

“Basisboek Analyse”

Not another ε -book

“Basisboek Analyse”

Not another ε -book

JH

Oegstgeest, Amsterdam

bezig bij xxxxxxxxx

The Netherlands

© 2016 tekst Joost Hulshof

© 2016 illustratie Ruud Hulshof

Fotografie omslag: nog onbekend

Vormgeving omslag: nog onbekend

ISBN

NUR

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written consent of the publisher.

De auteursinkomsten¹ uit dit boek komen ten goede aan de “geluksmachine”:

<http://orchestra18c.com>

¹ Als het ervan komt...

‘I like fonctions of one variable’

Xavier Cabré addressing Abel prize winner Louis Nirenberg and a small analysis group at Tor Vergata in June 2015.

Dit vak gaat over integraal- en differentiaalrekening voor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, met generalisaties naar $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow X$, $f : X \rightarrow Y$, en veel voorbeelden² met vooral maar niet alleen³ $X = \mathbb{R}^2$.

Na een uitgebreid inleidend thuis te lezen overzicht in Hoofdstuk 1 eerst integraalrekening in Hoofdstuk 2, waarin convergente deelrijen nodig zijn om integreerbaarheid van continue functies te bewijzen. Na Hoofdstuk 3 over die deelrijen en wat je zeker wil weten over absoluut convergente reeksen, volgt dan de link met (en) differentiaalrekening in Hoofdstuk 4 voor functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, waaronder ook impliciete functies, met de bijbehorende stelling in Hoofdstuk 4, voor de kettingregel. Het bewijs van de impliciete functiestelling doen we in detail en is gebaseerd op een contractieargument dat nog vaker zal terugkomen. Daarna zijn er wat inkoppertjes, bijvoorbeeld de multiplicator(en) van Lagrange, waarvan de resultaten later twee keer overgeschreven⁴ kunnen worden. Rekenregels, voorbeelden en toepassingen in Hoofdstuk 5 sluiten wat je Analyse 1 zou kunnen noemen af.

Integraalrekening leidt in Hoofdstuk 2 al tot een eerste Banachruimte ruimte X , $X = C([a, b])$ de verzameling van continue functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ op een begrensds gesloten interval $[a, b]$. Met de goede versie van de kettingregel in de bagage kan de lezer in principe Hoofdstuk 5 en Hoofdstuk 6 overslaan en zich in Hoofdstuk 7 de benodigde analyse met X i.p.v. $\mathbb{R}$ eigen maken om de toepassingen op differentiaal- en integraalvergelijkingen met parameters deels zelf in te vullen. Waar je een college Reële Analyse mee zou kunnen beginnen, met in Hoofdstuk 8 een (hele) kleine aanzet tot een vak Variatierekening.

Daarvoor is er nog een aanzet tot wat meestal Analyse 2 heet. Aan het begin van Hoofdstuk 6 een kort bewijsje van de hoofdstelling van de algebra, en dan verder met vooral differentiaal- en een beetje integraalrekening in meer variabelen, waarbij stellingen en bewijzen vooral overgeschreven worden uit de eerste hoofdstukken en de betekenis duidelijk wordt bij het uitpakken van de notatie. Eerst voor functies van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$, en dan voor afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$. Verschillende perspectieven en toepassingen komen aan de orde. Als afsluiting wordt de complexe structuur direct en zonder kromme poespas gebruikt om met lijnintegralen over lijnstukjes te laten zien dat complex differentieerbare functies (zonder enige extra aannames) geweldige mooie eigenschappen hebben, denk ook aan $f(A)$ met $A \notin \mathbb{C}$.

² Wat X en Y nog meer kunnen zijn zie je vanzelf, metrische topologie in de appendix.

³ Gebruik ook de index! Nog niet alles is helemaal klaar maar het meeste wel.

⁴ Uitgangspunt: alles voor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ op zo’n manier dat het naadloos generaliseert.

Nog een woord achter- en vooraf

Ik verwijs af en toe naar het boekje Wiskunde in je Vingers met Ronald Meester [HM]. Het verwerken van reacties van collega's (Bas Edixhoven, Jan Wiegerinck, Bob Rink, en met name René Swarttouw) wissel ik af met het lezen in [Eves], de zesde editie van An Introduction to the History of Mathematics van (vader) Howard Eves (en zoon Jamie voor de cultural connections). Hoe meer ik gelezen heb, hoe meer ik verwijs naar [Eves]. Verder is ook commentaar van studenten van de Mastermath zij-instroomcursus Analyse voor leraren zoveel mogelijk verwerkt. Ik verwijs ook naar [BE], het Leidse dictaat:

https://drive.google.com/file/d/0B_AYW-11PhK-TV0X2FVNWpYdGM/view

Hoofdstuk 1 van het huidige boek is bedoeld als enerzijds een alternatieve beschrijving voor de fundamenteën waar we op bouwen in de analyse. Dat betreft met name de verzameling van de reële getallen, de eigenschappen van deze verzameling, en de bewerkingen met elementen ervan⁵. Anderzijds beschrijft Hoofdstuk 1 ook al wat van de inhoud die komen gaat, in samenhang met die fundamenteën van de wiskunde.

Hoofdstuk 2 begint de facto bij Archimedes in een nu veel uitgebreidere inleiding die aan Sectie 2.1 vooraf gaat. De besproken formules voor sommen van machten zouden voorkennis voor dit vak kunnen zijn. Voor bewijzen (met volledige inductie) van die formules zie eventueel ook Hoofdstuk 6 van [HM].

Hoofdstuk 3 was een tussenhoofdstuk met twee opties voor het behandelen van de stelling over convergente deelrijen van begrensde rijen die nodig was in Hoofdstuk 2 om de Riemann integreerbaarheid van continue functies te bewijzen, maar is nu uitgebreid tot een algemene behandeling van het convergentiebegrip voor rijen en reeksen, met elementaire opgaven in een nieuwe Sectie 3.2.

In Hoofdstuk 4 vat Stelling 4.12 nu samen hoe differentiaal- en integraalrekening samenhangen. Sectie 4.1 over de middelwaardestelling is uitgebreid met opgaven die hiertoe dienend zijn. Sectie 4.4, de moeilijkste sectie van het hoofdstuk over de impliciete functiestelling, heeft nu een inleiding die het verband legt met de inverse functiestelling die als speciaal geval besproken wordt (en wellicht beter is om eerst te doen), en eenodeloos technische tussenformulering is geschrapt.

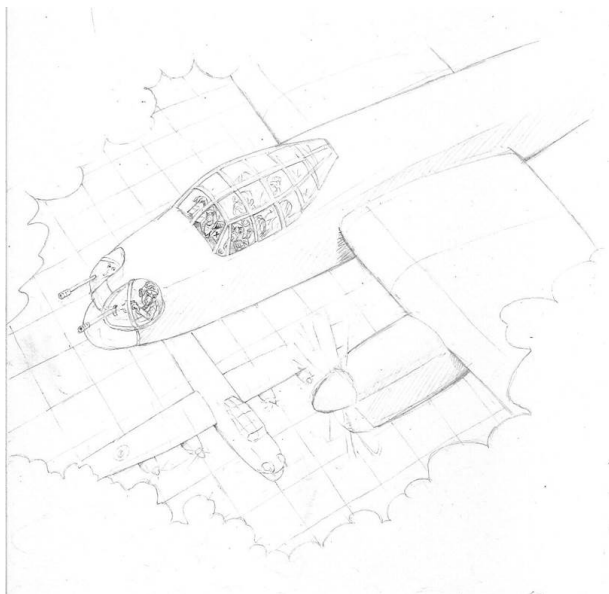
⁵ Meningen zijn soms verdeeld of een cursus Fundamenteën Analyse vooraf moet gaan.

Inhoudsopgave

1	Welke fundamenteën?	9
1.1	Academisch speelkwartier: kolomcijferen	11
1.1.1	Optellen	15
1.1.2	Vermenigvuldigen?	19
1.1.3	Andere aftelbare sommen?	22
1.1.4	Een cijfer keer een kommagetal	24
1.1.5	Produkten van kommagetallen	25
1.2	Kleinste bovengrenzen	28
1.3	Absoluut convergente reeksen	30
1.4	Verzamelingen in de praktijk	31
1.5	Equivalentierelaties	34
1.6	Analyse in en van wat?	36
2	Integraalrekening	41
2.1	Integralen via onder- en bovensommen	46
2.2	Toch maar wat meer over continuïteit en limieten	53
2.3	Integreerbaar: definities, regels, voorbeelden	56
2.4	Terug- en vooruitblik	60
2.5	Verdiepingsmoment: tussensommen	62
3	Convergente (deel)rijen en zo	64
3.1	Spelen met kwantoren	64
3.2	Elementaire opgaven over convergente rijen	65
3.3	Limietpunten en convergente deelrijen	66
3.4	Begrensde rijen continue functies	68
3.5	Overaftelbaarheid van de reële getallen	68
3.6	Directer bewijs voor de convergente deelrijstelling	69
3.7	Onvoorwaardelijke convergentie	71
4	Van integraal- naar differentiaalrekening	74
4.1	De middelwaardestelling	76
4.2	Integralen via primitieve functies	78
4.3	Inverse functies	81
4.4	Impliciete functies	82
4.5	Differentieerbare impliciete functies	88
4.6	Totale afgeleide, ketting- en Leibnizregel	92
4.7	Stationair onder randvoorwaarde	95
4.8	Zijstapje: convergentie van Newton's methode	96
4.9	Integralen met parameters	98

4.10	Partieel integreren en Taylorpolynomen	100
4.11	Meer calculus: substitutieregels voor integralen	104
4.12	Conclusie	104
5	Rekenregels en voorbeelden	107
5.1	Rekenregels voor de afgeleide	108
5.2	Mooie voorbeelden: machtreeksen	111
5.3	De natuurlijke logaritme	116
5.4	Zijstapje: tetratie	120
5.5	Meer differentiaalvergelijkingen	121
5.6	Meer inverse functies	124
5.7	Rare voorbeelden	125
5.8	Stirling's formule via schalen en limieten	126
5.9	Makkelijke convergentiestellingen	130
6	Analyse met meer variabelen	132
6.1	Zijstapje: de hoofdstelling van de algebra	133
6.2	Differentiaalrekening, ook met complexe getallen	135
6.3	Randvoorwaarden en de methode van Lagrange	141
6.4	Aftelbare sommen van vierkante matrices	145
6.5	Impliciete functiestelling in Euclidische ruimten	147
6.6	Karakterisaties van deelvarieteiten	149
6.6.1	Niet per se lineaire deelvarieteiten	150
6.6.2	Beelden (van randen) van bollen	153
6.6.3	Overgang op andere coördinaten	154
6.6.4	Meer dan continu differentieerbaar	154
6.7	Gradient, kettingregel, coördinatentransformaties	155
6.7.1	Gradient, divergentie en Laplaciaan	155
6.7.2	Kettingregel uitgeschreven voor transformaties	158
6.7.3	Kettingregel met Jacobimatrices	160
6.7.4	Omschrijven van differentiaaloperatoren	161
6.8	Integralen over rechthoeken	164
6.8.1	Notationele kwesties met die d-tjes	164
6.8.2	Formele d-algebra zonder betekenis?	166
6.8.3	Transformaties en parametrisaties	168
6.8.4	Een transformatiestelling?	169
6.9	Integraalrekening in poolcoördinaten	172
6.10	Integraalrekening en kansverdelingen	173
6.11	Harmonische polynomen	175
6.12	Intermezzo: het waterstofatoom	179
6.13	Lijnintegralen over polygonen en Coursat	180

6.14	Machtreeksen via een Cauchy integraalformule	186
6.15	De Cauchy Integraal Transformatie	190
6.16	Kromme lijnintegralen	191
7	Analyse in genormeerde ruimten	195
7.1	Calculus voor X -waardige functies	197
7.2	Differentiaalrekening voor functies op X	200
7.3	Partieel differentieerbaar $\implies$?	203
7.4	Differentiaal- en integraalvergelijkingen	206
7.5	Impliciete functiestelling en integraalvergelijkingen	211
7.6	Calculus in Banachalgebra's van operatoren	212
8	Extremisme	221
8.1	Tweede afgeleide, Hessiaan, Lemma van Morse	221
8.2	Nog een keer de methode van Lagrange	229
9	Appendix: al of niet metrische topologie	231
9.1	Metrische ruimten	231
9.2	Omgevingen, open en gesloten verzamelingen	233
10	Newton's method: a convergence proof	259
10.1	The optimal result	261
10.2	A suboptimal result	261
11	Alternative proof of convergence	262
11.1	The optimal alternative result	262
11.2	A suboptimal alternative result	263
11.3	A lousy alternative result	264
11.4	A much better suboptimal alternative result	264
12	Nash' modification of Newton's method	265
12.1	The modified scheme	266
12.2	The new error term	267
12.3	The system of inequalities	268
12.4	Estimating the increments	269
12.5	Estimating the error terms	270
12.6	Sufficient conditions for a convergence result	272
12.7	Sufficient condition on initial value for convergence	273
12.8	The optimal choice of parameters	274
12.9	Continuity	276



De tekening hierboven is van mijn broertje, die ook de 11 tekeningen in het groene boekje met Ronald Meester maakte. Dit is nummer 12. Met 11 hoofdstukken bleef er eentje over die illustreert wat er op 3 maart 1945 in het Bezuidenhout in Den Haag gebeurde. De bommen kwamen niet op de Duitse lanceerinstellingen in het Haagse Bos terecht maar op woonwijken. De school van mijn moeder, vlak bij de hoge toren tussen de A12 en die laan waar NWO tegenwoordig zit, bleef net gespaard.

De Nederlandse wikipedia pagina over het bombardement op Den Haag is de moeite waard, en vermeldt het verwisselen van coördinaten. De tekening illustreert dit met een x en een y in de cockpit, en met vliegtuigen die in richtingen loodrecht op elkaar vliegen. Het is altijd leuk om in woorden een idee te beschrijven en te kijken wat de tekenaar er van bakt. Helaas paste deze tekening niet in het format van het groene boekje.

De keuze van letters als namen voor wiskundige objecten is verder een bron van leerzaam vermaak. Bij het introduceren van nieuwe stof is het een goede gewoonte om systematisch te zijn in de keuze van de letters, maar vroeg of laat moet je de stap maken om flexibel te zijn en letters en notaties te veranderen, al is het alleen maar om te leren de notaties van anderen te begrijpen. Sterker, andere vakgebieden gebruiken soms notaties die je vanuit een star en strict wiskundig standpunt als fout zou moeten duiden. Het is soms wat contraproductief om dat dan vervolgens ook altijd maar te doen.

1 Welke fundamenteuten?

Deze inleiding is bedoeld voor een breed publiek. De eerstejaars wiskunde student kan voor de lol lezen wat ik hier schrijf. Ik begin met de verzameling $\mathbb{R}$ van de *reële getallen* en aftelbare sommen van die getallen. Als het onderstaande goed leesbaar is dan kun je rustig op weg met wat er verder komt in dit boek. Zo niet, dan zou het *groene* boekje met Ronald Meester¹ je wat op weg kunnen helpen. In dat boekje, dat vanaf nu [HM] heet, kwamen we vanuit getallenrepresentaties als

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

op natuurlijke wijze tot het inzicht dat ieder (reëel) getal van de vorm

$$k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n} \tag{1.1}$$

is. In (1.1) is $k \in \mathbb{Z}$, de verzameling van de *gehele getallen*. De decimalen zijn

$$d_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

waarbij n de verzameling $\mathbb{N}$ van de positieve² gehele getallen doorloopt, ook wel de *natuurlijke getallen* genoemd.

De verschillende notaties hierboven voor het rationale getal dan wel de breuk $\frac{1}{3}$ kunnen tot enige controverse leiden. De breuk $\frac{1}{3}$ heeft immers net als iedere andere breuk een teller en een noemer, in dit geval teller 1 en noemer 3. Evenzo heeft de breuk $\frac{2}{6}$ teller 2 en noemer 6. De breuken $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{6}$ zijn echter als rationale getallen gelijk aan elkaar. Mag je nu van het rationale getal $\frac{1}{3}$ zeggen dat zijn teller 1 en zijn noemer 3 is? Van mij wel, maar daar wordt soms anders over gedacht. Dus daarom hierbij de afspraak dat we

¹ vuuniversitypress.com/15-voor-auteurs/overige-content/108-wiskunde-in-je-vingers

² NB, 0 is niet positief, $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\}$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

stilzwijgend het rationale getal altijd als breuk met een minimale noemer³ in $\mathbb{N}$ schrijven als we het over teller en noemer van het rationale getal hebben.

Ook de naam “reeks” voor de uitdrukking met het somteken Σ leidt tot controverses, alsmede het gebruik van het symbool ∞ boven op dat somteken. Wat het eerste betreft zou ik liever zoveel mogelijk over aftelbare sommen willen spreken, maar niet te vergeten dat de term “reeks” nu eenmaal door iedereen gebruikt wordt in zinsdelen als “de som van de reeks”.

Het gebruik van het symbool ∞ is wellicht te vermijden door

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{in plaats van} \quad \sum_{n=1}^{\infty}$$

te schrijven, maar dan is de volgorde waarin de termen in de som bij elkaar op worden geteld niet meer zo eenduidig specificiseerd als in de meer gebruikelijke notatie. Die wordt namelijk doorgaans uitgesproken als *de som van de termen in de reeks, waarbij n loopt vanaf het getal 1 tot (en niet tot en met) oneindig*⁴. In het derde hoofdstuk komen we hier nog op terug.

Tenslotte merken we op dat de schrijfwijze in (1.1) niet altijd uniek is omdat getallen van de vorm

$$k + \sum_{n=1}^m \frac{d_n}{10^n} \tag{1.2}$$

nu eenmaal twee representaties hebben, bijvoorbeeld

$$1 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{9}{100000} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}, \tag{1.3}$$

wellicht het eerste voorbeeld van een zogenaamde meetkundige reeks dat ieder kind in het basisonderwijs hopelijk wel eens te zien krijgt.

Het simpelste voorbeeld van zo’n meetkundige reeks betreft de rij breuken

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

met in de noemers de getallen uit de eerste rij getallen die ik ooit van mijn vader leerde, toen ik een jaar of 2^2 was. Als we die rij beschrijven met

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

met n de verzameling $\mathbb{N}$ doorlopend, dan is de bijbehorende som gelijk aan het getal 1. Nog altijd de mooiste som die er bestaat. Een eindeloze rij getallen die optellen tot 1. Wat wil je nog meer?

³ Ontbind teller en noemer in priemfactoren en streep gemeenschappelijke factoren weg.

⁴ Rekenen met ∞ doen wij hier niet.

1.1 Academisch speelkwartier: kolomcijferen

We kiezen nu voor een wat basaler perspectief dan gebruikelijk om meer inzicht te krijgen in wat de reële getallen zijn. Deze inventariserende⁵ subsectie kan overgeslagen worden bij eerste lezing⁶, maar een opmerking van Jan Wiegerinck zette me aan het denken, ook in relatie tot Opgave 1.7 in [HM]. Hoe rekenen we met (eerste maar positieve) getallen in de vorm (1.1)? Een rekenvraag die we nu rekenend en redenerend willen beantwoorden zonder over verzamelingen van getallen te spreken.

Terzijde, helemaal consequent is de schrijfwijze in (1.1) niet. De k is duidelijk anders dan de rest van de termen in deze aftelbare som⁷. Als we ons beperken tot de positieve reële getallen, die we als verzameling⁸ gezien aanduiden met $\mathbb{R}^+$, dan is het eleganter om het “Romeinse” perspectief van eenheden, tientallen, tienden, honderdtallen, hondersten, duizendtallen, duizendsten, etc alleen te combineren met de “Arabische” cijfers

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Met

$$\text{tien} = 10, \quad \text{honderd} = 10 \times 10 = 100, \quad \text{duizend} = 10 \times 10 \times 10 = 1000,$$

enzovoorts, en op zijn kop

$$\text{een tiende} = \frac{1}{10}, \quad \text{een honderste} = \frac{1}{100}, \quad \text{een duizendste} = \frac{1}{1000},$$

und so weiter, is het niet heel raar om bijvoorbeeld

$$8 \times 1000 + 7 \times 100 + 6 \times 10 + 5 \times 1 + 4 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 2 \times \frac{1}{1000}$$

als corresponderend met een punt op een lijn van hier tot ginder te zien. Bij zo’n punt hoort een getal dat we noteren als

$$8765,4321 \tag{1.4}$$

in onze decimale notatie van vandaag de dag, met ook (hier 5 keer) de gewone eenheid 1, en een Nederlandse komma waarachter in dit geval vier cijfers staan.

⁵ We gaan niet recht op een doel af nu.

⁶ En ook bij tweede lezing.

⁷ Som van een eindeloze rij, zoals Marjolein Kool dat zo mooi noemt.

⁸ Getallen in verzamelingen willen stoppen is een beetje een beroepsafwijking.

[illegible]
$$0 \times 1000 + 0 \times 100 + 0 \times 10 + 1 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{1}{100} + 0 \times \frac{1}{1000} = 1$$
$$0 \times 1000 + 0 \times 100 + 0 \times 10 + 1 \times 1 + 1 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{100} + 1 \times \frac{1}{1000} = 0,1111,$$

Dat

is een conclusie die we willen trekken als resultaat van de herhaalde optelling

$$0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,9 = 1.$$

Verdelen we hetzelfde lijnstuk niet in negen maar in 99 gelijke stukken, dan zien we

$$0,010101010101010101010101 \dots \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{9} = 0,\underline{1}, \quad \frac{1}{99} = 0,\underline{01}, \quad \frac{1}{999} = 0,\underline{001},$$

12

met links steeds een rationaal getal en rechts de decimale representatie van dat getal, dat we met liefde ook een breuk mogen noemen, een breuk met teller 1 en een noemer met alleen maar 9-ens.

We zien in (1.5) dat de 0 als cijfer erg handig is, de 0 die correspondeert met nul vingers op de twee gebalde vuisten van je handen waar je geen ruzie mee wil krijgen. Het tellen zelf begint met 1, eindigt op de vingers bij tien = 10, en gaat daarna verder met 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, en een kind kan al lerend voor het slapen gaan zien en begrijpen hoe dat zo altijd maar doorgaat als dromenland geen redding brengt. De eindeloze rij van de natuurlijke getallen, beginnend met 1, wordt zo ondubbelzinnig vastgelegd door de aftelling in het decimale stelsel.

Getallen uit die rij kunnen we optellen en vermenigvuldigen (in wezen herhaald optellen). Dat doen we cijferend met de getallen onder elkaar gezet, onhandig vanaf links of handig vanaf rechts per kolom. Die methodes¹⁰ werken ook voor het rekenen met de positieve kommagetallen die we krijgen door voor de komma van het kommagetal het cijfer 0 of een natuurlijk getal

¹⁰ In het PO heeft de onhandige methode veelal de voorkeur gekregen.

De natuurlijke getallen zelf zijn geen kommagetallen. Door getallen als 123456789 gelijk te zien aan een nepkommagetal 123456789,0 is dat snel verholpen, maar dit wordt in de natuurkunde¹¹ terecht als een minder gelukkige en te mijden conventie gezien. Afbrekende kommagetallen kunnen wellicht beter vermeden worden, en de niet afbrekende kommagetallen zijn nu net de kommagetallen die we nog missen, en waar we zeker ook mee willen rekenen en cijferen. Dat *cijferen* moet dan wel vanaf links als je er even over nadenkt.

$$0,9 = 0,999999999999999999999999999999 \dots,$$

Bovendien is elk natuurlijk getal nu op een natuurlijke manier ook een echt kommagetal. Met $0,\underline{9}$, $1,\underline{9}$, $2,\underline{9}$, $3,\underline{9}$, $4,\underline{9}$, $5,\underline{9}$, $6,\underline{9}$, $7,\underline{9}$, $8,\underline{9}$, $9,\underline{9}$, $10,\underline{9}$, $11,\underline{9}$, $12,\underline{9}$, $13,\underline{9}$, $14,\underline{9}$, $15,\underline{9}$, $16,\underline{9}$, $17,\underline{9}$, $18,\underline{9}$, $19,\underline{9}$, $20,\underline{9}$, $21,\underline{9}$, $22,\underline{9}$, $23,\underline{9}$, $24,\underline{9}$, $25,\underline{9}$, $26,\underline{9}$, $27,\underline{9}$, $28,\underline{9}$, $29,\underline{9}$, $30,\underline{9}$, $31,\underline{9}$, $32,\underline{9}$, $33,\underline{9}$, $34,\underline{9}$, $35,\underline{9}$, $36,\underline{9}$, $37,\underline{9}$, $38,\underline{9}$, $39,\underline{9}$, $40,\underline{9}$, $41,\underline{9}$, $42,\underline{9}$, komen we ook op weg in de rekenkunde. Ook al bekt het niet zo lekker, we gaan rekenen met deze niet afbrekende kommagetallen zoals ze ons gegeven worden.

14

1.1.1 Optellen

De vraag is nu of we met alle ons gegeven kommagetallen kunnen rekenen zoals je zou verwachten, en of rekenen dan (zoals tegenwoordig in het basis-onderwijs) onhandig cijferen¹² kan worden, zoals bijvoorbeeld in

$$\begin{array}{r}
 0,9999999 \\
 0,9999999 \\
 \hline
 1,8000000 \\
 0,1800000 \\
 0,0180000 \\
 0,0018000 \\
 0,0001800 \\
 0,0000180 \\
 0,0000018 \\
 \hline
 1,9999998
 \end{array}$$

Immers, met doorlopende negens gaat dit onhandig *cijferen* precies hetzelfde en duurt nauwelijks langer dan hierboven:

$$\begin{array}{r}
 0,99999\dots \\
 0,99999\dots \\
 \hline
 1,80000\dots \\
 0,18000\dots \\
 0,01800\dots \\
 0,00180\dots \\
 0,000180\dots \\
 0,000018\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \hline
 1,99999\dots
 \end{array}
 \tag{1.6}$$

Gelukkig: $1 + 1 = 2$ ¹³ Weliswaar schendt de realistisch tussenstap hier wel de regel dat we rechts geen doorlopende 0-en mogen hebben, de uitkomst

¹² Onhandig cijferen wordt ook wel kolomrekenen genoemd.

¹³ Lees: één en één is twee uitroepeten.

van de som is duidelijk: de 8 combineert steeds met de 1 op de volgende rij tot een 9. De 18 op elke rij is de som van 9 en 9. Op de eerste rij betreft het $0,9 + 0,9$, op de tweede rij $0,09 + 0,09$, op de derde rij $0,009 + 0,009$, enzovoorts. Het is instructief¹⁴ om zo'n sommetje als hierboven met twee andere doorlopende getallen met voor de komma alleen maar 0-en te doen. Dan vormen de twee cijfers op elke rij steeds een getal uit de rij

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,$$

en bij elk van deze getallen kan zowel van boven een getal uit de rij

$$0 = 00, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90$$

en daarna vanonder ook een getal uit de veel kortere rij 0, 1 worden opgeteld. Op zijn hoogst krijgen we dus $90 + 18 + 1 = 109$.

Is de som groter dan 99 dan schuift er een 1 door naar links maar dat overhevelen blijft beperkt. Optellend per tweetal kolommen kan er een 1 naar links doorschuiven en een 1 van rechts binnenkomen. Die 1 kan van de 109 een 110 maken, maar ook die geeft nog steeds op zijn hoogst een 1 naar links door. Dat optellen van twee getallen onhandig cijferend per twee kolommen tegelijk vanaf links gaat dus altijd wel lukken.

Hoe zit het met drie getallen? We nemen weer de moeilijkste som van dat type, met de cijfers zo groot mogelijk, dus

$$\begin{array}{r}
 0,99999\dots \\
 0,99999\dots \\
 0,99999\dots \\
 \hline
 + \\
 \\
 2,70000\dots \\
 0,27000\dots \\
 0,02700\dots \\
 0,00270\dots \\
 0,000270\dots \\
 0,000027\dots \\
 0,0000027\dots \\
 \dots\dots\dots \\
 \hline
 + \\
 \\
 2,99999\dots
 \end{array}
 \tag{1.7}$$

Gelukkig: $1 + 1 + 1 = 3$. Opnieuw is het instructief om zo'n sommetje als hierboven met drie andere doorlopende getallen met voor de komma alleen

¹⁴ Wel doen!

maar 0-en te doen. Dan vormen de twee cijfers op elke rij steeds een getal uit de rij

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27,

en bij elk van deze getallen kan zowel een getal uit de rij

$$0 = 00, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90$$

en daarna ook een getal uit de veel kortere rij

$$0, 1, 2$$

worden opgeteld. Op zijn hoogst krijgen we nu $90 + 27 + 2 = 119$. Het overhevelen naar links blijft weer beperkt. Met enig werk gaan we hier wel inzien dat drie zulke *nul komma nog minstens wat getallen* altijd cijferend bij elkaar opgeteld kunnen worden en dat het niet uitmaakt¹⁵ of we er eerst twee samen nemen en in welke volgorde we de getallen optellen, en dat in de som voor de komma ook een 1 of een 2 kan komen te staan.

Willen we positieve getallen met ook voor de komma decimalen hebben staan in de getallen die we bij elkaar optellen, dan doen we die apart. Bijvoorbeeld

$$99,\underline{9} + 88,\underline{8} + 77,\underline{7} = 99 + 88 + 77 + 0,\underline{9} + 0,\underline{8} + 0,\underline{7},$$

waarbij

$$99$$

$$88$$

$$77$$

$$— +$$

$$264$$

nu ook (juist wel handig) van rechts af per kolom uitgedcijferd¹⁶ kan worden, en de som van de drie *nul komma nog minstens wat getallen* met de methode hierboven gelijk is aan 2,6. Alles bij elkaar vinden we zo dat

$$99,\underline{9} + 88,\underline{8} + 77,\underline{7} = 264 + 2,\underline{6} = 266,\underline{6},$$

al had dat vast handiger gekund.

¹⁵ Lees: $a + b + c = (a + b) + c = c + (a + b)$ met alle gepermuteerde variaties.

¹⁶ Ook kolomcijferen, maar wordt meestal mechanisch rekenen genoemd.

Is zo'n positief kommagetal p groter dan een ander positief kommagetal a , hetgeen betekent dat, na mogelijk een aantal gelijke decimalen van p en a , er een eerste decimaal is van p die groter is dan de overeenkomstige decimaal van a , dan kunnen we precies één (positieve) b vinden waarvoor geldt dat $p = a + b$. Het voorbeeldje

$$\begin{array}{r} 0,909090909090909090\ldots \\ 0,222222222222222222\ldots \\ \hline 0,6868686868686868\ldots \end{array}$$

kan van linksaf kolomcijferend worden aangepakt. In eerste instantie is de eerste decimaal achter de komma dan gelijk aan 7 maar bij de volgende decimaal moet er van links 1 geleend worden om $10 - 2 = 8$ te krijgen, waarmee de 7 een 6 wordt. Al spelend zie je wel hoe het in het algemeen gaat, en ook dat $p > a$ gelijkwaardig is met $p + w > a + w$ voor ieder willekeurig ander positief getal w .

