = r\exp(i\theta) \quad \text{met} \quad dz = ir\exp(i\theta)d\theta \tag{13.45}$$

und so weiter.

Dat laatste kan komen na de observatie dat voor $0 \leq \rho < R$ en complex differentieerbare

$$A_{\rho,R} = \{z \in \mathbb{C} : \rho < |z| < R\} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

geldt dat $f(z)$ te schrijven is als een zogenaamde *Laurentreeks*, i.e.

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{-j}}{z^j}, \tag{13.46}$$

met a_j gegeven door (13.44) voor *alle* $j \in \mathbb{Z}$, maar $n \geq 3$ en $r \in (\rho, R)$ wel zo gekozen dat met de punten $z_k = r\exp(2\pi i\frac{k}{n})$ de n-hoek in de annulus $A_{\rho,R}$ ligt.

Je bewijst dit met drie veelhoeken in $A_{\rho,R}$, waar ζ dan tussen twee van de drie in moet liggen, en in de kleinste. Als je eenmaal op het idee[25] bent gekomen wijst het zich vanzelf. De integraal over de nieuwe veelhoek wordt ook weer via een net iets andere meetkundige reeks in een machtreeks vertaald, nu met $\frac{1}{\zeta}$ die naar buiten gehaald wordt uit $\frac{1}{z-\zeta}$.

Deze zo verkregen spectaculaire uitspraak wordt gewoonlijk bewezen *na* het invoeren van lijnintegralen over echte krommen[26] zoals gegeven door (13.45) en de hele machinerie die nodig is om netjes te beschrijven wat krommen[27] eigenlijk zijn, waarbij vaak ook de continuiteit van $z \to f'(z)$ wordt gebruikt om de nog te bespreken stellingen van Green te kunnen gebruiken.

Die laatste stellingen zijn dus hier niet nodig. En de veelhoeken bieden veel meer mogelijkheden. Bijvoorbeeld voor functies die gedefinieerd en complex differentieerbaar zijn op gebieden ingesloten door twee geneste veelhoeken. Dat is misschien nog leuk om uit te zoeken.

Opgave 13.27. Natuurlijk geldt Stelling 13.26 niet alleen voor de eenheidsdisk, en kan r zowel zo klein als zo groot mogelijk gekozen worden voor het polygon waarmee de coefficienten worden berekend. Gebruik dit om te bewijzen dat er geen niet-constante begrensde complex differentieerbare functies $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zijn.

13.8 De Cauchy Integraal Transformatie

De formule in Stelling 13.25 schrijven we met $1 = I$ en $\zeta = A$ als

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_{0-n}} f(z)(zI - A)^{-1}\, dz, \tag{13.47}$$

nu voor een willekeurig polygon waar A binnen ligt en waarop

$$z \to (zI - A)^{-1} \tag{13.48}$$

dus bestaat als zeker een continue functie. Het polygon hoeft ook niet per se in de eenheidsdisk te liggen. Van de functie $z \to f(z)$ hoeven we bij nadere

[25] Gauss en Cauchy gingen ons voor.....

[26] Denk aan die goal van nummer 14 in het Zuiderpark en de enige echte Kromme.

[27] Denk ook aan hoe Murre dit woord uitspreekt.

beschouwing alleen maar aan te nemen dat f complex differentieerbaar is op het gebied begrensd door een polygon, inclusief het polygon[28] zelf.

Let op, de hoekpunten van het polygon moeten wel "linksom" genummerd worden, hetgeen ondubbelzinnig gedefinieerd kan worden aan de hand van de vergelijkingen voor de lijnen door de opeenvolgende hoekpunten, met iedere $z_k = x_k + iy_k$ opgevat als $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$, waarbij je wil formuleren dat het binnengebied van het polygon steeds links van ieder georienteerde interval $[z_{k-1}, z_k]$ ligt.

Met deze notatie kunnen we (13.47) nu ook lezen lezen met A een vierkante eerst nog reële matrix gezien als een continue lineaire afbeelding van $X = \mathbb{R}^n$ naar zichzelf, afbeeldingen die een algebra[29] vormen. Hier is nog het een en ander mee te doen, met behulp ook van

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{z}(I + \frac{1}{z}A + \cdots)$$

als $|z|$ voldoende groot is, misschien beter meteen maar voor algemene X in Sectie 14.6.

De vraag is natuurlijk wel eerst wat we precies onder *A binnen het polygon gedefinieerd door*

$$z_0 \to z_1 \to \cdots \to z_n = z_0$$

moeten verstaan, als we (13.47) zomaar overschrijven met ζ vervangen door een lineaire operator $A : X \to X$. Voor de hand ligt dat A zo moet zijn dat met een groter polygon de zigzagtruc weer werkt, en de integrand als $L(X)$-waardige functie complex differentieerbaar is op het gebied tussen de twee polygonen, en ook op de twee polygonen zelf, en dat weer voor ieder groter polygon.

Daartoe moeten X en ook $L(X)$ zelf eerst complex uitgebreid worden, hetgeen abstract een constructie vereist maar in voorbeelden automatisch[30] gaat. En daarna is dan de natuurlijke eis dat (13.48) op het polygon en zijn buitengebied moet bestaan in de complexe versie van $L(X)$. Lees wat dit betreft verder in Sectie 14.6.

13.9 Kromme lijnintegralen

Met behulp van (13.37) is in (13.38)

$$\int_{z_0,\ldots,z_n} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z)\,dz \tag{13.49}$$

[28] Via een zigzagintegraal als in Opgave 13.22 volgt de geldigheid van (13.47).
[29] Een Banachalgebra zelfs, zie Charlie's teleurstelling in Flowers for Algernon.
[30] Denk hier even over na.

gedefinieerd voor een rij punten die we (nog) niet als partitie zien, waarvoor we ook (nog) niet Riemanntussensommen als

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \quad \text{met} \quad \zeta_k \in [z_{k-1}, z_k] \tag{13.50}$$

hebben ingevoerd, zie Sectie 3.5. Maar als de "incrementen" $z_k - z_{k-1}$ klein zijn ligt gezien (13.37) iedere term in (13.50) voor de hand als benadering voor de overeenkomstige term in het rechterlid van (13.49) via

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z)\,dz = \int_0^1 f((1-t)z_{k-1} + tz_k)dt\,(z_k - z_{k-1}) \approx f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

De vraag wat er gebeurt als $n \to \infty$ is echter nog niet goed gesteld, want de rij "partities" kan in principe willekeurig zijn.

In iedere schatting die het limietgedrag onder controle moet krijgen zal, behalve het klein worden van de incrementen, ook het gedrag van

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|$$

een rol spelen, met

$$z_k = z_k^{(n)}$$

zinvol afhankelijk van n gekozen, maar wat is zinvol? Hieronder wat overwegingen en een aanzet tot een uitgewerkt antwoord.

Het stuksgewijs lineaire pad P_n van $z_0^{(n)}$ via $z_1^{(n)}, \ldots, z_{n-1}^{(n)}$, naar $z_n^{(n)}$ voor $n \to \infty$ moet een nog te formuleren limietgedrag hebben, waarmee in ieder geval voor continue $z \to f(z)$ volgt dat

$$\int_{P_n} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}^{(n)}}^{z_k^{(n)}} f(z)\,dz \quad \text{en} \quad \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k^{(n)})(z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)}) \tag{13.51}$$

convergeren naar een limiet die we $\int_P f(z)\,dz$ zouden willen noemen.

Voor het verschil van deze sommen geldt

$$|\sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}^{(n)}}^{z_k^{(n)}} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k^{(n)})(z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)})| =$$

$$|\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 f((1-t)z_{k-1}^{(n)} + tz_k^{(n)})dt\,(z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)}) - \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k^{(n)})(z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)})| ==$$

$$|\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 (f((1-t)z_{k-1}^{(n)}+tz_k^{(n)})-f(\zeta_k^{(n)}))dt\,(z_k^{(n)}-z_{k-1}^{(n)})| \le$$

$$\max_{k=1,\dots,n}|f((1-t)z_{k-1}^{(n)}+tz_k^{(n)})-f(\zeta_k^{(n)})|\sum_{k=1}^{n}|z_k^{(n)}-z_{k-1}^{(n)}| \le$$

$$\max_{k=1,\dots,n}\sup_{z,w\in[z_{k-1}^{(n)},z_k^{(n)}]}|f(z)-f(w)|\sum_{k=1}^{n}|z_k^{(n)}-z_{k-1}^{(n)}|,$$

en dat zou klein moeten zijn als f uniform continu is op een geschikt gekozen domein dat alle paden P_n bevat. In dat geval zijn de aannames dat

$$\mu_n = \max_{k=1,\dots,n}|z_k^{(n)}-z_{k-1}^{(n)}| \to 0 \tag{13.52}$$

en

$$L_n = \sum_{k=1}^{n}|z_k^{(n)}-z_{k-1}^{(n)}| \quad \text{begrensd} \tag{13.53}$$

is als $n\to\infty$ voldoende om het verschil tussen de termen in (13.51) naar 0 te doen gaan als $n\to\infty$.

Voor we een definitie geven bekijken we wat we langs deelrijen sowieso kunnen bereiken kwa convergentie van P_n onder de aanname dat (13.52) en (13.53) gelden, en

$$z_0^{(n)} = a \quad \text{en} \quad z_n^{(n)} = b \tag{13.54}$$

vastgehouden worden in $\mathbb{C}$. We kijken dus naar mogelijke limieten van stuksgewijs lineaire paden van a naar b.

Het ligt voor de hand meteen een deelrij te nemen waarlangs L_n convergent is, zeg $L_{n_k}\to L\ge|b-a|$ met n_k een stijgende rij in $\mathbb{N}$. Vanaf zekere zulke n is er dan steeds een eerste $j=j_n$ waarvoor geldt dat de totale lengte langs P_n van a tot $z_{j_n}^{(n)}$ minstens $\frac{L}{2}$ is, en langs een verdere deelrij convergeren dan zowel $z_{j_n}^{(n)}$ als $z_{j_n-1}^{(n)}$ naar een limiet $z_{\frac{1}{2}}$.

Maar dit argument werkt niet alleen voor $\frac{1}{2}$. Voor elke $t\in(0,1)$ kunnen we vanaf zekere n een eerste $j=j_n^t$ vinden waarvoor de totale lengte langs P_n van a tot $z_{j_n^t}^{(n)}$ minstens tL is. Doen we dit voor

$$t=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8},\dots,$$

dan geeft een diagonaalrijargument[31] dat, voor elke rationale $t\in(0,1)$ met een noemer die een pure macht van 2 is, dat langs de geconstrueerde deelrij geldt dat

$$z_{j_n^t}^{(n)}$$

[31] Zie Sectie 5.4.

convergeert naar een limiet z_t voor al zulke t. Dit definieert een afbeelding

$$t \to z(t) = z_t,$$

waarvoor per constructie geldt[32] dat

$$|z(t_1) - z(t_2)| \leq |t_1 - t_2|L, \tag{13.55}$$

en die uniek uitbreidt tot een afbeelding $z : [0,1] \to \mathbb{C}$ met dezelfde eigenschap.

Onze eerste geparametriseerde kromme die niet per se van de vorm (13.36) is. Een kromme waarvan de lengte nog niet gedefinieerd maar wel gelijk aan L is, als alles goed is[33], en waarlangs we kunnen integreren, middels benaderingen met Riemannsommen van de vorm

$$\sum_j f((z(\tau_j))(z(t_j) - z(t_{j-1}).$$

Wat we van dit alles hier willen uitwerken is nog de vraag, maar voor continu differentieerbare zulke $t \to z(t)$ is

$$\int_P f(z)\,dz = \int_0^1 f(z(t))z'(t)\,dt$$

een uitspraak die we willen hebben, waarbij het linkerlid gedefinieerd is als

$$\lim_{n\to\infty} \int_{P_n} f(z)\,dz$$

en de limiet langs de deelrij wordt genomen en moet bestaan. Dat vergt nog een stelling voor bijvoorbeeld continue $z \to f(z)$.