Nog een optelvoorbeeldje om het af te leren:

$$\begin{array}{r} 0,12345\ldots \\ 0,99999\ldots \\ \hline 1,00000\ldots \\ 0,11000\ldots \\ 0,01200\ldots \\ 0,00130\ldots \\ 0,000140\ldots \\ 0,000015\ldots \\ \dots\dots\dots \\ \hline 1,12345\ldots \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ + \end{array} \quad (1.8)$$

Bij een doorlopend kommagetal het getal $0,\underline{9}$ optellen laat uiteindelijk alle cijfers achter de komma ongemoeid en telt een 1 op bij het getal voor de komma. En zo hoort dat ook. Na wat oefenen lukt dat ook wel in één keer en is het wellicht verstandig om nu verder te gaan met Sectie 1.1.4.

1.1.2 Vermenigvuldigen?

Kunnen we ook vermenigvuldigen? Dit gemene¹⁷ sommetje bijvoorbeeld?

$$\begin{array}{r} 0,999999\dots \\ 0,999999\dots \\ \hline \end{array} \times$$

In de vorige subsectie is het gelukt om de som van deze twee getallen kolomcijferend vanaf links zondere hogere wiskunde uit te werken. Kan dat met het produkt ook? We laten ons niet afschrikken en schrijven het produkt cijferend uit, waarbij we het *cijferen* symmetrisch houden in beide factoren, net zoals in (1.6) en (1.7) de uitwerking van de som symmetrisch in de bijdragen van de aparte termen was.

[illegible]

¹⁷ Denk nog niet meteen aan $0,\underline{6} \times 0,\underline{6}$.

Dat ziet er een stuk ingewikkelder uit dan (1.6). Misschien is het wel geen goed idee het produkt van twee kommagetallen zo in één keer te willen doen. In deze doorlopende som zien we tussen de horizontale strepen de termen staan die we krijgen als we het produkt van de eerste decimaal van de eerste factor met de eerste decimaal van de tweede factor nemen (één term), van de eerste met de tweede en de tweede met de eerste (twee termen), van de eerste met de derde, de tweede met de tweede en de derde met de eerste (drie termen), enzovoorts. Gelukkig zien we links steeds meer nullen waardoor het lijkt of het blokje 81 naar rechts opschuift.

Ieder zulk blokje is het produkt van twee decimalen op steeds twee andere posities, decimalen die we hier toevallig allemaal gelijk aan 9 genomen hebben om de som¹⁸ zo moeilijk mogelijk te maken. Het is de positie van het blokje dat opschuift, en op het blokje staat steeds het produkt van twee cijfers. Dus dit zijn de blokjes die voor kunnen komen:

00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 24,

25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 49, 54, 56, 63, 64, 72, 81.

Met alle blokjes gelijk aan 81 gaat het in (1.9) om de som van de getallen in het schema dat begint met

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \frac{81}{10^2} \\
 & & & & & & \\
 & & & & & \frac{81}{10^3} & \frac{81}{10^3} \\
 & & & & & \\
 & & & \frac{81}{10^4} & \frac{81}{10^4} & \frac{81}{10^4} & \\
 & & & \\
 & & \frac{81}{10^5} & \frac{81}{10^5} & \frac{81}{10^5} & \frac{81}{10^5} & \\
 & & \\
 & \frac{81}{10^6} & \frac{81}{10^6} & \frac{81}{10^6} & \frac{81}{10^6} & \frac{81}{10^6} & \\
 & \\
 \frac{81}{10^7} & \frac{81}{10^7} & \frac{81}{10^7} & \frac{81}{10^7} & \frac{81}{10^7} & \frac{81}{10^7} &
 \end{array} \tag{1.10}$$

en naar beneden breder en breder doorloopt. Let wel, de volgorde waarin we cijferend optellen in (1.9) komt overeen met per regel optellen in (1.10) en leidt in de somnotatie tot

$$81 \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^{n+1}} \tag{1.11}$$

¹⁸ Het betreft $1 \times 1 = 1$, maar dat terzijde.

als maximale uitkomst (vast wel gelijk¹⁹ aan 1) van een produkt van twee *nul komma (minstens) nog wat getallen*.

En met drie zulke getallen gaat het om maximaal

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & & & \frac{729}{10^3} \\
 & & & & & & & & & & \frac{729}{10^4} \quad \frac{729}{10^4} \quad \frac{729}{10^4} \\
 & & & & & & & & & & \frac{729}{10^5} \quad \frac{729}{10^5} \quad \frac{729}{10^5} \quad \frac{729}{10^5} \quad \frac{729}{10^5} \quad \frac{729}{10^5} \\
 \frac{729}{10^6} & \frac{729}{10^6} & \frac{729}{10^6} & \frac{729}{10^6} & \frac{729}{10^6} & \frac{729}{10^6} & \frac{729}{10^6} & \frac{729}{10^6} & \frac{729}{10^6} & \frac{729}{10^6} & \frac{729}{10^6}
 \end{array} \tag{1.12}$$

enzovoorts, met 3, 6, 10, 15, 21, ... termen op elke regel, en maximaal

$$729 \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} 10^{n+2}$$

als maximale²⁰ uitkomst (vast wel gelijk aan 1) van een produkt van drie *nul komma (minstens) nog wat getallen*.

Het wordt er niet eenvoudiger op. We kijken nog een keer naar (1.9) waarmee we begonnen zijn. Het aantal niet-nullen is in de kolommen rechts van de komma achtereenvolgens 1, 3, 5, 7, 9, ..., en

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 \text{in kolom} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\
 \text{zien we} & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & \dots
 \end{array}$$

niet-nullen. Per kolom gaan we bij het optellen dus onvermijdelijk over de 9 heen, en daarbij blijft het niet als we doorcijferen naar rechts, met een ruwe schatting

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 \text{in kolom} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\
 \text{maximaal} & 1 \times 9 & 3 \times 9 & 5 \times 9 & 7 \times 9 & 9 & 11 \times 9 & 13 \times 9 & 15 \times 9 & \dots
 \end{array}$$

voor de kolomsommen, hetgeen leidt tot de vraag of

$$9 \times \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{7}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \dots \right) = 9 \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{10^n}$$

¹⁹ Equivalent met

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n} = \frac{10}{81}, \quad \text{wat zou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{10^n} \quad \text{zijn? Zie verder.}$$

²⁰ Het betreft immers $1 \times 1 \times 1 = 1$.

een decimaal ontwikkelbaar getal definieert waar *elke* eindige som van termen in (1.9) niet boven kan komen, een vraag vergelijkbaar met de minder ruw afgeleide vraag over (1.11). Maar het moge duidelijk zijn dat we opnieuw afdwalen van de basisschoolstof waar het hier toch om zou moeten gaan²¹.

Het *cijferen* geeft wellicht meer begrip. Onhandig kolomcijferend zien we in (1.9) kolomsommen

8, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80, 89, 98, 107, 116, 125, 134, 143, 152, 161, 170, 179, enzovoorts verschijnen. Cijferend optellen geeft dat met weglating van de nul komma

8	7	6	5	4	3	2	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	9
1	2	3	4	5	6	7	8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	7	8
									1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

en alles loopt niet alleen naar rechts maar ook naar beneden door.

Opnieuw optellen per kolom geeft

9	9	9	9	9	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	8
								1										1	1

Enzovoorts. Zo te zien krijgen we op iedere plek inderdaad uiteindelijk een negen, maar alles loopt nog steeds (rechts) naar beneden door, al past het niet meer op de pagina.

De vraag is hoe we uitgaande van dit voorbeeld zien dat er voor twee willekeurige getallen zo altijd een decimale ontwikkeling van het produkt ontstaat, waarmee dan het produkt ondubbelzinnig vast ligt, en ook of er in het geval van het “maximale” voorbeeld alleen maar negens uitkomen. En ook voor produkten van drie getallen natuurlijk, met dezelfde overwegingen als bij optellen²². Als we dat wiskundig precies willen maken hebben we nodig dat volgordes en eerst samen nemen niet uit moet maken bij het optellen in doorlopende schema’s beginnend als (1.12), als de breedte maar niet te snel toeneemt. Dat idee verkennen we in de volgende subsectie, waarin we opnieuw afdwalen van het cijferen.

1.1.3 Andere aftelbare sommen?

Een analysevraag om te stellen lijkt: voor welke rijen $a_1, a_2, a_3, \dots$ gehele nietnegatieve getallen correspondeert een aftelbare maar niet eindige som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \tag{1.13}$$

²¹ Voor een analysecursus zijn dit vragen om te onthouden!

²² Lees: $a \times b \times c = (a \times b) \times c = c \times (a \times b)$, weer met alle gepermuteerde variaties.

ondubbelzinnig met een getal

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$$

waarin alle d_n een cijfer zijn, i.e. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 of 9? Het liefst beantwoorden we die vraag zonder over andere uitdrukkingen dan die van de vorm (1.13) te praten.

Een noodzakelijke voorwaarde is dat de eindige sommen

$$A_1 = \frac{a_1}{10}, \quad A_2 = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \quad A_3 = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3}, \quad \dots \quad (1.14)$$

allemaal kleiner dan $1 = 0,9$ zijn. Als $0,9$ zo'n (strikte) bovengrens is dan is wellicht $0,89$ dat ook. Of niet. Kies het minimale cijfer d_1 waarvoor $0,d_19$ zo'n bovengrens is. Kies vervolgens het minimale cijfer d_2 waarvoor $0,d_1d_29$ een bovengrens is, enzovoorts. Dit proces definieert ondubbelzinnig een getal

$$0 = d_1d_2d_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n}$$

dat kleiner is dan alle bovengrenzen $0,d_19$, $0,d_1d_29$, $0,d_1d_2d_39$, $\dots$, en voor de bijbehorende

$$D_1 = \frac{d_1}{10}, \quad D_2 = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2}, \quad D_3 = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3}, \quad \dots,$$

geldt dat

$$D_1 + \frac{1}{10}, \quad D_2 + \frac{1}{10^2}, \quad D_3 + \frac{1}{10^3}, \quad \dots$$

bovengrenzen zijn. We kunnen niet uitsluiten dat na verloop van tijd alle d_n nul zijn, maar ze zijn zeker niet allemaal nul.

Kan het zo zijn dat de A_n -tjes niet boven de D_1 uitkomen? Wel, in dat geval zijn alle $A_n < D_1$ (want met $A_n = D_1$ komt een volgende A_n boven D_1), voor alle $n = 1, 2, 3, \dots$, en was d_1 kennelijk niet minimaal gekozen om alle A_n onder $0,d_19$ te hebben. Dus A_n komt wel boven D_1 en blijft dan groter dan D_1 . Hetzelfde geldt met het zelfde argument voor D_2 , D_3 , etcetera.

Als n_1 de eerste n is waarvoor $A_n > D_1$, n_2 de eerste n waarvoor $A_n > D_2$, n_3 de eerste n waarvoor $A_n > D_3$, etcetera, dan is n_2 minstens n_1 , n_3 minstens n_2 , n_4 minstens n_3 , enzovoorts. We concluderen dat voor iedere k geldt dat

$$D_k < A_n < D_k + \frac{1}{10^k} \quad (1.15)$$

voor alle n vanaf $n = n_k$, en dat zou moeten betekenen dat

$$A_n \rightarrow D = 0,d_1d_2d_3d_4 \dots, \quad (1.16)$$

een nog niet precies gemaakte uitspraak voor een rij breuken A_n , breuken met noemers machten van 10 en $A_n \leq A_{n+1}$, met strikte ongelijkheid voor niet per se alle maar wel willekeurig grote n .

Elke A_n heeft decimalen genummerd door $j = 1, 2, 3, 4, \dots$. De eerste decimaal kan niet kleiner worden met toenemende n . Dat betekent dat vanaf zekere $n = m_1$ de eerste decimaal van A_n niet meer verandert en gelijk is aan een vast cijfer α_1 . Daarna geldt hetzelfde voor de tweede decimaal die vanaf zekere $n = m_2$ (waarbij we m_2 minstens gelijk aan m_1 kunnen nemen) niet meer verandert en gelijk is aan een vast cijfer α_2 , enzovoorts.

Deze eigenschap moet voor de niet-dalende rij $A, A_2, A_3, \dots$ toch wel de enige zinvolle definitie van

$$A_n \rightarrow 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots$$

zijn. Graag zouden²³ we nu uit (1.15) concluderen dat

$$0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots,$$

waarbij we opmerken dat de ontwikkeling in het rechterlid bij constructie niet af kan breken maar de ontwikkeling in het linkerlid wel. Het kan dus gebeuren dat de eerste zoveel α_n en d_n hetzelfde zijn, daarna één keer $\alpha_n + 1 = d_n$, en vervolgens alle $d_n = 0$ en alle $\alpha_n = 9$. Hoe het ook zij, de uitdrukking in (1.13) definieert dus ondubbelzinnig een *nul komma minstens nog wat getal*, mits we weten dat alle eindige sommen in (1.14) kleiner zijn dan $0, \underline{9}$. Maar wie voor (1.10) en (1.12) meteen ziet dat dat inderdaad zo is mag het zeggen. We zijn er dus nog niet uit wat betreft produkten van positieve kommagetallen.

1.1.4 Een cijfer keer een kommagetal

Terug naar het cijferen. We houden ons nog even aan de afspraak dat positieve kommagetallen de getallen zijn met een na de komma doorlopende rij cijfers waarin niet-nullen blijven voorkomen hoe ver je ook gaat in de decimale ontwikkeling. Zo'n positief kommagetal heeft voor de komma een natuurlijke getal of een 0 staan. Het produkt van twee zulke getallen moet wel de som van vier bijdragen zijn: wat je krijgt van voor de komma keer voor de komma, van voor de komma keer achter de komma, van achter de komma keer voor de komma, en van achter de komma keer achter de komma.

De laatste lijkt het moeilijkst. Als we die kunnen dan kunnen we daarna ook alle produkten van positieve kommagetallen door eerst de komma's naar

²³ Nog even nagaan dit dus.

links te schuiven en in het antwoord de komma naar rechts te schuiven. Twee keer naar rechts eigenlijk, om beide verschuivingen naar links goed te maken. Helaas zijn we hierboven nog niet bevredigend uit produkten van zulke *nul komma nog wat getallen* gekomen.

De eerste van de vier bijdragen is het makkelijkst, hoe het daarmee zit is basisschoolstof. De volgende twee bijdragen zijn wat lastiger. Met een 1-cijferig natuurlijk getal 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 of 9 is de moeilijkste $9 \times 0,9$. Net zo moeilijk is $0,9 \times 0,9$:

$$\begin{array}{r}
 0,999999..... \\
 0,9 \\
 \hline
 \times \\
 \\
 0,810000..... \\
 0,081000..... \\
 0,008100..... \\
 0,000810..... \\
 0,0000810... \\
 \\
 \hline
 \times \\
 \\
 0,899999.....
 \end{array}$$

Daarna zijn produkten van cijfers met kommagetallen geen probleem meer. Met twee cijfers tegelijk in elke stap geeft een cijfers keer een blokje van twee maximaal $9 \times 99 = 891$. Cijferend per blokjes van twee vanaf links schuift er dus steeds maximaal een 8 naar links door. Bij het eerste blokje komt die gewoon voor het blokje te staan. Van het tweede blokje schuift er maximaal een 8 door naar links waarmee het blokje dat daar maximaal voor staat op zijn hoogst $91 + 9 = 99$ wordt. Enzovoorts. Het is weer instructief om een paar voorbeeldjes te doen en in één keer het antwoord op te schrijven op basis van de decimalen die je hebt in je voorbeeld.

1.1.5 Produkten van kommagetallen

Als het bovenstaande eenmaal in in één keer lukt als

$$\begin{array}{r}
 0,999999..... \\
 0,9 \\
 \hline
 \times \\
 \\
 0,899999.....
 \end{array}$$

dan kan daarna

$$\begin{array}{r}
 0,999999..... \\
 0,999999..... \\
 \hline
 \times \\
 \\
 0,899999..... \\
 0,089999..... \\
 0,008999..... \\
 0,000899..... \\
 0,000089..... \\

 \end{array} \tag{1.17}$$

ook, en vervolgens kunnen we dan van boven af de kommagetallen term voor term optellen met wat we kolomcijferend geleerd hebben in sommetjes als (1.8).

De eerste stap is

$$\begin{array}{r}
 0,899999..... \\
 0,089999..... \\
 \hline
 + \\
 \\
 0,899999..... \\
 0,009999..... \\
 0,080000..... \\
 \hline
 + \\
 \\
 0,909999..... \\
 0,080000..... \\
 \hline
 + \\
 \\
 0,989999.....
 \end{array} \tag{1.18}$$

In (1.18) hebben we de tweede rij negens afgesplitst. Opgeteld bij het kommagetal erboven verhogen die de 89 tot 90, en met de 8 eronder maken ze van de 89 een 98, waarbij de decimalen achter de 89 ongewijzigd blijven. Het resultaat is de som van de eerste twee kommagetallen in (1.17), waarbij in dit voorbeeld de 8 eentje opgeschoven is naar rechts.

Zo gaat dat verder. Nu we met (1.17) zijn gevorderd tot

$$\begin{array}{r}
0,999999\dots \\
0,999999\dots \\
\hline
 \times \\
0,989999\dots \\
0,008999\dots \\
0,000899\dots \\
0,000089\dots \\
\dots\dots\dots
\end{array} \tag{1.19}$$

zien we dat het patroon zich herhaalt in

$$\begin{array}{r}
0,989999\dots \\
0,008999\dots \\
\hline
 + \\
0,998999\dots
\end{array}$$

met als resultaat de som van de eerste drie kommagetallen in (1.17). De 8 is weer eentje opgeschoven en dat gaat zo door. In de volgende stap zien we

$$\begin{array}{r}
0,999999\dots \\
0,999999\dots \\
\hline
 \times \\
0,998999\dots \\
0,000899\dots \\
0,000089\dots \\
\dots\dots\dots
\end{array} \tag{1.20}$$

met nu boven de drie nullen na de komma in (1.20) alleen het derde cijfer dat nog zal veranderen bij verder cijferen. Zo vinden we al cijferend dat

$$0,\underline{9} \times 0,\underline{9} = 0,\underline{9},$$

hetgeen zoveel wil zeggen dat $1 \times 1 = 1$.

Is ieder tweetal kommagetallen zo cijferend met elkaar te vermenigvuldigen? Merk op dat een staartstuk in de ontwikkeling van de tweede factor steeds maximaal uit een rij negens bestaat en zo het cijfer in het antwoord op de positie waarna dat staartstuk begint maximaal met 1 verhoogt.

Om nog verder uit te werken dit alles, maar niet hier. Het idee is wel duidelijk nu. Zonder hier nu meteen Turing aan te roepen is het aardig om deze sectie te besluiten met de opmerking dat je in gedachten een machientje zou kunnen maken dat als input de doorlopende kommagetallen krijgt die als het ware van de ene kant cijfer voor cijfer naar binnen schuiven, en dan vervolgens aan de andere kant als output de som of produkt cijfer voor cijfer als doorlopend kommagetal uitspuugt, en het machientje daarmee tot het einde der tijden doorgaat.

1.2 Kleinste bovengrenzen

Net als de aftelbare som in (1.1) met $k \geq 0$ is (1.3) een mooi voorbeeld van

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (1.21)$$

met $a_n \geq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Als de partiële sommen

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n$$

begrensd zijn dan is de *kleinste bovengrens* van de aftelbare vereniging

$$\cup_{N \in \mathbb{N}_0} \{S_N\} = \{S_0, S_1, S_2, \dots\}$$

per definitie de som van de reeks in (1.21), notatie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

In het geval van (1.1) is $S_N \leq k + 1$ voor alle $N \in \mathbb{N}_0$ en kan deze uitspraak dus als *tautologie* gezien worden: het reële getal S is de limiet van zijn decimale ontwikkeling, een ontwikkeling waarin de decimalen d_n uit de cijfers 0 tot en met 9 gekozen worden.

Dat het überhaupt mogelijk is dat er uit een som met oneindig veel termen als (1.21) een eindig getal kan komen is zo vanuit (1.1) vanzelfsprekend, ook al dacht ene Zeno daar destijds anders over. Mooie voorbeelden waarbij er uit de som geen eindig getal komt zijn

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \quad \text{met} \quad S_N = N, \quad \text{en} \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}. \quad (1.22)$$

Geen van deze twee definieert een $S \in \mathbb{R}^+$.

Waarom eigenlijk niet? Wel, de eerste S zou een kleinste bovengrens in $\mathbb{R}$ voor de verzameling $\mathbb{N}$ zijn. Maar dan is $S - \frac{1}{2}$ geen bovengrens voor $\mathbb{N}$. En dus is er een $N \in \mathbb{N}$ met $N > S - \frac{1}{2}$ en volgt dat $N + 1 > S + \frac{1}{2}$. Maar $N + 1 \in \mathbb{N}$ dus is S geen bovengrens voor $\mathbb{N}$, een tegenspraak²⁴. Gelukkig maar, want het zou wel heel gek zijn als $\mathbb{N}$ wel begrensd is in $\mathbb{R}$. Komt meteen te pas bij het tweede voorbeeld in (1.22), waarover we opmerken dat

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}}}_{>1} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}}_{>1},$$

enzovoorts, en zo komen de bijbehorende S_N boven elke $n \in \mathbb{N}$. Ook niet begrensd dus. Maar de som

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

heeft wel een uitkomst²⁵, althans indien opgevat als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

al zijn noch de positieve termen

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots,$$

noch de negatieve termen

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots$$

op te tellen tot een eindige som. Sterker, gegeven een $S \in \mathbb{R}$ kun je de positieve en negatieve termen verweven²⁶ tot een rij a_n op zo'n manier dat

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots,$$

een goede reden om zoveel mogelijk alleen maar over reeksen zoals in Sectie 1.3 te spreken.

²⁴ Overtuigd?

²⁵ Ik meen $\ln 2$.

²⁶ Kies positieve termen om boven S te komen, dan negatieve om onder S , dan ...

1.3 Absoluut convergente reeksen

Als we hadden leren rekenen met $d_n \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ en de tafels tot en met vijf, dan was (1.1) een voorbeeld geweest van (1.21) zonder de a priori informatie dat $a_n \geq 0$ maar wel met de eigenschap dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty, \quad (1.23)$$

omdat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{d_n}{10^n} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^n} = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{5}{100000} + \cdots = \frac{5}{9}.$$

Ook nu geldt dat $S_N \rightarrow S$ voor een unieke $S \in \mathbb{R}$, dus

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad (1.24)$$

en hernummeren van de som verandert niets aan die uitkomst. Reeksen van de vorm (1.21) waarvoor (1.23) geldt heten *absoluut convergent* en zijn *onvoorwaardelijk convergent*: de volgorde van sommeren maakt niet uit voor de waarde S van de som en bovendien geldt dat

$$|S| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|. \quad (1.25)$$

Wat betreft het bewijs van (1.24) gegeven (1.23), de invariantie onder hernummeren en de aftelbare 3-hoeksongelijkheid (1.25): dat bewijs maakt gebruik van het feit dat in de reële getallen *Cauchyrijen*, dat zijn rijen waarvoor geldt dat

$$x_n - x_m \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad m, n \rightarrow \infty,$$

een unieke limiet $\bar{x}$ hebben, een limiet $\bar{x}$ die bestaat als dan inderdaad het enige reële getal waarvoor

$$x_n \rightarrow \bar{x} \quad \text{als} \quad n \rightarrow \infty.$$

Zulke rijen heten *convergent*.

Uit Hoofdstuk 10 van [HM] of Hoofdstuk 8 van het *Basisboek Wiskunde* is de lezer wellicht al bekend met de wiskundige definitie van het begrip (limiet van een) convergente rij, waarin alleen ²⁷ de “voor alle $p > 0$ ” nog door een

²⁷ Didactisch aardig in het basisboek is het gebruik van grote P naast kleine p .

“voor alle $\varepsilon > 0$ ” moet worden vervangen om tot het gebruikelijke jargon te komen, en later eventueel door $\forall \varepsilon > 0$. Wel is het in de analyse straks *praktischer* om met

$$|x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon$$

te werken.

Wat ook elegant en praktisch is in het Basisboek Wiskunde is de zorgvuldige manier waarop gesproken wordt over *de rij waarvan het n -de element gelijk is aan x_n* , en het aan de lezer wordt overgelaten zich daarbij te realiseren dat n de getallen $1, 2, 3, 4, \dots$ doorloopt, of een andere steeds met stap 1 oplopende rij gehele getallen. Wij zullen de notatie in het Basisboek Wiskunde afkorten tot simpelweg *de (door n genummerde) rij x_n* , vaak de rij reële getallen x_n . Evenzo spreken we over de rij rationale getallen q_n of de rij $q_n \in \mathbb{Q}$. De laatste notatie wordt hieronder nog gebruikt.

De ε -definities van uitspraken als hierboven komen in deze cursus aan de orde op het moment dat dat nodig is. Want ze zijn nodig, bijvoorbeeld om precies te maken dat sommen als (1.24) bestaan du moment dat je met één $M \in \mathbb{R}^+$ een schatting

$$\sum_{n=0}^N |a_n| \leq M$$

hebt voor alle partiële sommen *tegelijk*, en daaruit afleidt dat de door N genummerde rij S_N een Cauchyrij is. We merken hierbij op dat het in zogenaamde genormeerde ruimten dan om twee equivalente uitspraken gaat, uitspraken waarin noch de limiet $\bar{x}$ van de rij, noch de som S van de reeks waar het om gaat expliciet voorkomen:

absoluut convergente reeksen convergent $\iff$ Cauchyrijen convergent

Je kunt dus weten of $\bar{x}$ en S in $\mathbb{R}$ bestaan zonder ze eerst te hebben bepaald.

1.4 Verzamelingen in de praktijk

Voor sommige wiskundigen van de meer zuivere inclinatie zijn de uitspraken hierboven niet los te zien van een precieze maar voor de analyse zelf niet altijd even verhelderende wiskundige constructie van de reële getallen. Maar interessant zijn die constructies natuurlijk wel, en je moet ergens beginnen als je de wiskunde per se axiomatisch en wiskundig streng wil opzetten²⁸, vanuit wat men de leer van verzamelingen noemt.

Deze verzamelingenleer is iets waarover Paul Halmos in zijn mooie boekje *Naive Set Theory*²⁹ schreef: alle wiskundigen vinden dat je er wat van

²⁸ Een vriendje van Einstein heeft helaas laten zien dat dat nooit bevredigend zal lukken.

²⁹ Vertaald ooit als *Prisma pocket* verkrijgbaar.

gezien moet hebben, maar ze zijn het oneens over *wat* precies. Je kunt verzamelingenleer bijvoorbeeld bij het begin beginnen met het axioma dat de lege verzameling³⁰ bestaat.

Dat doen wij hier niet. Maar mocht je dat wel doen dan komen toch op enig moment ook de axioma's voor de verzameling van de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ voorbij, natuurlijke getallen die iedereen die op zijn vingers heeft leren tellen allang kent. En tellen begint natuurlijk bij 1³¹, al is het handig om de verzameling

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

in te voeren, hier in een zuiver wiskundig gezien af te keuren maar wel zo begrijpelijke notatie met onfatsoenlijke stippeltjes, waarin we het hierboven al gebruikte verenigingssymbool $\cup$ weer terugzien³².

Het is wel goed om één van die axioma's voor $\mathbb{N}$ te relateren aan de wiskundige praktijk van alledag. Want hoe bewijs je bijvoorbeeld dat voor iedere $N \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ geldt dat de uitspraak

$$(P_N) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + N^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}$$

waar is, *zonder* voor elke $N \in \mathbb{N}$ *apart* de uitspraak (P_N) te moeten controleren?

Binnen de zuivere wiskunde hoort daar een verhaal bij waarin voor al de puntjes hierboven eigenlijk geen plaats is. Dat verhaal eindigt met het principe van volledige inductie³³, dat er op neerkomt dat³⁴ als je voor $N = 1$ de uitspraak controleert, en je vervolgens laat zien dat de *implicatie*

$$(P_N) \implies (P_{N+1}) \tag{1.26}$$

geldt voor alle N waarvoor je hem nodig hebt, namelijk om via herhaald toepassen van de inductiestap (1.26) tot

$$(P_1) \implies (P_2) \implies (P_3) \implies (P_4) \implies (P_5) \implies (P_6) \implies (P_7) \implies \dots$$

te komen, zover als je maar wil, de uitspraak inderdaad geldt voor alle $N \in \mathbb{N}$. De implicatie (1.26) moet daartoe voor alle $N \in \mathbb{N}$ worden aangetoond om beginnend met de juistheid voor $N = 1$ de keten hierboven zonder die stippeltjes in één keer af te maken.

³⁰ In LaTeX: $\emptyset$. Op het schoolbord liever $\emptyset$.

³¹ Tellend is $\mathbb{N}$ met nul een beetje flauwe kul, op 0^0 komen we nog terug.

³² Gaat er dus eigenlijk om hoe je al die getallen zonder stippels tussen accolades vangt.

³³ Naamgeving volledig intimiderend, vriendelijker is: dominoprincipe.

³⁴ Nu komt een lange zin.

Dit soort oefeningen kunnen elders gedaan worden. Zie bijvoorbeeld in [HM] Sectie 6.1 en voetnoot 16. Relevant uit die sectie voor deze cursus zijn bewijzen voor rekenpartijtjes als in (P_N) hierboven, waarin niet alleen N maar ook $3 = p \in \mathbb{N}$ een parameter is, en de inductiestap van de vorm

$$(P_1) \wedge (P_2) \wedge \cdots \wedge (P_N) \implies (P_{N+1}) \quad (1.27)$$

is³⁵. Zie verder ook Hoofdstuk IV [BE].

Wat we hier precies met $(A) \implies (B)$ bedoelen moge duidelijk zijn: als de uitspraak (A) waar is dan is ook de uitspraak (B) waar. Hetgeen in onze wiskundige redeneringen equivalent is met: als uitspraak (B) niet waar is dan kan uitspraak (A) ook niet waar zijn. Deze logica kan geformaliseerd worden met waarheidstabellen vol nullen en enen opgeleukt met bijzonder fraaie algebra, maar wat dat betreft laten we hier liever de Boole de Boole³⁶.

Du moment dat er over het bestaan van³⁷ $\mathbb{N}$ geen twijfel meer is, worden in de verzamelingsleer, bijvoorbeeld zoals in Hoofdstuk V en VI van [BE], $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en uiteindelijk $\mathbb{R}$ *wiskundig netjes* geconstrueerd. De constructie van $\mathbb{R}$ is in [BE] gebaseerd op de gedachte dat iedere manier om $\mathbb{Q}$ in twee stukken te knippen overeen zou moeten komen met een reëel getal, waarbij de rationale getallen dan wel met de schaar te maken krijgen en de overige getallen niet³⁸.

Het is instructief om de constructies van $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$ uit $\mathbb{N}$ met elkaar te vergelijken zoals dat gebeurt in [BE]. Die van $\mathbb{Z}$ is inderdaad tamelijk kunstmatig. Die van $\mathbb{Q}$ is echter heel natuurlijk en gebaseerd op hoe je eigenlijk altijd al met de rationale getallen rekende, namelijk als breuken. Breuken met een teller en een noemer. Bijvoorbeeld

$$\frac{14}{333} = \frac{42}{999} = 0.\underline{042}$$

met een streep die aangeeft dat de decimale ontwikkeling van de breuk zich herhaalt. Anders dan gesuggereerd in de in

<http://www.few.vu.nl/~jhulshof/TAL.pdf>

besproken TAL-boekjes van het Freudenthal Instituut doe je echter het rekenen met rationale getallen bij voorkeur niet met zulke decimale ontwikkelingen, maar juist wel met de niet unieke representatie van rationale getallen als quotiënten van gehele getallen, dus in de vorm

$$q = \frac{t}{d}$$

³⁵ De $\wedge$ staat voor “en”, dat is logisch. Denken aan dominosteentjes is nu lastiger.

³⁶ <https://www.youtube.com/watch?v=DOzqUYW7jog>

³⁷ Eventueel via Peano's axioma's.

³⁸ Want ze bestaan op dat moment nog niet.

met teller t en noemer d in $\mathbb{Z}$, de d niet gelijk aan 0, waarbij je moet afspreken dat

$$\frac{t_1}{d_1} = \frac{t_2}{d_2} \quad \text{als} \quad t_1 d_2 = t_2 d_1.$$

1.5 Equivalentierelaties

Wiskundigen noemen zo'n afspraak een equivalentierelatie. We komen nu in relatie tot $\mathbb{R}$ meer over dit belangrijke begrip te spreken, ook voor wie van $\mathbb{R}$ graag een inzichtelijke constructie wil zien. Een constructie waarvan de details overigens niet thuis horen in of voorafgaand aan een eerste vak Analyse. Ik meen dat ik zelf de constructie van $\mathbb{R}$ voor het eerst zag bij een college over de integraal van Lebesgue van Jan van de Craats in het vierde semester van wat toen de kandidaatsstudie wiskunde in Leiden was.

De onderliggende maattheorie voor dat vak over die andere integraal begint met de vraag wat de *oppervlakte* $|A|$ is van een willekeurige deelverzameling A van $\mathbb{R}^2$, en komt onvermijdelijk tot twee constatering. Vroeger of later zijn dat respectievelijk

- (i) het komt voor dat $A \subset B$ en $|A| = |B|$;
- (ii) het zou kunnen voorkomen dat A eindige oppervlakte $|A|$ heeft maar opgeknipt kan worden in aftelbaar veel stukjes die allemaal dezelfde maat zouden moeten hebben³⁹,

en daar moet je mee omgaan. Leuk is dat (ii) ons dan later⁴⁰ weer terugvoert naar het boekje van Halmos. In een vroeger stadium doet (i) ons echter al het dringende verzoek om A en B in zekere⁴¹ zin als hetzelfde te zien, en bijvoorbeeld ook hetzelfde als een C met $C \subset A$ en $|C| = |A|$, waarbij C geen deelverzameling van B hoeft te zijn of omgekeerd. Hoe formuleer je dan rechtstreeks dat B en C equivalent zijn?

Anders van aard is het gebruik van equivalentierelaties bij een inzichtelijke constructie van $\mathbb{R}$, waarbij je denkt aan reële getallen als denkbeeldige limieten van Cauchijrijtjes rationale getallen, zoals bijvoorbeeld de hierboven besproken decimale ontwikkelingen, maar dan moet je wel een goede afspraak maken over wat het betekent dat twee zulke Cauchijrijtjes hetzelfde reële getal (zouden moeten) definiëren. Denk bijvoorbeeld aan binaire benaderingen met alleen maar nullen en enen, of aan benaderingen met kettingbreuken, allebei erg fraai of juist minder⁴² fraai, omdat ze afstand nemen van de vingers waarin onze wiskunde zit. Kortom, een belangrijke vraag is hoe je van

³⁹ Waarom is dat een paradox?

⁴⁰ Maar niet hier.

⁴¹ Lees: in maattheoretische zin.

⁴² Over gebrek aan smaak valt niet te twisten.

twee Cauchyrijen rationale getallen q_n en r_n zegt dat ze hetzelfde reële getal definiëren⁴³.

Als je er even over nadenkt is het logisch dat dit een definitie zou kunnen zijn:

$$q_n \sim r_n \iff q_n - r_n \rightarrow 0 \text{ als } n \rightarrow \infty$$

Deze tweezijdige equivalentiepijl definieert een *equivalentierelatie* op de verzameling van alle rijen rationale getallen. We walsen nu wellicht even over wat belangrijke details heen, maar een equivalentierelatie is niets anders dan een relatie met formeel dezelfde eigenschappen als de gelijkheidsrelatie voor elementen van een willekeurige verzameling A . Voor alle $a, b, c \in A$ geldt

$$a = a,$$

$$a = b \implies b = a,$$

$$a = b \wedge b = c \implies a = c$$

De relatie⁴⁴ gedefinieerd door het $=$ teken heet daarom reflexief, symmetrisch en transitief, en ook $\sim$ is zo'n equivalentierelatie, op de verzameling van alle rijen rationale getallen in dit geval. En die equivalentierelatie doet het!

Wat doet $\sim$ dan? De equivalentierelatie $\sim$ deelt de verzameling van alle rijen rationale getallen in. Waarin? In equivalentieklassen natuurlijk. Iedere rij $r_n \in \mathbb{Q}$ definieert een equivalentieklasse

$$[r_n] = \{q_n \in \mathbb{Q} : q_n \sim r_n\} \tag{1.28}$$

waar die rij zelf in zit, en een reëel getal is *per definitie* de *equivalentieklasse* van een Cauchyrij $r_n \in \mathbb{Q}$.

So much for the construction of the real numbers en we zullen het $\sim$ teken nu weer in laten leveren, omdat we dat symbool toch liever gebruiken als

$$x_n \sim y_n \iff \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1 \text{ als } n \rightarrow \infty$$

voor een andere en in de praktijk vaker gebruikte equivalentierelatie⁴⁵ op de verzameling van alle reële rijen. Een voorbeeld is

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

uitvoerig besproken⁴⁶ in [HM].

⁴³ In je hoofd of op de getallenlijn.

⁴⁴ Ook dat woord heeft een *wiskundige* definitie natuurlijk.

⁴⁵ Wel een goede vraag hierboven is: wat is de beste representant?

⁴⁶ Zie echter ook Sectie 5.8.

1.6 Analyse in en van wat?

Of er nog andere verzamelingen zoals deze $\mathbb{R}$ zijn is niet een standaardvraag om hier te stellen. Wel belangrijk voor een eerste vak over analyse is dat de *rationale getallen* $\mathbb{Q}$, dat zijn de getallen die ontstaan als quotiënten van getallen in $\mathbb{Z}$ en getallen in $\mathbb{N}$, de “Cauchy eigenschap” niet hebben. Dat is de reden waarom we de analyse in $\mathbb{R}$ doen, het unieke geordende getallenlichaam waarin (alle) Cauchyrijen en absoluut convergente reeksen convergent zijn.

In het Basisboek Wiskunde worden deze getallen besproken in Hoofdstuk 24, en we gebruiken vrijwel dezelfde notaties, met de accolades ook. Lees ook Hoofdstuk 25 nog even door, we nemen de daar gebruikte input-output voorstelling voor functies⁴⁷ hier graag over als

$$x \xrightarrow{f} f(x) \quad \text{en} \quad D_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

met D_f het domein van f . Het bereik en de grafiek⁴⁸ van f zijn

$$B_f = \{f(x) : x \in D_f\} \quad \text{en} \quad G_f = \{(x, y) : x \in D_f, y = f(x)\}.$$

Soms zullen we liever over functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spreken die op een bepaalde deelverzameling van $\mathbb{R}$ een bepaalde eigenschap hebben. Het *domein* D_f is dan de verzameling bestaande uit alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $f(x)$ gedefinieerd is. Is het domein van f niet heel $\mathbb{R}$, dan kun je natuurlijk altijd $f(x)$ voor x -waarden buiten het domein een waarde geven die je toevallig goed uitkomt, nul bijvoorbeeld⁴⁹.

In deze cursus behandelen we ondermeer de analyse die de calculus onderbouwt voor functies $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ met $I \subset \mathbb{R}$ een interval. Vaak, met $a, b \in \mathbb{R}$, is I daarbij een gesloten begrensd interval

$$I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

of een open begrensd interval

$$I = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

We beginnen met integraalrekening, eerst voor monotone functies, zonder over limieten te spreken, en daarna voor uniform continue functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij we voor het eerst het limietbegrip tegenkomen en nodig hebben.

Voor zulke functies wordt

$$\int_a^b f(x) dx$$

via benaderende sommen gedefinieerd in relatie tot wat de oppervlakte van het gebied ingesloten door $x = a$, $x = b$, $y = 0$ en $y = f(x)$ in het x, y -vlak moet zijn in het geval dat f een positieve functie is. Je zou kunnen zeggen dat dit de eerste *probleemstelling* is in dit boek, geformuleerd in drie punten als:

*Teken
plaatje!*

hoe definieer je de oppervlakte van niet meteen arbitraire verzamelingen;
en hoe reken je die vervolgens uit?

wat kun je vervolgens leren van de oplossing?

Dat laatste doe je dan wellicht zonder meteen een nieuw probleem te willen formuleren. Spelen met de verworven inzichten zonder een concreet doel op zich.

Bijvoorbeeld: met een variabele bovengrens in de integraal ontdekken we de opzet van de differentiaalrekening met behulp van lineaire benaderingen. Die werken we later uit voor *machtreeksen*

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots,$$

waarmee we een grote klasse van standaardfuncties tot onze beschikking krijgen, waarvoor “mag dat” vragen kort maar krachtig met “ja natuurlijk” te beantwoorden zijn. Binnen die klasse is de analyse namelijk ondergeschikt aan de algebra, en zodra je die algebra goed begrijpt, voor x^7 of zo, ben je wel klaar en daarmee dient een andere probleemstelling zich aan:

Hoe zit het met al die andere functies?

Als we buiten de klasse van machtreeksen treden verandert alles en moet er gewerkt worden. Dat werk halen we nu naar voren, waar we dat in [HM] zo lang mogelijk uitstelden.

De *middelwaardestelling* blijkt het belangrijkste hulpmiddel om ogenschijnlijk evidente uitspraken ook werkelijk te bewijzen. De uitspraak van die stelling is dat differentiequotiënten als

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a},$$

de richtingcoëfficiënt van

de lijn door $(x, y) = (a, F(a))$ en $(x, y) = (b, F(b))$

⁴⁷ Van het Latijnse fungor (deponens: een passieve vorm met actieve betekenis).

⁴⁸ Vaak slordig: de grafiek $y = f(x)$ in het x, y -vlak.

⁴⁹ Zoals wel eens voorgesteld in relatie tot $x \rightarrow \frac{1}{x}$ en het rekenonderwijs.

in het x, y -vlak, zelf doorgaans gelijk zijn aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van F in een punt met x -waarde tussen a en b , lees: aan de met de differentiaalrekening gedefinieerde

afgeleide van $F'(x)$ van $F(x)$ in een tussenpunt.

Is $F'(x)$ overal tussen a en b gelijk aan nul, dan is $F(x)$ kennelijk constant, aldus de NIET-TRIVIALE STELLING in [HM]. Die STELLING is niet zozeer de oplossing van een probleem, maar formuleert juist iets dat je zeker wil weten bij het oplossen van (bijvoorbeeld) differentiaalvergelijkingen. Het bewijs van de STELLING maakt essentieel gebruik van een fundamentele stelling over het bestaan van convergente deelrijen, die, triviaal⁵⁰ of niet, toch maar een apart hoofdstuk krijgt, waarin een wat minder bekende stelling die ik ken via Han Peters wordt geformuleerd.

Vergelijkingen oplossen is een belangrijke tak van niet alleen maar creatieve *sport*⁵¹ in de wiskunde. In de context van vergelijkingen van de vorm $F(x, y) = 0$, waarbij F een functie is van twee variabelen, introduceren we daarom ook meteen maar het begrip impliciete functie, met als speciaal geval het al behandelde begrip inverse functie. Het bewijs van de impliciete functiestelling draaien we binnenste buiten in een aparte sectie, gevolgd door twee secties waarin weer met verworven inzichten wordt gespeeld en een basis wordt gelegd voor alles dat later komt. Na een zijstapje over de methode van Newton wordt de basale theorie in Hoofdstuk 4 afgesloten met differentiaalrekening voor integralen met parameters, en partieel integreren en een stelling over Taylorbenaderingen met polynomen.

Daarna nemen we in Hoofdstuk 5 de tijd voor voorbeelden en meer voorbeelden, en herhalen de rekenregels nog een keer in de kale context van functies van één variabele zonder er functies van x en y bij te halen, niet alleen voor wie dat stuk in Hoofdstuk 4 heeft overgeslagen. We gaan uitvoerig in op de natuurlijke logaritme $\ln$ als inverse van de exponentiële functie $\exp$ en introduceren in die context ook zogenaamde asymptotische formules, waarvan de formule van Stirling⁵² voor $n!$ als $n \rightarrow \infty$ een mooi voorbeeld⁵³ is.

In het tweede deel, dat begint met Hoofdstuk 6, kunnen we de meeste van de in het eerste deel geformuleerde definities, stellingen en bewijzen uit de differentiaalrekening voor functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ vrijwel letterlijk overnemen. Alleen de notaties hoeven nog te worden uitgekapt. We beginnen daartoe met $\mathbb{C}$, de verzameling van de complexe getallen, en een in ons Leidse wat vergeten maar wel zo snel bewijs van de hoofdstelling van de algebra. Daarna komen

⁵⁰ Denk ook aan valsspelen met meetwaarden.

⁵¹ Geen sport zonder *techniek*.

⁵² De voorbeeldformule met $\sim$ een paar pagina's terug, uit te spreken als “twiddles”.

⁵³ En buitengewoon relevant voor probleemstellingen in de natuurkunde.

functies van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$ en afbeeldingen en functies met meerdere variabelen. Lineaire functies beschrijven we dan in matrixnotatie, en matrixrekening behandelen we daartoe zo kort door de bocht als hier mogelijk en voor het uitpakken voldoende is.

De kettingregel is een belangrijk voorbeeld en we laten zien hoe die regel op verschillende manieren wordt gebruikt, ook in de door fysici gebruikte manipulaties met afhankelijke en onafhankelijke grootheden bij het transformeren en oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen. Integraalrekening in het vlak wordt nog wat kort behandeld, zowel in rechthoekige als in de uitvoerig besproken poolcoördinaten.

Nieuw is daarna de opzet van complexe functietheorie met lijnintegralen over alleen maar lijnstukjes en meteen de belangrijke hoofdstellingen, eerst zonder kromme poespas. Daarna bekijken we onderzoekend wat voor kromme krommen we na limietovergangen krijgen, en hoe we daarlangs kunnen integreren. De aanpak is zo precies tegenovergesteld aan de die van Conway, wiens fraaie opzet met equivalentieklassen van rectificeerbare krommen hier niet realiseerbaar is. Naast, voor of na de kromme aanpak, verkennen we de toepassingen van de hoofdstellingen bij het uitbreiden van de definitie van $f(z)$ met $z \in \mathbb{C}$ naar $f(A)$, eerst voor $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ een lineaire afbeelding gegeven door een matrix, en daarna algemener, voor A van een (uiteinde-lijke complexe) Banachruimte X naar zichzelf. Een eerste kennismaking met Banachalgebra's⁵⁴ ligt hier voor de hand.

Gewone differentiaalvergelijkingen, al aan de orde geweest in de context van machtreeksen, motiveren het opnemen van Hoofdstuk 7, waarin we ook de calculus voor functies op en naar Banachruimten introduceren, met als belangrijkste voorbeeld $X = C([a, b])$, de ruimte van de continue $\mathbb{R}$ -waardige functies op een interval $[a, b]$, waarin we de bijbehorende integraalvergelijkingen formuleren en oplossen.

De impliciete functiestelling uit Hoofdstuk 4 kan dan weer worden overgeschreven. In Hoofdstuk 6 doen we dat al in één moeite door in combinatie de multiplicatorenmethode van Lagrange⁵⁵ voor stationaire punten van gewone functies van meer variabelen onder randvoorwaarden. Essentieel hier is het inzicht dat de oplossingsverzameling van een stelsel van bijvoorbeeld 3 vergelijkingen in $\mathbb{R}^{5=2+3}$, lokaal te schrijven is als de grafiek van een functie van $x \in \mathbb{R}^2$ naar $y \in \mathbb{R}^3$, tenzij er te veel nullen in de relevante berekeningen voorkomen.

De term onderdompeling wordt hier nog niet geïntroduceerd⁵⁶. De meer

⁵⁴ Door mijn medestudenten destijds ook wel Banachalgebra's genoemd.

⁵⁵ De eerste stelling die ik ooit zelf aan anderen uitlegde, maar nu heel anders.

⁵⁶ Zie www.encyclo.nl/begrip/Submersie en www.encyclo.nl/begrip/Immersie.

abstracte formulering van de methode van Lagrange in Hoofdstuk 8 is opgenomen for amusement. Ook wat pittiger is de behandeling van tweede orde afgeleiden die we pas in abstracte setting in meer detail doen. Het hoofdresultaat is het Lemma van Morse, Stelling 8.6, waarin met een coördinatentransformatie een functie waarvan de tweede afgeleide continu is, in de buurt van een stationair punt puur kwadratisch gemaakt wordt. Denk aan

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + \dots$$

en een transformatie die de puntjes wegwerkt als de discriminant niet gelijk is aan 0.

Zo'n transformatie is van de vorm

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A(x, y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

met $A(x, y)$ een van x en y afhankelijke matrix met

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die maakt dat

$$F(x, y) = a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2.$$

We laten zien hoe $A = A(x, y)$ gevonden kan worden als oplossing van een kwadratische matrixvergelijking voor A die met worteltrekken kan worden opgelost.

We besluiten met Hoofdstuk 9, eigenlijk een appendix, waarin we het gebruikelijke jargon met metrieken, omgevingen en open en gesloten verzamelingen samenvatten voor wie zich minder gelukkig voelt met informele uitdrukkingen als in de buurt van, zoals ook Adams die gebruikt in zijn nu vrijwel overal gebruikte calculus boek, dat door de theoretisch hoofdstukken in dit boek stevig wordt onderbouwd.

2 Integraalrekening

Voor functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ begint integraalrekening met de vraag naar de oppervlakte van verzamelingen in het x, y -vlak begrensd door de x -as en de grafiek van f . Die grafiek wordt gegeven door $y = f(x)$. Om niet meteen over onbegrensde gebieden te praten kijken we eerst naar verzamelingen van de vorm

$$A_+ = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, 0 < y < f(x), a < x < b\}$$

en

$$A_- = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, f(x) < y < 0, a < x < b\},$$

met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a < b$, waarbij we opmerken dat de “grotere” verzamelingen die ontstaan als we hierin elke $<$ door $\leq$ vervangen dezelfde oppervlakte zouden moeten hebben. Althans bij een zinvolle definitie van het begrip oppervlakte, een definitie die we hier echter achterwege laten!

Dat lijnstukken oppervlakte nul hebben, en grafieken van niet al te lelijke functies ook, lijkt vanzelfsprekend, maar komt hier nog niet aan de orde. In wat hieronder volgt gaat het alleen over welomschreven benaderingen van oppervlakten van verzamelingen waarvan we kunnen aannemen dat die op de een of andere manier meetbaar zijn, bijvoorbeeld met een gereedschapskist vol rechthoekjes waarvan de oppervlakte als lengte en breedte buiten kijf staat. De wiskunde hieronder is correct ook zonder dat aan het begrip oppervlakte wordt gedacht. Uitgangspunt is wel de consensus dat de oppervlakte tussen de lijnen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ in het xy -vlak gelijk is aan $1 \times 1 = 1 \cdot 1 = 1$, let wel, zonder fysische eenheden erbij.

We beginnen met het geval dat $A_- = \emptyset$: we nemen aan dat $f(x) \geq 0$ voor $x \in [a, b]$. Het geval $[a, b] = [0, 1]$ en $f(x) = x^n$ met $n \in \mathbb{N}$ is een leerzaam eerste voorbeeld. We rekenen wat we de oppervlakte van de verzameling

$$A_n = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x^n \leq 1\}$$

zouden willen noemen expliciet uit. Als notatie voor de oppervlakte¹ van een verzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ gebruiken we $|A|$. Als uitgangspunt nemen we dat over de oppervlakte van een rechthoek geen twijfel bestaat, waarbij we zonder eenheden (dus geen vierkante centimeters of zo) werken. De oppervlakte van een rechthoek die parallel ligt aan de assen wordt eenvoudig bepaald door de schaalverdeling op de assen.

Voor $n = 1$ gaat het om het gebied in het xy -vlak begrensd door

$$x = 1, \quad y = 0 \quad \text{en} \quad y = x,$$

¹ Of elke $A \subset \mathbb{R}^2$ een oppervlakte $|A|$ heeft is natuurlijk wel de vraag.

een driehoek met oppervlakte $\frac{1}{2}$, precies de helft van de oppervlakte van het vierkant met hoekpunten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ en $(0, 1)$. Kortom $|A_1| = \frac{1}{2}$.

Hoe zit het met A_2 ? Omdat $A_2 \subset A_1$ is het duidelijk dat moet gelden dat $|A_2| \leq |A_1|$, nog voor je de vraag stelt hoe en of de oppervlakte eigenlijk precies gedefinieerd is. Het is ook duidelijk² dat $|A_2|$ niet kleiner kan zijn zijn dan de oppervlakte van een rechthoek die geheel in A_2 ligt, bijvoorbeeld de rechthoek met hoekpunten $(\frac{1}{2}, 0)$, $(1, 0)$, $(1, \frac{1}{4})$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. We concluderen hieruit dat $|A_2|$ minimaal $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ moet zijn.

Opgave 2.1. Laat met rechthoekjes zien dat ook moet gelden dat

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} < |A_2| < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{9}.$$

Opgave 2.2. Laat zien dat voor elke $N \in \mathbb{N}$ moet gelden dat

$$\frac{1^2 + 2^2 + \dots + (N-1)^2}{N^3} < |A_2| < \frac{1^2 + 2^2 + \dots + N^2}{N^3}.$$

Als je even nadenkt over hoe je de grenzen in Opgave 2.2 hebt gevonden dan is duidelijk dat het verschil precies $\frac{1}{N}$ is, en dat kunnen we zo klein maken als we willen door N groot te nemen. Bovendien kunnen we deze onder- en bovengrenzen gewoon uitrekenen:

Opgave 2.3. Laat zien dat voor elke $N \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\sum_{n=1}^N n^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + N^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}.$$

We gebruiken hier de somnotatie waarin de index n aangeeft dat we de som nemen van de kwadraten van n over alle n in de verzameling

$$\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq N\}.$$

² Maak een plaatje.

In [Eves] lezen we op pagina 47 dat de formule in Opgave 2.3 al door Archimedes gevonden is. Het rechterlid factoriseert als

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

maar het gaat ons in het vervolg alleen om de coëfficiënt van N^3 in het rechterlid. De bovengrens voor $|A_2|$ in Opgave 2.2 is nu immers gelijk aan

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}$$

en wordt kleiner als N groter genomen wordt. De ondergrens is (niet opnieuw uitrekenen maar gewoon $\frac{1}{N}$ eraf)

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2},$$

en dat wordt juist groter als N groter genomen wordt (al zie je dat misschien niet meteen). De onvermijdelijke conclusie is dat $|A_2| = \frac{1}{3}$. In termen van de integralen³ die je natuurlijk al eerder gezien hebt is hiermee de uitspraak dat

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

gedaan zonder dat er een functie geïntegreerd is!

Wat aardig en nuttig is om op te merken is dat we van het derdegraads-polynoom in Opgave 2.3 alleen de kopcoëfficiënt in het antwoord terugzien. Het is een leerzame oefening dat het voor bijvoorbeeld⁴ A_{42} precies hetzelfde gaat, je bewijst en gebruikt

$$1^{42} + 2^{42} + \dots + N^{42} = \frac{N^{43}}{43} + \dots$$

om via oppervlakten van rechthoekjes op $|A_{42}| = \frac{1}{43}$ uit te komen.

Opgave 2.4. Doe $|A_1|$ ook op deze manier. Hint: $1 + 2 + \dots + N$ is⁵ een som die Gauss ooit als strafwerk zou hebben gekregen.

³ Maar denk ook aan volumes van piramiden, zie Hoofdstuk 2 van [Eves].

⁴ Amusant in [Eves, §3.16]: bewijs meetkundig dat $1^3 + \dots + N^3 = (1 + \dots + N)^2$.

⁵ Met $N = 100$.

Opgave 2.5. Schrijf de differenties $(n+1)^2 - n^2$, $(n+1)^3 - n^3$, $(n+1)^4 - n^4$, enzovoorts uit.

Opgave 2.6. De ad hoc notaties

$$N_1 = \sum_{n=1}^N n, \quad N_2 = \sum_{n=1}^N n^2, \quad N_3 = \sum_{n=1}^N n^3, \dots$$

definiëren sommen die voor elke index $1, 2, 3, \dots$ van $N \in \mathbb{N}$ afhangen⁶. Gebruik nu Opgave 2.5: laat met de differenties van n^2 zien dat

$$(N+1)^2 = 1 + N + 2N_1,$$

met de differenties van n^3 dat

$$(N+1)^3 = 1 + N + 3N_1 + 3N_2,$$

met de differenties van n^4 dat

$$(N+1)^4 = 1 + N + 4N_1 + 6N_2 + 4N_3,$$

enzovoorts.

Opgave 2.7. Laat voor $k = 1, 2, 3, \dots$ zien⁷ dat N_k een polynoom is van graad $k+1$ met kopcoëfficiënt $\frac{1}{k+1}$. Hint: los uit de in Opgave 2.6 gevonden identiteiten achtereenvolgens $N_1, N_2, N_3, \dots$ op; voor elke volgende k alle vorige resultaten gebruiken en goed kijken wat de graad van elke term is.

Nog voor dat we aan precieze definities zijn toegekomen is de onvermijdelijke conclusie dat wel moet gelden dat

$$|A_n| = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

en een kleine variant hier op is:

⁶ Met eventueel

$$N_0 = \sum_{n=1}^N 1.$$

⁷ Index k omdat de index n al in gebruik is, het geval $k = 42$ is al genoemd.

Opgave 2.8. Voor $b > 0$ en $n \in \mathbb{N}$ is de oppervlakte van

$$\{(x, y) : 0 \leq y \leq x^n \leq b^n\}$$

gelijk aan het quotiënt van b^{n+1} en $n + 1$. Laat dit zien door met schaling van de eenheden op de assen de vraag te herleiden tot het geval $b = 1$.

Lezend in [Eves] is het duidelijk dat Archimedes deze conclusie al had kunnen trekken en dat wellicht ook gedaan heeft voor $n = 2$ en $n = 3$. In moderne notatie:

$$\int_0^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}.$$

Opgave 2.9. Voor $0 \leq a < b$ en $n \in \mathbb{N}$ is de oppervlakte van

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq x^n\}$$

(in moderne notatie) gelijk aan

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

De functie

$$x \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

noemen we tegenwoordig de primitieve van de functie

$$x \rightarrow x^n$$

omdat de afgeleide van de eerste functie gelijk is aan de tweede. Het is niet waarschijnlijk dat de lezer⁸ de begrippen primitieve en afgeleide functies nog niet in de een of andere vorm gezien heeft maar het advies is om een en ander bij verder lezen in het achterhoofd te houden. In (4.6) komt de uitspraak hierboven terug in algemene vorm.

Opgave 2.10. Tijdens de vakantiecursus voor wiskundeleraren op 25-8-2017 in Eindhoven maakte een van de toehoorders de terechte opmerking dat uit $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ ook de integraal $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ volgt. Kun je $\int_0^1 \sqrt[n]{x} dx$ berekenen voor iedere $n \in \mathbb{N}$?

⁸ Ik zal de lezer doorgaans tutoyeren, sorry.

Opgave 2.11. De dag na die cursus mailde Frits Beukers me een manier om op $\int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$ uit te komen zonder een formule voor $1^k + 2^k + \dots + n^k$, gebruikmakend van de differenties in Opgave 2.5, maar dan uitgeschreven via het merkwaardige product $a^{k+1} - b^{k+1} = (a - b)(a^k + \dots + b^k)$. Vul de puntjes in en schrijf uit wat je krijgt met $a = n + 1$ en $b = n$. Je krijgt $k + 1$ termen, die elk uit factoren $n + 1$ en n bestaan. Als je al zulke factoren n vervangt door $n + 1$ wordt de som groter en als je al zulke $n + 1$ vervangt door n wordt de som kleiner. Sommeer de ongelijkheden die je krijgt van $n = 0$ tot $n = N$ en deel door $k + 1$. Laat zien dat

$$1^k + 2^k + \dots + N^k < \frac{(N+1)^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \dots + N^k + (N+1)^k,$$

en gebruik dit om via onder- en bovensommen $\int_0^1 x^k dx$ te bepalen.

2.1 Integralen via onder- en bovensommen

De integraal van $x = 0$ tot $x = 1$ van x^2 in de inleiding hierboven is bij afspraak de nog niet wiskundig gedefinieerde oppervlakte van de verzameling⁹

$$A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}, \quad (2.1)$$

met in dit voorbeeld $a = 0$, $b = 1$ en $f(x) = x^2$. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en een functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(x) \geq 0$ voor $a \leq x \leq b$, beoogt de wiskundige definitie van

$$\int_a^b f(x) dx \quad (2.2)$$

wiskundig betekenis te geven aan de oppervlakte $|A|$ van A in (2.1).

Daartoe worden zogenaamde ondersommen en bovensommen gedefinieerd, waarvan het evident is dat ze bij de beoogde definitie van de oppervlakte van A kleiner respectievelijk groter¹⁰ dan $|A|$ zijn. Als vervolgens blijkt dat er precies één reëel getal is dat groter is dan alle ondersommen en kleiner dan alle bovensommen, dan is dit getal de enige kandidaat voor $|A|$, en vervolgens wordt dit getal de integraal van f over $[a, b]$ genoemd, i.e. (2.2). Het is natuurlijk niet verplicht om dan vervolgens te zeggen dat deze integraal gelijk is aan de oppervlakte $|A|$ van A .

We bekijken deze aanpak eerst voor het geval dat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een niet-dalende niet-negatieve functie is.

⁹ Nu maar met $\leq$ i.p.v. $<$.

¹⁰ Precies gezegd: groter dan of gelijk aan.

Definitie 2.12. Als $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dan heet f niet-negatief als $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$; f heet niet-dalend als de implicatie

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

geldt voor alle $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Voor zo'n niet-dalend niet-negatieve functie ligt het voor de hand om de oppervlakte $|A|$ van A in (2.1) van onder te benaderen met in dit geval *ondersommen* van de vorm

*Teken
plaatje!*

$$\underline{S}_N = \sum_{k=1}^N f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \quad (2.3)$$

$$= f(x_0)(x_1 - x_0) + \cdots + f(x_{N-1})(x_N - x_{N-1}),$$

waarin

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_N = b \quad \text{met } N \in \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

Zo'n keuze van $x_1, \dots, x_{N-1}$ noemen we een *partitie* P van $[a, b]$ en $\underline{S}_N$ is niets anders dan de som van de oppervlakten van de rechthoekjes¹¹

$$R_k = [x_{k-1}, x_k] \times [0, f(x_{k-1})] \quad (k = 1, \dots, N).$$

Hoe $|A|$ verder ook gedefinieerd wordt, je kunt je zelf er makkelijk van overtuigen dat bij iedere zinvolle definitie van $|A|$ wel moet gelden dat $\underline{S}_N \leq |A|$. Teken maar een plaatje met grafiek en rechthoekjes.