[32] Wel even nagaan!

[33] En de lengte van het stuk tussen t_1 en t_2 gelijk aan $|t_1 - t_2|L$.

14 Analyse in genormeerde ruimten

We hebben het al gehad over vectorruimten van functies. In zulke vectorruimten willen we over limieten kunnen spreken net zoals we dat doen in $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ gebruiken we daarvoor absolute waarden van verschillen, in algemene vectorruimten zoeken we naar een geschikte norm waarmee we de verschillen meten. Een eerste voorbeeld is de zogenaamde 1-norm.

Definitie 14.1. *Voor iedere* $f \in \mathrm{RI}[a,b]$ *schrijven we*

$$|f|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Definitie 14.2. *Als* X *een lineaire vectorruimte over* $\mathbb{R}$ *is, en*

$$x \in X \to |x|_X \in \mathbb{R}$$

een afbeelding met de eigenschap dat voor alle $x, y \in X$ *en voor alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *geldt dat*

$$(i) \quad |x|_X \geq 0,\, |x|_X = 0 \iff x = 0; \quad (ii) \quad |\lambda x|_X = |\lambda|\,|x|_X$$

$$(iii) \quad |x+y|_X \leq |x|_X + |y|_X,$$

dan heet X *genormeerd met norm* $|\cdot|_X$. *De subscript* X *laten we graag weg.*

Een Cauchyrij in X *is een door* $n \in \mathbb{N}$ *genummerde rij* $x_n \in X$ *met* $|x_n - x_m|_X \to 0$ *als* $m, n \to \infty$.

Als alle Cauchyrijen in X *convergent zijn, met per definitie hun limiet in* X, *dan heet* X *volledig. Volledige ruimten worden Banachruimten genoemd.*

Opgave 14.3. Geef de ε-definitie van $|x_n - x_m|_X \to 0$ als $m, n \to \infty$. Geef ook de definitie van het convergent zijn van de rij x_n in X.

Opgave 14.4. Waarom is $|\cdot|_1$ geen norm op $\mathrm{RI}([a,b])$ maar wel op $C([a,b])$?

De voor de liggende norm op $C([a,b])$ is de ∞-norm, die de limiet is van de p-normen[1]

$$|f|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{14.1}$$

[1] $p \geq 1$.

voor $p \to \infty$, al zie je dat aan de definitie

$$|f|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \tag{14.2}$$

misschien niet meteen. Deze norm wordt op $C([a,b])$ ook wel de maximumnorm genoemd.

Stelling 14.5. *Met de maximumnorm (14.2) is $C([a,b])$ een Banachruimte.*

Bewijs. We bewijzen alleen dat $C([a,b])$ met de maximum norm (wel) volledig is. Neem een Cauchyrij in f_n in $C([a,b])$. Je had in Opgave 14.3 al bedacht dat de uitspraak dat $|f_n - f_m|_\infty \to 0$ als $m,n \to \infty$ equivalent is met

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} : m,n \geq \mathrm{N} \implies |f_n - f_m|_\infty \leq \varepsilon, \tag{14.3}$$

ofwel

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} : \quad m,n \geq \mathrm{N} \implies |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]. \tag{14.4}$$

Maar dan is voor elke vast gekozen $x \in [a,b]$ de rij $f_n(x)$ een Cauchyrij in $\mathbb{R}$ en dus convergent met een limiet die we $f(x)$ noemen. Daarmee is een functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd en te bewijzen is natuurlijk dat $f \in C([a,b])$.

Voor we dat doen merken we op dat in (14.4) nu de limiet $m \to \infty$ genomen kan worden waarmee de uitspraak

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} : \quad n \geq \mathrm{N} \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a,b] \tag{14.5}$$

zich aandient. Als nu f (en dus ook $f - f_n$) inderdaad in $C([a,b])$ zit dan is (14.5) equivalent met

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} : m,n \geq \mathrm{N} \implies |f_n - f|_\infty \leq \varepsilon \tag{14.6}$$

en zijn we klaar.

Waarom zit f in $C([a,b])$? Neem weer $\varepsilon > 0$ en probeer $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ te krijgen door $|x - y| \leq \delta$ voor een bijbehorende $\delta > 0$ te eisen. Dat moet wel via de f_n want die zijn uniform continu. Schrijf daartoe

$$f(x) - f(y) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y),$$

waarmee

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq\varepsilon \text{ als } n \geq \mathrm{N}} + |f_n(x) - f_n(y)| + \underbrace{|f_n(y) - f(y)|}_{\leq\varepsilon \text{ als } n \geq \mathrm{N}}. \tag{14.7}$$

In (14.7) kiezen we nu $n = \mathrm{N}$ en bij die vaste N een $\delta > 0$ zodanig dat voor de middelste term geldt dat

$$|f_{\mathrm{N}}(x) - f_{\mathrm{N}}(y) \leq \varepsilon \quad \text{als} \quad |x - y| \leq \delta,$$

culminerend in

$$|f(x) - f(y) \leq 3\varepsilon \quad \text{als} \quad |x - y| \leq \delta$$

vanwege (14.7). Hiermee is het bewijs klaar omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen was.

Opgave 14.6. De voorfactor 3 doet er niet toe. Waarom niet?

Definitie 14.7. *Als de rij $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ voldoet aan (14.5) in het bewijs hierboven dan heet de rij f_n uniform convergent op $[a, b]$. In deze definitie kan $[a, b]$ natuurlijk vervangen worden door een willekeurig interval I.*

14.1 Calculus voor X-waardige functies

Als X een genormeerde ruimte is dan kunnen we voor $f : [a, b] \to X$ de definitie van uniform continu overschrijven met $|f(x) - f(y)|$ in plaats van $|f(x) - f(y)|$, zie Definitie 3.23. Als de aardige en nuttige oefening in Sectie 3.5 is gelukt dan heb je nu een bewijs van de volgende stelling.

Stelling 14.8. *Laat X een Banachruimte zijn en $f : [a, b] \to X$ uniform continu. Dan bestaat er een unieke $J \in X$ waarvoor geldt dat*

$$|S - J| \leq \varepsilon(b - a)$$

voor elke S van de vorm (3.7), mits $x_k - x_{k-1} \leq \delta$ voor alle $k = 1, \ldots, \mathrm{N}$ waarmee de bijbehorende partitie P in (3.4) genummerd wordt. Per definitie is

$$J = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dat uniforme continuïteit ook hier uit puntsgewijze continuïteit volgt is ook weer een kwestie van overschrijven.

Opgave 14.9. Als $g : X \to \mathbb{R}$ een lineaire functie is, hetgeen nog steeds betekent dat

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \quad \text{en} \quad g(\lambda x) = \lambda g(x) \quad \text{voor alle} \quad x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{R},$$

dan is $x \to g(f(x))$ weer een $\mathbb{R}$-waardige functie. Met een schatting van de vorm

$$|g(x)| \leq L|x| \quad \text{voor alle} \quad x \in X, \tag{14.8}$$

en dat voor een vaste $L \geq 0$, moet uit je bewijs voor Stelling 14.8 nu volgen dat

$$g(J) = \int_a^b g(f(x))\,dx,$$

als integraal van een gewone continue $\mathbb{R}$-waardige functie op $[a, b]$. Verifieer dit eerst voor $L = 1$. Hint: de relevante schattingen voor ondermeer de Riemannsommen bij $x \to g(f(x))$ zijn voor $L = 1$ identiek aan die voor de sommen bij f.

Definitie 14.10. *Een lineaire afbeelding $g : X \to \mathbb{R}$ van een genormeerde ruimte X naar $\mathbb{R}$ heet begrensd als (14.8) geldt voor een zekere $L \geq 0$.*[2]

Opgave 14.11. Bewijs voor lineaire afbeeldingen $g : X \to \mathbb{R}$ van een genormeerde ruimte X naar $\mathbb{R}$ dat

$$g \text{ is uniform Lipschitz continu} \iff g \text{ is begrensd} \iff g \text{ is continu in } x = 0$$

Bewijs ook de volgende stelling.

Stelling 14.12. *Laat X^* de verzameling van alle begrensde lineaire functies $g : X \to \mathbb{R}$ zijn. Dan is X^* met de voor de hand liggende bewerkingen en de (operator)norm*

$$|g|_{op} = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{|g(x)|}{|x|_X}$$

een Banachruimte, die de duale ruimte van X genoemd wordt. We schrijven meestal gewoon $|g|$ voor $|g|_{op}$ en $|x|$ voor $|x|_X$, maar in de formule staan drie verschillende normen.

Voor $F : [a, b] \to X$ kunnen we de definitie van differentieerbaarheid in een vaste $x_0 \in [a, b]$ overschrijven van Definitie 7.1 met de expansie

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + hF'(x_0) + R(h; x_0), \tag{14.9}$$

waarin

$$h \xrightarrow{F'(x_0)} hF'(x_0)$$

[2] Op $\mathbb{R}^n$ zijn alle lineaire functies begrensd.

met $F'(x_0) \in X$ gezien wordt als continue lineaire afbeelding en de restterm moet voldoen aan

$$|R(h;x_0)| = o(|h|) \quad \text{als} \quad h \to 0. \tag{14.10}$$

Ook Stelling 7.3 kan nu met bewijs en al worden overgeschreven voor $f : [a,b] \to X$ (uniform) continu.

Stelling 14.13. *Laat X een Banachruimte zijn. Definieer voor een continue functie $f : [a,b] \to X$ de functie $F : [a,b] \to X$ door*

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,ds.$$

Dan is F differentieerbaar in elke $x_0 \in [a,b]$, met afgeleide $F'(x_0) = f(x_0)$.

Merk op dat in het bewijs de 3-hoeksongelijkheid voor integralen werd gebruikt. Die geldt ook hier, rechtstreeks vanuit de definities. Voor f als in Stelling 14.8 geldt

$$|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

waarbij de continuïteit van $x \to |f(x)|$ volgt uit

$$|\,|f(x)| - |f(y)|\,| \leq |f(x) - f(y)|,$$

de omgekeerde[3] 3-hoeksongelijkheid toegepast op $f(x)$ en $f(y)$.

Stelling 14.13 zegt weer dat F een primitieve is van kleine f en voor deze primitieve geldt met $x = b$ dat

$$\int_a^b f(s)\,ds = F(b) - F(a), \tag{14.11}$$

omdat $F(a) = 0$. Als $\tilde{F}$ een andere primitieve is van f dan geldt voor

$$G = F - \tilde{F} : [a,b] \to X$$

dat G differentieerbaar is met $G'(x) = 0$ voor alle $x \in [a,b]$.

Opgave 14.14. Laat zien dat voor elke $g \in X^*$ de reëelwaardige functie

$$x \xrightarrow{\phi} g(G(x))$$

[3] Onthouden als $x \to |x|$ is uniform Lipschitz continu met Lipschitz constante $L = 1$.

nu differentieerbaar is op $[a, b]$ met afgeleide in iedere $x \in [a, b]$ gedefinieerd door

$$h \xrightarrow{\phi'(x)} g(G(x))G'(x)h = 0$$

voor $h \in \mathbb{R}$. Dus $\phi(b) = \phi(a)$ via de middelwaardestelling (Stelling 7.5).

We concluderen hieruit dat $g(G(b)) - g(G(a)) = 0$ voor elke $g \in X^*$. Voor $y = G(b) - G(a)$ geldt dus dat $g(y) = 0$ voor alle $g \in X^*$. We zeggen dat de continue lineaire functies de punten in X scheiden als dit impliceert dat $y = 0$. In dat geval zijn we klaar want dan is $F(b) - F(a) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)$. Hiermee is de volgende stelling bewezen, waarin we $\tilde{F}$ weer F noemen.

Stelling 14.15. *Laat X een Banachruimte zijn waarop de continue lineaire functies de punten scheiden*[4]. *Als $f : [a, b] \to X$ continu is op $[a, b]$ en de continue differentieerbare functie $F : [a, b] \to X$ als primitieve heeft*[5]*, dan is*

$$\int_a^b f(s)\, ds = F(b) - F(a).$$

14.2 Differentiaalrekening voor functies op X

Ook als X een genormeerde ruimte is en

$$F : X \to \mathbb{R}$$

een reëelwaardige functie[6] op X, dan kunnen we de definitie van differentieerbaarheid in een vaste $x_0 \in X$ overschrijven van Definitie 7.1, beginnende met de expansie

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + F'(x_0)(h) + R(h; x_0), \tag{14.12}$$

waarin

$$F'(x_0) : X \to \mathbb{R}$$

lineair is en de restterm moet voldoen aan

$$|R(x_0, h)| = o(|h|) \quad \text{als} \quad |h| \to 0. \tag{14.13}$$

Definitie 14.16. *Een functie $F : X \to \mathbb{R}$ op een genormeerde ruimte heet differentieerbaar in $x_0 \in X$ als er een $g = F'(x_0) : X \to \mathbb{R}$ in X^* bestaat*[7] *zodanig dat (14.12) geldt met (14.13).*

[4] Op Banachruimten scheiden de continue lineaire functies de punten (Hahn-Banach).
[5] Hetgeen ook hier betekent dat $F'(x) = f(x)$ voor alle $x \in [a, b]$.
[6] Iedere $F : A \to \mathbb{R}$ met $A \subset X$ breidt uit tot $F : X \to \mathbb{R}$ via $F(x) = 0$ voor $x \notin A$.
[7] Let op, de continuiteit van de lineaire $F'(x_0) : X \to \mathbb{R}$ is essentieel: Opgave 14.17!

Opgave 14.17. Als een reëelwaardige $F : X \to \mathbb{R}$ op een genormeerde ruimte differentieerbaar in $x_0 \in X$ dan is F ook continu in x_0. Bewijs dit.

Opgave 14.18. Formuleer en bewijs de regel van Leibniz voor $F, G : X \to \mathbb{R}$. Hint: schrijf Opgave 4.11 en je uitwerking van die opgave over met normstrepen in plaats van absolute waarde strepen.

Ook van $F' : X \to X^*$ willen we kunnen zeggen of F' differentieerbaar is in een $x_0 \in X$ en daartoe schrijven we Definitie 14.16 over voor $F : X \to Y$ als X en Y genormeerde ruimten zijn.

Een search op $\to \mathbb{R}$ en replace by $\to Y$ dus, waarbij absolute waarde strepen in $\mathbb{R}$ weer vervangen worden door normstrepen voor de norm in Y, en $F'(x_0) \in X^*$ moet worden vervangen door $F'(x_0) \in L(X, Y)$, de genormeerde ruimte van lineaire afbeeldingen $A : X \to Y$ waarvoor $|Ax|_Y \leq |A|_{op} |x|_X$ voor alle $x \in X$, nu met de norm van Ax in Y, en $|A|_{op}$ weer de kleinste constante M waarvoor $|Ax|_Y \leq M |x|_X$ voor alle $x \in X$. Met $Y = X^*$ hebben we dan ook de definitie van twee keer differentieerbaar, enzovoorts.

Zonder extra algebraische structuur is de Leibnizregel niet meer zo maar over te schrijven, maar de kettingregel gaat weer precies hetzelfde.

Opgave 14.19. Schrijf Opgaven 4.14 en 4.15 en je uitwerking over voor $F : X \to Y$ en $G : Y \to Z$ met X, Y, Z genormeerde ruimten.

Kortom, veel van de gewone differentiaalrekening is precies hetzelfde in de algemene context. Belangrijke uitzonderingen zijn de middelwaardestelling (Stelling 7.5) en de inverse functiestelling zoals geformuleerd voor monotone functies. Beide stellingen maken echt gebruikt gebruik van de 1-dimensionale structuur die $\mathbb{R}$ heeft en de bijbehorende argumenten waarin het woordje "tussen" essentieel is.

De middelwaardestelling kan echter wel mooi in stelling gebracht worden voor

$$F : X \to \mathbb{R},$$

door voor twee punten $x, y \in X$ een functie $t \to \xi(t) \in X$ te introduceren die x en y met elkaar "verbindt", bijvoorbeeld

$$\xi(t) = (1-t)x + ty, \quad \xi : [0,1] \to X, \tag{14.14}$$

waarbij we spreken over het interval

$$[x,y] = \{\xi(t) = (1-t)x + ty;\, 0 \le t \le 1\}, \tag{14.15}$$

de door $t \in [0,1]$ geparametriseerde convexe combinaties van x en y, en ook over het interval

$$(x,y) = \{\xi(t) = (1-t)x + ty;\, 0 < t < 1\}. \tag{14.16}$$

Stelling 14.20. *Als $F : X \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is op X, dan is er voor elke $x, y \in X$ een $\xi \in (x,y)$ waarvoor geldt dat*

$$F(y) - F(x) = F'(\xi)(y-x).$$

Bewijs. Volgens de kettingregel is $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$t \xrightarrow{\phi} F(\xi(t)) \in \mathbb{R} \tag{14.17}$$

differentieerbaar op $[0,1]$, met

$$\phi'(t) = F'(\xi(t))(y-x).$$

De middelwaardestelling (Stelling 7.5) geeft nu een $\tau \in (0,1)$ waarvoor geldt dat $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\tau)$. Noem $\xi(\tau)$ nu ξ en het bewijs is klaar.

Neem nu een willekeurige Banachruimte Y en $F : X \to Y$ continu differentieerbaar. Als we Stelling 14.15 toepassen met $a = 0$ en $b = 1$ op de functie $\phi : [0,1] \to Y$ gedefinieerd door (14.17), dan volgt uit

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t)\, dt$$

en

$$\phi'(t) = F'((1-t)x + ty)(y-x)$$

dat

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 F'((1-t)x + ty)(y-x)\, dt \tag{14.18}$$

als Y-waardige integraal.

In het geval dat $Y = \mathbb{R}$ wordt deze $\mathbb{R}$-waardige integraal begrensd door het maximum en het minimum van de integrand, en dus volgt dat $F(y) - F(x) = F'(\xi)(y-x)$ voor een zekere

$$\xi \in [x,y] = \{(1-t)x + ty,\, 0 \le t \le 1\},$$

een iets zwakkere uitspraak dan in Stelling 14.20.

Als F niet $\mathbb{R}$-waardig maar Y-waardig dan werkt dit argument niet. Echter, als we Stelling 14.15 toepassen met $a = 0$ en $b = 1$ op de functie $\phi : [0,1] \to Y$ gedefinieerd door

$$\phi : t \xrightarrow{\xi} (1-t)x + ty \xrightarrow{F} Y$$

met $x, y \in X$ en $F : X \to Y$ continu differentieerbaar, dan volgt uit

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t)\, dt$$

en

$$\phi'(t) = F'((1-t)x + ty)(y - x)$$

dat

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 F'((1-t)x + ty)(y - x)\, dt \tag{14.19}$$

als Y-waardige integraal, hetgeen ook te schrijven is als

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 F'((1-t)x + ty)\, dt(y - x), \tag{14.20}$$

een $B(X,Y)$-waardige integraal werkend op $y - x \in X$.

Vanwaar al deze uitwijdingen? Omdat formulering en bewijs van de impliciete functiestelling voor $F : X \times Y \to Z$ nu kunnen worden overgeschreven van Stelling 7.24 in Sectie 7.4. Speciaal geval $Z = Y$. Nog specialer: $X = \mathbb{R}^m$ en $Y = Z = \mathbb{R}^n$. Ook interessant: $X = \mathbb{R}$ en $Y = Z = C([a,b])$. Denk aan Sectie 14.5.

14.3 Partieel differentieerbaar $\Longrightarrow$?

We hebben gezien dat $F : \mathbb{R}^2$ differentieerbaar is in x_0, y_0 als er $a, b \in \mathbb{R}$ bestaan zo dat (13.8) geldt en de restterm voldoet aan de conditie onder (13.8). In dat geval bestaan de partiële afgeleiden

$$a = (\frac{\partial F}{\partial x})(x_0, y_0) = F_x(x_0, y_0) \quad \text{en} \quad b = (\frac{\partial F}{\partial y})(x_0, y_0) = F_x(x_0, y_0),$$

en leest (13.8) met $x = x_0 + h$ en $y = y_0 + k$ als

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \text{restterm}.$$

We gebruiken de subscripts hier dus weer voor de partiële afgeleiden die we in Opgave 13.5 gevonden hebben voor a en b als

$$a = F_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$b = F_y(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0)}{k} = \lim_{y \to y_0} \frac{F(x_0, y) - F(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

door de eigenschap van de restterm te gebruiken.

Het kan natuurlijk zijn dat voor een gegeven $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $x_0 \in \mathbb{R}$ en $y_0 \in \mathbb{R}$ de partiële afgeleiden $F_x(x_0, y_0)$ en $F_y(x_0, y_0)$ zo bestaan als twee limieten, maar op zich zegt dat weinig. Als bijvoorbeeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd is door $F(x, y) = 0$ als $xy = 0$ en $F(x, y) = 1$ als $xy \neq 0$ dan is $F_x(0, 0) = F_y(0, 0) = 0$, maar F is zeker niet differentieerbaar in $(0, 0)$, want de lineaire benadering zou dan de nulfunctie zijn en die komt voor $xy \neq 0$ niet de buurt van de functiewaarde 1.

Dus wat hebben we nodig van $x \to F(x, y)$ en $y \to F(x, y)$ als we alleen deze “partiële” functies mogen gebruiken om te kunnen concluderen dat

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

differentieerbaar is in (x_0, y_0)? We denken bij deze vraag aan het algemenere geval van

$$F : X \times Y \to \mathbb{R},$$

en $x_0 \in X, y_0 \in Y$, en nemen aan dat $x \to F(x, y)$ en $y \to F(x, y)$ voor respectievelijk vaste $y \in B_\delta(y_0)$ en vaste $x \in B_\delta(x_0)$ differentieerbaar[8] zijn op respectievelijk $B_\delta(x_0)$ en $B_\delta(y_0)$, met $\delta_0 > 0$ vast.

Via de middelwaardestelling (Stelling 14.20) voor functies van genormeerde ruimten naar $\mathbb{R}$ is

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F(x, y) - F(x_0, y_0) =$$

$$F(x_0, y_0) + \underbrace{F(x, y) - F(x_0, y)}_{\text{vary } x} + \underbrace{F(x_0, y) - F(x_0, y_0)}_{\text{vary } x} =$$

$$F(x_0, y_0) + F_x(\xi(y), y)(x - x_0) + F_y(x_0, \eta)(y - y_0),$$

voor $x \in B_\delta(x_0)$ en $y \in B_\delta(y_0)$ met $\xi(y) \in (x_0, x)$ en $\eta \in (y_0, y)$. Bijgevolg is

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R \quad (14.21)$$

[8] We gebruiken van $y \to F(x, y)$ alleen maar de differentieerbaarheid voor $y = y_0$.

met restterm

$$R = (F_x(\xi(y), y) - F_x(x_0, y_0))(x - x_0) + (F_y(x_0, \eta) - F_y(x_0, y_0))(y - y_0).$$

Als

$$(x, y) \to F_x(x, y) \quad \text{en} \quad y \to F_y(x_0, y)$$

continu zijn in respectievelijk (x_0, y_0) en y_0 dan voldoet R nu aan

$$|R| \leq |(F_x(\xi(y), y) - F_x(x_0, y_0))(x - x_0)| + |(F_y(x_0, \eta) - F_y(x_0, y_0))(y - y_0)| \leq$$

$$\underbrace{|F_x(\xi(y), y) - F_x(x_0, y_0)|}_{\leq \varepsilon}\, |x - x_0| + \underbrace{|F_y(x_0, \eta) - F_y(x_0, y_0)|}_{\leq \varepsilon}\, |y - y_0)|$$

$$\leq \varepsilon \max(|x - x_0|, |y - y_0|) = \varepsilon\, |(x, y) - (x_0, y_0)|$$

als $\delta > 0$ voldoende klein is. We gebruiken hier als norm op $X \times Y$ de norm

$$|(x, y)| = \max(|x|, |y|).$$

We onthouden dit resultaat als de volgende stelling waarin we de mildere voorwaarde van continuiteit van $y \to F_y(x_0, y)$ vervangen door de voor de hand liggende sterkere voorwaarde op $(x, y) \to F_y(x_0, y)$.