Evenzo maken de oppervlakten van de rechthoekjes

$$R_k = [x_{k-1}, x_k] \times [0, f(x_k)] \quad (k = 1, \dots, N)$$

de *bovensom*

$$\bar{S}_N = \sum_{k=1}^N f(x_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (2.5)$$

Voor een zinvolle definitie van de oppervlakte van A moet dus wel gelden dat

$$\underline{S}_N \leq |A| \leq \bar{S}_N. \quad (2.6)$$

Slordig¹² gezegd, de gezochte waarde $|A|$ zitten *tussen*¹³ de ondersom $\underline{S}_N$ en de bovensom $\bar{S}_N$, en het verschil van die twee is

$$\bar{S}_N - \underline{S}_N = \sum_{k=1}^N (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}).$$

¹¹ Zo'n rechthoekje kan ook een lijnstuk of een punt zijn.

¹² Het kan gebeuren dat $\underline{S}_N = |A|$ en/of $|A| = \bar{S}_N$.

¹³ Als $\underline{S}_N < |A| < \bar{S}_N$ spreken we van *strict tussen*.

Als we nu de partitie P in (2.4) equi-distant kiezen, i.e.

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{N} \quad (k = 1, \dots, N),$$

dan volgt

$$\bar{S}_N - \underline{S}_N = \sum_{k=1}^N (f(x_k) - f(x_{k-1})) \frac{b-a}{N} = (f(b) - f(a)) \frac{b-a}{N}$$

en dat kunnen we willekeurig klein maken door N groot te kiezen¹⁴. De onvermijdelijke conclusie is dan dat er maar één getal tussen alle ondersommen en bovensommen kan liggen.

Opgave 2.13. Met $N = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$ vormen de ondersommen $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \underline{S}_4, \underline{S}_8, \dots$ een niet-dalende rij getallen. Laat dit zien.

Evenzo vormen de bovensommen $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_4, \bar{S}_8, \dots$ een niet-stijgende rij. Omdat

$$\underline{S}_1 \leq \underline{S}_2 \leq \underline{S}_4 \leq \underline{S}_8 \leq \dots \leq \bar{S}_8 \leq \bar{S}_4 \leq \bar{S}_2 \leq \bar{S}_1,$$

zijn beide rijen begrensd.

Definitie 2.14. Als $a \leq M \in \mathbb{R}$ respectievelijk $a \geq M$ voor alle $a \in A \subset \mathbb{R}$ dan heet M een bovengrens respectievelijk een ondergrens voor A , en A naar boven respectievelijk beneden begrensd.

De kleinste bovengrens¹⁵ $\underline{J}$ van deze rij ondersommen kan niet groter zijn dan een bovensom en is daarmee een ondergrens voor alle bovensommen in deze rij bovensommen. Voor de grootste ondergrens¹⁶ $\bar{J}$ van alle bovensommen geldt dus $\bar{J} \geq \underline{J}$. Omdat

$$\bar{J} - \underline{J} \leq \bar{S}_{2^n} - \underline{S}_{2^n} = (f(b) - f(a)) \frac{b-a}{2^n}$$

en 2^n willekeurig groot gekozen kan worden volgt $\bar{J} - \underline{J} = 0$. Zo definiëren we een uniek getal $J = \bar{J} = \underline{J}$ dat vervolgens genoteerd wordt als

$$J = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx,$$

¹⁴ Anders zou $\mathbb{N}$ naar boven begrensd zijn in $\mathbb{R}$.

¹⁵ Ander woord voor kleinste bovengrens: supremum. Waarom bestaat die/dat?

¹⁶ Ander woord voor grootste ondergrens: infimum. Waarom bestaat die/dat?

spreek naar keuze uit als: de *integraal* van f over $[a, b]$, respectievelijk de integraal van f of $f(x)$ van a of $x = a$ tot b of $x = b$. In de notatie is x een *dummy* variabele, die door elke andere letter vervangen kan worden, maar bij voorkeur niet door a of b , en liever ook niet door d of f .

Opgave 2.15. Voor niet-stijgende niet-negatieve functies is het verhaal hierboven op details na hetzelfde. Schrijf dat uit.

Opgave 2.16. Niet-stijgende functies en niet-dalende functies worden monotone functies genoemd. Ook als deze functies zowel positieve als negatieve waarden aan-nemen, definiëren eindige sommen als in (2.3) en (2.5) via $N = 2^n$ een uniek getal J dat de integraal van f over $[a, b]$ genoemd wordt. Wat is de interpretatie van deze integraal in termen van de gebieden in het x, y -vlak begrensd door $x = a$, $x = b$, $y = 0$ en $y = f(x)$? Leg uit waarom.

De integraal van een monotone functie f is nu gedefinieerd aan de hand van equi-distante partities van het interval $[a, b]$. Hoe zit het met andere partities en de ordening van onder- en bovensommen? Een vraag om algemeen te stellen maar nu eerst nog even het voor specifieke geval van monotone functies.

Opgave 2.17. Neem weer het geval dat f niet-dalend is. Neem een partitie P gedefinieerd door (2.4) en een partitie Q gedefinieerd door

$$a = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_M = b \quad \text{met} \quad M \in \mathbb{N}.$$

Neem¹⁷ bij P de bovensom $\bar{S}$ in (2.5) en bij Q de ondersom

$$\underline{S} = \sum_{l=1}^M f(y_{l-1})(y_l - y_{l-1})$$

Laat zien dat $\underline{S} \leq \bar{S}$. Hint: eerst zelf proberen, maar kijk eventueel al naar (2.11).

Definitie 2.18. Laat A en B twee deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}$. We zeggen dat $A \leq B$ als $a \leq b$ voor alle $a \in A$ en alle $b \in B$. In dat geval zeggen we dat $J \in \mathbb{R}$ tussen A en B ligt als $A \leq \{J\} \leq B$.

¹⁷ Even zonder index in de notatie.

Al onze onder- en bovensommen maken twee zulke verzamelingen A en B . De volgende opgave is nu van belang.

Opgave 2.19. Laat A en B twee niet-lege deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}$ met de eigenschap dat $A \leq B$. Bewijs dat er een getal $J \in \mathbb{R}$ is dat tussen A en B ligt. Hint: zie de redenering onder Definitie 2.14.

Stelling 2.20. Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een monotone functie zijn. Dan bestaat er precies één getal J dat tussen de verzameling van alle sommen van de vorm (2.3) en de verzameling van alle sommen van de vorm (2.5) ligt. Dit getal J is per definitie de integraal van $f(x)$ van $x = a$ tot $x = b$, notatie

$$J = \int_a^b f(x) dx.$$

Bewijs. Het werk is hierboven gedaan, tenzij Opgave 2.17 niet gelukt is, maar lees dan toch maar verder. Zonder beperking der algemeenheid¹⁸ nemen we f niet-dalend. De ondersommen vormen een niet-lege verzameling A en de bovensommen een niet-lege verzameling B . Er geldt dat $A \leq B$, dus er bestaat een J tussen A en B . Met equi-distante partities zien we dat er maar één zo'n J kan zijn. Klaar.

Monotone functies zijn dus integreerbaar. Merk op dat gegeven een partitie P zoals in (2.4), en iedere keuze van zogenaamde *tussenvolpunten*

$$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \quad (k = 1, \dots, N),$$

ook

$$S = \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{2.7}$$

een voor de hand liggende benadering van $\int_a^b f(x) dx$ zou moeten zijn, ook als $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ niet monotoon is, maar we kunnen dan niet meer op een natuurlijke manier van boven- of ondersommen spreken.

Als de waardenverzameling¹⁹

$$\{f(x) : a \leq x \leq b\} = \cup_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$$

echter begrensd is, i.e. als er $m, M \in \mathbb{R}$ bestaan zodat $m \leq f(x) \leq M$ voor alle $x \in [a, b]$, dan is op elke deelinterval $[x_{k-1}, x_k]$ de waardenverzameling

¹⁸ Afkorting: zbda.

¹⁹ Het bereik B_f van $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, door sommigen ook het codomein van f genoemd.

ook begrensd en bestaan er bijbehorende ondergrenzen m_k en bovengrenzen M_k met $m \leq m_k \leq M_k \leq M$, waarmee we

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^N m_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{en} \quad \bar{S} = \sum_{k=1}^N M_k(x_k - x_{k-1}) \quad (2.8)$$

weer als onder- en bovensommen voor zowel (2.7) als de te definiëren integraal $\int_a^b f(x) dx$ kunnen introduceren. Bij dezelfde partitie P geldt dan onmiddellijk dat $\underline{S} \leq \bar{S}$.

Wat hebben we nu nodig om het bewijs van Stelling 2.20 over te schrijven? Twee dingen goed begrijpen nu. Ten eerste, de verzamelingen van ondersommen A en bovensommen B moeten weer voldoen aan $A \leq B$. Ten tweede, we moeten de uniciteit van het getal J tussen A en B aantonen, en daartoe nemen we voor m_k en M_k natuurlijk de grootst respectievelijk kleinste mogelijk waarde, teneinde het verschil

$$\bar{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^N (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

zo klein mogelijk²⁰ te krijgen.

Kies dus

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \quad \text{en} \quad m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f.$$

Hierin staat $\sup$ voor *supremum* van de verzameling in kwestie. Iedere niet-lege verzameling $A \subset \mathbb{R}$ die begrensd is naar boven, middels een *bovengrens* $M \geq a$ voor alle $a \in A$, heeft een kleinste bovengrens die het supremum van A genoemd wordt. In Sectie 1.2 heb je hier al over gelezen natuurlijk. Dit is één van de vanzelfsprekende eigenschappen die $\mathbb{R}$ moet²¹ hebben. Evenzo staat $\inf$ voor *infimum* of grootste ondergrens.

Opgave 2.21. Laat zien dat bij het *verfijnen* van de partitie, i.e. extra punten toevoegen in (2.4), ondersommen niet kleiner en bovensommen niet groter kunnen worden.

Als nu voor alle $k = 1, \dots, N$ geldt dat

$$M_k - m_k \leq \varepsilon \quad (2.9)$$

²⁰ Hopelijk willekeurig klein.

²¹ Anders $\mathbb{R}$ terugsturen naar de verzamelingsgeleerden!

(voor een $\varepsilon > 0$), dan volgt dat

$$\bar{S} - \underline{S} = \sum_{k=1}^N (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \varepsilon(b - a). \quad (2.10)$$

Wat we dus nodig hebben voor uniciteit van J is dat elke $\varepsilon > 0$ realiseerbaar is in (2.9), middels een geschikte keuze van (2.4). In dat geval geldt voor iedere andere $\tilde{J}$ tussen A en B dat

$$|\tilde{J} - J| \leq \bar{S} - \underline{S} \leq \varepsilon(b - a),$$

en omdat $\varepsilon > 0$ dan zo klein gekozen mag worden als we maar willen volgt²² $\tilde{J} = J$.

De definitie van (meteen maar) *uniforme continuïteit* brengt nu uitkomst. Dit is de eerste keer dat we een uitspraak formuleren waarin voor alle $\varepsilon > 0$ iets moet gelden dat met die ε te maken heeft, en zo'n uitspraak meteen gebruiken om een fundamentele stelling te bewijzen. Merk op dat je zo'n uitspraak alleen maar *echt gebruikt* als je meerdere (de facto oneindig veel) keren een ε kiest²³.

Definitie 2.22. Als $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dan heet f *uniform continu* als er voor alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in [a, b]$ geldt dat

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Stelling 2.23. Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een uniform continue functie zijn. Dan bestaat er precies één getal J dat tussen de verzameling van alle ondersommen en de verzameling van alle bovensommen ligt, waarbij we onder de onder- en bovensommen de sommen in (2.8) verstaan. Dit getal J is per definitie de integraal van $f(x)$ van $x = a$ tot $x = b$, notatie

$$J = \int_a^b f(x) dx.$$

Bewijs. Wederom is vrijwel al het werk al gedaan. De ondersommen vormen een niet-lege verzameling A en de bovensommen een niet-lege verzameling B . Met $\delta > 0$ bij $\varepsilon > 0$ zoals in Definitie 2.23 volgt²⁴ (2.9) als de partitie P in (2.4) zo gekozen wordt dat $x_k - x_{k-1} \leq \delta$ voor alle $k = 1, \dots, N$.

²² Ook dit gebruikt weer dat $\mathbb{N}$ niet begrensd is in $\mathbb{R}$ via het kiezen van $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

²³ Houd het met $\varepsilon = \frac{1}{n}$ bij voorkeur simpel, en je slaagt met vlag en wimpel.

²⁴ Ga dit na, al volgt aanstonds dat m_k en M_k aangenomen worden in $[x_{k-1}, x_k]$.

Als we nu ook nog laten zien dat $A \leq B$ zijn we klaar. Neem daartoe P als in (2.4) en Q net als in Opgave 2.17, en vorm de *gemeenschappelijke* verfijning

$$a = z_0 \leq z_1 \leq \cdots \leq z_K = b, \quad (2.11)$$

door $x_1 \leq \cdots \leq x_{N-1}$ en $y_1 \leq \cdots \leq y_{M-1}$ op één gemeenschappelijke volgorde te zetten. Dus $K - 1 = M - 1 + N - 1$ en iedere z_i is een x_k of een y_l , waarmee met

$$m_l = \inf_{[y_{l-1}, y_l]} f, \quad \tilde{m}_i = \inf_{[z_{i-1}, z_i]} f \leq \sup_{[z_{i-1}, z_i]} f = \tilde{M}_i, \quad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

volgt dat

$$\sum_{l=1}^M m_l(y_l - y_{l-1}) \leq \sum_{i=1}^K \tilde{m}_i(z_i - z_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^K \tilde{M}_i(z_i - z_{i-1}) \leq \sum_{k=1}^N M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Waarom? Omdat de eerste ongelijkheid de ondersommen betreft van een partitie en een verfijning²⁵ daarvan, en de derde ongelijkheid de bovensommen van een andere partitie naar dezelfde verfijning. De tweede ongelijkheid spreekt vanzelf en Stelling 2.23 is nu voor eens en altijd inzichtelijk met onder- en bovensommen bewezen.

Opgave 2.24. Bewijs dat je antwoord in Opgave 2.10 juist is.

2.2 Toch maar wat meer over continuïteit en limieten

Uniform continue functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zijn dus integreerbaar met dezelfde aanpak als monotone functies. Maar hoe weet je of een functie uniform continu is? Wel, bijvoorbeeld als je een schatting van de vorm

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad (2.12)$$

hebt voor alle $x, y \in [a, b]$ met een vaste $\alpha > 0$ en een vaste $C > 0$. In het geval dat $\alpha \in (0, 1)$ spreekt men van uniform *Hölder continu* met exponent α , en als $\alpha = 1$ van uniform *Lipschitz continu*. Het geval $\alpha > 1$ is niet heel relevant²⁶.

Uniforme continuïteit betreft functies op hun hele domein, hierboven steeds $[a, b]$. *Gewone continuïteit* betreft het gedrag van een functie in de buurt van een gegeven punt.

²⁵ Zie Opgave 2.21.

²⁶ Waarom niet? Leuke opgave: bewijs dat zulke functies constant zijn.

Definitie 2.25. Als we in Definitie 2.22 de y vast nemen en gegeven iedere $\varepsilon > 0$, altijd een $\delta > 0$ kunnen vinden waarvoor de implicatie geldt voor alle x met $x \in [a, b]$, dan heet f continu in y . We zeggen dan ook dat

$$f(y) = \lim_{x \rightarrow y} f(x),$$

of ook wel

$$f(x) \rightarrow f(y)$$

als $x \rightarrow y$ (steeds met $x \in [a, b]$). Als deze uitspraak geldt met uitsluiting van $x = y$, en de functiewaarde $f(y)$ vervangen door een $L \in \mathbb{R}$, dan zeggen we dat L de limiet is van $f(x)$ voor $x \rightarrow y$.

In Definitie 2.25 kan $[a, b]$ vervangen worden door een willekeurige $I \subset \mathbb{R}$ en in de uitspraak $f(x) \rightarrow L$ hoeft y dan niet per se in I te liggen.

De voor de hand liggende vraag is natuurlijk of een $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die continu is in elke $y \in [a, b]$ ook uniform continu is op heel $[a, b]$. Daartoe herformuleren we nu eerst de definitie van $f(x) \rightarrow L$ als $x \rightarrow y$ in termen van convergente rijen.

Definitie 2.26. Een door $n \in \mathbb{N}$ genummerde²⁷ rij reële getallen x_n heet convergent als er een (limiet) $\bar{x} \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat er voor alle $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor de implicatie

$$n \geq N \implies |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon$$

geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$. Zonder woorden luidt deze uitspraak

$$\exists \bar{x} \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon.$$

We zeggen dat $x_n \rightarrow \bar{x}$ (als $n \rightarrow \infty$).

Opgave 2.27. Laat zien dat een convergente rij reële getallen x_n maar één limiet heeft. Hint: stel niet dan zijn er minstens twee limieten, zeg $\bar{x}$ en $\hat{x}$; gebruik

$$|\bar{x} - \hat{x}| = |\bar{x} - x_n + x_n - \hat{x}| \leq |\bar{x} - x_n| + |x_n - \hat{x}|$$

en kies één geschikte ε om een tegenspraak af te leiden met Definitie 2.26.

²⁷ Of door $n \in k + \mathbb{N} = \{k + j : j \in \mathbb{N}\}$, met $k \in \mathbb{Z}$.

Opgave 2.28. Laat zien dat iedere convergente rij reële getallen x_n begrensd is, i.e. er is een $M \geq 0$ waarvoor geldt dat $|x_n| \leq M$ voor alle n in $\mathbb{N}$. Hint: pas Definitie 2.26 toe met één $\varepsilon > 0$ naar vrije keuze en kies M zo dat $M \geq |x_n|$ voor alle n kleiner dan de bijbehorende N en $M \geq |x_N| + \varepsilon$. Geef een voorbeeld van een begrensde rij die niet convergent is en maak die rij convergent door voldoende veel termen van de rij weg²⁸ te laten.

Opgave 2.29. Laat $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en $y, L \in \mathbb{R}$. De uitspraak $f(x) \rightarrow L$ als $x \rightarrow y$ is equivalent met de uitspraak dat voor elke rij x_n in I de implicatie

$$x_n \rightarrow y \implies f(x_n) \rightarrow L$$

geldt. Bewijs dit. Hint: rijgen van definities, noem de ε in de uitspraak dat $x_n \rightarrow y$ daartoe maar δ .

NB. Het kan gebeuren in Opgave 2.29 dat $y \notin I$ en dat er geen rijen x_n in I zijn met $x_n \rightarrow y$. In dat geval zijn beide uitspraken zinloos²⁹ voor elke $L \in \mathbb{R}$. Zo'n punt $y \notin I$ heet *geen limietpunt* van I .

Opgave 2.30. De enige manier waarop $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ niet uniform continu kan zijn is als er een $\varepsilon > 0$ bestaat waarvoor geen bijbehorende $\delta > 0$ te vinden is waarmee de uitspraak in Definitie 2.22 geldt. Kies nu een willekeurige rij $0 < \delta_n \rightarrow 0$. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ zijn er dan $x_n, y_n \in [a, b]$ met wel $|x_n - y_n| \leq \delta_n$ maar niet $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$. Neem nu aan³⁰ dat $y_n \rightarrow \eta \in [a, b]$ en leid een tegenspraak af met de continuïteit van f in η . Hint: laat zien dat ook $x_n \rightarrow \eta$; wat geldt er dus voor $f(x_n)$ en $f(y_n)$?

Stelling 2.31. *Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn in elk punt van $[a, b]$. Dan is $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uniform continu.*

Bewijs. Stel dat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ niet uniform continu is. Redeneer dan als in Opgave 2.30: als de rij y_n niet convergent is dan kan de rij convergent gemaakt worden door voldoende elementen van de rij weg te laten (met andere woorden, neem een deelrij) zodanig dat de rij convergent wordt (en de andere rij dus ook). Gebruik hiertoe Stelling 3.1 die zegt dat *iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ een convergente deelrij heeft*. Noem de limiet van de deelrij η , laat zien dat $\eta \in [a, b]$ en het werk is gedaan.

²⁸ Grapje: denk aan ongewenste data.

²⁹ Maar wel waar.

³⁰ Absurde aanname?

De in het bewijs gebruikte Stelling 3.1 is belangrijk genoeg om een eigen hoofdstuk te krijgen. Het is de eerste stelling die we formuleren over het bestaan van een limiet van een (in dit geval deel-)rij zonder die limiet al op de een of andere manier bepaald te hebben. Een poging om het convergent zijn van een rij x_n te formuleren *zonder* de limiet in de definitie te gebruiken gaat terug tot Cauchy en correspondeert met wat tegenwoordig een Cauchyrij noemen. Vergelijk de volgende definitie daarom nauwkeurig met de eerste zin in Definitie 2.26.

Definitie 2.32. Een door $n \in \mathbb{N}$ genummerde rij reële getallen x_n heet een *Cauchyrij* als er voor alle $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat waarvoor de implicatie

$$m, n \geq N \implies |x_n - x_m| \leq \varepsilon$$

geldt voor alle $m, n \in \mathbb{N}$.

In Definitie 2.32 is $m, n \geq N$ te lezen als $m \geq N$ en ook $n \geq N$. Evenzo is $m, n \in \mathbb{N}$ te lezen als $m \in \mathbb{N}$ en ook $n \in \mathbb{N}$. In het volgende hoofdstuk volgt het convergent zijn van Cauchyrijen via Stelling 3.1 uit het begrensds zijn van Cauchyrijen. Voor nu volstaat een eenmalig beroep op Stelling 3.1 zelf.

Opgave 2.33. Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uniform continu zijn. Bewijs dat f begrensd is op $[a, b]$.

Opgave 2.34. Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn in elk punt van $[a, b]$. Bewijs dat f een maximum M en een minimum m op $[a, b]$ heeft. Hint: omdat f uniform continu is op $[a, b]$, is f begrensd op $[a, b]$. Laat $M = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$. Dan bestaat er een rij x_n in $[a, b]$ met $f(x_n) \rightarrow M$. Neem daarvan een convergente deelrij.

2.3 Integreerbaar: definities, regels, voorbeelden

We weten tot nu toe alleen dat voor monotone en voor continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ met behulp van onder- en bovensommen een ondubbelzinnige betekenis kan worden gegeven aan de *integreerbaarheid* van f en de waarde van de integraal

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Voor iedere begrensde functie kunnen we echter bij een partitie (2.4)

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad \text{en} \quad m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

definiëren en de bijbehorende onder- en bovensom. Net als in het bewijs van Stelling 2.23 volgt nu dat de verzameling van alle ondersommen A en de verzameling van alle bovensommen B voldoen aan $A \leq B$. Op grond van Opgave 2.19 is er dus tenminste één getal J dat tussen A en B ligt.

Definitie 2.35. Een begrensde functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heet *Riemann integreerbaar* als er precies één getal J tussen de verzameling A van alle ondersommen en de verzameling B van alle bovensommen ligt. In dat geval is per definitie

$$J = \int_a^b f(x) dx.$$

Het is wel handig om een paar variaties op het thema te hebben bij de vraag welke functies nog meer integreerbaar zijn, en welke regeltjes er gelden die wel moeten gelden. De volgende opgaven zijn daartoe nuttig. Zorg dat je begrijpt wat de uitspraken zijn en waarom ze waar (moeten) zijn. Het begrip oneigenlijk integreerbaar komt ook langs en daar doen we vooral niet moeilijk over.

Opgave 2.36. Bewijs dat met

$$M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} < x < x_k\} \quad \text{en} \quad m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} < x < x_k\}$$

dezelfde begrensde functies integreerbaar worden als in Definitie 2.35, met dezelfde waarde van J .

Opgave 2.37. Bewijs dat de functie f gedefinieerd door $f(x) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{Q}$ en $f(x) = 0$ voor alle $x \notin \mathbb{Q}$ niet integreerbaar is op $[0, 1]$.

Opgave 2.38. Bewijs dat de functie f gedefinieerd door $f(0) = 0$ en $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ voor $x \neq 0$ integreerbaar is op $[0, 1]$. Hint: gebruik van $\sin$ alleen dat $x \rightarrow \sin x$ begrensd, periodiek en continu is. In welke x is $x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$ dan continu? Waarom niet en waarom wel?

Opgave 2.39. Iedere begrensde integreerbare functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die op de punten van een partitie

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b \quad \text{met} \quad N \in \mathbb{N}$$

wordt veranderd door $g(x_k) = c_k$ te stellen voor $k = 0, \dots, N$ voor gegeven waarden $c_k \in \mathbb{R}$, en $g(x) = f(x)$ voor alle $x \in [a, b]$ die niet to P behoren, definieert een begrensde integreerbare functie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ met $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$. Bewijs dit.

Opgave 2.40. Iedere begrensde functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor er een partitie

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b \quad \text{met} \quad N \in \mathbb{N}$$

bestaat met f monotoon of continu op elk open interval (x_{k-1}, x_k) is integreerbaar. Bewijs dit³¹.

Definitie 2.41. Als $a < b$ dan is

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

vermits $f : [b, a] \rightarrow \mathbb{R}$ begrensd en integreerbaar is³².

Opgave 2.42. Laat $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ begrensd zijn en $c \in (a, b)$. Bewijs dat f integreerbaar is op $[a, b]$ dan en slechts dan als f integreerbaar is op zowel $[a, c]$ als $[c, b]$, en dat in dat geval

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Definitie 2.43. Laat $-\infty \leq a < b \leq \infty$ en $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ integreerbaar zijn op elke interval $[A, B] \subset (a, b)$. Dan is per definitie de (eventueel) oneigenlijke³³ integraal van a tot b gelijk aan

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{A \downarrow a} \lim_{B \uparrow b} \int_A^B f(x) dx,$$

als deze limiet van een limiet bestaat.

³¹ Hiermee ben je van een hoop gezeur af.

³² Consistent met de intuïtie dat dx in $\int_a^b f(x) dx$ negatief is als $a > b$.

³³ Denk aan a en of b niet eindig, of f niet gewoon integreerbaar op $[a, b]$.

Limieten van limieten zijn verwarrend. Daarom deze opgave die via splitsen tot (twee) gewone limieten leidt, zoals dat bij calculus doorgaans aangeleerd wordt.

Opgave 2.44. Neem in Definitie 2.43 een $c \in (a, b)$. Bewijs dat

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

als beide integralen, eventueel als

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{A \downarrow a} \int_A^c f(x) dx \quad \text{en} \quad \int_c^b f(x) dx = \lim_{B \uparrow b} \int_c^B f(x) dx,$$

bestaan³⁴.

Terug naar de gewone integralen merken we nu op dat de Riemann integreerbare functies een (vector)ruimte³⁵ over $\mathbb{R}$ vormen. As je nog niet weet wat een vectorruimte is lees dan de voetnoot, doe even alsof

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

2-vectoren in $\mathbb{R}^2$ zijn, waarvoor de gebruikelijk vectoroptelling en vermenigvuldiging met scalaren λ, μ uit het lichaam $\mathbb{R}$ wel bekend zullen zijn, en je begrijpt waarom $\mathbb{R}^2$ een vectorruimte genoemd wordt. Iedere $f \in \mathbb{R}^2$ heeft coördinaten f_i genummerd door $i \in \{1, 2\}$ en met functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is het net zo. De “coördinaten” van f worden alleen niet genoteerd met f_x maar met $f(x)$, genummerd door $x \in [a, b]$ (en niet in een kolommetje gezet). De verzameling van alle functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is zo op een vanzelfsprekende manier net zo’n vectorruimte als $\mathbb{R}^2$.

Meer over vectorruimten hoef je hier voorlopig niet te weten, maar is het wel goed om op te merken dat dat deze vectorruimte van alle functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een heleboel deelvectorruimten heeft, bijvoorbeeld $\mathcal{R}([a, b])$, de verzameling van alle Riemann integreerbare functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Opgave 2.45. De verzameling van begrensde integreerbare functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is een vectorruimte³⁶ over $\mathbb{R}$, hier $\mathcal{R}([a, b])$ genaamd. Bewijs dit, en ook dat

$$f \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

³⁴ Vaak schrijft men $\lim_{A \downarrow a} = \lim_{A \rightarrow a+}$ en $\lim_{B \uparrow b} = \lim_{B \rightarrow b-}$.

³⁵ Met f, g Riemann integreerbaar is $\lambda f + \mu g$ het ook voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

³⁶ Is met met $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ ook $fg \in \mathcal{R}([a, b])$? Hint: neem f, g eerst positief.

een lineaire³⁷ afbeelding is van deze vectorruimte naar $\mathbb{R}$. Hint: laat met name zien dat met $f, g \in \text{RI}([a, b])$ ook $f + g \in \text{RI}([a, b])$ en

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Opgave 2.46. Als $f \in \text{RI}([a, b])$ dan is ook $x \rightarrow |f(x)|$ begrensd en integreerbaar op $[a, b]$ en geldt de “3-hoeksongelijkheid”

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

te vergelijken met (1.25). Bewijs dit rechtstreeks uit de definities en geef een voorbeeld van een begrensde functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die niet integreerbaar is waarvoor $x \rightarrow |f(x)|$ het wel is.

Opmerking 2.1. Een functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kan alleen maar Riemann integreerbaar zijn als f begrensd is. Maar welke begrensde functies integreerbaar zijn is een vraag die we nog niet gesteld hebben. Zonder bewijs: het antwoord is dat daartoe de verzameling $\mathcal{N}$ van x -waarden waarin f niet continu is een zogenaamde nulverzameling moet zijn. Dat is een verzameling die voor elke $\varepsilon > 0$ overdekt kan worden met intervallen $[a_n, b_n]$ genummerd door $n \in \mathbb{N}$, waarbij voor elke $N \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\sum_{n=1}^N (b_n - a_n) \leq \varepsilon.$$

Overdekken betekent hier dat

$$\mathcal{N} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n],$$

en de overdekking hangt af van ε . Intuïtief: met een willekeurig klein intervalletje opgegeknapt in aftelbaar veel stukjes is $\mathcal{N}$ te bedekken.

2.4 Terug- en vooruitblik

Begrensde functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kunnen via onder- en bovensommen die willekeurig dicht bij elkaar liggen integreerbaar zijn met integraal $\int_a^b f(x) dx$.

³⁷ Wat lineair betekent staat op de volgende bladzijde.

Zulke integreerbare functies vormen een lineaire vectorruimte over $\mathbb{R}$, hier genoteerd met $\text{RI}([a, b])$. Deze vectorruimte bevat alle (uniform) continue functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die zelf ook een lineaire vectorruimte over $\mathbb{R}$ vormen, doorgaans met $C([a, b])$ aangeduid. Ook bevat $\text{RI}([a, b])$ alle monotone functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ maar die vormen geen vectorruimte³⁸.

De vectorruimte $\text{RI}([a, b])$ is zelf ook weer een deelvectorruimte van alle functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die met de bewerkingen gedefinieerd door

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

voor alle $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en alle $x \in [a, b]$, een lineaire vectorruimte over $\mathbb{R}$ vormen, waarbinnen de integraaltheorie zoals hierboven behandeld zich afspeelt.