Stelling 14.21. *Laat X en Y genormeerde ruimten zijn. Als $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ partiële functies*

$$x \to F(x, y) \quad \text{en} \quad y \to F(x, y)$$

heeft die voor $x \in B_\delta(x_0)$ en $y \in B_\delta(y_0)$ met $x_0 \in X, y_0 \in Y, \delta > 0$ gedefinieerd en differentieerbaar zijn, met

$$(x, y) \to F_x(x, y) \in X^* \quad \text{en} \quad (x, y) \to F_y(x, y) \in Y^*$$

continu in (x_0, y_0), dan is F differentieerbaar in (x_0, y_0), met $F'(x_0, y_0)$ gedefinieerd door

$$(h, k) \xrightarrow{F'(x_0, y_0)} F_x(x_0, y_0)h + F_y(x_0, y_0)k.$$

Opgave 14.22. De karakterisatie van $F'(x_0, y_0)$ wekt natuurlijk geen verbazing. Als $F : X \times Y$ differentieerbaar is in (x_0, y_0) dan zijn zowel $x \to F(x, y_0)$ als $y \to F(x_0, y)$ differentieerbaar in respectievelijk x_0 en y_0 en hun afgeleiden heten de partiële afgeleiden, notatie o.a. $F_x(x_0, y_0)$, $F_y(x_0, y_0)$. Verifieer dit rechtstreeks aan de hand van de definities, en ook dat

$$F'(x_0, y_0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = F_x(x_0, y_0)h + F_y(x_0, y_0)k$$

voor alle $h \in X$ en $k \in Y$.

Opgave 14.23. Als X, Y, Z genormeerde ruimten zijn en $F : X \times Y \to Z$ dan werkt de bewijstechniek met de middelwaardestelling niet. Schrijf echter weer

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \underbrace{F(x,y) - F(x_0,y)}_{\text{vary } x} + \underbrace{F(x_0,y) - F(x_0,y_0)}_{\text{vary } x}$$

en behandel de twee variërende termen met (14.18), waarbij je moet aannemen dat Z volledig is. Neem hiertoe aan dat $x \to F(x,y_0)$ continu differentieerbaar is voor $x \in X$ met $|x - x_0| < \delta_x$, en dat voor elke van deze x de functie $y \to F(x,y)$ continu differentieerbaar is voor $y \in Y$ met $|y - y_0| < \delta_y$, $\delta_x, \delta_y > 0$, en bovendien dat $(x,y) \to F_y(x,y)$ continu is in (x_0,y_0). Bewijs dat F differentieerbaar is in (x_0,y_0).

Opgave 14.24. Als X, Y, Z genormeerde ruimten zijn, met Z volledig, en $F : X \times Y \to Z$ heeft partiële functies met partiële afgeleiden F_x en F_y die continu zijn op een open verzameling O in $X \times Y$, dan is F differentieerbaar in elk punt van O en $F' : O \to L(X \times Y, Z)$ is continu, gedefinieerd in elke $(x_0,y_0) \in O$ als in Opgave 14.22.

14.4 Differentiaal- en integraalvergelijkingen

Terug naar functies van $t \in \mathbb{R}$ naar $x \in \mathbb{R}$. In (4.22) is de differentiaalvergelijking die de functie exp definieert omgeschreven tot integraalvergelijking. Vanaf hier kiezen we zo veel mogelijk voor de t van tijd als onafhankelijke variabele in de differentiaalvergelijkingen onder consideratie, en voor x als de afhankelijke variabele. Daarbij we spreken over $x = x(t)$ als de oplossing, en de lezer wordt gevraagd deze “abuse of notation” voor lief te nemen. Dus $x = x(t)$ voor $t \in I$ is een verkorte schrijfwijze om een functie $x : I \to \mathbb{R}$ aan te duiden.

Bijvoorbeeld $x(t) = \exp(t)$, de unieke oplossing van

$$x' = x \quad \text{met} \quad x(0) = 1 \quad \text{op} \quad I = \mathbb{R},$$

een probleem van de vorm

$$x'(t) = f(x(t)) \quad \text{voor alle} \quad t \in I \quad \text{met} \quad x(0) = \xi. \tag{14.22}$$

Merk op dat een oplossing van (14.22) per definitie differentieerbaar is op I en dus continu.

Voor iedere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\xi \in \mathbb{R}$ is (14.22) een probleem om op te lossen voor t in een liefst maximaal interval I, met $0 \in I$ omdat anders de voorwaarde $x(0) = \xi$ geen betekenis heeft. We beperken ons hier nu tot differentiaalvergelijkingen waarin de onafhankelijke variabele t niet expliciet voorkomt. Dus $x'(t) = f(x(t))$ en niet $x'(t) = f(t, x(t))$.

Zulke differentiaalvergelijkingen hebben de eigenschap dat een horizontaal verschoven grafiek van een oplossing in het t, x-vlak weer de grafiek van een oplossing is. Met één oplossing heb je er dankzij deze *translatie-variantie* dus meteen een heleboel en soms zelfs allemaal (als f geen nulpunten heeft).

Opgave 14.25. Teken in het x, y-vlak een grafiek $y = f(x)$ van een mooie functie f met een paar nulpunten en gebruik de informatie uit die grafiek om grafieken van oplossingen in t, x-vlak te schetsen. Hint: schets eerst de grafieken van de constante oplossingen.

Onder de aanname dat f continu is op $\mathbb{R}$ is (14.22) equivalent met

$$x(t) = \xi + \int_0^t f(x(s))\, ds \quad \text{voor alle} \quad t \in I. \tag{14.23}$$

Opgave 14.26. Bewijs de equivalentie van (14.22) en (14.23) voor continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\xi \in \mathbb{R}$ gebruikmakend van de integraal- en differentiaalrekening ontwikkeld tot nu toe.

Opgave 14.27. Dezelfde vraag (met $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu en $\xi, \eta \in \mathbb{R}$) voor

$$x'' = f(x) \quad \text{met} \quad x(0) = \xi \quad \text{en} \quad x'(0) = \eta$$

en de integraalvergelijking die je krijgt door twee keer te integreren. Hint: gebruik je uitwerking van Opgave 7.36 om de herhaalde integraal om te schrijven tot een enkele integraal.

Om een oplossing van (14.23) te maken kunnen we eerst $a, b \in \mathbb{R}$ kiezen met $0 \in [a, b] \subset I$ en (14.23) herschrijven als een vergelijking

$$x = \xi + \Phi(x), \tag{14.24}$$

voor $x \in C([a, b])$, met $\Phi : C([a, b]) \to C([a, b])$ gedefinieerd door

$$(\Phi(x))(t) = \int_0^t f(x(s))\, ds, \tag{14.25}$$

een formulevoorschrift voor de "nieuwe" functie $\Phi(x) \in C([a,b])$ gegeven de "oude" functie $x \in C([a,b])$.

In (14.24) is ξ nu te lezen als een constante functie $x_0 : t \to \xi$ en met het schema

$$x_{n+1} = \xi + \Phi(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{14.26}$$

ontstaat dan een rij x_n in $C([a,b])$ waarvan we nu willen weten of deze via zijn limiet een unieke oplossing van (14.23) definieert. De vraag nu is onder welke aannames op f en $[a,b]$ dit lukt. Om dat te onderzoeken nemen we eerst zonder beperking der algemeenheid $\xi = 0$.

In wat volgt vermijden we notationeel gepriegel met bovengrenzen t die kleiner zijn dan de ondergrens 0 in (14.25), door de afbeelding Φ te bekijken op $X = C([0,T])$. Vaste punten van Φ zijn dan oplossingen van (14.23) met $\xi = 0$ en daarmee van (14.22). Oplossingen van (het beginwaardeprobleem)

$$x'(t) = f(x(t)) \quad \text{voor} \quad t \in [0,T] \quad \text{en} \quad x(0) = 0$$

corresponderen dus met vaste punten van $\Phi : X \to X$. En voor het vinden van zulke "dekpunten" is er een stelling die iedereen die wiskunde doceert gezien moet hebben[9].

Stelling 14.28. *Laat X een Banachruimte zijn. Als $\Phi : X \to X$ een afbeelding is die voor een vaste $\theta \in [0,1)$ voldoet aan*

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \le \theta |x - y| \quad \forall x, y \in X,$$

dan heeft Φ een uniek vast punt $\bar{x} = \Phi(\bar{x}) \in X$. Gegeven iedere $x_0 \in X$ geldt voor de rij gedefinieerd door $x_n = \Phi(x_{n-1})$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat $x_n \to \bar{x}$ als $n \to \infty$.

Bewijs. Dat Φ geen twee vaste punten kan hebben volgt meteen uit de aanname. Gegeven een willekeurige x_0 en $x_1 = \Phi(x_0)$ volgt ook uit de aanname dat

$$|x_2 - x_1| = |\Phi(x_1) - \Phi(x_0)| \le \theta |x_1 - x_0|,$$
$$|x_3 - x_2| = |\Phi(x_2) - \Phi(x_1)| \le \theta |x_2 - x_1| \le \theta^2 |x_1 - x_0|,$$

etc. Voor de incrementen geldt dus dat[10]

$$|x_{n+1} - x_n| \le \theta^n |x_1 - x_0|, \tag{14.27}$$

[9] We hebben deze stelling al een keer niet gebruikt toen het wel kon. In welke bewijs?
[10] Eigenlijk moet dit weer met inductie......

en dus volgt

$$\sum_{n=0}^{\infty}|x_{n+1}-x_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\theta^n|x_1-x_0| = |x_1-x_0|\sum_{n=0}^{\infty}\theta^n = |x_1-x_0|\frac{1}{1-\theta}.$$

De reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$$

is dus convergent met een limiet $S \in X$ vanwege de uitspraak in Opgave 14.29 hieronder.

Omdat

$$x_{\mathrm{N}+1} = x_0 + \sum_{n=0}^{\mathrm{N}}(x_{n+1}-x_n)$$

volgt dat

$$x_{\mathrm{N}+1} = \Phi(x_{\mathrm{N}}) \to x_0 + S \quad \text{als} \quad \mathrm{N} \to \infty.$$

Met $\bar{x} = x_0 + S$ hebben we de limiet van de rij x_n dus te pakken en omdat

$$\begin{aligned}|\Phi(\bar{x})-\bar{x}| &\leq |\Phi(\bar{x})-\Phi(x_n)| + |\Phi(x_n)-x_n| + |x_n-\bar{x}| \\ &\leq |x_{n+1}-x_n| + 2|x_n-\bar{x}| \to 0\end{aligned}$$

is $\bar{x}$ een vast punt van Φ. Daarmee is het bewijs klaar.

Opgave 14.29. Laat X een Banachruimte zijn en $a_n \in X$ voor $n \in \mathbb{N}_0$. Schrijf[11] het bewijs van het convergent zijn van absoluut convergente reeksen in $\mathbb{R}$ over met normstrepen i.p.v. absolute waarde strepen en bewijs zo dat

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| < \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty}a_n \quad \text{bestaat en} \quad |\sum_{n=0}^{\infty}a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|.$$

Opgave 14.30. Neem aan dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniform Lipschitz continu is met Lipschitz constante $L > 0$. Dus

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Bewijs dat Φ in (14.25) voldoet aan

$$|\Phi(x)-\Phi(y)|_\infty \leq LT|x-y|_\infty \quad \forall x,y \in X = C([0,T]).$$

[11] Zie Stelling 5.30.

Stelling 14.31. *Neem aan dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniform Lipschitz continu is, en dat $\xi \in \mathbb{R}$. Dan heeft de differentiaalvergelijking*

$$x'(t) = f(x(t))$$

precies één oplossing met $x(0) = \xi$. Die oplossing is gedefinieerd voor alle $t \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Met $\xi = 0$ volgt het bestaan van een unieke oplossing op $[0, T]$ via Opgave 14.26, Stelling 14.28 en Opgave 14.30 onder de aanname dat $LT < 1$.

Voor $\xi \neq 0$ is het bewijs precies hetzelfde, niet alleen op $[0, T]$ maar ook op $[-T, 0]$, of in één keer op $[-T, T]$. Maar vanwege de translatie-invariantie geldt dit ook voor oplossingen met $x(T) = \eta \in \mathbb{R}$ op $[T, 2T]$.

Kies nu $\eta = x(T)$ met x de oplossing die we al hadden op $[0, T]$. Dit geeft een oplossing op $[T, 2T]$ met $x(0) = \xi$. Enzovoort. Stap voor stap, naar links en naar rechts, steeds met dezelfde stapgrootte T, breiden we de oplossing zo uit tot uiteindelijk heel $\mathbb{R}$ en het bewijs is klaar.

Opgave 14.32. Neem aan dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniform Lipschitz continu is en $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ willekeurig. Als we de unieke oplossing van $x'(t) = f(x(t))$ met $x(\tau) = \xi$ noteren als $x(t; \tau, \xi)$ dan geldt $x(t; \tau, \xi) = x(t - \tau; 0, \xi)$. Leg uit waarom. Definieer nu de afbeeldingen $S_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $S_t(\xi) = x(t; 0, \xi)$. Leg uit waarom voor alle $s, t \in \mathbb{R}$ geldt dat $S_{t+s} = S_t(S_s(\xi))$ voor alle $\xi \in \mathbb{R}$, i.e.

$$S_{t+s} = S_t \circ S_s.$$

We schrijven ook $S_t(\xi) = x(t; \xi)$ en dan luidt deze regel dat

$$x(t + s; \xi) = x(t; x(s; \xi)) = x(s; x(t; \xi)).$$

Gebruik dit met $f(x) = x$ om te concluderen dat $\exp(t + s) = \exp(t)\exp(s)$, waarbij $\exp(t)$ gedefinieerd is door $\exp(t) = x(t; 1)$.

Opgave 14.33. Neem aan dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniform Lipschitz continu is, en dat $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Dan heeft de differentiaalvergelijking

$$x''(t) = f(x(t))$$

precies één oplossing met $x(0) = \xi$ en $x'(0) = \eta$. Die oplossing is gedefinieerd voor alle $t \in \mathbb{R}$. Schets een bewijs van deze uitspraak gebruikmakend van Opgave 14.27 en de strategie in het voorafgaande.

Opgave 14.34. De oplossing in Opgave 14.33 kan genoteerd worden als $x(t;\xi,\eta)$. Herschrijf $x(t+s;\xi,\eta)$ zoals in Opgave 14.32. Gebruik dit met $f(x)=-x$ om de bekende regels voor $\cos(s+t)$ en $\sin(s+t)$ af te leiden rechtstreeks vanuit de definitie dat $\sin(t)=x(t;0,1)$ en $\cos(t)=x(t;1,0)$.

Opgave 14.35. Verifieer dat $\exp,\cos,\sin$ als machtreeksoplossingen samenvallen met de oplossingen hierboven door de iteratieschema's voor de betreffende integraalvergelijkingen expliciet uit te voeren.

14.5 Impliciete functiestelling: integraalvergelijkingen

We besluiten met het uitwerken onder welke voorwaarden x in (14.24) een continu differentieerbare functie van $\xi \in \mathbb{R}$ wordt. Zie Sectie 7 in

`http://www.few.vu.nl/~jhulshof/NOTES/fa.pdf`

Voor $a,b \in \mathbb{R}$ met $0 \in [a,b]$ en $\xi \in \mathbb{R}$ gaat dit om de vergelijking

$$x=\xi+\Phi(x) \quad \text{met} \quad (\Phi(x))(t)=\int_0^t f(x(s))\,ds, \tag{14.28}$$

als formulevoorschrift voor de (nieuwe) functie $\Phi(x)\in C([a,b])$ gegeven de ("oude") functie $x\in C([a,b])$, waarbij we aannemen dat $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tenminste continu is. De impliciete functiestelling is toepasbaar als

$$\Phi : C([a,b]) \to C([a,b])$$

continu differentieerbaar is.

Immers, neem $h\in C([a,b])$ en schrijf, de neus volgend,

$$(\Phi(x+h))(t)=\int_0^t f(x(s)+h(s))\,ds=\int_0^t [f(x(s)+\tau h(s))]_0^1\,ds$$

$$=\int_0^t\int_0^1 f'(x(s)+\tau h(s))h(s)\,d\tau\,ds$$

$$=\int_0^t\int_0^1 f'(x(s))h(s)\,d\tau\,ds+\underbrace{\int_0^t\int_0^1 (f'(x(s)+\tau h(s))-f(x(s))h(s)\,d\tau\,ds}_{R(h;x)(t)}$$

$$=(\Phi'(x)h)(t)+R(h;x)(t),$$

waarin

$$h \xrightarrow{\Phi'(x)} \Phi'(x)h \quad \text{met} \quad (\Phi'(x)h)(t) = \int_0^t f'(x(s))h(s)\,ds, \tag{14.29}$$

en

$$\begin{aligned}|R(h;x)(t)| &= |\int_0^t \int_0^1 (f'(x(s)+\tau h(s)) - f(x(s))h(s)\,d\tau\,ds| \\ &\leq |\int_0^t |\int_0^1 (f'(x(s)+\tau h(s)) - f(x(s))h(s)\,d\tau|\,ds| \\ &\leq |\int_0^t |\int_0^1 |(f'(x(s)+\tau h(s)) - f(x(s))h(s)|\,d\tau|\,ds| \\ &\leq |\int_0^t |\int_0^1 \underbrace{|f'(x(s)+\tau h(s)) - f(x(s)|}_{\leq\varepsilon}\,\underbrace{|h(s)|}_{|h|_\infty}\,d\tau|\,ds| \leq (b-a)\varepsilon|h|_\infty\end{aligned}$$

als $|h|_\infty \leq \delta$, met $\delta > 0$ bij $\varepsilon > 0$ uit de definitie van uniforme continuiteit van $f' : [-A, A] \to \mathbb{R}$ op een interval gegeven door bijvoorbeeld $A = |x|_\infty$ plus een beetje.

Opgave 14.36. Op zijn kortst door de bocht: pas de impliciete functiestelling toe om te laten zien dat voor de oplossing $x = x(\xi)$ van (14.28) geldt dat

$$\xi \to x(\xi)$$

continu differentieerbaar is, en x_ξ de oplossing is van de integraalvergelijking die hoort bij

$$y'(t) = f'(x(t))y(t) \quad \text{met} \quad y(0) = 1,$$

eerst onder de voorwaarde dat a en b dicht bij 0 zitten.

14.6 Calculus in Banachalgebra's van operatoren

Deze sectie is nog wat schetsmatig maar niettemin precies. We willen (13.47) uitwerken voor $A \in L(X)$ en schrijven met z vervangen door λ

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\oint_P f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\,d\lambda, \tag{14.30}$$

nu voor een willekeurig polygon[12] met hoekpunten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n = \lambda_0$, waarop en waarbuiten[13]

$$\lambda \to (\lambda - A)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} \tag{14.31}$$

[12] Of een vereniging daarvan.
[13] Wat bedoelen we daarmee?

gedefinieerd is. Het complement van het domein van (14.31) in $\mathbb{C}$ heet het spectrum van A, notatie $\sigma(A)$. Het domein zelf heet de resolvente verzameling, notatie $\rho(A)$, en de afbeelding in (14.31) heet de resolvente van A.

Opgave 14.37. Gebruik berekeningen met meetkundige reeksen om te laten zien dat iedere $\lambda \in \mathbb{C}$ met $\lambda > |A|$ in $\rho(A)$ ligt en dat $\rho(A)$ open is. Bewijs ook dat (14.31) complex differentieerbaar is op $\rho(A)$. Wat is de afgeleide?

Opgave 14.38. Kan het zijn dat $\rho(A) = \mathbb{C}$? Het antwoord is nee, maar dat vergt nog een argument dat we weer zo licht mogelijk willen houden. Uit het ongerijmde, we zouden dan hebben dat (14.31) een $L(X)$-waardige functie definieert die naar $0 \in L(X)$ gaat als $\lambda \to \infty$ en dat moet niet kunnen, met een argument dat over te schrijven zou moeten zijn van wat we voor gewone complexwaardige functies weten, zie Opgave 13.27.

In deze opgaven heb je niet gebruikt dat met $AB = BA = I$ en $A \in L(X)$ ook volgt dat $B \in L(X)$, een wat diepere stelling voor Banachruimten, die ook maar eens heel kort en clean moet worden uitgelegd. Dat komt nog wel een keer. Denk in het vervolg voorlopig bijvoorbeeld eerst aan $X = \mathbb{C}^2$ als complexe uitbreiding van $\mathbb{R}^2$ en A een lineaire afbeelding gegeven door een 2×2 matrix, met complexe of reële entries. In dat geval bestaat $\sigma(A)$ meestal uit 2 punten, en met twee disjuncte driehoekjes Δ_1 en Δ_2 om die punten heen kunnen we al aan de slag met ieder paar complex differentieerbare functies

$$f_1 : \Delta_1 \to \mathbb{C} \quad \text{en} \quad f_1 : \Delta_1 \to \mathbb{C}$$

die samen één functie

$$f : \Delta_1 \cup \Delta_2 \to \mathbb{C}$$

maken waarvan de twee stukken elkaar niet zien. Maar ook het rechterlid van (7.51) gezien als afbeelding van een gecomplexificeerde $X = C([0, 1])$ naar zichzelf is een voorbeeld.

In het algemeen kan $\sigma(A)$ van alles zijn en daarom kijken we nu eerst wat voor gebieden we met eindig veel disjuncte polygonen kunnen maken. Elk polygon P heeft op natuurlijke manier een binnengebied C en een buitengebied U, waar we steeds de rand bijnemen, dus

$$P = U \cap C.$$

Als binnen een polygon P_0 een aantal kleinere polygonen $P_1, \ldots, P_n$ ligt, wier binnengebieden onderling disjunct zijn, dus

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \text{als} \quad i \neq j \quad \text{voor} \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

dan kan het zijn dat

$$\sigma(A) \subset K_{int} \subset K = C_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n, \tag{14.32}$$

waarbij we K zien als begrensd door de buitenkant P_0 naarbuiten en door binnenkanten $P_1, \ldots, P_n$ naar binnen, en

$$K_{int} = K \cap P_0^c \cap \cdots \cap P_n^c$$

de doorsnijding van K met de complementen van de polygonen $P_0, \ldots, P_n$ is, dus alles in K dat niet op de rand ligt. Als we polygonen *altijd* als linksom doorlopen zien dan schrijven we in dit geval

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta K} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} \, d\lambda =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{P_0} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} \, d\lambda - \sum_{j=1}^{n} \oint_{P_j} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} \, d\lambda \right) \tag{14.33}$$

voor $f : K \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar.

Ligt $\sigma(A)$ in een disjuncte eindige vereniging

$$K_1 \cup \cdots \cup K_m$$

van zulke K_j, en zijn

$$f_j : K_j \to \mathbb{C} \quad (j = 1, \ldots, m)$$

complex differentieerbaar, dan vormen die samen weer een complex differentieerbare functie

$$f : K = K_1 \cup \cdots \cup K_n \to \mathbb{C}$$

waarvoor we

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{m} \oint_{\delta K_j} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} \, d\lambda \tag{14.34}$$

met iedere term in de som gedefinieerd als in (14.33) als definitie van $f(A)$ gebruiken.