De vectorruimte $C([a, b])$ kan voorzien worden van diverse normen³⁹, bijvoorbeeld de maximum-norm

$$f \rightarrow \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \|f\|_{\infty},$$

of de zogenaamde 1-norm

$$f \rightarrow \int_a^b |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

Met een norm kunnen we praten over convergentie, waarbij $f_n \rightarrow f$ betekent dat $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. Alles hierboven dat met convergente rijen is gekarakteriseerd kan worden overschreven, maar begrensde rijen hebben i.h.a. geen convergente deelrijen.

De maximum-norm maakt van $C([a, b])$ een genormeerde ruimte waarin Cauchyrijtjes convergent zijn. Zulke ruimten heten *Banachruimten*, abstract vaak genoteerd met hoofdletters achterin het alfabet, zie Hoofdstuk 7. Met deze norm is de lineaire afbeelding in Opgave 2.45 continu in de zin dat $f_n \rightarrow f$ in de maximum norm (uniforme convergentie) impliceert dat

$$\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f,$$

een uitspraak die onder vele andere zwakkere voorwaarden ook geldt. Merk op dat $C([a, b])$ ook een algebra⁴⁰ is, i.e. met $f, g \in C([a, b])$ zit ook $x \rightarrow f(x)g(x)$ in $C([a, b])$ en aan een voor de hand liggend lijstje⁴¹ axioma's is voldaan.

In Hoofdstuk 4 beginnen we met de differentiaalrekening⁴² voor functies

³⁸ Waarom niet?

³⁹ See in wikipedia: normed vector space.

⁴⁰ Een commutatieve Banachalgebra zelfs.

⁴¹ See in wikipedia: algebra over a field.

⁴² Af en toe terugbladerend verder lezen vanaf (6.77) is nu een optie.

van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, om uiteindelijk ook differentiaalrekening te doen voor functies⁴³ van X naar Y . Daartoe zullen we ook integraalrekening voor functies van $\mathbb{R}$ naar X nodig hebben. De beschouwingen over integralen van functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ sluiten we nu af met een reflecterende opgave, en in $\mathbb{R}$ is er dan eerst nog een hoofdstukje over die convergente deelrijen en zo.

Opgave 2.47. Teken een plaatje met een x -as en een y -as zonder pijltjes, markeer een $x = a$ en een $x = b$ op de x -as en teken een grafiek van zo maar een continue $f(x)$ zonder nulpunten of tekenwisselingen gedefinieerd voor x tussen a en b . Kies pas na dat je dit gedaan hebt de pijltjes op de assen die aangeven of x naar links of naar rechts loopt en y naar beneden of naar boven. Er zijn vier mogelijkheden om dat te doen. Relateer in alle vier de gevallen de integraal

*Teken
plaatje!*

$$\int_a^b f(x) dx$$

aan de (bij algemene afspraak) positieve oppervlakte van het gebied ingesloten door $x = a$, $x = b$, $y = 0$ en $y = f(x)$. In welk geval is zowel f als $\int_a^b f(x) dx$ positief? Verifieer dat dan $b > a$ en dat je de positieve x -as 3 uren tegen de klok in om de oorsprong moet draaien om de positieve y -as te krijgen. Hint: als je dit een stomme opgave vindt lees dan alvast Sectie 6.8 en kijk naar Opgave 6.24.

2.5 Verdiepingsmoment: tussensommen

We zijn begonnen met onder- en bovensommen om integralen van monotone functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zo eenvoudig mogelijk te behandelen. Voor continue functies kunnen we echter net zo goed kijken naar sommen van de vorm

$$S_N = \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \text{met } \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad (2.13)$$

gegeven de partitie (2.4) vrij te kiezen voor elke $k = 1, \dots, N$. Vanzelfsprekend geldt

$$\underline{S}_N \leq S_N \leq \bar{S}_N,$$

met $\underline{S}_N$ en $\bar{S}_N$ als in (2.8) en het bewijs van Stelling 2.23 herlezend is via (2.10) duidelijk dat ook $|S_N - J| \leq \varepsilon(b - a)$ als $x_k - x_{k-1} \leq \delta$ voor alle $k = 1, \dots, N$.

Het is nu een aardige en nuttige oefening om wederom via een rij equidistante partities met $N = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$, met voor ξ_k steeds $\xi_k = x_k$

⁴³ Of, ander woord, afbeeldingen.

gekozen, direct en zonder de ordening van boven- en ondersommen te gebruiken te laten zien dat er een limietwaarde J bestaat, en daarna voor deze J op dezelfde conclusie uit te komen.

Stelling 2.48. *Als $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uniform continu is dan is er een unieke $J \in \mathbb{R}$ waarvoor voor iedere S_N als in (2.13) geldt dat $|S_N - J| \leq \varepsilon(b - a)$, mits $x_k - x_{k-1} \leq \delta$ voor alle $k = 1, \dots, N$, waarbij $\delta > 0$ bij $\varepsilon > 0$ gekozen is zoals in de definitie van uniforme continuïteit van $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.*

Opgave 2.49. Bewijs Stelling 2.48 zonder de ordening van boven- en ondersommen te gebruiken. Hint: nodig voor zo'n bewijs is de convergentie van Cauchyrijen.

3 Convergente (deel)rijen en zo

In het bewijs van Stelling 2.31 hebben we voor het eerst gebruik gemaakt van de volgende stelling, waarvan het belang in de analyse moeilijk is te onderschatten, ook als je van mening bent dat 'ie eigenlijk triviaal is en verder geen betoog behoeft.

Stelling 3.1. *Iedere begrensde rij x_n in $\mathbb{R}$ heeft een convergente deelrij.*

De lezer die de verhaallijn over integraal- en differentiaalrekening niet te veel wil onderbreken kan eventueel de volgende drie secties overslaan en doorlezen in Sectie 3.6 voor een direct bewijs van Stelling 3.1, maar mist dan leerzame oefeningen met kwantoren en een belangrijke techniek uit de analyse: de truc van de diagonaalrij, waarmee meerdere belangrijke stellingen worden bewezen, waaronder een stelling over begrensde rijen in $C([a, b])$.

3.1 Spelen met kwantoren

Voor we laten zien waarom deze stelling eigenlijk triviaal is spelen we eerst nog wat met de kwantoren $\forall$ en $\exists$.

De kale definitie in Definitie 2.26 met kwantoren van het convergent zijn van de rij x_n wordt ook wel getekstzet als

$$\exists \bar{x} \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon,$$

hetgeen misschien net iets prettiger oogt dan alles op dezelfde regelhoogte. We kunnen ook zeggen dat $\bar{x} \in \mathbb{R}$ een limiet is van de rij $x_n \in \mathbb{R}$ als geldt dat

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon,$$

en vergelijken deze definitie met de kale versie van $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uniform continu:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b] : |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \quad (3.1)$$

Beide definities eindigen met een implicatie, maar $\bar{x} \in \mathbb{R}$ limiet van de rij $x_n \in \mathbb{R}$ schrijven we net zo lief als

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon,$$

waarin we stilzwijgend n altijd in $\mathbb{N}$ nemen. De variant op deze uitspraak die Cauchy bedacht, zie Definitie 2.32, is

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N : |x_n - x_m| \leq \varepsilon,$$

een rij die hieraan voldoet noemen we een Cauchyrij.

De (logische) ontkenning van $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uniform continu is gebruikt in Opgave 2.30. Die ontkenning krijg¹ je door in een keten van zulke kwantoren de verwisseling

$$\forall \leftrightarrow \exists$$

toe te passen en de laatste uitspraak te ontkennen. Dit geeft

$$\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{\delta > 0} \exists_{x, y \in [a, b]} : |x - y| \leq \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

als ontkenning van de uniforme continuïteit van $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij het de implicatie is die in de laatste stap ontkend is: x en y voldoen wel $|x - y| \leq \delta$ maar het is niet zo dat $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Evenzo is de ontkenning van het convergent zijn van de rij $x_n \in \mathbb{R}$ te formuleren met als laatste stap de ontkenning van de implicatie, maar de formulering dat $\bar{x} \in \mathbb{R}$ geen limiet is van de rij $x_n \in \mathbb{R}$ is natuurlijk ook gewoon de ontkenning van de uitspraak zonder implicatie, i.e.

$$\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{N \in \mathbb{N}} \exists_{n \geq N} : |x_n - \bar{x}| > \varepsilon.$$

Dat en-tekentje $\wedge$ voor de ontkenning van een implicatie is dan niet nodig.

Opgave 3.2. Formuleer de logische ontkenningen van alle quantorenuitspraken hierboven.

3.2 Elementaire opgaven over convergente rijen

Een sectie om over te slaan als je de verhaallijn integraal- en differentiaalrekening niet te veel wil onderbreken, maar deze opgaven zijn een must voor de beheersing van de stof.

Opgave 3.3. Iedere convergente rij in $\mathbb{R}$ is begrensd. Bewijs dit.

Opgave 3.4. Iedere Cauchyrij in $\mathbb{R}$ is begrensd. Bewijs dit.

¹ Overtuig zelf hiervan zonder waarheidstabellen.

Opgave 3.5. Iedere convergente rij in $\mathbb{R}$ is een Cauchyrij. Bewijs dit.

Opgave 3.6. Als x_n en y_n convergente rijen zijn in $\mathbb{R}$ dan is de rij $x_n + y_n$ ook convergent in $\mathbb{R}$ met de limiet die je verwacht. Bewijs dit.

Opgave 3.7. Als x_n en y_n convergente rijen zijn in $\mathbb{R}$ dan is de rij $x_n y_n$ ook convergent in $\mathbb{R}$ met de limiet die je verwacht. Bewijs dit.

Opgave 3.8. Als x_n een convergente rij is in $\mathbb{R}$ met $x_n \neq 0$ voor alle n dan is de rij $\frac{1}{x_n}$ ook convergent in $\mathbb{R}$ met de limiet die je verwacht, tenzij de limiet van de rij x_n gelijk is aan 0. Bewijs dit.

Opgave 3.9. Als x_n een convergente rij is in $\mathbb{R}$ dan is de rij $|x_n|$ ook convergent in $\mathbb{R}$ met de limiet die je verwacht. Bewijs dit.

3.3 Limietpunten en convergente deelrijen

Het grappige is dat een wellicht per abuis opgeschreven mix van de uitspraak dat $\bar{x} \in \mathbb{R}$ de limiet van de rij $x_n \in \mathbb{R}$ en de uitspraak dat $\bar{x} \in \mathbb{R}$ juist geen limiet is van de rij $x_n \in \mathbb{R}$ precies de definitie is van een nieuw belangrijk begrip: we zeggen dat $\bar{x} \in \mathbb{R}$ *limietpunt* van de rij $x_n \in \mathbb{R}$ is als

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon, \quad (3.2)$$

hetgeen iets anders is dan $\bar{x} \in \mathbb{R}$ is limiet van de rij $x_n \in \mathbb{R}$, want dat was

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon. \quad (3.3)$$

De uitspraak in (3.2) is er een om goed te lezen. *Je ziet namenlijk vast niet meteen deze uitspraak equivalent is met het bestaan van een convergente deelrij van x_n met limiet $\bar{x}$. Om te onthouden nu is dat een rij met een limiet begrensd is en maar één limiet heeft, terwijl een begrensde rij altijd tenminste één limietpunt (de limiet van een convergente deelrij) heeft². Merk*

² En wellicht een heleboel limietpunten, je kunt het zo gek niet verzinnen.

op dat iedere strict stijgende rij $n_k \in \mathbb{N}$ een deelrij van de rij x_n in $\mathbb{R}$ definieert, genummerd door k in x_{n_k} . Als we het hebben over een deelrij van x_n is dit precies wat we bedoelen: we maken de deelrij door uit de door n genummerde rij x_n alle x_n weg te laten waarvoor n niet als n_k in de gegeven strict stijgende rij $n_k \in \mathbb{N}$ voorkomt. De laatste cursief gedrukte uitspraak is een herformulering van Stelling 3.1 waar dit hoofdstuk in eerste instantie over gaat.

Opgave 3.10. Bewijs dat een limietpunt van de rij x_n altijd de limiet is van een convergente deelrij x_{n_k} .

Opgave 3.11. Bewijs dat iedere convergente rij begrensd is en geef een voorbeeld van een rij $x_n \in [0, 1]$ die als limietpunten alle punten in $[0, 1]$ heeft.

Bewijs van Stelling 3.1. Neem nu een rij $x_n \in \mathbb{R}$ die begrensd is, zeg zonder beperking der algemeenheid geheel bevat in $[0, 1]$. Dan moet tenminste één van de twee intervallen $[\frac{0}{2}, \frac{1}{2}]$ of $[\frac{1}{2}, \frac{2}{2}]$ voor oneindig veel n het element x_n bevatten. Noem dat interval $I_1 = [\frac{m_1}{2}, \frac{m_1+1}{2}]$. Dus $m_1 = 0$ of $m_1 = 1$, al naar gelang het interval waarin die oneindig veel x_n zitten. Nummer de bijbehorende n met een index j als een strict stijgende rij $n_{1j} \in \mathbb{N}$. De eerste index 1 geeft aan dat dit de eerste deelrij is die we kiezen.

Herhaal vervolgens het argument voor deze deelrij maar nu met de intervallen $[\frac{m_1}{2} + \frac{0}{4}, \frac{m_1}{2} + \frac{1}{4}]$ en $[\frac{m_1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{m_1}{2} + \frac{2}{4}]$. Er is dus een verdere deelrij die geheel in één van de twee intervallen zit. Noem het betreffende interval $I_2 = [\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{4}, \frac{m_1}{2} + \frac{m_2+1}{4}]$ en de indices van die verdere deelrij $n_{2j} \in \mathbb{N}$. Enzovoorts. Dit geeft

$$x_{n_{kj}} \in I_k = [\sum_{l=1}^k \frac{m_l}{2^l}, \sum_{l=1}^k \frac{m_l}{2^l} + \frac{1}{2^{k+1}}]$$

voor alle $j \in \mathbb{N}$. Omdat we steeds verdere deelrijen nemen zijn de n_{kj} strict stijgend in j en niet-dalend in k . We zien dat $x_{n_{kk}}$ een deelrij van de (door $n \in \mathbb{N}$ genummerde) rij x_n is omdat $n_{kk} \in \mathbb{N}$ een strict stijgende rij is.

Opgave 3.12. Maak het bewijs af door de laten zien dat de door k genummerde “diagonaalrij” $x_{n_{kk}}$ een convergente deelrij is. Bewijs dat de limiet $\bar{x}$ van deze deelrij een limietpunt is van de rij, dus dat voldaan is aan (3.2).

3.4 Begrensde rijen continue functies

We merken we op dat in onze mooie Banachruimte³ $C([a, b])$ de uitspraak over convergente deelrijen van begrensde rijen niet waar is. Niet elke begrensde rij $f_n \in C([a, b])$ heeft een deelrij die in de maximumnorm convergent is⁴. Maar wel als de rij aan deze extra aanname voldoet:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall x, y \in [a, b] : |x - y| \leq \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon. \quad (3.4)$$

De rij f_n heet dan equicontinu op $[a, b]$.

De stelling van Ascoli-Arzelà zegt nu dat iedere begrensde en op $[a, b]$ equicontinue rij $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een uniform convergente⁵ deelrij heeft met limiet $\bar{f}$ in $C([a, b])$. Deze stelling is iets minder⁶ triviaal maar je bewijst hem met Stelling 3.1, en weer een “diagonaalargument”.

Opgave 3.13. Moeilijk: formuleer en bewijs de Stelling van Ascoli-Arzelà zoals hierboven verwoord. Hint: neem zonder beperking der algemeenheid $[a, b] = [0, 1]$ en gebruik diagonaalargumenten om een deelrij f_{n_k} te maken die in elk binaire getal

$$\frac{k}{2^l}$$

convergeert. Met de equicontinuiteit van de rij f_n kun je daarna bewijzen dat f_{n_k} een Cauchyrij is in de maximumnorm.

3.5 Overaftelbaarheid van de reële getallen

De diagonaalargumenten hierboven zijn varianten op het argument in het bewijs dat $(\mathbb{Q}$ wel maar) $\mathbb{R}$ geen aftelbare verzameling is. Een bekend bewijs uit het ongerijmde gaat uit van een aftelling van alle getallen tussen 0 en 1 met

$$r_k = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n_{kj}}{10^j},$$

waarbij de decimalen n_{kj} in een blok

³ Met de maximumnorm.

⁴ Verzin een voorbeeld met functies f_n die alleen waarden tussen 0 en 1 aannemen.

⁵ Moeilijke woorden voor convergentie in de maximumnorm.

⁶ Lees: gewoon moeilijk.

$$\begin{array}{cccccccc}
n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} & n_{15} & n_{16} & n_{17} & n_{18} & \cdots \\
n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} & n_{25} & n_{26} & n_{27} & n_{28} & \cdots \\
n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} & n_{35} & n_{36} & n_{37} & n_{38} & \cdots \\
n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} & n_{45} & n_{46} & n_{47} & n_{48} & \cdots \\
n_{51} & n_{52} & n_{53} & n_{54} & n_{55} & n_{56} & n_{57} & n_{58} & \cdots \\
n_{61} & n_{62} & n_{63} & n_{64} & n_{65} & n_{66} & n_{67} & n_{68} & \cdots \\
n_{71} & n_{72} & n_{73} & n_{74} & n_{75} & n_{76} & n_{77} & n_{78} & \cdots \\
n_{81} & n_{82} & n_{83} & n_{84} & n_{85} & n_{86} & n_{87} & n_{88} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

gezet worden dat naar rechts en naar onder doorloopt. Gegeven de doorlopende diagonaalrij n_{kk} kies je dan decimalen d_k met $|d_k - n_{kk}| = 2$ of zo. Het getal

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{10^j}$$

kan dan niet in de rij r_k voorkomen.

3.6 Directer bewijs voor de convergente deelrijstelling

Wat nu volgt is de uitwerking van een opgave die Han Peters me ooit gaf: bewijs dat een rij x_n altijd een monotone deeltij heeft.

Als een rij $x_n \in \mathbb{R}$ begrensd is dan heeft 'ie een kleinste bovengrens $M_1 \in \mathbb{R}$. Kan het zijn dat M_1 geen rijelement is? Vast wel, en als dat het geval is dan moeten er dus rijelementen dicht van onder bij M_1 liggen. Bijvoorbeeld boven de $M_1 - 1$, dus zeg dat x_{n_1} het eerste rijelement is waarvoor

$$M_1 - 1 < x_{n_1} < M_1$$

geldt. Omdat x_{n_1} zelf geen bovengrens kan zijn, is er dus ook een eerste n_2 waarvoor

$$M_1 - 1 < x_{n_1} < x_{n_2} < M_1,$$

en dan geldt $n_2 > n_1$ want anders was x_{n_1} niet de eerste in de rij die boven⁷ $M_1 - 1$ ligt. En zo gaat dat verder. De conclusie is dat een kleinste bovengrens M_1 van een rij $x_n \in \mathbb{R}$ die zelf niet in de rij voorkomt, de limiet is van een strict stijgende rij x_{n_k} in $\mathbb{R}$, met n_k een strict stijgende rij n_k in $\mathbb{N}$.

⁷ Voor de beeldvorming zien we $\mathbb{R}$ hier even als verticale getallenlijn.

Wat nu als we aannemen dat de rij x_n zulke strict stijgende deelrijen helemaal niet heeft? Dan is M_1 dus een rijelement, zeg $M_1 = x_{n_1}$ (met een totaal andere n_1 dan hierboven⁸). Maar de deelrij x_n die begint bij $n = n_1 + 1$ heeft dan een kleinste⁹ bovengrens M_2 die op zijn hoogst gelijk is aan M_1 , en die M_2 moet weer aangenomen worden door een x_{n_2} met $n_2 > n_1$. Dat gaat zo weer door en dus is er dan een strict stijgende rij n_k in $\mathbb{N}$ waarvoor x_{n_k} een niet-stijgende rij in $\mathbb{R}$ is.

We concluderen dat iedere begrensde rij x_n in $\mathbb{R}$ een (niet per se strict) monotone deelrij x_{n_k} heeft, en als je er even over nadenkt dan geldt de uitspraak voor elke rij in $\mathbb{R}$. Deze stelling, die Han weer kende uit het boek *Elementary Analysis* van Ross, trivialisert¹⁰ Stelling 3.1, wederom vanwege het bestaan van grootste ondergrenzen en kleinste bovengrenzen van begrensde verzamelingen in $\mathbb{R}$, en dus onthouden we hem!

Stelling 3.14. *Iedere rij x_n in $\mathbb{R}$ heeft een monotone deelrij.*

Voor wie de twee secties hierboven heeft overgeslagen, de stelling in Opgave 3.13 is wel erg relevant voor later, maar merk nu in de context van rijen en reeksen in $\mathbb{R}$ vooral op hoe de conclusies aan het eind van Sectie 1.3 met het bestaan van kleinste bovengrenzen samenhangen. Daarom na de volgende opgaven nog een belangrijke subsectie over (onvoorwaardelijke) convergentie van reeksen.

Opgave 3.15. Vul de details in: iedere Cauchyrij x_n in $\mathbb{R}$ is begrensd, heeft een monotone en dus convergente deelrij, en is daarmee convergent.

Opgave 3.16. Achteraf merken we nu op dat Stelling 3.14 ook geldt voor rijen in $\mathbb{Q}$, want $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Dus dat moet te bewijzen zijn zonder die kleinste bovengrenzen die alleen maar in $\mathbb{R}$ altijd bestaan. Denk daar maar eens over na.

⁸ Nog afgezien van het feit dat die n_1 hierboven nu niet meer hoeft te bestaan.

⁹ Als $s_k = \sup_{n \geq k} x_n$ dan is s_k een niet-stijgende rij met limiet

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} s_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq k} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

¹⁰ Maakt'ie ook het diagonaalargument voor de overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$ overbodig?

3.7 Onvoorwaardelijke convergentie

Dat gezeur over die convergentie van reeksen willen we zo veel mogelijk vermijden. Maar toch. We willen nu eenmaal met aftelbare sommen als

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \quad (3.5)$$

rekenen alsof het getallen zijn en alles mag¹¹. En wat moet mogen is

$$a_0 + a_1 = a_1 + a_0,$$

de volgorde van optellen moet niet uitmaken. Voor sommen als in (3.5) betekent dit dat we willen dat

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)} \quad (3.6)$$

voor elke bijectie¹² $\phi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, maar waarom zou dit zo moeten zijn in de alledaagse wiskundige werkelijkheid?

De basale aanname die we steeds maken is (1.23), i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

te lezen als dat de rij partiële sommen

$$\sum_{n=0}^N |a_n|$$

begrensd is, met dus een kleinste bovengrens die we T noemen. Bij iedere $\varepsilon > 0$ is er dan een $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ waarvoor met $m = N_\varepsilon$ geldt dat

$$T - \varepsilon < \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} |a_n| \leq T, \quad (3.7)$$

want anders was T geen *kleinste* bovengrens. Bijgevolg is

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^m |a_n| < \varepsilon \quad (3.8)$$

¹¹ Lees: goed is.

¹² Ongetwijfeld kent de lezer deze tot het algemene cultuurgood behorende term.

voor alle $m > N_\varepsilon$, want anders was T geen *bovengrens*.

Hopelijk betekent dit voor

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n \quad \text{en} \quad S_N^\phi = \sum_{n=0}^N a_{\phi(n)}$$

en

$$T_N = \sum_{n=0}^N |a_n| \quad \text{en} \quad T_N^\phi = \sum_{n=0}^N |a_{\phi(n)}|$$

dat

$$S_N \rightarrow S, \quad S_N^\phi \rightarrow S, \quad T_N \rightarrow T, \quad T_N^\phi \rightarrow T \quad (3.9)$$

als $N \rightarrow \infty$, en

$$|S| \leq T, \quad (3.10)$$

maar voorlopig weten we behalve $|S_N| \leq T$ en $|S_N^\phi| \leq T$ alleen dat $T_N \rightarrow T$.

Het gaat dus nog om convergentie van de andere drie in (3.9). Hoe zit het met T_N^ϕ ? De bijectie $\phi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ is een permutatie van $\mathbb{N}_0$. Als we

$$\mathbb{N}_0 = \{n = \phi(m) : m \in \mathbb{N}_0\}$$

aftellen met $m \in \mathbb{N}_0$, dan hebben we vroeg of laat, zeg met $m = 0, 1, \dots, M_\varepsilon$, alle $n \in \mathbb{N}_0$ tot en met N_ε gehad. Bijgevolg is

$$T - \varepsilon < T_{N_\varepsilon} \leq T_{M_\varepsilon}^\phi \leq T.$$

Voor de gewone partiële sommen hebben we

$$|S_{M_\varepsilon}^\phi - S_{N_\varepsilon}| \leq \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon$$

want $S_{M_\varepsilon}^\phi - S_{N_\varepsilon}$ is een eindige som van termen a_n met alleen maar $n > N_\varepsilon$, en evenzo is voor alle $m > N_\varepsilon$

$$|S_m - S_{N_\varepsilon}| \leq \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon.$$

Dan staat het er eigenlijk al wat we willen.

Opgave 3.17. Gebruik (3.7) en (3.8) en met $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, om te laten zien dat ook $T_N^\phi \rightarrow T$, en dat S_N en S_N^ϕ convergeren, naar één en dezelfde $S \in \mathbb{R}$, eerst langs (verschillende) deelrijen N_k .

Hiermee zijn (3.9) en (3.10) bewezen, en we vatten het resultaat samen in een nog iets algemenere stelling die toereikend is voor wat we later nog nodig hebben, en die ook geldt voor aftelbare sommen van complexe getallen.

Stelling 3.18. *Laat a_n genummerd door $n \in \mathbb{N}_0$ een rij in $\mathbb{R}$ zijn. Als de partiële sommen*

$$T_N = \sum_{n=0}^N |a_n|$$

een door $N \in \mathbb{N}_0$ genummerde begrensde rij vormen, dan zijn voor elke bijectie $\phi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ de rijen

$$S_N^\phi = \sum_{n=0}^N a_{\phi(n)} \quad \text{en} \quad T_N^\phi = \sum_{n=0}^N |a_{\phi(n)}|$$

convergent, met limieten respectievelijk S en T die niet van ϕ afhangen, en er geldt dat $|S| \leq T$. We schrijven

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)} \quad \text{en} \quad \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = T.$$

De uitspraak over de rijen S_N^ϕ en T_N^ϕ geldt ook voor (iedere) bijectie $\phi : \mathbb{N}_0 \rightarrow A$ als A een (dan per definitie) aftelbare verzameling is, en voor de getallen $a_\alpha \in \mathbb{R}$ met $\alpha \in A$ geldt dat

$$\sum_{n=0}^N |a_{\phi(n)}|$$

een begrensde rij is. In dat geval schrijven we

$$S = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha, \quad T = \sum_{\alpha \in A} |a_\alpha|, \quad \text{met wederom} \quad |S| \leq T.$$

4 Van integraal- naar differentiaalrekening

Wat voor eigenschappen heeft de functie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^x f(s) ds \quad (4.1)$$

als $f \in \text{RI}([a, b])$? Om deze vraag te beantwoorden schrijven we, voor een vaste $x_0 \in [a, b]$ en een variable h , de integraal met bovengrens $x_0 + h$ als

$$F(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(s) ds = \underbrace{\int_a^{x_0} f(s) ds}_{F(x_0)} + \int_{x_0}^{x_0+h} f(s) ds.$$

Als M een bovengrens is voor de waarden die $|f(x)|$ aanneemt voor $x \in [a, b]$ dan geldt voor de tweede term dat

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(s) ds \right| \leq M|h|,$$

en dus is F uniform Lipschitz continu op $[a, b]$, want met $x = x_0 + h$ en $y = x_0$ volgt

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$$

voor alle $x, y \in [a, b]$.

Dit scherpen we aan door

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) &= F(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x_0) + f(s) - f(x_0)) ds \\ &= F(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) ds + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(s) - f(x_0)) ds \end{aligned}$$

te schrijven. Met

$$R(h; x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} (f(s) - f(x_0)) ds, \quad (4.2)$$

volgt nu dat

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + f(x_0)h + R(h; x_0), \quad (4.3)$$

waarin we de eerste twee termen zien als *lineaire*¹ *benadering* van $F(x_0 + h)$ als h klein is.

¹ Beter: affien. De afbeelding $h \rightarrow f(x_0)h$ is lineair, $h \rightarrow F(x_0) + f(x_0)h$ niet.

Hoe groot kan de *restterm* (4.2) zijn? Als f continu is in x_0 , dan is er gegeven iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodanig dat

$$|f(s) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \text{als} \quad |s - x_0| \leq \delta.$$

Voor de s in de integrand is dit laatste zeker het geval als $|h| \leq \delta$ en met de 3-hoeksongelijkheid voor integralen volgt dan dat

$$|R(h; x_0)| \leq \varepsilon|h| \quad \text{als} \quad |h| \leq \delta \quad (4.4)$$

en $x_0 + h \in [a, b]$. Deze uitspraak wordt genoteerd als

$$R(h; x_0) = o(h) \quad \text{als} \quad h \rightarrow 0,$$

spreek uit: $R(h; x_0)$ is *kleine o* van h voor h gaat naar nul².

Definitie 4.1. Een functie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heet *differentieerbaar* in $x_0 \in [a, b]$ als er een getal $f(x_0) \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat (4.3) geldt voor alle $x = x_0 + h \in [a, b]$, met een restterm $R(h; x_0)$ waarvoor geldt dat $R(h; x_0) = o(h)$ als $h \rightarrow 0$.

In deze definitie kan $[a, b]$ vervangen worden door een willekeurig interval $I \subset \mathbb{R}$. Als $x_0 = a$ dan wel $x_0 = b$ spreken we van rechts- dan wel linksdifferentieerbaar. Alleen $h \geq 0$ dan wel $h \leq 0$ zijn dan toegestaan. De waarde $f(x_0)$ heet de *afgeleide* van F in x_0 , notatie $F'(x_0) = f(x_0)$.

In Hoofdstuk 5 komen we uitgebreid te spreken over de basale rekenregels voor en voorbeelden van differentieerbare functies. De enige rekenregel die we hier zometeen al nodig hebben is:

Opgave 4.2. Als $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn in $x_0 \in [a, b]$, dan is ook de verschilfunctie $F - G$ differentieerbaar in $x_0 \in [a, b]$ met $(F - G)'(x_0) = F'(x_0) - G'(x_0)$. Bewijs dit.

De andere rekenregels voor differentieerbare functies zullen we in dit hoofdstuk al tegenkomen als bijprodukten in de behandeling van een eerste vorm van de kettingregel in Sectie 4.6 na de impliciete functies in Sectie 4.4 die hier eerder aan de orde komen dan doorgaans gebruikelijk.

De afgeleide kan voor zo'n vaste x_0 gezien worden als een lineaire afbeelding³ van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, gegeven door

$$h \rightarrow F'(x_0)h. \quad (4.5)$$

² Niet te verwarren met de grote O van h die nog komt (en je misschien al gezien hebt).

³ Voor $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ wordt dit $F'(x_0) : X \rightarrow \mathbb{R}$ in Sectie 7.2.