Elk van de K_j kan van de vorm alleen maar $K_j = C_j$ zijn, en één $K = C$ is altijd mogelijk om dat $\sigma(A)$ begrensd is, maar hoe kleiner K gekozen wordt, hoe meer speelruimte er is. De mogelijk steeds grotere[14] uitdrukkingen voor K moet daarbij graag op de koop toe worden genomen, en als $K_j \neq C_j$ kunnen de bijbehorende buitenkanten ook genest liggen. In het simpele geval dat $\sigma(A)$ een eindige discrete puntverzameling is kunnen we natuurlijk toe met $K = C_j = \Delta_j$, met de driehoekjes Δ_j zo klein als we maar willen en

$$\sigma(A) \subset K^{int} \subset K = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m.$$

Wat we nu sowieso in alle gevallen willen is dat, als we de hoekpunten van de polygonen een beetje naar binnen schuiven, K in dus, de integralen die in (14.33) en (14.34) de nieuwe lineaire afbeelding $f(A) : X \to X$ moeten maken, niet veranderen. En hetzelfde als we K groter maken door de punten naar buiten te schuiven, zolang we maar niet uit het definitiegebied van de continu differentieerbare complexwaardige f lopen. Bij het verder kleiner of groter maken kan de structuur van K versimpelen als twee polygonen elkaar ontmoeten en vervolgens samen één polygon vormen. Strict genomen hebben we niet nodig hoe dat precies kan gaan, maar het is toch aardig om daar even over na te denken.

Opgave 14.39. Het is een aardige project om dat versimpelen precies te maken. Bij het groter maken van K kunnen twee buitenkanten van twee K_j-tjes elkaar ontmoeten waarna verder groter maken tot één nieuwe buitenkant leidt waarmee de bijbehorende binnenkanten dan samen de nieuwe binnenkanten van een nieuwe K_j worden. Ook kan uit een groeiende buitenkant die binnen een krimpende binnenkant ligt meteen na het eerste contact één nieuwe binnenkant ontstaan. Bij kleiner maken kunnen een binnen- en een buitenkant van eenzelfde K_j-tje elkaar ontmoeten en daarna een nieuwe buitenkant vormen, en ook kunnen twee binnenkanten elkaar ontmoeten en een nieuwe binnenkant vormen. Ga in alle gevallen na wat de nieuwe structuur wordt en welke andere scenario's er nog zijn, zoals ondermeer polygonen tot een punt laten krimpen en verdwijnen.

Via de inmiddels vertrouwde zigzagkrommen vernandert bij het geschuif met de hoekpunten (14.34) niet, mits de Stelling van Coursat geldt voor driehoekjes waarop en waarbinnen (14.31) complex differentieerbaar is. De betreffende integralen bestaan weer uit integralen over lijnstukjes. Integralen die gedefinieerd zijn dankzij het werk in Sectie 14.1, waarvoor het voorwerk al in Sectie 3.5 was gedaan: continue $L(X)$-waardige functies van $t \in [0, 1]$ zijn integreerbaar via de tussensommen van Riemann, en

$$t \to f((1-t)\lambda_{k-1} + t\lambda_k)((1-t)\lambda_{k-1} + t\lambda_k - A)^{-1}$$

[14] Als we alle zijden van alle poygonen dicht bij $\sigma(A)$ willen hebben.

is zo'n functie waarmee $L(X)$-waardige integralen als

$$\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda$$

nu gedefinieerd zijn.

Mooi, dan kan voor

$$\lambda \to f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}$$

de Stelling van Coursat met bewijs en al worden overgeschreven[15] en is (14.33) een goede definitie van $f(A)$. Voorlopig houden we nu A vast en kijken naar nog zo'n f, een g dus, waarbij we eerst aannemen dat we het allersimpelste geval hebben, één polygon rond $\sigma(A)$ waarmee de berekeningen gedaan worden. In dat geval is de samenstelling van de afbeeldingen $f(A)$ en $g(A)$ te schrijven als

$$f(A)g(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\lambda_{0-n}} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda\, \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mu_{0-n}} g(\mu)(\mu - A)^{-1}\, d\mu,$$

met in de Cauchyintegraal voor $g(A)$ de hoekpunten μ_l een klein beetje naar binnen geschoven hebben, niet omdat het moet, maar omdat het kan, iets minder ver naar binnen dan de hoekpunten λ_k. Het μ-polygon komt zo binnen het λ-polygon te liggen.

Omdat

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda,$$

$$g(A) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^{n} \int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} g(\mu)(\mu - A)^{-1}\, d\mu,$$

wordt $f(A)g(A)$ afgezien van de voorfactoren dankzij overwegingen als bij (8.47) een som van produkten

$$\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda \int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} g(\mu)(\mu - A)^{-1}\, d\mu =$$

$$\int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} f(\lambda)g(\mu)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}\, d\lambda\, d\mu =$$

$$\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} \int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} f(\lambda)g(\mu)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1}\, d\mu\, d\lambda.$$

[15] Op detail nog te bespreken.

Dankzij wat fraaie algebra, te weten

$$(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} = \frac{1}{\mu - \lambda}(\lambda - A)^{-1} + \frac{1}{\lambda - \mu}(\mu - A)^{-1},$$

kunnen de integralen gesplitst worden in

$$\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} \int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu\, d\lambda$$

en

$$\int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} g(\mu)(\mu - A)^{-1} \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu}\, d\lambda\, d\mu,$$

en in beide herhaalde integralen zien we een bij sommeren over de index in de binnenste integraal een gewone complexwaardige lijnintegraal verschijnen waar nul uit komt als de noemer niet nul is in het binnengebied, en een functiewaarde anders, kijk maar naar de Cauchy integraalformule. Sommeren over l in de eerste geeft derhalve 0, en sommeren over k in de tweede

$$\int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} g(\mu)(\mu - A)^{-1}\, 2\pi i\, f(\mu)\, d\mu = 2\pi i \int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} f(\mu)\, g(\mu)(\mu - A)^{-1}\, d\mu,$$

en nog een keer sommeren vervolgens $(2\pi i)^2 (fg)(A)$. We concluderen dat

$$(fg)(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\lambda_{0-n}} f(\lambda)g(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda = f(A)g(A) = g(A)f(A), \tag{14.35}$$

en daar is nog veel mee te spelen.

Opgave 14.40. Ga na dat in het algemene geval (14.34), wanneer $f(A)$ en $g(A)$ de som zijn van een eindig aantal integralen over links- dan wel rechtsom[16] doorlopen polygonen P_j, er in de compositie alleen bijdragen zijn van de vorm zoals juist behandeld en dat ook in dat geval volgt dat $(fg)(A) = f(A)g(A)$.

De tweede gelijkheid in (14.35) is een gelijkheid in de niet-commutatieve Banachalgebra $L(X)$ van continue lineaire afbeeldingen van X naar zichzelf, en $f \to f(A)$ is een afbeelding die gedefinieerd is voor een klasse van functies gedefinieerd op een omgeving van het $\sigma(A)$. Die omgeving mag van f afhangen, dus met f en g moeten we ons beperken tot de doorsnede van de twee definitiegebieden. Wat we nog willen laten zien is dat een schrijfwijze met (14.33) en (14.34) altijd mogelijk is met alle polygonen zo dicht bij $\sigma(A)$ als we maar willen. Daarmee bewijzen we dan ook meteen de volgende stelling.

[16] Lees: linksom, maar met een min voor het integraalteken.

Stelling 14.41. *Laat voor $A \in L(X)$ en een complexwaardige f de operator $f(A)$ gedefinieerd zijn via (14.33) en (14.34). Dan geldt*

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)).$$

Om deze stelling te bewijzen maken we nu precies hoe we K kiezen. Kies daartoe een triangulatie van het complexe vlak opgespannen door $\rho > 0$ en $\rho \exp(\frac{\pi i}{6})$. De verzameling van al deze driehoekjes noemen we I. Voor elke $\Delta \in I$ maken we onderscheid tussen

$$\Delta \cap \sigma(A) = \emptyset, \quad \Delta \cap \sigma(A) \neq \emptyset = \delta\Delta \cap \sigma(A), \quad \delta\Delta \cap \sigma(A) \neq \emptyset,$$

waarmee $I = I_0 \cup I_1 \cup J$, met I_0, I_1, J de onderling disjuncte deelverzamelingen waarvoor respectievelijk de eerste, tweede dan wel derde karakterisatie geldt. Zowel I_1 als J hebben maar eindig veel elementen omdat $\sigma(A)$ begrensd is. Iedere $\Delta \in I_1$ kan als een K_j genomen worden in (14.34).

De driehoekjes in I_0 zijn niet relevant voor (14.34), maar iedere $\Delta \in J$ heeft 12 buren[17] waarvan er tenminste één ook in J ligt, zeg $\tilde{\Delta}$, gekarakteriseerd door

$$\delta\tilde{\Delta} \cap \delta\Delta \cap \sigma(A) \neq \emptyset,$$

en in dat geval noemen we Δ en $\tilde{\Delta}$ fijne buren in J. Twee zulke fijne buren die verder geen andere fijne buren hebben vormen samen een fijn duo verenigd in

$$\Delta \cup \tilde{\Delta},$$

en I_2 is per definitie de verzameling van zulke verder geisoleerde fijne buren, die verenigd steeds een ruit vormen, een ruit die als een K_j kan worden meegenomen in (14.34).

Een paar niet geisoleerde fijne buren kan nog 1 of meerdere fijne buren hebben, en als het maar 1 is, zeg $\hat{\Delta}$, dan kan het zijn dat die verder zelf geen fijne buren meer heeft. Dan vormen ze een fijn triootje waarbij verschillende standjes denkbaar zijn. Dit definieert de verzameling I_3, alle driehoeken Δ die onderdeel vormen van een fijn trio verenigd in

$$\Delta \cup \tilde{\Delta} \cup \hat{\Delta},$$

dat een parallelogram of een halve zeshoek is.

En zo gaat dat door met fijne quatrootjes, fijne quintootjes, etc totdat J op is, waarbij het aantal standjes flink maar niet oneindig toe kan nemen. Kortom, met I gepartioneerd als

$$I = I_0 \cup I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_p$$

[17] Waarvan er drie een zijde met Δ gemeen hebben en de rest alleen een hoekpunt.

is het nu nog de vraag wat de mogelijke onderlinge standjes zijn: als $\Delta_1 \in I_k$ met $k-1$ andere driehoeken in I_k een fijn k-stel vormt hoe kan de vereniging

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_k$$

er dan uitzien?

Antwoord: als een binnengebied van een polygon, of als het rechterlid van (14.32). Dat moet dus nog door iemand[18] bewezen worden, als dat niet al eens gebeurd is. Maar verder zijn we nu wel klaar met de beschrijving van $f(A)$. Dat kan altijd met eindig veel polygonen die willekeurig dicht bij $\sigma(A)$ liggen door ρ klein te kiezen. Hoe dichter bij $\sigma(A)$ hoe meer je er nodig hebt en hoe wilder de standjes kunnen worden.

We zijn nu klaar voor het bewijs van Stelling 14.41. Neem een $\mu \notin f(\sigma(A))$ en definieer g door

$$\lambda \xrightarrow{g} \frac{1}{\mu - f(\lambda)},$$

met f complex differentieerbaar op een omgeving van $\sigma(A)$. Kies een mogelijk kleinere omgeving waarop $f(\lambda) \neq \mu$. Uit de functional calculus volgt nu dat $g(A)$ gedefinieerd is en de algebra geeft

$$g(A)(\mu - f(A) = (\mu - f(A)g(A) = I,$$

waarmee $\mu \in \rho(f(A))$. Dus $\sigma(f(A)) \subset f(\sigma(A))$.

Kan de inclusie strict zijn? In dat geval is er een $\mu_0 = f(\lambda_0) \in \sigma(f(A))$ waarvoor $\mu_0 - f(A)$ inverteerbaar is terwijl $\lambda_0 - A$ het niet is. Door schuiven en schalen van f, en schuiven van A en λ kunnen we zonder beperking der algemeenheid wel aannemen dat $\lambda_0 = 0 = \mu_0$ en dat de machtreeks van f begint met λ^n voor zekere $n \in \mathbb{N}$ omdat $f(0) = 0$. In dat geval is

$$f(\lambda) = \lambda^n g(\lambda) \quad \text{met} \quad g(\lambda) = 1 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \cdots$$

en dus is $g(A)$ inverteerbaar, net als $f(A)$. Maar de algebra geeft

$$f(A) = A^n g(A).$$

Voor $n = 1$ is de tegenspraak onmiddellijk. Voor $n > 1$ niet helemaal. Pas daarom het argument hierboven aan en concludeer eerst dat $\mu_0 = f(\lambda_0)$ zo gekozen kan worden dat $f'(\lambda_0) \neq 0$. Hiermee is het bewijs van de stelling wel klaar. Als g een andere functie is die complex differentieerbaar is op een omgeving van $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$ dan volgt ook vrij direct uit de definities dat

$$g(f(A)) = (g \circ f)(A).$$

[18] Ik pas, maar dat is voor even.