Als F in elke $x_0 \in [a, b]$ differentieerbaar is, met afgeleide $F'(x_0)$, dan is daarmee een functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd die de afgeleide functie van F wordt genoemd. De functie F heet dan een *primitieve functie* voor f (ook wel: anti-afgeleide van). Daarvan hebben we met (4.1) hierboven een belangrijk voorbeeld al gezien, en dat is meteen een eerste *hoofdstelling* van de integraalrekening.

Stelling 4.3. *Definieer voor $f \in \text{RI}([a, b])$ de functie $F \in C([a, b])$ door*

$$F(x) = \int_a^x f(s) \, ds.$$

Dan is F differentieerbaar in elke $x_0 \in [a, b]$ waar f continu is, met afgeleide $F'(x_0) = f(x_0)$.

Stelling 4.3 zegt dus dat iedere continue functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ een primitieve functie heeft. Met de functie F uit de stelling geldt⁴ dat

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a), \quad (4.6)$$

omdat $F(a) = 0$. Tellen we bij deze F een constante op dan blijft (4.6) natuurlijk waar omdat we in het rechterlid een verschil van F -waarden hebben staan. Maar geldt (4.6) nu ook voor *alle* primitieve functies van f ? Het antwoord is ja, maar daar is een nieuwe stelling voor nodig die nog veel meer toepassingen heeft. Een stelling over *differentiequotiënten*, differentiequotiënten waarvan we de limiet⁵ pas nemen in het volgende hoofdstuk, zie Opgave 5.2. Deze subsectie besluiten we met een opgave waarin we de boel omdraaien:

Opgave 4.4. Gebruik Opgave 2.9 en de resultaten hierboven om te laten zien dat de afgeleide van $x \rightarrow x^n$ gelijk is aan $x \rightarrow nx^{n-1}$. Hint: niet de definitie van differentieerbaarheid zelf gebruiken nu. Beperk je argumenten tot het geval $x \geq 0$.

4.1 De middelwaardestelling

Zijn er functies die differentieerbaar zijn op een interval met afgeleide overal nul, maar zelf niet constant? De stelling die dit uitsluit is de middelwaardestelling:

⁴ In je achterhoofd: vergelijk dit met Opgave 2.9.

⁵ De limiet van een differentiequotiënt krijgt pas daar de naam differentiaalquotiënt.

Stelling 4.5. Laat $F \in C([a, b])$ differentieerbaar zijn op het open interval (a, b) . Dan is er een ξ in (a, b) zodanig dat

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi)$$

Onthoud de uitspraak in deze stelling bijvoorbeeld als dat een differentiequotiënt (alleen van $\mathbb{R}$ -waardige functies!) altijd een afgeleide is in een tussenpunt, en teken een plaatje van de grafiek met (niet zo maar) twee lijnen die allebei dezelfde richtingscoëfficiënt hebben.

Teken
plaatje!

Deze middelwaardestelling is een gevolg van de uitspraak in Opgave 2.34 over maxima en minima van functies $F \in C([a, b])$, en een uitspraak over de afgeleide in het geval dat zo'n extreme waarde wordt aangenomen in een $x_0 \in (a, b)$ waar F differentieerbaar is. De volgende opgaven laten dat zien.

Stelling 4.6. Laat $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ een functie zijn. Als er een punt $x_0 \in (a, b)$ is waarin F differentieerbaar is, en ook geldt dat $F(x) \leq F(x_0)$ voor alle $x \in (a, b)$, dan is $F'(x_0) = 0$.

Definitie 4.7. Een $x_0 \in (a, b)$ waarin $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar is met $F'(x_0) = 0$ heet een stationair punt van F en F heet dan stationair in x_0 .

Opgave 4.8. Bewijs Stelling 4.6 rechtstreeks vanuit Definitie 4.1.

Opgave 4.9. Bewijs Stelling 4.5 in het geval dat $F(a) = F(b) = 0$ (dit geval staat bekend als de Stelling van Rolle⁶). Hint: gebruik Stelling 4.6 en Opgave 2.34. Onderscheid de gevallen $m < 0 \leq M$, $m \leq 0 < M$ en $m = 0 = M$.

Opgave 4.10. Herleid het algemene geval in Stelling 4.5 tot het resultaat in Opgave 4.9 door van F een lineaire⁷ functie G met $G(x) = \alpha x + \beta$ af te trekken, met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zo gekozen dat $F(a) = G(a)$ en $F(b) = G(b)$.

Opgave 4.11. Als $(a, b) \subset \mathbb{R}$ een interval is en $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare functie met $F'(x) = 0$ voor alle $x \in (a, b)$ dan is er een $C \in \mathbb{R}$ zo dat $F(x) = C$ voor

⁶ Read about Rolle in wikipedia.

⁷ Beter gezegd: een functie waarvan de grafiek een rechte lijn is.

alle $x \in (a, b)$. Bewijs deze niet-triviale uitspraak! Wat betekent deze uitspraak in het licht van Opgave 4.2 voor twee differentieerbare functies F en G van (a, b) naar $\mathbb{R}$ waarvoor geldt dat $F'(x) = G'(x)$ voor alle $x \in (a, b)$?

4.2 Integralen via primitieve functies

Met $I = [a, b]$ verwijst Definitie 4.1 naar het voorbeeld gedefinieerd door (4.1), waarin F differentieerbaar in elk punt $x_0 \in [a, b]$ waar f continu is. In het geval dat een functie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de eigenschap heeft dat $F' \in C([a, b])$ concluderen we nu dat

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(s) ds. \quad (4.7)$$

Links en rechts in (4.7) staan immers twee functies die als afgeleide $F' = f$ hebben: de integraal in het rechterlid is met $F'(x) = f(x)$ precies de formule (4.1) waarmee we begonnen zijn en tot Stelling 4.3 zijn gekomen, waarna ook (4.6) volgde.

De functie

$$x \rightarrow F(x) - \int_a^x F'(s) ds$$

heeft dus als afgeleide de nulfunctie en is daarmee vanwege Stelling 4.5 toegepast op iedere $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [a, b]$ constant op $[a, b]$. In Opgave 4.11 is dit argument uitgespeld. Door $x = 0$ in te vullen zien we dat de constante $F(a)$ is. Zo komen we tot een *tweede hoofdstelling* van de integraalrekening:

Stelling 4.12. *Voor $f \in C([a, b])$ geldt dat*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

als F een primitieve functie is van f . Als G een andere primitieve is dan de primitieve F gedefinieerd door (4.1), dan is $F - G$ constant op $[a, b]$.

Bewijs. Wie goed leest ziet dat het bewijs hierboven al gegeven is: de functie F gedefinieerd door (4.1) is op grond van Stelling 4.3 een primitieve waarvoor vanwege (4.6) de uitspraak in Stelling 4.12 geldt; als G een andere primitieve⁸ is dan geldt vanwege Stelling 4.5 (nu zonder Opgave 4.11 maar met Opgave 4.2) toegepast op de verschilfunctie dat $F(b) - G(b) = F(a) - G(a)$ en dus

⁸ Bij afspraak boven Stelling 4.3 een functie die differentieerbaar is op heel $[a, b]$.

$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. Opgave 4.11 geeft tenslotte weer de uitpraak dat $F - G$ constant is.

Kijk nog eens naar Opgave 2.9. De formule in Stelling 4.12 wordt ook wel geschreven als

$$\int_{[a,b]} dF = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$$

waarbij

$$dF = F'(x)dx = f(x)dx$$

een formele notatie is die later in de vectorcalculus nog (algemenere) betekenis zal krijgen. De uitdrukking $f(x)dx$ heet een 1-vorm, $F = F(x)$ heet een 0-vorm, en een 1-vorm kan de d van een 0-vorm zijn. Een en ander is hier nog van latere zorg: te weten als we bij integraal- en differentiaalrekening met twee of meer variabelen onvermijdelijk uitdrukkingen met dx en dy voor onze kiezen krijgen, waarbij de d van $F(x, y)$ iets met dx en dy moet zijn, dus $dF = f(x, y)dx + g(x, y)dy$. Met expressies $f(x, y)dx$ en $g(x, y)dy$ die niet alleen bij elkaar opgeteld worden maar ook met elkaar vermenigvuldigd.

Zoals gezegd, van later zorg, maar merk nu alvast op dat in Stelling 4.12 de uitdrukking links kan worden gezien als

$$\int_a^b \text{werkend op } f(x)dx,$$

en de uitdrukking rechts als

$$|_a^b \text{werkend op } F(x),$$

een wisselwerking tussen “integralen” en differentiaalvormen, waarin verwisselen van a en b een minteken geeft. Zie in dit verband ook Definitie 2.41 en Opgave 2.47 daaronder.

Opgave 4.13. Als I een interval is en $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de eigenschap heeft dat $f \in \text{RI}([a, b])$ voor elk gesloten interval $[a, b] \subset I$, dan varieert $\int_a^b f$ continu met a en b . Leg nog een keer uit wat dat betekent en waarom.

Opgave 4.14. Stelling 4.12 kan ook geformuleerd worden voor $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar, i.e. $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is differentieerbaar en $x \rightarrow F'(x)$ definieert een continue functie op $[a, b]$. Herschrijf de uitspraak

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx$$

via de substitutie

$$x = (1 - t)a + tb = a + t(b - a)$$

als

$$F(b) - F(a) = \int_0^1 F'((1 - t)a + tb)(b - a) dt = \int_0^1 F'((1 - t)a + tb) dt (b - a), \quad (4.8)$$

en bewijs deze uitspraak rechtstreeks vanuit de definities, dus zonder het regeltje

$$dx = (b - a)dt$$

te gebruiken.

De formule (4.8) zal nog terugkomen⁹, ook met b en a variabel, niet alleen met a en b in $\mathbb{R}$, en niet alleen met $\mathbb{R}$ -waardige functies. Zo'n *differentie* $F(b) - F(a)$ kan altijd als een integraal van $t = 0$ tot $t = 1$ geschreven worden, als de integrand maar continu is. Maar alleen voor $\mathbb{R}$ -waardige functies kunnen we vervolgens zeggen dat de integraal in ligt tussen het minimum en het maximum van de integrand, en dus gelijk moet zijn aan een waarde van $F'(x)$ op het interval $[a, b]$: een $F'(\xi)$ met $\xi \in [a, b]$. Een net iets zwakkere uitspraak dan in Stelling 4.5, onder een veel sterkere aanname dan in Stelling 4.5, nog steeds exclusief voor $\mathbb{R}$ -waardige functies.

Merk op dat als $x \rightarrow F'(x)$ zelf Lipschitz continu is op $[a, b]$, met Lipschitz constante L , de eerste integraal in (4.8) met $b = x$ herschrijft als

$$\int_0^1 F'(a)(x - a) dt + \int_0^1 (F'((1 - t)a + tx) - F'(a))(x - a) dt,$$

waarmee

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x - a) + R(x; a) \quad (4.9)$$

met

$$R(x; a) = \int_0^1 (F'((1 - t)a + tx) - F'(a))(x - a) dt,$$

en dus

$$|R(x; a)| \leq \int_0^1 Lt|x - a|^2 dt = \frac{L}{2}|x - a|^2. \quad (4.10)$$

In (4.9) zien we een lineaire benadering met een restterm, die in (4.10) expliciet wordt afgeschat op een constante keer $|x - a|^2$. We schrijven dit als,

$$R(x; a) = O(|x - a|^2),$$

⁹ In principe is vanaf hier de sprong naar Sectie 6.13 mogelijk.

spreek uit grote O van $x - a$ in het kwadraat. Zo'n schatting is voldoende om convergentie van de methode van Newton te bewijzen onder milde voorwaarden, zie Sectie 4.8. Merk op dat $O(|x - a|^2) = o(|x - a|)$ als $x \rightarrow a$ maar i.h.a. niet¹⁰ $o(|x - a|) = O(|x - a|^2)$.

4.3 Inverse functies

Als I een open interval is met $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar en $F'(x) > 0$ voor alle $x \in I$, dan volgt uit de middelwaardestelling (Stelling 4.5) dat F strict monotoon stijgend is op I . Voor iedere $[a, b] \subset I$ met $a < b$ is het beeld onder F van $[a, b]$ dus bevat in $(F(a), F(b))$, het beeld van (a, b) onder F in $(F(a), F(b))$, en kan elke waarde $c \in (F(a), F(b))$ maar één keer¹¹ worden aangenomen.

Wordt elke waarde $c \in (F(a), F(b))$ ook daadwerkelijk aangenomen? Het antwoord is ja¹² en daarvoor is alleen maar nodig dat $F \in C([a, b])$. Zie Hoofdstuk 10 van [HM] of [BE] over die fundamenteën van de wiskunde. Of maak de volgende opgave.

Opgave 4.15. Laat $F \in C([a, b])$ en neem aan dat $F(a) < c < F(b)$. Beschouw de kleinste bovengrens ξ van de niet-lege verzameling x -waarden in $[a, b]$ waarvoor $F(x) < c$, dus

$$\xi = \sup\{x \in [a, b] : F(x) < c\}.$$

Bewijs dat $F(\xi) = c$.

Stelling 4.16. Laat $F \in C([a, b])$ en neem aan dat F differentieerbaar is met $F'(x_0) > 0$ in elke $x_0 \in (a, b)$. Dan bestaat er een functie $G \in C([F(a), F(b)])$ met $G(F(x)) = x$ voor alle $x \in [a, b]$, $F(G(y)) = y$ voor alle $y \in [F(a), F(b)]$ en G is differentieerbaar in elke $y_0 \in [F(a), F(b)]$ met afgeleide gedefinieerd door $F'(x_0)G'(y_0) = 1$ als $y_0 = F(x_0)$ (en $x_0 = G(y_0)$).

Opgave 4.17. Het bestaan van G volgt onmiddellijk¹³ uit de overwegingen boven de stelling en de opgave. We hoeven alleen nog te laten zien dat G differentieerbaar is. Neem daartoe zonder beperking der algemeenheid het geval dat $x_0 = 0$, $F(0) = 0 = y_0$ (dus $G(0) = 0$), en $F'(x_0) = 1$. Maak het bewijs af door $F'(0) = 1$ te relateren aan het liggen van de grafiek $y = F(x)$ tussen $y = (1 + \varepsilon)x$ en $x = (1 + \varepsilon)y$ in de

Teken
plaatje!

¹⁰ Het is gelijktteken wordt hier op een niet-symmetrische manier gebruikt!

¹¹ Men zegt dan wel eens dat F injectief is.

¹² Men zegt dan wel eens dat F surjectief is.

¹³ F en G zijn allebei zowel injectief als surjectief en heten daarom *bijjecties*.

buurt van $(x, y) = (0, 0)$ voor gegeven willekeurige $\epsilon > 0$. Zorg dat je herformulering symmetrisch is in x en y en concludeer dat $G'(0)$ bestaat en gelijk is aan 1.

Opgave 4.18. Reduceer het algemene geval via geschikte hulpfuncties tot het speciale geval $F(0) = 0$ en $F'(0) = 1$ in Opgave 4.17.

Opgave 4.19. De functies $x \rightarrow x^n$ op $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ met $n \in \mathbb{N}$ hebben inverse functies. Gebruik Opgave 4.4 en Stelling 4.17 om de afgeleiden van de inverse functies $y \rightarrow \sqrt[n]{y}$ te bepalen.

Op dit moment hebben we nog niet zoveel andere voorbeelden. Maar zie later en verderop Sectie 5.6, en leg Stelling 4.16 daar dan nog eens naast. Wel is het aardig om hier op te merken dat lineaire benaderingen¹⁴ van wortels al 300 jaar voor Christus voorkwamen, zie [Eves, §2.17].

4.4 Impliciete functies

Als voor een functie van twee reële variabelen, zeg

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{F} \mathbb{R},$$

geldt dat $F(0, 0) = 0$, dan heeft de vergelijking

$$F(x, y) = 0$$

in het algemeen nog meer oplossingen in de buurt¹⁵ van $(x, y) = (0, 0)$. In deze sectie gaat het over het vinden van die andere oplossingen. De aanpak die we presenteren is in wezen hetzelfde als¹⁶ die voor $F : X \times Y \rightarrow Y$.

Een bijzonder geval van de vraagstelling is het geval waarin

$$F(x, y) = g(y) - x,$$

en we dus eigenlijk vragen naar de inverse functie f van een gegeven functie g , maar anders dan in de vorige sectie gaat het nu om de inverse in de buurt van een gegeven punt (het punt $(0, 0)$ als $g(0) = 0$) op de grafiek van g , en *niet* om een globale inverse.

¹⁴ Equivalent met $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \dots$.

¹⁵ Lees: in een omgeving van, zie de appendix, Section 9.

¹⁶ Voor Banachruimten X en Y , bijvoorbeeld $X = \mathbb{R}^n$ en $Y = \mathbb{R}^m$.

Voor we een (locale *impliciete functie*) stelling formuleren schetsen we eerst de *methode van Newton* voor het vinden van die oplossingen¹⁷, waarbij we aannemen dat voor vaste x in de buurt van $x = 0$ de functie

$$y \rightarrow F(x, y)$$

differentieerbaar is in de buurt van $y = 0$. De afgeleide noteren we nu niet met $F'(x, y)$ maar met $F_y(x, y)$. Het subscript y geeft aan dat het om de afgeleide naar y gaat. Docent en student kunnen het onderstaande natuurlijk eerst in het speciale geval $F(x, y) = g(y) - x$ doen, met $F_y(x, y) = g'(y)$. Niet wezenlijk anders, maar lichter kwa notatie. Het eindresultaat is dan een locale *inverse functie* stelling¹⁸.

Neem voor zo'n vaste x in de *startwaarde* $y_0 = 0$ de lineaire benadering van $F(x, y)$ als functie van y rond $y = y_0$. Stel nu niet $F(x, y)$ maar die lineaire benadering gelijk aan 0, los daaruit $y = y_1$ op, en gebruik de lineaire benadering van $F(x, y)$ rond $y = y_1$ om dan weer y_2 te vinden, en ga zo door. Als y_{n-1} al gevonden is en $F_y(x, y_{n-1})$ weer inverteerbaar¹⁹ als afbeelding

$$h \rightarrow F_y(x, y_{n-1})h$$

van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, dan geeft dit een volgende y_n uniek gedefinieerd door

$$F(x, y_{n-1}) + F_y(x, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) = 0.$$

Voor $n = 1, 2, \dots$ geldt dan dat

$$y_n = y_{n-1} - (F_y(x, y_{n-1}))^{-1} F(x, y_{n-1}), \quad \text{beginnend met } y_0 = 0. \quad (4.11)$$

In het algemeen²⁰ breekt dit proces, dat de methode van Newton wordt genoemd, niet af.

Als y_n vervolgens convergeert, en de x -afhankelijke limiet y een zogenaamde impliciete functie

$$x \rightarrow y = f(x) \quad (4.12)$$

definieert waarvoor (hopelijk) geldt dat

$$F(x, f(x)) = 0, \quad (4.13)$$

dan kan daarna ook nog de vraag gesteld worden onder welke voorwaarden f continu of differentieerbaar is in $x = 0$.

¹⁷ Convergentie van die methode bespreken we pas in Sectie 4.8.

¹⁸ In de algemene situatie volgt de impliciete ook uit de inverse functiestelling.

¹⁹ Hier hetzelfde als $F_y(x, y_{n-1}) \neq 0$ aannemen zodat $(F_y(x, y_{n-1}))^{-1} = \frac{1}{F_y(x, y_{n-1})}$.

²⁰ Probeer het maar met een voorbeeldje.

Een rechtstreeks maar lastig bewijs van (snelle) convergentie van de rij y_n waarmee $y = f(x)$ gemaakt moet worden is mogelijk via een schatting van de vorm

$$|y_{n+1} - y_n| \leq C|y_n - y_{n-1}|^2,$$

afgeleid uit o.a. een aanname op de tweede²¹ afgeleide van $y \rightarrow F(x, y)$. Zo'n aanname doen we hier echter niet want voor het *aangepaste schema*

$$y_n = y_{n-1} - (F_y(0, 0))^{-1} F(x, y_{n-1}) \quad (4.14)$$

kan (langzamere) convergentie eenvoudiger bewezen worden zonder zo'n aanname.

Behalve een voldoende kleine bovengrens op $|F(x, 0|$ en de inverteerbaarheid van $F_y(0, 0)$, gebruikt het convergentiebewijs dat nu volgt alleen de continuïteit²² van

$$(x, y) \rightarrow F_y(x, y)$$

in $(x, y) = (0, 0)$. Dit zal voldoende blijken om in de buurt van $(0, 0)$ alle oplossingen van $F(x, y) = 0$ te vinden, als x -afhankelijke limieten van de rijen y_n gedefinieerd door (4.14), beginnende met

$$y_0 = 0 \quad \text{en} \quad y_1 = -(F_y(0, 0))^{-1} F(x, 0).$$

Merk op dat als $y_1 = y_0 = 0$ meteen ook volgt dat $0 = y_0 = y_1 = y_2 = \dots$ en dat in dat geval $y = y_0 = 0$ zelf al de oplossing is van $F(x, y) = 0$. We spellen nu eerst uit hoe convergentie van de rij y_n bewezen kan worden, en nemen daarbij aan dat $y_1 \neq y_0$, want $y_1 = y_0$ is alleen maar het geval als $F(x, y_0) = 0$. Hoe groot kan y_1 nu zijn als $F(x, y_0) = F(x, 0) \neq 0$? Wel, als $|(F_y(0, 0))^{-1}| \leq M$ dan geldt voor y_1 dat

$$|y_1| = |(F_y(0, 0))^{-1}| |F(x, 0)| \leq M |F(x, 0)|$$

en als $F(x, y_1)$ gedefinieerd is volgt ook dat

$$|y_2 - y_1| = |(F_y(0, 0))^{-1}| |F(x, y_1)| \leq M |F(x, y_1)|,$$

als we (4.14) gebruiken met $n = 2$.

Als we echter (4.14) gebruiken met $n = 1$ en $n = 2$ dan volgt

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= y_1 - (F_y(0, 0))^{-1} F(x, y_1) - y_0 + (F_y(0, 0))^{-1} F(x, y_0) \\ &= (F_y(0, 0))^{-1} (F(x, y_0) - F(x, y_1) + F_y(0, 0)y_1 - F_y(0, 0)y_0), \end{aligned}$$

²¹ In feite: Lipschitz continuïteit van $y \rightarrow F_y(x, y)$, zie (4.9) en (4.10).

²² Nog niet gedefinieerd wat dat is, maar dat kun je wellicht al bedenken nu.

waarin we $(F_y(0,0))^{-1}$ aan de voorkant buiten haakjes hebben gehaald en in de grote factor die overblijft in de eerste twee termen het verschil $F(x, y_0) - F(x, y_1)$ herkennen. Dat verschil kunnen we schrijven als

$$F(x, y_0) - F(x, y_1) = \int_0^1 F_y(x, ty_0 + (1-t)y_1) dt (y_0 - y_1),$$

de integraal die we krijgen door (4.8), de *middelwaardstelling in integraalvorm*²³, voor vaste x toe te passen op de functie $y \rightarrow F(x, y)$ met $a = y_1$ en $b = y_0$. Samen met de derde en vierde term herschrijft de hele factor nu als

$$\int_0^1 (F_y(x, ty_0 + (1-t)y_1) - F_y(0, 0)) dt (y_0 - y_1),$$

door de andere twee termen binnen de integraal te brengen. We concluderen dat

$$y_2 - y_1 = (F_y(0, 0))^{-1} \int_0^1 (F_y(x, ty_0 + (1-t)y_1) - F_y(0, 0)) dt (y_0 - y_1).$$

Tot hier is alleen de continuïteit voor vaste x van $y \rightarrow F_y(x, y)$ gebruikt, op een nog te kiezen (x, y) -domein dat nu kan worden gekozen door continuïteit van $(x, y) \rightarrow F_y(x, y)$ in $(0, 0)$ te eisen²⁴, en daarmee het bestaan van $F_y(x, y)$ voor (x, y) in de buurt van $(0, 0)$. Om precies te zijn, we nemen dan aan dat er voor iedere $\eta > 0$ een $\varepsilon > 0$ is waarmee voor alle x en y in $\mathbb{R}$ de implicatie

$$|x| \leq \varepsilon \text{ en } |y| \leq \varepsilon \implies |F_y(0, 0) - F_y(x, y)| \leq \eta \quad (4.15)$$

geldt. Daarmee volgt dat voor x, y_0, y_1 met $|x| \leq \varepsilon$, $|y_0| \leq \varepsilon$ en $|y_1| \leq \varepsilon$ de integraal in absolute waarde hoogstens gelijk kan zijn η en dus dat

$$|y_2 - y_1| \leq M\eta |y_1 - y_0| \quad \text{met} \quad M = |(F_y(0, 0))^{-1}| > 0,$$

i.e. de grootte van het tweede stapje is begrensd door

$$\theta = M\eta$$

keer de grootte van het eerste stapje.

Voor deze conclusie is in het bijzonder ook aangenomen dat $y \rightarrow F(x, y)$ voor alle x met $|x| \leq \varepsilon$ differentieerbaar is elke y met $|y| \leq \varepsilon$. Merk ook op

²³ Om later het bewijs te kunnen overschrijven voor $F : X \times Y \rightarrow Y$.

²⁴ In het geval dat $F(x, y) = g(y) - x$ is dit geen extra eis natuurlijk.

dat we hier i.p.v. een ε, δ -definitie een η, ε -definitie van continuïteit gebruiken. Dat is omdat uiteindelijk de limiet $y = f(x)$ van de rij y_n straks ook nog moet voldoen aan $|y| \leq \varepsilon$, voor x met $|x| \leq \delta$, $\delta > 0$ bij $\varepsilon > 0$ nog te kiezen²⁵, om f continu in $x = 0$ te krijgen.

Als vervolgens ook geldt dat $|y_2| \leq \varepsilon$, dan geeft hetzelfde argument dat

$$|y_3 - y_2| \leq \theta |y_2 - y_1|,$$

enzovoorts. Zolang $|y_n| \leq \varepsilon$ volgt dat²⁶

$$\begin{aligned} |y_{n+1}| &= |y_{n+1} - y_0| \leq |y_{n+1} - y_n| + \cdots + |y_1 - y_0| \leq \\ &(\theta^n + \cdots + 1)|y_1 - y_0| < \frac{|y_1 - y_0|}{1 - \theta} \leq \frac{M|F(x, 0)|}{1 - \theta} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

als $\theta < 1$, en $F(x, 0)$ voldoet aan

$$|F(x, 0)| \leq \frac{\varepsilon}{M}(1 - \theta) = \frac{\varepsilon}{M}(1 - M\eta) = \varepsilon\left(\frac{1}{M} - \eta\right) = \tilde{\varepsilon}. \quad (4.17)$$

De laatste ongelijkheid wordt geforceerd door bij deze positieve $\tilde{\varepsilon}$ de bijbehorende $\tilde{\delta} > 0$ van de continuïteit van $x \rightarrow F(x, 0)$ in $x = 0$ te nemen en x te beperken tot $|x| \leq \tilde{\delta}$. We nemen dus aan dat $x \rightarrow F(x, 0)$ in $x = 0$ continu is²⁷.

Kies nu $\eta = \eta_0 < \frac{1}{M}$ vast en laat zoals in (4.15) hierboven ε_0 de bijbehorende ε zijn. Deze ene η_0 en ε_0 zijn genoeg om nu de convergentie te bewijzen. Neem daartoe $\tilde{\varepsilon}_0$ bij η_0 en ε_0 zoals in (4.17), en vervolgens $\tilde{\delta}_0$ bij $\tilde{\varepsilon}_0$ gegeven middels de continuïteit van $x \rightarrow F(x, 0)$ in $x = 0$. Neem tenslotte voor δ_0 het minimum van ε_0 en $\tilde{\delta}_0$.

De (aannamen voor de) schattingen hierboven zijn nu hieronder alleen nog nodig voor x met $|x| \leq \delta_0$ en y met $|y| \leq \varepsilon_0$. Voor iedere x met $|x| \leq \delta_0$ volgt nu dat de x -afhankelijke som

$$\sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+1} - y_n)$$

absoluut convergent is, en dus²⁸ ook gewoon convergent. Maar dat betekent dat de x -afhankelijke rij y_n , gedefinieerd door $y_0 = 0$ en (4.14) voor $n \in \mathbb{N}$,

²⁵ Dit *rijgen* van de kleine Griekse letters hebben we eerder gezien in Opgave 2.29.

²⁶ Gebruik de meetkundige reeks

$$1 + \theta + \theta^2 + \cdots = \frac{1}{1 - \theta}. \quad (4.16)$$

²⁷ Geen extra eis in het speciale geval $F(x, y) = x - g(y)$ natuurlijk.

²⁸ De eerste keer dat we dit gebruiken!

convergeert naar een limiet $y = f(x)$ met $|y| \leq \varepsilon_0$. Deze y nu moet de unieke oplossing van $F(x, y) = 0$ in

$$\bar{B}_{\varepsilon_0} = \{y \in \mathbb{R} : |y| \leq \varepsilon_0\}$$

zijn.

In feite hebben we hierboven laten zien dat de x -afhankelijke afbeelding Φ gedefinieerd door

$$y \xrightarrow{\Phi} y - (F_y(0, 0))^{-1} F(x, y), \quad (4.18)$$

voor x in een geschikt gekozen x -interval, op een geschikt gekozen maar niet van x afhankelijk y -interval precies één y op zichzelf afbeeldt. Zo'n y wordt een *vast punt* van Φ genoemd en, omdat $(F_y(0, 0))^{-1}$ als inverse van $F_y(0, 0)$ zelf inverteerbaar is, zijn vaste punten van $y \rightarrow \Phi(x, y)$ precies de oplossingen van $F(x, y) = 0$.

De facto blijkt dat Φ voldoet aan een schatting van de vorm

$$|\Phi(x, y) - \Phi(x, \tilde{y})| \leq \theta |y - \tilde{y}| \quad (4.19)$$

met $\theta < 1$. De afbeelding $y \rightarrow \Phi(x, y)$ heet dan strict contractief, i.e. uniform Lipschitz continu met Lipschitz constante $\theta < 1$. Dat kan hier met één en dezelfde constante voor alle x in de buurt van 0.

Merk nog een keer goed op dat $F(x, y) = 0$ via (30) equivalent is met $y = \Phi(x, y)$ omdat $(F(0, 0))^{-1}$ als inverse van $F(0, 0)$ inverteerbaar is. Daar $y \rightarrow \Phi(x, y)$ op $\bar{B}_{\varepsilon_0}$ voor alle x met $|x| \leq \delta_0$ uniform Lipschitz continu is met Lipschitz constante $M\eta_0 < 1$, is er voor iedere zulke x hoogstens één zo'n $y \in \bar{B}_{\varepsilon_0}$ met $y = \Phi(x, y)$. Voor de limiet $y = f(x)$ geldt vanwege de continuïteit²⁹ van $y \rightarrow \Phi(x, y)$ inderdaad dat

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x, y_n) = \Phi(x, y).$$

De formule direct boven (4.17) geeft via de nu geslaagde limietovergang $y_{n+1} \rightarrow y = f(x)$ dat $f : \bar{B}_{\delta_0} \rightarrow \bar{B}_{\varepsilon_0}$ welgedefinieerd is en voldoet aan

$$|f(x)| \leq \frac{M|F(x, 0)|}{1 - \theta} = \frac{|F(x, 0)|}{\frac{1}{M} - \eta_0}. \quad (4.20)$$

Met de grafiek $y = f(x)$ van f op $\bar{B}_{\delta_0}$ hebben we dus precies alle oplossingen van $F(x, y) = 0$ in $\bar{B}_{\delta_0} \times \bar{B}_{\varepsilon_0}$ te pakken:

$$\forall (x, y) \in \bar{B}_{\delta_0} \times \bar{B}_{\varepsilon_0} : \quad F(x, y) = 0 \iff y = f(x). \quad (4.21)$$

²⁹ Die volgt uit de differentieerbaarheid.