Opgave 14.42. Bewijs dit.

Nog een expliciet voorbeeld. Als

$$\lambda = \lambda \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \chi_j(\lambda) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda \chi_j(\lambda),$$

met

$$\chi_j(\lambda) = \delta_{ij} \quad \text{voor} \quad \lambda \in K_i,$$

dan

$$I = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} I \chi_j.$$

Definieer de "spectraalprojecties"

$$P_j = \chi_j(A).$$

Opgave 14.43. Laat zien dat $P_i P_j = \delta_{ij} P_j$, $AP_j = P_j A$, $\sigma(AP_j) = \sigma(A) \cap K_j$,

$$I = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} P_j \quad \text{en} \quad A = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} AP_j = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} P_j A.$$

Zo wordt

$$X = R(P_1) \oplus \cdots \oplus R(P_n),$$

en beeld A iedere $X_i = R(P_i))$ op zich zelf af, en volgt voor

$$A_j : X_i \xrightarrow{AP_j} X_i$$

dat $\sigma(A_j) = \sigma(A) \cap K_j$.

Zo, en dat alles met een beetje lijnintegreren.

15 Extremisme

Nu we de differential calculus voor afbeeldingen van Banachruimten naar Banachruimten min of meer in onze vingers hebben is de te beantwoorden vraag hoe het zit met extrema[1] van reëelwaardige functies op Banachruimten. De eerste probleemstelling in dit hoofdstuk is hoe we gegeven een reële Banachruimte X, een functie $F : X \to \mathbb{R}$, en een deelverzameling $A \subset X$, de extremen van F beperkt tot A vinden door vergelijkingen op te schrijven, en die op te lossen.

Als $A = X$ en f differentieerbaar is op heel X dan neemt f eventuele extrema alleen maar aan in *stationaire punten* van f, oplossingen van

$$F'(x) = 0,$$

dus stel nu dat $F'(x_0) = 0$ met $x_0 \in X$. De eerste vraag is dan of F in x_0 een maximum of een minimum aanneemt, en voor functies $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doe je dit met wat vroeger het functieonderzoek heette, dat culmineerde in het zonder hulpmiddelen tekenen van de grafiek van F.

15.1 Tweede afgeleide, Hessiaan, Lemma van Morse

Welnu, dat functieonderzoek is afgeschaft. Er is bijna geen schoolboek meer dat vraagstellingen over een functie presenteert zonder je de grafiek kado te doen. Wat nog wel behandeld wordt is het criterium van de tweede afgeleide. Het teken van $F''(x_0)$ vertelt je of de grafiek er lokaal als $\smile$ of als $\frown$ uitziet[2].

Op zoek naar de happy minimizers is nu de eerste vraag hoe voor

$$F : X \to \mathbb{R}$$

de restterm in

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + R(x; x_0)$$

er expliciet uitziet. In het geval dat $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weten we dat

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

als $F'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu is in x_0, en zien we waarom het teken van $F''(x_0)$ in een punt waar $F'(x_0) = 0$ het verschil maakt tussen happy minima and sad maxima: $\smile$ or $\frown$.

[1] maxima EN minima.

[2] Happy or sad parabolas in case of $F(x) = \alpha(x - x_0)^2 + \beta$.

Kijk nog even naar Opgave 7.14 en Opgave 7.38 voor we een eerste Taylorbenadering maken van $F : X \to \mathbb{R}$ rond x_0, en vervolgens kijken wat we dan kunnen zien in stationaire punten, punten waar $F'(x_0) = 0$. Voor het gemak nemen we zo $x_0 = 0$ en brengen Opgave 7.38 in stelling via

$$[0,1] \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad \text{gedefinieerd door} \quad g(t) = F(tx)$$

als

$$g(t) = g(0) + g'(0) + \int_0^1 (1-t)g''(t)\,dt,$$

waarin $g(0) = F(0)$ en $g'(0) = F'(0)x$. Als $x = 0$ een stationair punt is van F dan gaat het dus om

$$R(x) = \int_0^1 (1-t)g''(t)\,dt \quad \text{met} \quad g'(t) = F'(tx)x, \tag{15.1}$$

waarbij de uitdrukking voor $g'(t)$ rechtstreeks uit de definities volgt maar natuurlijk ook consistent is met de kettingregel.

Opgave 15.1. Verifieer dit!

In (15.1) komt de afgeleide van $t \to F'(tx)x$ voor, dus we hebben nu voor het eerst de differentieerbaarheid van

$$x \to F'(x) \in X^*$$

nodig, die in $x = x_0 \in X$ per definitie geformuleerd wordt als

$$F'(x) = F(x_0) + F''(x_0)(x - x_0) + S(x; x_0),$$

met $F''(x_0) : X \to X^*$ begrensd en lineair en $|S(x; x_0)|_{X^*} = o(|x - x_0|)$ als $|x - x_0| \to 0$.

Met $x_0 = t_0 x$ volgt dus dat

$$\begin{aligned} F'(tx) &= F'(t_0x) + F''(t_0x)(tx - t_0x) + S(tx; t_0x) \\ &= F'(t_0x) + (t - t_0)F''(t_0x)x + S(tx; t_0x), \end{aligned}$$

en dus

$$g'(t) = g'(t_0) + (t - t_0)(F''(t_0x)x)x + S(tx; t_0x)x,$$

waaruit we aflezen dat $g'(t)$ uit (15.1) differentieerbaar is in t_0, met

$$g''(t_0) = (F''(t_0x)x)x. \tag{15.2}$$

Merk op dat $F''(x_0)h \in X^*$ voor alle $h \in X^*$ en $F''(x_0)hk \in \mathrm{I\!R}$, dus

$$(h,k) \xrightarrow{F''(x_0)} F''(x_0)hk \in \mathrm{I\!R} \tag{15.3}$$

is een kwadratische vorm die natuurlijk symmetrisch is, met een bewijs dat uit Stelling 8.6 volgt. Neem daartoe zonder beperking der algemeenheid $x_0 = 0$, maak de volgende opgave en lees meteen door!

Opgave 15.2. Definieer voor h en k in X en $F : X \to \mathrm{I\!R}$, met $x \to F'(x)$ differentieerbaar in $x = 0$, de functie

$$(s,t) \xrightarrow{g} F(sh + tk)$$

en bewijs rechtstreeks uit de definities dat $g_{st}(0,0) = F''(0)k\,h$ en $g_{ts}(0,0) = F''(0)h\,k$.

Via Opgave 15.2 is (15.3) te schrijven als

$$\langle F''(0)h, k\rangle = \langle F''(0)k, h\rangle, \tag{15.4}$$

waarin de haken nu staan voor de onderlinge actie[3] tussen X^* en X, dus

$$\langle \phi, x\rangle = \phi(x) \quad \text{voor} \quad \phi \in X^* \quad \text{en} \quad x \in X.$$

In (15.4) zien we hoe $A = F''(x_0) \in L(X, X^*)$ voldoet aan

$$\langle Ah, k\rangle = \langle Ak, h\rangle,$$

hetgeen we als definiërende eigenschap voor

$$A \in S(X, X^*) \tag{15.5}$$

en $S(X, X^*) \subset L(X, X^*)$ zien.

Met ook $F''(tx) \in S(X, X^*)$ volgt nu dat in (15.1) de restterm gegeven wordt door

$$R(x) = \int_0^1 (1-t)F''(tx)x\,x\,dt = \int_0^1 (1-t)F''(tx)x\,dt\,x$$

$$= \int_0^1 (1-t)F''(tx)\,dt\,x\,x = \langle \int_0^1 (1-t)F''(tx)\,dt\,x, x\rangle$$

[3] The French notation, on ecrit aussi $X' = X^*$.

$$= \frac{1}{2}\langle F''(0)x, x\rangle + \langle \int_0^1 (1-t)(F''(tx) - F''(0))\, dt\, x, x\rangle$$
$$= \frac{1}{2} Q_0(x,x) + T(x), \tag{15.6}$$
met $T(x) = o(|x|^2)$ als $|x| \to 0$ omdat F'' continu is in $x = 0$.

Opgave 15.3. Ga na dat F'' continu in $x = 0$ betekent dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zo dat de implicatie

$$|x| \leq \delta \implies |(F''(x) - F''(0))y| \leq \varepsilon |y|$$

geldt voor alle $y \in X$.

Opgave 15.4. Werk het bovenstaande uit voor $X = \mathbb{R}^2$ en laat zien dat

$$Q_0(x,x) = F_{x_1x_1}(0,0)x_1^2 + 2F_{x_1x_2}(0,0)x_1x_2 + F_{x_2x_2}(0,0)x_2^2$$

voor $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Opgave 15.5. Laat zien dat er $r > 0$ is zo dat voor elke $x \in X$ met $|x| \leq r$ geldt dat er een $\theta = \theta(x) \in [0,1]$ is waarvoor

$$T(x) = \int_0^1 (1-t)(F''(tx) - F''(0))x\, x\, dt = \frac{1}{2} F''(\theta(x))x\, x$$

(dit geldt onder de zwakkere aanname dat F twee keer differentieerbaar is in de buurt van $x = 0$).

In (15.6) is hebben we evenzo dat

$$|Q_0(x,x)| \leq |F''(0)|\, |x|^2.$$

Als[4] er een $\mu > 0$ is met

$$Q_0(x,x) \geq \mu |x|^2$$

voor alle $x \in X$ kunnen we dus concluderen dat $F(x)$ in $x = 0$ lokaal minimaal is.

[4] Maar kan dat?

We merken op dat in plaats van (15.6) we ook kunnen schrijven dat

$$R(x) = (\Phi(x)x)x = \langle \Phi(x)\, x, x\rangle$$

met

$$\Phi(x) = \int_0^1 (1-t)F''(tx)\, dt \in S(X, X^*) \subset L(X, X^*), \qquad (15.7)$$

en dat vervolgens de vraag gesteld kan worden of via een coördinatentransformatie

$$x \to \langle \Phi(x)x, x\rangle \quad \text{en} \quad y \to \langle \Phi(0)y, y\rangle$$

in wezen dezelfde functies zijn.

Bob Rink liet me zijn oude dictaat van Hans Duistermaat en Joop Kolk zien, en daarin wordt daartoe zo'n transformatie gezocht in de vorm

$$y = A(x)x,$$

hetgeen leidt tot de vraag of $A = A(x) \in L(X, X)$ zo gevonden kan worden dat

$$\langle \Phi(x)x, x\rangle = (\Phi(x)x)\, x = (\Phi(0)y)\, y = \langle \Phi(0)y, y\rangle \qquad (15.8)$$

voor x in de buurt van $x = 0$. Dus voor $y = A(x)x$ willen we

$$x \xrightarrow{A(x)} A(x)x = y \xrightarrow{\Phi(0)y} (\Phi(0)y)y = (\Phi(0)A(x)x) \circ A(x))\, x = (\Phi(x)x)x,$$

waarin x aan beide kanten twee keer lineair op zichzelf voorkomt.