*Teken
plaatje!*

Hiermee is het bewijs van het bestaan van de impliciete functie f wel klaar. Het enige dat we gebruikt hebben om in (4.21) de nulverzameling van F in een geschikt gekozen omgeving $\bar{B}_{\delta_0} \times \bar{B}_{\varepsilon_0}$ van $(x, y) = 0$ als een grafiek van de vorm $y = f(x)$ te karakteriseren met $f : \bar{B}_{\delta_0} \rightarrow \bar{B}_{\varepsilon_0}$ continu in $x = 0$, is dat

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= 0; \\ x \rightarrow F(x, 0) &\text{ is continu in } x = 0; \\ (x, y) \rightarrow F_y(x, y) &\text{ is continu in } (x, y) = (0, 0); \\ y \rightarrow F_y(x, y) &\text{ is een continue functie voor } x \text{ vast}^{30}; \\ F_y(0, 0) &\text{ is inverteerbaar.} \end{aligned}$$

Omgekeerd is gegeven zo'n f de functie gedefinieerd door $(x, y) \rightarrow f(x) - y$ een i.h.a. andere (eenvoudigere) functie die precies aan de aannamen op de algemene F voldoet om f bij F te maken zoals hierboven.

4.5 Differentieerbare impliciete functies

Met het eindresultaat in Sectie 4.4 zijn we nog niet tevreden³¹, want het enige dat we van $x \rightarrow f(x)$ nu weten is de continuïteit in $x = 0$, via de continuïteit van $x \rightarrow F(x, 0)$ en (4.20).

Om ook *differentieerbaarheid* van $x \rightarrow f(x)$ in $x = 0$ te krijgen schrijven we, wederom met (4.8),

$$\begin{aligned} 0 &= F(x, f(x)) = F(x, 0) + F(x, f(x)) - F(x, 0) \\ &= F(x, 0) + \int_0^1 F_y(x, tf(x))f(x) dt \\ &= F(x, 0) + F_y(0, 0)f(x) + R(x), \end{aligned}$$

waarin

$$R(x) = \int_0^1 (F_y(x, tf(x)) - F_y(0, 0))f(x) dt,$$

en waarmee de aanname dat $x \rightarrow F(x, 0)$ differentieerbaar is in $x = 0$ voor de hand ligt. In dat geval weten we dat $F(x, 0) = O(|x|)$ en via (4.20) ook dat

$$f(x) = O(|x|) \quad \text{als } x \rightarrow 0,$$

hetgeen alvast een sterke uitspraak is dan de continuïteit van $x \rightarrow f(x)$ in $x = 0$.

³⁰ Waarbij $|x| \leq \delta_0$ en $|y| \leq \varepsilon_0$, met $\delta_0 > 0$ en $\varepsilon_0 > 0$ als in de constructie van (4.21).

³¹ Hoewel resultaat nu al geschikt is voor (8.23) en het Lemma van Morse, Sectie 8.1.

Neem nu aan dat $(x, y) \rightarrow G(x, y) = F_y(x, y)$ continu is in $(x, y) = (0, 0)$, hierboven geformuleerd met η en ε in (4.15), maar nu weer gewoon met een ε, δ -definitie.

Definitie 4.20. Een functie $(x, y) \rightarrow G(x, y)$ heet continu in $(0, 0)$ als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zodanig dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $y \in \mathbb{R}$ de implicatie

$$|x| \leq \delta \text{ en } |y| \leq \delta \implies |G(x, y) - G(0, 0)| \leq \varepsilon$$

geldt.

Voor $x \in \mathbb{R}$ met $|x| \leq \delta$ en $|f(x)| \leq \delta$ geldt dus dat

$$|R(x)| \leq \varepsilon |f(x)|,$$

en de continuïteit van $f(x)$ in $x = 0$ geeft dat er $\hat{\delta} \in (0, \delta]$ is zodanig dat deze afchatting geldt voor $|x| \leq \hat{\delta}$. We concluderen nu dat aan

$$R(x) = o(|x|) \quad \text{als} \quad x \rightarrow 0$$

is voldaan, zie (4.4). Maar nu geldt

$$0 = F(x, f(x)) = F_x(0, 0)x + r(x) + F_y(0, 0)f(x) + R(x),$$

met ook $r(x) = o(|x|)$ voor $x \rightarrow 0$ omdat $x \rightarrow F(x, 0)$ differentieerbaar is in $x = 0$. Links en rechts de inverse van $F_y(0, 0)$ toepassen en differentieerbaarheid van f in $x = 0$ volgt.

Opgave 4.21. Onder de sterkere aanname dat $(x, y) \rightarrow F_y(x, y)$ continu is in $(x, y) = (0, 0)$, en de extra aanname dat $x \rightarrow F(x, 0)$ differentieerbaar is in $x = 0$, is de impliciete functie $x \rightarrow f(x)$ differentieerbaar in $x = 0$ met

$$f'(0) = -(F_y(0, 0))^{-1} F_x(0, 0).$$

Bewijs dit nu verder zelf.

In het convergentiebewijs hebben we gebruikt dat *absoluut convergente reeksen* convergent zijn. Per definitie wordt voor een rij $a_n \in \mathbb{R}$ de som S van de bijbehorende reeks gedefinieerd door

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n,$$

als deze limiet bestaat. De volgende opgave moet je een keer gemaakt hebben. Wellicht is dit de eerste keer. Je hebt hem hierna nog vaker nodig. Zie ook Sectie 3.6 en Opgave 3.15.

Opgave 4.22. Neem aan dat voor een rij $a_n \in \mathbb{R}$ geldt dat er een $M \geq 0$ is waarvoor geldt dat

$$T_N = \sum_{n=1}^N |a_n| \leq M$$

voor alle $N \in \mathbb{N}$. Bewijs dat er een kleinste $M \geq 0$ is waarvoor dit geldt, en dat deze kleinste M de limiet is van T_N als $N \rightarrow \infty$, genoteerd als

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Bewijs ook dat

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n$$

een Cauchyrij is, en dus convergent met een unieke limiet S , die genoteerd als

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

voldoet aan

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Blijft nog de vraag hoe het in de andere x -waarden zit met de impliciete functie die we nu gemaakt hebben. Natuurlijk willen we een uitspraak die zegt dat, voor x eventueel wat dichter in de buurt van $x = 0$, dat

$$f'(x) = -(F_y(x, f(x)))^{-1} F_x(x, f(x)), \quad (4.22)$$

en dat het rechterlid in (4.22) continu van x afhangt. Het enige dat daarvoor nodig is dat $F_y(x, y)$ in de buurt van $(x, y) = (0, 0)$ continu en inverteerbaar is en dat $x \rightarrow F(x, y)$ voor y in de buurt van $y = 0$ differentieerbaar is in elke x in de buurt van 0. Daarover doen we nu moeilijk, met als belangrijkste hulpmiddel (4.16).

Opgave 4.23. De inverteerbaarheid van $A = F_y(x, y)$ in de buurt van van $(x, y) = (0, 0)$ volgt uit de inverteerbaarheid van $A_0 = F_y(0, 0)$. Bewijs dit met algebra en convergente *meetkundige reeksen*. Gebruik van de inverse B_0 van A_0 alleen dat $A_0 B_0 = B_0 A_0 = 1$. Delen is streng verboden evenals de regel $|AB| = |A| |B|$ (voor willekeurige A en B). Je mag wel de ongelijkheid $|AB| \leq |A| |B|$ gebruiken. Laat zien

dat er een B is met $AB = BA = 1$, onder de aanname dat $|A - A_0|$ klein genoeg is in termen van o.a. $|B_0|$, en dat

$$A \rightarrow A^{-1}$$

continu is in $A = A_0$.

Na deze opgave³² kunnen we voor $x = x_0$ in de buurt van $x = 0$ rond (x_0, y_0) met $y_0 = f(x_0)$ alles hierboven herhalen onder de aanname dat $F_x(x_0, y_0)$ bestaat en F_y continu is in (x_0, y_0) . Tenslotte is voor het continu zijn van

$$x \rightarrow f'(x) = -(F_y(x, f(x)))^{-1} F_x(x, f(x))$$

in $x = x_0$ ook de continuïteit van $(x, y) \rightarrow F_x(x, y)$ in (x_0, y_0) nodig. Kortom, uiteindelijk zegt de *impliciete functiestelling* dat in de buurt van een willekeurig punt (x_0, y_0) waar $(x, y) \rightarrow F_x(x, y)$ en $(x, y) \rightarrow F_y(x, y)$ allebei bestaan en continu zijn, niet alleen in (x_0, y_0) maar in die hele buurt, in een iets kleinere buurt de oplossingen van $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ worden gegeven als grafiek van een continu differentieerbare functie $x \rightarrow f(x)$, mits in dat éne punt (x_0, y_0) de partiële afgeleide $F_y(x_0, y_0)$ inverteerbaar is.

Stelling 4.24. *Hierboven staat de definitieve versie van de impliciete functiestelling die je nu zelf kunt formuleren.*

Opgave 4.25. Formuleer Stelling 4.24, ook voor het geval dat $F(x, y) = g(y) - x$ met $g(0) = 0$. Dit speciale geval is de inverse functiestelling, die zegt dat de inverse functie f van g in een omgeving van $x = 0$ als continu differentieerbare functie is gedefinieerd met de afgeleide die je verwacht.

Opgave 4.26. Alleen in het geval dat y en dus $F(x, y)$ in dezelfde 1-dimensionale $\mathbb{R}$ liggen, kan in plaats van (4.8) direct de gewone middelwaardestelling (Stelling 4.5) gebruikt worden, op alle plekken waar (4.8) gebruikt is, om tot dezelfde resultaten (onder wellicht iets zwakkere aannamen) te komen. Ga dit na.

Opgave 4.27. De formule (4.22) kan gezien worden als een differentiaalvergelijking voor $x \rightarrow f(x)$. Neem een beetje mooie $F(x, y)$ naar keuze, bepaal F_x en F_y , zet $f(x) = y$ in (4.22), en schrijf (4.22) op een apart blaadje als

$$\frac{dy}{dx} = G(x, y)$$

³² Waarom doen we zo moeilijk in deze opgave? Zie Sectie 6.3.

met $G(x, y)$ zo vereenvoudigd dat je niet meer ziet met welke $F(x, y)$ je begonnen bent. Geef aan een collega met de vraag: los even op als je kan.

4.6 Totale afgeleide, ketting- en Leibnizregel

In Opgave 4.21 is het bewijs voor het bestaan van een unieke impliciete functie f met $f(0) = 0$, waarvoor geldt dat

$$x \rightarrow F(x, f(x))$$

constant is in de buurt van $x = 0$, afgerond met de differentieerbaarheid van f in $x = 0$. Voldoende hiertoe is de aanname dat

- $x \rightarrow F(x, 0)$ differentieerbaar³³ is in $x = 0$;
- $(x, y) \rightarrow F_y(x, y)$ continu is in een omgeving van $(0, 0)$;
- $F_y(0, 0)$ inverteerbaar is.

De continuïteit van F_y is hier gemakshalve wat sterker geformuleerd dan aan het eind van Sectie 4.4. We bekijken nu wat de eerste twee aannames voor de functie $(x, y) \rightarrow F(x, y)$ zelf betekenen.

Met de definitie van differentieerbaarheid van $x \rightarrow F(x, 0)$ in $x = 0$, en de middelwaardestelling³⁴ schrijven we

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x, 0) + F(x, y) - F(x, 0) = F(0, 0) + F_x(0, 0)x + R(x) + F_y(x, \eta)y \\ &= F(0, 0) + F_x(0, 0)x + F_y(0, 0)y + \underbrace{R(x) + (F_y(x, \eta) - F_y(0, 0))y}_{R(x, y)}, \end{aligned}$$

voor een η tussen 0 en y en met $R(x) = o(x)$ als $x \rightarrow 0$.

Dit leest zich nu als

$$F(x, y) = F(0, 0) + F_x(0, 0)x + F_y(0, 0)y + R(x, y) \quad (4.23)$$

met

$$R(x, y) = o(r) \quad \text{als} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0, \quad (4.24)$$

precies wat we voortaan de *(totale) differentieerbaarheid* van $(x, y) \rightarrow F(x, y)$ in $(0, 0)$ noemen. Merk op dat in (4.23) het lineaire stuk te schrijven is als

$$F_x(0, 0)x + F_y(0, 0)y = \begin{pmatrix} F_x(0, 0) \\ F_y(0, 0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

waarin de vector met de partiële afgeleiden de *gradiënt*³⁵ van F in $(0, 0)$ wordt genoemd.

³³ Differentieerbaarheid van de “partiële functie” $x \rightarrow F(x, 0)$ in $x = 0$.

³⁴ Hier dus met Stelling 4.5, maar zie Opgave 4.28.

³⁵ Notatie ∇F , spreek uit nabla F .

Opgave 4.28. Laat $r > 0$ en neem aan dat voor x met $|x| \leq r$ geldt dat $y \rightarrow F(x, y)$ differentieerbaar is voor $|y| \leq r$ met $y \rightarrow F_y(x, y)$ continu, en $(x, y) \rightarrow F_y(x, y)$ continu is in $(0, 0)$. Bewijs de differentieerbaarheid van $(x, y) \rightarrow F(x, y)$ in $(x, y) = (0, 0)$ met (4.8), dus zonder x -afhankelijke tussenpunten η te gebruiken.

In (4.23) staat een al precies gemaakte lineaire benadering van $F(x, y)$ rond $(0, 0)$ met een restterm die voldoet aan (4.24). Natuurlijk kunnen uitdrukking als $x \rightarrow F(x, f(x))$ ook naar x gedifferentieerd worden met de nog te behandelen kettingregel, als $x \rightarrow f(x)$ en $(x, y) \rightarrow F(x, y)$ (totaal) differentieerbaar zijn. Die kettingregel komt uitgebreid aan de orde in Hoofdstuk 6, en is gebaseerd op Opgave 5.10 in Sectie 5.1. Het kan geen kwaad deze regel hier al in een speciaal geval te behandelen.

Voor functies van de vorm

$$t \rightarrow F(x(t), y(t))$$

luit de kettingregel dat

$$\frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) = F_x(x(t), y(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t))y'(t) \quad (4.25)$$

$$= x'(t)F_x(x(t), y(t)) + y'(t)F_y(x(t), y(t)),$$

te onthouden als F differentiëren naar elke t -afhankelijke variabele, daarna doordifferentiëren naar t , en alles optellen. Als $t \rightarrow (x(t), y(t))$ toevallig een kromme parametriseert waarlangs F constant is dan volgt in $t = 0$ dat

$$F_x(0, 0)x'(0) + F_y(0, 0)y'(0) = \begin{pmatrix} F_x(0, 0) \\ F_y(0, 0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = 0,$$

waarin de tweede vector de raakvector aan de kromme in $(0, 0)$ genoemd wordt³⁶, waar de gradiënt van F in $(0, 0)$ dan loodrecht op staat.

Allebei de vormen in (4.25) zijn nuttig. Je kunt ervoor kiezen de afgeleide van de eerste schakel in de ketting systematisch³⁷ voor of systematisch na de afgeleide(n) van de tweede schakel in de ketting te zetten. Zie eventueel alvast (6.45) en (6.46) en wat daarna volgt. Het bijzonder geval dat $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$ hebben we hierboven gezien met de impliciete functie f waarmee $F(t, f(t))$ constant is.

In het geval dat $F(x, y) = xy$ zien we

$$(x(t)y(t))' = \frac{d}{dt}(x(t)y(t)) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t) \quad (4.26)$$

³⁶ Tenzij deze vector de nulvector is.

³⁷ Willen we co- of willen we contravariante differentiaalrekening?

verschijnen, de produktregel van Leibniz³⁸.

Bewijs van deze kettingregel. Toch maar meteen een bewijsje van (4.25) hier, zonder beperking der algemeenheid in $t = 0$. Dus neem aan dat $t \rightarrow x(t)$ en $t \rightarrow y(t)$ differentieerbaar zijn in $t = 0$, en dat $(x, y) \rightarrow F(x, y)$ totaal differentieerbaar is in $(x(0), y(0))$ en, wederom zonder beperking der algemeenheid, dat $0 = x(0) = y(0) = F(0, 0) = 0$. Dan volgt met de differentieerbaarheid van $x(t)$ en $y(t)$ in $t = 0$, via de expansies

$$x(t) = x'(0)t + r(t) \quad \text{en} \quad y(t) = y'(0)t + s(t), \quad (4.27)$$

voor de samengestelde functie dat

$$\begin{aligned} F(x(t), y(t)) &= F_x(0, 0)x(t) + F_y(0, 0)y(t) + R(x(t), y(t)) = \\ &F_x(0, 0)(x'(0)t + r(t)) + F_y(0, 0)(y'(0)t + s(t)) + R(x(t), y(t)) \\ &= (F_x(0, 0)x'(0) + F_y(0, 0)y'(0))t + S(t), \end{aligned}$$

waarin

$$S(t) = F_x(0, 0)r(t) + F_y(0, 0)s(t) + R(x(t), y(t))$$

kleine o van t moet zijn als $t \rightarrow 0$. Per definitie is dat het geval voor $r(t)$ en $s(t)$, de resttermen uit de lineaire benaderingen van $x(t)$ en $s(t)$ rond $t = 0$.

Opgave 4.29. Bewijs nu zelf met (4.27) en de aannames op $r(t), s(t)$ en $R(x, y)$ dat $R(x(t), y(t)) = o(t)$ als $t \rightarrow 0$. Daarmee is het bewijs dan klaar.

Zoals al opgemerkt volgt met $F(x, y) = xy$ de Leibniz regel (4.26). Met $x(t) = y(t)$ volgt natuurlijk ook de kettingregel voor

$$t \rightarrow x(t) \rightarrow F(x(t)) = \phi(t),$$

met

$$\phi'(t_0) = F'(x(t_0))x'(t_0) \quad (4.28)$$

als $t \rightarrow x(t)$ differentieerbaar is in t_0 en $x \rightarrow F(x)$ differentieerbaar is in $x(t_0)$. Ook de quotiëntregel is nu niet moeilijk meer, misschien eerst voor

$$t \rightarrow \frac{y(t)}{1 + x(t)}$$

met

$$x \rightarrow \frac{1}{1 + x}$$

als leuke oefening vooraf.

³⁸ Die schrijven we liever met x en y steeds in dezelfde volgorde.

4.7 Stationair onder randvoorwaarde

Als we twee functies Φ and F van x en y hebben die allebei (totaal) differentieerbaar zijn in $(x, y) = (0, 0)$, en een³⁹ functie f van x die differentieerbaar is in $x = 0$, waarvoor geldt dat

$$F_x(0, 0) + F_y(0, 0)f'(0) = 0, \quad (4.29)$$

hetgeen zeker geldt als $F(x, f(x))$ constant is, dan is

$$x \xrightarrow{\phi} \phi(x) = \Phi(x, f(x))$$

met de kettingregel differentieerbaar in $x = 0$, met

$$\phi'(0) = \Phi_x(0, 0) + \Phi_y(0, 0)f'(0). \quad (4.30)$$

Als $F_y(0, 0)$ inverteerbaar is volgt nu uit (4.29) en (4.30) dat

$$\phi'(0) = 0 \iff \Phi_x(0, 0) = \Phi_y(0, 0)(F_y(0, 0))^{(-1)}F_x(0, 0) \quad (4.31)$$

de karakterisatie is voor het stationair zijn van $\phi(x)$ in $x = 0$.

Inverteerbaar betekent hier voor $F_y(0, 0) \in \mathbb{R}$ gewoon dat $F_y(0, 0) \neq 0$, waarmee

$$\phi'(0) = 0 \iff \Phi_x(0, 0)F_y(0, 0) = \Phi_y(0, 0)F_x(0, 0).$$

Het criterium voor $\phi'(0) = 0$ is dus dat de gradiënt van Φ in $(0, 0)$ een veelvoud is van de gradiënt van F .

Opgave 4.30. Bewijs de laatste uitspraak, die zegt dat $\phi'(0) = 0$ in dit geval, dus onder de aanname dat $F_y(0, 0) \neq 0$, equivalent is met het bestaan van een $\lambda \in \mathbb{R}$ waarmee

$$\begin{pmatrix} \Phi_x(0, 0) \\ \Phi_y(0, 0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} F_x(0, 0) \\ F_y(0, 0) \end{pmatrix}.$$

Een soortgelijk uitspraak is te doen voor functies $x = g(y)$ met $y \rightarrow F(g(y), y)$ constant en het stationair zijn van

$$y \xrightarrow{\psi} \psi(y) = \Phi(g(y), y)$$

³⁹ Bijvoorbeeld met de inverteerbaarheid van $F_y(0, 0)$ gemaakte impliciete functie.

in $y = 0$, onder de aanname dat $F_x(0, 0) \neq 0$.

We komen nog terug op het stationair zijn van functies $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ onder randvoorwaarde(n) in Sectie 6.3: Opgave 4.30 is een eerste voorbeeld van de *multiplicatorenstelling* van Lagrange, die hier in het geval dat $X = \mathbb{R}^2$ zegt dat de gradiënt van Φ loodrecht moet staan op de door de randvoorwaarde gedefinieerde verzameling. De wiskundige formulering daarvan in Euclidische ruimten kan niet zonder de impliciete functies zoals gemaakt in de vorige sectie. De stelling zelf beperkt zich niet tot ruimten waarin een inproduct voorhanden is en kent ook formuleringen in Banachruimten.

4.8 Zijstapje: convergentie van Newton's methode

We borduren nog wat verder op de methode van Newton waar we in Sectie 4.4 mee begonnen zijn, maar doen dat zonder x -afhankelijkheid in $F(x, y)$. En dus noemen we de y maar weer x en gebruiken maar eens een kleine f in plaats van een grote F : voor f van x , is $f(x) = 0$ nu de op te lossen vergelijking.

Voor zo'n functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die voor een gegeven $\varepsilon_0 > 0$ differentieerbaar is op

$$\bar{B}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \varepsilon\},$$

met $x \rightarrow f'(x)$ uniform Lipschitz continu op $\bar{B}_{\varepsilon_0}$, en een rij x_n in $\bar{B}_{\varepsilon_0}$ van Newton- of andere iteraties die de oplossing x van $f(x) = 0$ moeten benaderen, schrijven we (4.9) over als

$$f(x_n) = \underbrace{f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})}_{\text{lineaire benadering}} + R(x_n; x_{n-1}), \quad (4.32)$$

waarin

$$|R(x_n; x_{n-1})| \leq \frac{L}{2} |x_n - x_{n-1}|^2,$$

met L de Lipschitz constante van f' op $\bar{B}_{\varepsilon_0}$. We nemen nu ook aan dat voor alle $x \in \bar{B}_{\varepsilon_0}$ geldt dat

$$|(f'(x))^{-1}| \leq C$$

voor een positieve constante $C > 0$.

Introduceer nu

$$p_n = |x_n - x_{n-1}| \quad \text{and} \quad q_n = |f(x_n)|, \quad (4.33)$$

en neem x_n gedefinieerd door het Newton schema⁴⁰

$$x_n = x_{n-1} - (f'(x_{n-1}))^{-1} f(x_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (4.34)$$

⁴⁰ Het is hier niet nodig om aan raaklijnen te denken maar het mag wel.

met $x_0 = 0$. Dan zit $x_n \in \bar{B}_{\varepsilon_0}$ zolang

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n \leq \varepsilon_0, \quad (4.35)$$

en in dat geval volgt

$$p_n \leq Cq_{n-1} \quad \text{en} \quad q_n \leq \frac{1}{2}Lp_n^2, \quad (4.36)$$

omdat (4.34) de lineaire benadering in (33) nul stelt.

De ongelijkheden in (41) worden nu in stelling gebracht beginnende met

$$q_0 = |f(0)| \quad \text{en} \quad p_1 \leq Cq_0 = C|f(0)|, \quad (4.37)$$

door (41) en (42) te combineren als

$$p_n \leq \mu p_n^2 \quad \text{met} \quad \mu = \frac{1}{2}LC \quad \text{and} \quad p_1 \leq C|f(0)|, \quad (4.38)$$

en de vraag is voor welke $\bar{P} = \bar{P}(\mu)$ we kunnen concluderen dat de implicatie

$$C|f(0)| \leq \bar{P} \implies \sum_{n=1}^{\infty} p_n \leq \varepsilon_0 \quad (4.39)$$

geldt.

Hoe groter $\bar{P}$, hoe sterker de uitspraak in de zin dat grotere $|f(0)|$ toegestaan zijn om een oplossing $x \in B_{\varepsilon_0}$ van $f(x) = 0$ te vinden via (4.34) startend vanaf $x_0 = 0$. De grootste $\bar{P}$ vinden we door in (43) en (44) overal gelijkheden te nemen. Dat geeft

$$p_n = \mu p_{n-1}^2 \quad \text{voor} \quad n \in \mathbb{N}; \quad p_1 = \bar{P}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \varepsilon_0. \quad (4.40)$$

Via $\xi_n = \mu p_n$ en $\xi_n = \xi_{n-1}^2$ is dit equivalent met

$$\mu \varepsilon_0 = G(\mu \bar{P}) \quad \text{met} \quad G(\xi) = \xi + \xi^2 + \xi^4 + \xi^8 + \xi^{16} + \cdots, \quad (4.41)$$

maar dit geeft geen simpele formule $\bar{P} = \bar{P}(\mu, \varepsilon_0)$.

Opgave 4.31. Gebruik nu

$$G(\xi) \leq \frac{\xi}{1 - \xi}$$

om een simpele conditie van de vorm $|f(0)| \leq \dots$ in termen van C en L te formuleren, die convergentie $x_n \rightarrow x \in \bar{B}_{\varepsilon_0}$ garandeert met $f(x) = 0$.

In Hoofdstuk 3 van [HM] wordt de bij de functie $x \rightarrow f(x)$ horende Newtonafbeelding

$$x \rightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)} = F(x)$$

in detail onderzocht voor simpele functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, bijvoorbeeld voor $f(x) = x^2 - 2$. Die analyse, die weer⁴¹ terugvoert tot kleitabletten, zullen we hier niet herhalen. Over discrete dynamische systemen gedefinieerd door schema's van de vorm

$$x_n = F(x_{n-1}) \quad (4.42)$$

komen we nog wel te spreken in Sectie 5.4.

4.9 Integralen met parameters

Een niet onbelangrijk onderwerp is hoe integralen van parameters afhangen. Eerst maar even zien hoe het zit met de eigenschappen van een integraal met vaste grenzen, voor het gemak 0 en 1, en een integrand met een parameter. We beschouwen⁴²

$$j(t) = \int_0^1 F(x, t) dx$$

met, voor elke t in een t -interval $[0, 1]$, de functie $x \rightarrow F(t, x)$ continu op een x -interval $[0, 1]$. Daan weten we zeker dat $j(t)$ welgedefinieerd is.

We gebruiken nu maar eens middelwaardestelling in de vorm van Stelling 4.5 zelf, toegepast voor iedere vaste $x \in [0, 1]$ op $t \rightarrow F(x, t)$, die voor dit argument differentieerbaar moet zijn op $[0, 1]$, of op een kleiner interval dat 0 bevat maar niet van x afhangt. Dan is

$$F(t, x) = F(0, x) + F_t(\tau, x)t,$$

met $\tau = \tau(x) \in (0, t)$. We kunnen dus schrijven

$$F(t, x) = F(0, x) + F_t(0, x)t + R(t, x), \quad (4.43)$$

met

$$R(t, x) = (F_t(\tau(x), x) - F_t(0, x))t.$$

Als nu in (4.43) voor vaste t alles continu is in x dan geldt

$$j(t) = \int_0^1 F(t, x) dx = \int_0^1 (F(0, x) + F_t(0, x)t + R(t, x)) dx$$

⁴¹ In [Eves §2-5, 2.7, 6-6] zien we Heron's methode voor $\sqrt{2}$ teruggaan tot YBC7289!

⁴² Dit woord gebruiken we te weinig.

$$\begin{aligned}
&= j(0) + t \int_0^1 F_t(x, 0) dx + \int_0^t R(t, x) dx \\
&= j(0) + t \int_0^1 F_t(x, 0) dx + r(t),
\end{aligned} \tag{4.44}$$

waarin

$$r(t) = \int_0^t R(t, x) dx.$$

Tot nu toe is daarbij alleen gebruikt dat $x \rightarrow F(t, x)$ en $x \rightarrow F_t(0, x)$ continu zijn op $[0, 1]$ om de integralen te laten bestaan. De integraal $r(t)$ van $R(t, x)$ in (4.44) is dan ook continu. De tweede uitdrukking met $\tau(x) \in (0, t)$ boven (4.43) kan nu gebruikt worden om $r(t) = o(t)$ voor $t \rightarrow 0$ te krijgen.

Voor deze restterm $r(t)$ willen we dat $|r(t)| \leq \varepsilon t$ voor t klein genoeg, en daarvoor is (misschien niet nodig maar zeker wel) voldoende dat voor $(t, x) \rightarrow F_t(t, x) = f(t, x)$ geldt dat

$$|f(t, x) - f(0, x)| \leq \varepsilon \tag{4.45}$$

voor alle $x \in [0, 1]$ tegelijk, en dat voor alle $t \in (0, \delta)$, met $\delta > 0$ bij ε te vinden.

Opgave 4.32. Neem aan dat $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ in elk punt $(0, x)$ met $x \in [0, 1]$ continu is. Bewijs dat er voor alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zodanig dat (4.45) geldt voor alle $t \in (0, \delta)$ en alle $x \in [0, 1]$. Hint: denk aan het bewijs dat uniforme continuïteit op gesloten begrensde intervallen uit continuïteit volgt en redeneer uit het ongerijmde zoals in Opgave 2.30. Bij de $\varepsilon > 0$ waarvoor de uitspraak niet geldt is een rij punten (t_n, x_n) te vinden met $0 < t_n \rightarrow 0$. Neem een convergente deelrij van x_n , formuleer de tegenspraak en de volgende stelling is bewezen.

Stelling 4.33. Niet eenvoudig om te onthouden, maar laat $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ gedefinieerd zijn voor $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ met $a < b$, en $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ met $t_0 \in \mathbb{R}$ en $\delta > 0$. Neem aan dat voor iedere vaste $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ de functie $x \rightarrow F(t, x)$ continu is op $[a, b]$ en

$$j(t) = \int_a^b F(t, x) dx$$

dus bestaat. Als voor iedere vaste $x \in [a, b]$ de functie $t \rightarrow F(t, x)$ differentieerbaar is op $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ en $(t, x) \rightarrow F_t(t, x)$ continu is in iedere (t_0, x) met $x \in [a, b]$, dan is $t \rightarrow j(t)$ differentieerbaar in t_0 met $j'(t_0) = \int_a^b F_t(t_0, x) dx$.