Hieraan is zeker voldaan als

$$(\Phi_0 A\, x) \circ A = \Phi(x)x \qquad (15.9)$$

in X^*, waarin we $A = A(x)$ zoeken bij $x \neq 0$ en $\Phi(x)$ met $\Phi(0) = \Phi_0$. Aan (15.9) is vervolgens zeker voldaan als de afbeelding

$$h \to \Phi(x)h \quad \text{in} \quad L(X, X^*) \quad \text{gelijk is aan} \quad h \to \Phi_0 A h \circ A, \qquad (15.10)$$

een kwadratische $L(X, X^*)$-waardige vergelijking voor $A \in L(X, X)$, abstract te schrijven als

$$\kappa_0(A, A) = \Phi(x). \qquad (15.11)$$

In (15.11) is

$$X \times X \xrightarrow{\kappa_0} L(X, X^*) \quad \text{in} \quad L(X \times X, L(X, X^*))$$

gedefinieerd door

$$h \to \kappa_0(A, B)\, h = \Phi_0 A h \circ B$$

als afbeelding in $L(X, X^*)$ voor iedere $A, B \in L(X)$. Voor $x = 0$ is $A = I$ een oplossing van $\kappa_0(A, A) = \Phi(x)$ omdat $\Phi(0) = \Phi_0$.

De impliciete functiestelling is toepasbaar als de afgeleide van de kwadratische functie

$$A \to \kappa_0(A, A)$$

in $A = I$ inverteerbaar is, en $x \to \Phi(x)$ continu is in $x = 0$. Dat laatste is bij aanname dat F'' continu is in 0 het geval.

Met betrekking tot de afgeleide naar A in I schrijven we $A = I + H$ en merken voordat we gaan expanderen in de kleine H op dat (15.11) nu herschrijft als

$$\chi_0(H)h = \Phi_0 Hh + \Phi_0 h \circ H + \Phi_0 Hh \circ H = (\Phi(x) - \Phi_0)h \tag{15.12}$$

voor alle $h \in X$. Het linkerlid definieert een X^*-waardige functie

$$H \xrightarrow{\chi_0} \chi_0(H)$$

van H in X, met een $\chi_0(H)$ die twee lineaire termen en een kwadratisch term heeft, waarin Φ_0 steeds als coefficient gezien kan worden.

Omdat de afgeleide in $H = 0$ evident gegeven wordt door

$$h \xrightarrow{\chi_0'(I)H} \Phi_0 Hh + \Phi_0 h \circ H,$$

lijkt de inverteerbaarheidsconditie te zijn dat

$$\Phi_0 Hh + \Phi_0 h \circ H = Ch \tag{15.13}$$

voor alle $h \in X$, oplosbaar moet zijn voor elke $C \in L(X, X^*)$. Merk echter op dat het rechterlid van de op te lossen vergelijking

$$\chi_0(H) = \Phi(x) - \Phi_0 \tag{15.14}$$

in $S(X, X^*)$ zit, zie (15.5). Nadere beschouwing van het linkerlid van (15.12) middels

$$\begin{aligned}
\langle \chi_0(H)h, k \rangle &= \langle \Phi_0 Hh, k \rangle + \langle \Phi_0 h \circ H, k \rangle + \langle \Phi_0 Hh \circ H, k \rangle \\
&= \langle \Phi_0 Hh, k \rangle + \langle \Phi_0 h, Hk \rangle + \langle \Phi_0 Hh, Hk \rangle \\
&= \langle \Phi_0 Hh, k \rangle + \langle \Phi_0 Hk, h \rangle + \langle \Phi_0 Hh, Hk \rangle
\end{aligned} \tag{15.15}$$

voor h en k in X omdat $\Phi_0 \in S(X, X^*)$, leert ons dat $\chi_0'(0)H \in L(X, X^*)$ gekarakteriseerd wordt door

$$\langle \chi_0'(0)Hh, k \rangle = \langle \Phi_0 Hh, k \rangle + \langle \Phi_0 Hk, h \rangle, \tag{15.16}$$

en daarom volgt dat $\chi_0'(0)H \in S(X, X^*)$.

De kwadratische restterm $R_0(H) \in L(X, X^*)$ in

$$\chi_0(H) = \chi_0'(0)H + R_0(H)$$

is af te lezen in(15.15) als gekarakteriseerd door

$$\langle R_0(H)h, k\rangle = \langle \Phi_0 Hh, Hk\rangle, \tag{15.17}$$

en derhalve is ook $R_0(H) \in S(X, X^*)$. We kunnen en moeten (15.14) dus lezen als de vergelijking

$$\chi_0(H) = \chi_0'(0)H + R_0(H) = \Phi(x) - \Phi_0 \quad \text{in} \quad S(X, X^*). \tag{15.18}$$

Daarmee wordt ook (15.13) beperkt tot $C \in S(X, X^*)$ en herschrijft als

$$\langle \Phi_0 Hh, k\rangle + \langle \Phi_0 Hk, h\rangle = \langle Ch, k\rangle \tag{15.19}$$

voor alle $h, k \in X$.

In het geval dat $X = \mathrm{I\!R}^2$ zijn Φ_0 en C symmetrische 2×2 matrices en staan hier vier vergelijkingen voor een 2×2 matrix H in termen van maar drie coefficienten in C. Zonder extra aannamen op H is (15.19) dan een onderbepaald stelsel. De voor hand liggende extra conditie op H is nu dat $\Phi_0 H \in S(X, X^*)$. In dat geval is (15.19) equivalent met

$$2\Phi_0 H = C, \tag{15.20}$$

een vergelijking die weer equivalent is met

$$H = \frac{1}{2}\Psi_0 C, \tag{15.21}$$

als

$$\Psi_0 = \Phi_0^{(-1)} \tag{15.22}$$

bestaat, en in dat geval is $\Phi_0 H = \Phi_0(\frac{1}{2}\Phi_0^{(-1)})C = \frac{1}{2}C \in S(X, X^*)$.

Aan de conditie voor het toepassen van de impliciete functiestelling op (15.18) in $S(X, X^*)$ rond $H = 0$ en $x = 0$ is dus voldaan als (15.18) als een vergelijking voor

$$\{H \in L(X, X^*) : \Phi_0 H \in S(X, X^*)\} \xrightarrow{\chi_0} S(X, X^*)$$

gezien wordt. Met $B = \Phi_0 H$ als nieuw onafhankelijke variabele verandert dit in

$$2Bh + Bh \circ (\Psi_0 B) = (\Phi(x) - \Phi_0)h$$

voor alle $h \in X$, ofwel

$$2B + T_0(B) = C(x) = \Phi(x) - \Phi_0 \tag{15.23}$$

in $S(X, X^*)$, met $T_0 : S(X, X^*) \to S(X, X^*)$ gedefinieerd door

$$T_0(B)h = Bh \circ (\Psi_0 B) \tag{15.24}$$

voor alle $h \in X$, en

$$X \xrightarrow{C} S(X, X^*)$$

continu en $C(0) = 0$.

De impliciete functiestelling kan nu gebruikt worden om, zonder meer[5] te eisen dan continuiteit van $\Phi(x)$, een unieke oplossing $B(x)$ te vinden voor x in de buurt van $x = 0$, die daar continu van x afhangt. Hiermee is de volgende stelling bewezen.

Stelling 15.6. *Laat X een Banachruimte zijn en $F : X \to \mathbb{R}$ twee keer continu differentieerbaar in de buurt van $x = 0$. Neem aan dat $F'(0) = 0$ en dat $F''(0) \in L(X, X^*)$ inverteerbaar is, met een inverse in $L(X, X^*)$. Dan is er een coördinatentransformatie van de vorm*

$$y = A(x)x = (I + \Phi_0^{(-1)} B(x))x,$$

waarin

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} F''(0)$$

en

$$x \xrightarrow{B} S(X, X^*)$$

continu is met $B(0) = 0$, zodanig dat

$$F(x) = \langle \Phi_0 A(x)x, A(x)x \rangle,$$

in de buurt van $x = 0$.

De aanname dat $F''(0)$ inverteerbaar is, is nogal zwaar en sluit een aantal standaardruimten meteen uit. Is dit eigenlijk een Hilbertruimtestelling, vraag je[6] dan achteraf af[7]. Ook is op te merken dat de impliciete functiestelling hier achteraf helemaal niet[8] nodig was. Merk daartoe op dat via $\phi = \Phi_0 h$ en $\psi = \Phi_0 k$ geldt dat

$$\langle \phi, \Psi_0 \psi \rangle = \langle \psi, \Psi_0 \phi \rangle \quad \text{voor alle} \quad \phi, \psi \in X^*,$$

[5] Zie (7.21) en formulering en bewijs daarboven.
[6] To check: X en X^* lineair homeomorf $\implies$ X is a Hilbert space in disguise?
[7] Via André Ran kwam van Jan Fourie antwoord: nee, $X \oplus X^*$, met X reflexief.
[8] Maar de stelling zette ons wel op het juiste spoor.

i.e. $\Psi_0 \in S(X^*, X)$, en enig spelen met deze definitie en die van $B, \Phi_0 \in S(X, X^*)$ geeft dat (15.23) equivalent is met

$$2\Psi_0 B + \Psi_0 B \Psi_0 B = \Psi_0 C(x). \tag{15.25}$$

Voor H zelf betekent dit dat

$$I + 2H + H^2 = I + P(x) \quad \text{in} \quad L(X) = L(X, X), \tag{15.26}$$

waarbij[9] zowel $H(x)$ als $P(x)$ (moeten) voldoen aan $\Phi_0 P(x), \Phi_0 H(x) \in S(X, X^*)$. Met de machtreekstechnieken die we gezien hebben[10] voor matrices volgt dat

$$H = \frac{1}{2}\,P - \frac{1}{2!}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,P^2 + \frac{1}{3!}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,P^3 - \frac{1}{4!}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\,P^4 + \cdots \tag{15.27}$$

als $|P| < 1$, en dus $y = A(x)x$ met[11]

$$A(x) = I + E(x) - \frac{1}{2!}\,E(x)^2 + \frac{1 \cdot 3}{3!}\,E(x)^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4!}\,E(x)^4 + \cdots$$

en

$$E(x) = \int_0^1 (1-t)(F''(0)^{(-1)}F''(tx) - I)\,dt,$$

wel aardig. Modulo rekenfouten wellicht maar ik denk het niet. Aan de formules zie je niet meer dat het niet alleen over $X = \mathbb{R}$ gaat.

15.2 Nog een keer de methode van Lagrange

In Sectie 8.3 hebben we essentieel gebruikt gemaakt van de gradiënten van Φ, F_1, F_2, F_3. Dat was niet echt nodig, en dat laten we nu zien in de abstracte setting met $x \in X$, $y \in Y$, $F : X \times Y \to Y$ en $\Phi : X \times Y \to \mathbb{R}$.

Onder de aanname dat

$$(x, y) \xrightarrow{F_x} F_x(x, y) \quad \text{en} \quad (x, y) \xrightarrow{F_y} F_y(x, y)$$

continu zijn in de buurt van $(x, y) = (0, 0)$ met F_y inverteerbaar, volgt weer het bestaan van een continu differentieerbare impliciete functie $y = f(x)$ en een lokale beschrijving van S zoals voor (8.19). Voor differentieerbare Φ, met dus $(x, y) \to \Phi_x(x, y) \in X^*$ en $(x, y) \to \Phi_y(x, y) \in Y^*$, is (8.18) weer over te schrijven als criterium voor het stationair zijn van Φ beperkt tot S.

[9] De omweg via H was ook niet nodig. De vergelijking was gewoon $A^2 = I + \Psi_0 C(x)$.
[10] Zie Opgave 4.45.
[11] Er vallen een heleboel 2-en weg bij de terugvertaling naar F''.

Als nu $\Phi_y \in Y^*$ te schrijven is als

$$\Phi_y = \Lambda \circ F_y,$$

dan volgt

$$\Phi_x = \Phi_y (F_y)^{(-1)} F_x = \Lambda \circ F_y (F_y)^{(-1)} F_x = \Lambda \circ F_x,$$

en samengenomen dat

$$\Phi' = \Lambda \circ F'$$

als criterium voor het stationair zijn.

Wat we hierboven nodig hebben is een stelling die zegt dat bij iedere begrensde lineaire $A : Y \to Y$ en $\psi \in Y^*$ een (unieke) $\Lambda \in Y^*$ hoort met $\psi = \Lambda \circ A$. Dat is voor een college functionaalanalyse.