Stelling 4.34. *Makkelijker te onthouden is: als F en F_t bestaan en continu zijn op $I \times [a, b]$, met I een t -interval, dan is $j : I \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar met*

$$j'(t) = \int_a^b F_t(t, x) dx.$$

Opgave 4.35. Laat zien dat $t \rightarrow \int_a^b f(t, x) dx$ continu is op een interval I als $t \rightarrow f(t, x)$ continu is op $I \times [a, b]$. Hieruit volgt de continuïteit van j' in de laatste uitspraak van Stelling 4.34. Hint: gebruik een argument zoals in Opgave 4.32.

4.10 Partieel integreren en Taylorpolynomen

We verlaten hier nu de analyse om een stukje calculus te doen, waaruit vervolgens weer een belangrijke stelling volgt die tot de analyse gerekend kan worden. De regel voor partieel integreren is via Stelling 4.12 de tegenhanger van de produktregel van Leibniz, zie (4.26), waarin van alle drie de termen de integraal over een t -interval $I = [\alpha, \beta]$ kan worden genomen, als bijvoorbeeld $t \rightarrow x'(t)$ en $t \rightarrow y'(t)$ continu zijn op I . Na herordenen volgt dat

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t) dt = [x(t)y(t)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} x'(t)y(t) dt. \quad (4.46)$$

We passen deze regel nu toe in een leerzaam voorbeeldje met andere letters voor de variabelen.

Voor gegeven $f \in C([0, 1])$ is het randwaardeprobleem gegeven door

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{voor alle } 0 \leq x \leq 1, \quad \text{en} \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (4.47)$$

uniek oplosbaar, door f twee keer te primitiveren en de twee vrije integratieconstanten zo te kiezen dat de dubbele primitieve u in $x = 0$ en $x = 1$ gelijk is aan 0. Het is instructief om dit in detail te doen.

Een keer primitiveren geeft

$$u'(x) = u'(0) - \underbrace{\int_0^x f(s) ds}_{F(x)},$$

met een nog onbepaalde $u'(0)$, en de primitieve van F van f die voldoet aan $F(0) = 0$, waarna nog een keer primitiveren geeft dat

$$u(x) = u'(0)x - \int_0^x F(s) ds,$$

$u'(0)$ nog steeds onbepaald, $x \rightarrow \int_0^x F(s) ds$ de primitieve van F die 0 is in $x = 0$, en $u(1) = 0$ nog niet gebruikt.

Met de produktregel van Leibniz is $F(s)$ te schrijven als

$$\begin{aligned} \underbrace{1 F(s)}_{G'(s)F(s)} &= \underbrace{(s-a)'}_{G'(s)} F(s) = \underbrace{((s-a) F(s))'}_{G(s)} - \underbrace{(s-a) F'(s)}_{G(s)} \\ &= \underbrace{((s-a) F(s))'}_{(G(s)F(s))'} - \underbrace{(s-a) f(s)}_{G(s)F'(s)} \end{aligned}$$

(afgeleiden naar s). Onder de formules is aangegeven dat we 1 zien als $G'(s)$ met $G(s) = s - a$ en a nog vrij te kiezen.

De primitieve van $F(x)$ is dus te schrijven als

$$\int_0^x F(s) ds = [(s-a)F(s)]_0^x - \int_0^x (s-a)f(s) ds = \int_0^x (x-s)f(s) ds. \quad (4.48)$$

Met $a = x$ volgt dat

$$u(x) = u'(0)x - \int_0^x (x-s)f(s) ds$$

en door $x = 1$ in te vullen vinden we dat

$$u'(0) = \int_0^1 (1-s)f(s) ds.$$

Daarmee is

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 (1-s)f(s) ds x - \int_0^x (x-s)f(s) ds \\ &= x \int_x^1 (1-s)f(s) ds + (1-x) \int_0^x sf(s) ds = \int_0^1 A(x,s)f(s) ds. \end{aligned}$$

In deze laatste formule wordt

$$A(x,s) = \begin{cases} (1-x)s & \text{als } 0 \leq s \leq x \\ (1-s)x & \text{als } x \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (4.49)$$

de kern van de oplossingsoperator⁴³ wordt genoemd. Deze operator geeft u in termen van f als

$$u(x) = \int_0^1 A(x,s)f(s) ds. \quad (4.50)$$

⁴³ De kern A is te vergelijken met een (symmetrische) matrix, maar dat voor nu terzijde.

We hebben hierboven (4.50) met (4.49) afgeleid als oplossing voor (4.47) via de produktregel voor de afgeleide van $s \rightarrow F(s)G(s)$. Ook als je de regel voor partieel integreren ben vergeten, Stelling 4.12 toepassen op de produktregel van Leibniz voor primitieven functies F en G van $f = F'$ en $g = G'$ in $C([a, b])$ geeft je snel dat

$$\int_a^b F(x)G'(x) dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F'(x)G(x) dx, \quad (4.51)$$

de bekende regel voor *integration by parts*.

Partieel integreren is voor alles en nog wat handig. Bijvoorbeeld voor herhaald primitiveren zoals hierboven. Daarover nu een serie opgaven die leiden tot de *Stelling van Taylor* over polynomiale benaderingen van voldoende vaak continu differentieerbare functies.

Opgave 4.36. Neem $f \in C([a, b])$ en definieer

$$F_1(x) = F(x) = \int_a^x f(s) ds \quad \text{en} \quad F_2(x) = \int_a^x F_1(s) ds.$$

Laat met (4.51) zien dat

$$F_2(x) = \int_a^x (x-s)f(s) ds.$$

Hint: de integratievariabele is s en de 1 die je niet ziet voor $F_1(s)$ is de afgeleide naar s van $s-x$.

Opgave 4.37. Definieer in de context van Opgave 4.36

$$F_{n+1}(x) = \int_a^x F_n(s) ds \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

en laat met herhaald partieel integreren zien dat

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s) ds.$$

Hint: voor F_3 moet je twee keer partieel integreren, voor F_4 drie keer, et cetera. En dan zie je wel hoe het gaat.

Opgave 4.38. De formule in Opgave 4.37 produceert de zoveelste primitieve van f als een gewone in plaats van een meervoudige integraal. Verander het schema nu in

$$F_0(x) = f(x), \quad F_n(x) = b_n + \int_a^x F_{n-1}(s) ds \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.52)$$

en geef weer een formule voor $F_n(x)$ zoals hierboven (met meer termen natuurlijk). Bij constructie is $F_n(a) = b_n$, $F'_n(a) = b_{n-1}$, $F''_n(a) = b_{n-2}$, $\dots$, en je ziet hier een zogenaamde Taylorbenadering van orde $n-1$ staan voor een functie waarvan de eerste $n-1$ afgeleiden in a gegeven zijn door b -tjes. Verifieer nu dat voor elke n keer continue differentieerbare functie gedefinieerd op een interval I dat 0 bevat voor $x \in I$ geldt dat

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \\ + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds.$$

De laatste term is de restterm. Als $M = M_n(x, a)$ en $m = m_n(x, a)$ het maximum respectievelijk het minimum zijn van $f^{(n)}(s)$ als s varieert van $s = a$ naar $s = x$, dan zit deze term tussen

$$\frac{M}{n!}(x-a)^n \quad \text{en} \quad \frac{m}{n!}(x-a)^n$$

in. Omdat $f^{(n)}(s)$ tussen $s = a$ en $s = x$ alle waarden tussen $M = M_n(x, a)$ en $m = m_n(x, a)$ aanneemt, is er een zekere maar i.h.a. verder niet nader te bepalen $s = \sigma$ tussen $s = a$ en $s = x$ waarvoor de restterm gelijk is aan

$$\frac{f^{(n)}(\sigma)}{n!}(x-a)^n.$$

Kortom,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\sigma)}{n!}(x-a)^n}_{\frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds}, \quad (4.53)$$

met σ tussen a en x .

Het resultaat in formule (4.53) is ook te bewijzen *zonder* de aanname dat $f^{(n)}$ continu is, met een σ strict tussen a en x . In het geval dat $n = 1$ reduceert de uitspraak dan tot de middelwaardestelling (Stelling 4.5), en het is weer een slimme toepassing van diezelfde in Sectie 4.1 bewezen middelwaardestelling waarmee (4.53) kan worden bewezen. In sommige analyse colleges gebeurt dat wellicht nog.

4.11 Meer calculus: substitutieregels voor integralen

In de vorige secties was partieel integreren de tegenhanger voor de Leibniz-regel voor de afgeleide van het produkt van twee differentieerbare functies. Merk op dat in (4.46), geschreven als

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t) \underbrace{y'(t) dt}_{dy} = [x(t)y(t)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \underbrace{x'(t) dt}_{dx},$$

een tweede regel zich aandient als we gebruik maken van de notaties besproken na Stelling 4.12.

De integraal links suggereert een omschrijving naar een integraal met y als nieuwe variabele, en de integraal rechts een integraal met x als nieuwe variabele. De betreffende regel correspondeert via Stelling 4.12 met de kettingregel zoals geformuleerd in (4.28) en is af te lezen uit

$$\int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{F'(x(t))}_{f(x(t))} x'(t) dt = F(x(\beta)) - F(x(\alpha)) = \int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} F'(x) dx = \int_a^b \underbrace{F'(x)}_{f(x)} dx,$$

en geldt sowieso voor continue functies $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en continu differentieerbare surjectieve functies $t \rightarrow x(t)$ met $x(\alpha) = a$ en $x(\beta) = b$ in de vorm

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t)) x'(t) dt. \quad (4.54)$$

De voor hand liggende naam van (4.54) is de *substitutieregel*: is de integraal in het linkerlid slecht hanteerbaar, dan kan een substitutie van de vorm $x = x(t)$ soms uitkomst brengen. Omgekeerd kan het zijn dat in een integraal over een t -interval een factor van de vorm $x'(t)$ staat en dat $t \rightarrow x(t)$ inverseerbaar is, en een slecht hanteerbare t -integraal kan worden omgeschreven naar een beter hanteerbare x -integraal.

4.12 Conclusie

We hebben in dit hoofdstuk de belangrijkste aspecten van de theorie onder de differentiaalrekening voor functies van $x \in \mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ wel behandeld. Met lineaire benaderingen en zonder differentiaalquotienten. Omdat we ook het bestaan van differentieerbare impliciete functies hebben behandeld, hebben we de facto bijna alles dat essentieel is voor de theorie onder de differentiaalrekening voor functies van x en y ook al gezien.

Totale differentieerbaarheid van

$$(x, y) \rightarrow F(x, y)$$

in een (x_0, y_0) volgde, let wel, pas na het behandelen van de impliciete functiestelling voor oplossingen $y = f(x)$ van $F(x, y) = 0$, uit aannamen zwakker dan de makkelijker en bij voorkeur te onthouden aanname dat

$$F_x(x, y) \quad \text{en} \quad F_y(x, y)$$

in de buurt van (x_0, y_0) bestaan en continu zijn in (x_0, y_0) . Vervolgens hebben we voor functies $F(x, y)$, $\Phi(x, y)$ en $f(x)$ met

$$x \rightarrow F(x, f(x))$$

constant, het stationair zijn van

$$x \rightarrow \Phi(x, f(x))$$

geformuleerd in termen van de gradiënten van Φ en F .

Daarmee is het belangrijkste⁴⁴ wel gedaan. Wel zullen we nog tweede orde afgeleiden nodig hebben voor een criterium dat het positief/negatief zijn van $F''(x_0)$ in een stationair punt van $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, waar per definitie $F'(x_0) = 0$, generaliseert, essentieel voor de studie van extreme waarden. In zo'n criterium voor $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in een punt waar $F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0$ komen dan onvermijdelijk ook gemengde tweede orde partiële afgeleiden voor⁴⁵. Dat de volgorde van zulke afgeleiden bij functies van meer variabelen niet uitmaakt is essentieel, en komt al eerder aan de orde als we van (complex) differentieerbare functies van $z = x + iy \in \mathbb{C}$ naar $w = u + iv \in \mathbb{C}$ willen laten zien dat hun reële en imaginaire delen u en v toch wel tamelijk bijzondere functies van x en y zijn.

De reële stelling waar het dan nog om gaat is dat de totale differentieerbaarheid van

$$(x, y) \rightarrow F_x(x, y) \quad \text{en} \quad (x, y) \rightarrow F_y(x, y)$$

in een (x_0, y_0) voldoende is voor

$$F_{xy}(x_0, y_0) = F_{yx}(x_0, y_0),$$

ook geformuleerd als

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

in (x_0, y_0) , met kromme d's voor partiële afgeleiden. Hiermee hebben we het dan voorlopig wel gehad voor wat betreft de streng wiskundige onderbouwing van differentiaalrekening voor functies van meer variabelen⁴⁶ en kan

⁴⁴ TO DO: werk wat hierna komt goed uit voor ϕ in (4.30).

⁴⁵ Stelling 8.6 zegt wanneer $F(x, y)$ lokaal eigenlijk een kwadratische functie is.

⁴⁶ Integraalrekening, en samenhang met differentiaalrekening, is een ander verhaal.

de calculus beginnen dan wel doorgaan, met het uitpakken van al bewezen resultaten.

In de laatste twee secties hebben de twee belangrijkste regels uit de calculus voor de 1-dimensionale integraalrekening afgeleid door de met analyse bewezen stellingen over differentiaalrekening via de hoofdstellingen van de integraalrekening toe te passen. Daar was verder geen analyse meer voor nodig.

5 Rekenregels en voorbeelden

We hebben de afgeleide van F in x_0 gedefinieerd als coëfficiënt van de lineaire benadering in (4.3) waarbij de restterm in verhouding tot h willekeurig klein is voor $h \rightarrow 0$. Om de afgeleide ook als limiet van differentiequotiënten te schrijven herhalen we nu de definitie van het limietbegrip voor functies.

Definitie 5.1. Als $I \subset \mathbb{R}$ een interval is en $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dan zeggen we voor¹ $x_0 \in \bar{I}$ en $L \in \mathbb{R}$ dat

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

als er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x \in I$ de implicatie

$$|x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

geldt. We schrijven ook $f(x) \rightarrow L$ als $x \rightarrow x_0$.

Opgave 5.2. Als $I \subset \mathbb{R}$ een interval is en $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar is in $x_0 \in I$, dan is

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

Omgekeerd, als deze limiet bestaat dan is F differentieerbaar in x_0 met afgeleide $F'(x_0)$. Bewijs dit.

In de vorm

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad (5.1)$$

is de formule in Opgave 5.2 de gebruikelijke definitie voor de afgeleide functie F' die meestal voorafgaat aan de behandeling van differentiaalrekening met lineaire benaderingen. De limiet, indien deze bestaat, heet dan het *differentiaalquotiënt*, ogenschijnlijk genoteerd als breuk met teller dF en noemer dx , hetgeen ook de notatie $dF = F'(x)dx$ in Sectie 4.2 suggereert. Met $h = \Delta x$ heet de breuk

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

een differentiequotiënt. Het differentiaalquotiënt is de limiet van het differentiequotiënt als $\Delta x \rightarrow 0$. We maken in het vervolg en waar dan ook zo min mogelijk gebruik van deze limieten van differentiequotiënten.

¹ $\bar{I} \subset \mathbb{R}$ is het gesloten interval dat je krijgt door de randpunten van I erbij te stoppen.

5.1 Rekenregels voor de afgeleide

De rekenregels voor de afgeleide functies volgen eenvoudig uit de definitie met lineaire benaderingen, en die lineaire benaderingen worden vaak met $x - x_0$ i.p.v. h geschreven. We behandelen de rekenregels hieronder in het geval van $\mathbb{R}$ -waardige functies van $x \in \mathbb{R}$, maar de meeste regels en bewijzen kunnen later overschreven worden voor vectorwaardige functies van meer variabelen. Lees eventueel Sectie 4.6 nog even terug en merk op dat het uiteindelijk de kettingregel is waarvoor je dit zeker wil weten in je begrip van de differentiaalrekening. Het meeste hieronder is na Sectie 4.6 wat dubbelop, maar te leerzaam om over te slaan, ook omdat het hier alleen over functies van één variabele x gaat en de regels voor $F(x)+G(x)$, $F(x)G(x)$, $F(x)/G(x)$ en $F(G(x))$, respectievelijk de som-, produkt-, quotiënt- en kettingregel.

Opgave 5.3. Schrijf voor $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$ de expansie (4.3) als

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + R(x).$$

Herformuleer de conditie op de restterm² $R(x)$ die zegt dat F differentieerbaar is in x_0 met afgeleide $F'(x_0)$. Laat zien dat die conditie ook impliceert dat F continu is in x_0 .

Als eerste voorbeeld van een rekenregel die we rechtstreeks uit de lineaire benadering halen bekijken we de functie

$$x \rightarrow \frac{1}{F(x)},$$

die natuurlijk wel eerst gedefinieerd moet zijn.

Opgave 5.4. Neem in Opgave 5.3 aan dat I een open interval is en dat $F(x_0) \neq 0$ met F continu in x_0 . Bewijs dat

$$x \rightarrow \frac{1}{F(x)}$$

bestaat op een interval $[a, b] \subset I$ met $a < x_0 < b$ en continu is in x_0 . Hint: gebruik eerst de definitie van continuïteit met $\varepsilon = \frac{1}{2}|F(x_0)|$ om het interval $[a, b]$ te maken.

In het bijzonder zegt deze opgave dat iedere $F \in C([a, b])$ die geen nulpunten heeft een “omgekeerde” functie definieert die ook in $C([a, b])$ zit.

² We schrijven $R(x)$ i.p.v. $R(x; x_0)$ nu.

Opgave 5.5. Neem in Opgave 5.4 aan dat F differentieerbaar is in x_0 . Bewijs dat

$$x \rightarrow \frac{1}{F(x)}$$

differentieerbaar is in x_0 met afgeleide

$$-\frac{F'(x_0)}{F(x_0)^2}$$

door

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{1}{F(x_0)} + \frac{F(x_0) - F(x)}{F(x)F(x_0)}$$

uit werken met behulp van de expansie in Opgave 5.3.

Opgave 5.6. Dezelfde vraag als in Opgave 5.5 maar nu voor

$$x \rightarrow \frac{1}{|F(x)|}.$$

Opgave 5.7. Schrijf voor $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ en $x_0 \in I$ de expansie (4.3) als in Opgave 5.3, en gebruik eenzelfde expansie

$$G(x) = G(x_0) + G'(x_0)(x - x_0) + S(x).$$

voor $G : I \rightarrow \mathbb{R}$. Vermenigvuldig beide expansies, werk uit als

$$F(x)G(x) = F(x_0)G(x_0) + (F'(x_0)G(x_0) + F(x_0)G'(x_0))(x - x_0) + T(x),$$

en bewijs dat met F en G ook

$$x \rightarrow F(x)G(x)$$

differentieerbaar is in x_0 . Hint: de afgeleide in x_0 leest zich onmiddellijk af, laat zien dat de restterm de juiste eigenschappen heeft.

De regel voor de afgeleide van $F(x)G(x)$ heet de *regel van Leibniz* of ook wel de *produktregel*: in elke x waar F en G differentieerbaar zijn is ook het produkt van F en G differentieerbaar met

$$(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x), \quad (5.2)$$

zie ook (4.26).

Opgave 5.8. Dezelfde (gaap) vraag als in Opgave 5.7 voor $x \rightarrow F(x) + G(x)$.

Opgave 5.9. Schrijf je bewijzen nog een keer over met $x - x_0$ vervangen door h en zie hoe in de produktregel de twee lineaire benaderingen $F(x_0) + F'(x_0)h$ en $G(x_0) + G'(x_0)h$ met elkaar vermenigvuldigd worden tot

$$F(x_0) + G(x_0) + (F'(x_0)G(x_0) + F(x_0)G'(x_0))h + o(h),$$

waarbij de term met h^2 in $o(h)$ is verdwenen.

Iets lastiger maar ook niet echt moeilijk is de rekenregel voor functies van de vorm $x \rightarrow G(F(x))$. Deze regel staat bekend als de *kettingregel*. We beperken ons nu tot open intervallen als definitiegebieden.

Opgave 5.10. Neem $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ met beeld in (c, d) en $G : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ met F differentieerbaar in $x_0 \in (a, b)$ en G differentieerbaar in $y_0 = F(x_0) \in (c, d)$. Vul de expansie voor $y = F(x)$ in in de expansie

$$G(y) = G(y_0) + G'(y_0)(y - y_0) + S(y)$$

en bewijs dat

$$x \rightarrow G(F(x))$$

differentieerbaar is in x_0 . Hint: de afgeleide in x_0 leest zich af uit

$$\begin{aligned} G(F(x)) &= G(y) = G(y_0) + G'(y_0)(F(x) - F(x_0)) + S(y) = \\ &= G(y_0) + G'(y_0)F'(x_0)(x - x_0) + G'(y_0)R(x) + S(y) \end{aligned}$$

Laat zien dat ook hier de (deels nog uit te werken) restterm de juiste eigenschappen heeft.

Opgave 5.11. Schrijf de lineaire benaderingen ook met $h = x - x_0$ en $k = y - y_0$ als $F(x_0) + F'(x_0)h$ en $G(y_0) + G'(y_0)k$ en zie hoe in de lineaire benadering

$$G(F(x_0 + h)) = G(F(x_0)) + G'(y_0)F'(x_0)h + o(h)$$

de term met h verschijnt door $k = F'(x_0)h$ te substitueren in $G'(y_0)k$. Anders gezegd, verifieer dat

$$h \xrightarrow{F'(x_0)} F'(x_0)h = k \xrightarrow{G'(y_0)} G'(y_0)k = G'(y_0)F'(x_0)h. \quad (5.3)$$

De coëfficiënt $G'(y_0)F'(x_0)$ van $h = x - x_0$ lezen we af als de afgeleide van $G(F(x))$ in x_0 .

Met $x = x_0 + h$ is h een coördinaat om het gedrag van $y = F(x)$ en dus ook van $k = F(x) - F(x_0)$ rond $(h, k) = (0, 0)$ te beschrijven. In de kettingregel hebben we met $y = F(x)$ en $z = G(y)$ voor

$$k = F(x) - F(x_0) \quad \text{en} \quad l = G(F(x)) - G(F(x_0))$$

de grafieken

$$k = F'(x_0)h + o(h) \quad \text{en} \quad l = G'(y_0)k + o(k) = G'(y_0)F'(x_0)h + o(h)$$

in het h, k -vlak, het k, l -vlak en het h, l -vlak rond respectievelijk $(h, k) = (0, 0)$, $(k, l) = (0, 0)$ en $(h, l) = (0, 0)$.

Opgave 5.12. Leg uit waarom Opgave 5.5 achteraf overbodig was. Gebruik de vorige opgaven om de eveneens overbodige quotiëntregel voor de afgeleide van

$$x \rightarrow \frac{G(x)}{F(x)}$$

in x_0 af te leiden in het geval dat $F(x_0) \neq 0$.

Opgave 5.13. Differentieerbaar in x_0 impliceert continu in x_0 en daarmee dat alle “nieuwe” functies hierboven onder de aannamen ook continu zijn in x_0 . Daarvoor was continuïteit van de ingrediënten natuurlijk voldoende. Formuleer en bewijs de voor de hand liggende uitspraken over continuïteit.

5.2 Mooie voorbeelden: machtreeksen

We doen even een voorbeeldje om te laten zien hoe we de analyse zo algebraïsch kunnen houden als maar kan. Neem $I = [-r, r]$ met $r > 0$, $F(x) = x^7$, vervang x_0 door a , $x_0 + h$ door x en maak voor dit geval (4.3) expliciet middels

$$x^7 = a^7 + 7a^6(x-a) + (x^5 + 2ax^4 + 3a^2x^3 + 4a^3x^2 + 5a^4x + 6a^5)(x-a)^2, \quad (5.4)$$

waarin we de afgeleide van x^7 in $x = a$ aflezen als de coëfficiënt van $x - a$.

Met $x - a$ in plaats van h is de algebra hier een stuk aangenamer, vooral omdat

$$x^7 - a^7 = (x - a)(x^6 + ax^5 + a^2x^4 + a^3x^3 + a^4x^2 + a^5x + a^6),$$

en de laatste factor met $x = a$ al de $7a^6$ geeft, waarna met een staartdeling het verschil van die factor met $7a^6$ is te schrijven als $(x - a)$ maal de grote factor in het rechterlid van (5.4). Leerzame *algebra* met een mooie uitkomst waar je meteen een patroon in ziet, en een formule voor de restterm herkent die je met inductie kunt bewijzen.

Opgave 5.14. Voor $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ en $x, a \in [-r, r]$ geldt dat

$$x^n = a^n + na^{n-1}(x - a) + R_{a,n}(x) \quad \text{met} \quad |R_{a,n}(x)| \leq \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} (x - a)^2.$$

Geef de formule voor $R_{a,n}(x)$ (bewijs die met inductie³ als je dat leuk vindt) en bewijs de schatting. Hint: Gebruik $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ met $n-1$.

We zien voor $n \geq 2$ dat x^n in a afgeleide na^{n-1} heeft omdat

$$(a + h)^n = a^n + na^{n-1}h + R(h; a),$$

met de expliciete resttermschatting

$$|R(h; a)| \leq \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} h^2 \leq \varepsilon |h| \quad \text{voor} \quad |h| \leq \delta = \frac{2\varepsilon}{n(n-1)r^{n-2}}.$$

Merk op dat voor $n = 0$ en $n = 1$ deze schatting minder relevant (en in deze vorm onjuist) is omdat in die twee gevallen $R(h; a) = 0$ voor alle h .

Voor een polynoom

$$P(x) = \sum_{n=0}^k \alpha_n x^n$$

van graad $k \geq 2$ gaat het net zo. Vermenigvuldig links en rechts in Opgave 5.14 met α_n en sommeer. Goed kijkend naar $n = 0, 1, 2$ volgt

$$P(x) = \sum_{n=0}^k \alpha_n x^n = \alpha_0 + \sum_{n=1}^k \alpha_n na^{n-1}(x - a) + \sum_{n=2}^k \alpha_n R_{a,n}(x),$$

waarin we

$$P'(a) = \sum_{n=1}^k n\alpha_n a^{n-1}$$

aflezen omdat

$$\left| \sum_{n=2}^k \alpha_n R_{a,n}(x) \right| \leq \sum_{n=2}^k |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} (x - a)^2 \leq \varepsilon |x - a|$$

³ Ontdekken zul je de formule daarmee zeker niet.

als

$$|x - a| \leq \delta \quad \text{met} \quad \delta \sum_{n=2}^k |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} = 2\varepsilon.$$

Maar ja, dan gaat het met (macht)reeksen precies hetzelfde. In

(copy/paste in latex, replace $\hat{k}$ by $\hat{\infty}$)

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n a^{n-1} (x - a) + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n R_{a,n}(x), \quad (5.5)$$

lezen we

$$P'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n a^{n-1} \quad (5.6)$$

af omdat

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n R_{a,n}(x) \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} (x - a)^2 \leq \varepsilon |x - a| \quad (5.7)$$

voor

$$|x - a| \leq \delta \quad \text{met} \quad \delta \sum_{n=2}^{\infty} |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} = 2\varepsilon. \quad (5.8)$$

De enige eis om te stellen is dat de reeksen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n a^{n-1}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}$$

convergeren en omdat $|x| \leq r$ en $|a| \leq r$ is dat via het gewoon convergent zijn van absoluut convergente reeksen en

$$1 \leq n \leq \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{1}{2} n^2 \quad (n \geq 2)$$

zeker het geval als

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\alpha_n| r^n \leq \infty. \quad (5.9)$$

Opgave 5.15. Bepaal voor de gevallen $\alpha_n = 1$, $\alpha_n = \frac{1}{n!}$ en $\alpha_n = n!$ het maximale interval waarop de machtreeks gegeven door (5.5) gedefinieerd is, en doe hetzelfde voor $P'(x)$.

In (5.9) is $r > 0$ nog variabel. Is voor een $r > 0$ aan (5.9) voldaan, dan is

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

differentieerbaar op $[-r, r]$, met (vervang a in (5.6) door x)

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \alpha_{n+1} x^n$$

voor alle $x \in [-r, r]$. De r -waarden waarvoor (5.9) geldt vormen een interval $I_2 \subset [0, \infty)$ met $0 \in I_2$.

Dit interval hangt niet heel erg sterk van de exponent 2 in (5.9) af. Voor elke $k \in \mathbb{N}$ is

$$I_k = \{r \geq 0 : \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\alpha_n| r^n \leq \infty\}$$

zo'n interval en ze zijn allemaal hetzelfde, maar net niet helemaal.

Opgave 5.16. Het is evident dat

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots,$$

want met grotere k zijn de termen in de reeks groter. Bewijs dat er een $R \in [0, \infty]$ is met de eigenschap dat voor elke $k \in \mathbb{N}$ geldt dat $I_k = [0, R)$ of $I_k = [0, R]$ en geef voorbeelden van $R = 0$, $R = 1$ en $R = \infty$.

De volgende stelling vat samen wat we nu weten.

Stelling 5.17. *Elke machtreeks*

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$$

met $\alpha_n \in \mathbb{R}$ voor $n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ heeft een convergentiestraal $R \in [0, \infty]$. Voor $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < R$ geldt dat de termen $\alpha_n x^n$ en $n \alpha_n x^{n-1}$ van de machtreeksen voldoende hard naar 0 gaan om absolute convergentie van zowel $P(x)$ als van

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \alpha_{n+1} x^n$$

te garanderen, waarbij p de afgeleide is van P op $\{x \in \mathbb{R} : |x| < R\}$ en P DE primitieve van p met $P(0) = \alpha_0$. Voor $x \in \mathbb{R}$ met $|x| > R$ zijn de termen van beide machtreeksen onbegrensd en de machtreeksen dus allebei niet convergent.

Op het met hoofdletters gedrukte DE komen we nog even terug. Zonder verdere voorkennis zouden we hier tevreden moeten zijn met de uitspraak dat $P(x)$, met een vrije keuze voor α_0 , de enige machtreeks is die $p(x)$ als afgeleide machtreeks heeft. Merk op dat Stelling 5.17 eigenlijk een uitspraak is over P en p samen. Dat voor $|x| < R$ de enige vrijheidsgraad die er is in de primitieve van p overeenkomt met de waarde van (de constante term) $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ is hier in eerste instantie een uitspraak over machtreeksen.

Het zou natuurlijk kunnen zijn dat er nog andere primitieve functies zijn. In het eenvoudigste voorbeeld dat $p(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ leidt dit tot de vraag of er functies zijn die differentieerbaar zijn op een interval met afgeleide overal nul, maar zelf niet constant. Je bent het misschien vergeten, maar het antwoord op die vraag was gelukkig al nee, zie Stelling 4.5 en verder.

Met uitdrukkingen zoals $P(x)$ kunnen we nu eenvoudige differentiaalvergelijkingen oplossen. Bijvoorbeeld de *differentiaalvergelijking*

$$F'(x) = F(x). \quad (5.10)$$

Welke functies zijn differentieerbaar met afgeleide gelijk aan zichzelf? Probeer maar een machtreeks. Term voor term uitschrijven helpt om te zien wat er gebeurt. Als

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \alpha_6 x^6 + \alpha_7 x^7 + \dots$$

met convergentiestraal R dan is voor $|x| < R$ de afgeleide gelijk aan

$$P'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + 4\alpha_4 x^3 + 5\alpha_5 x^4 + 6\alpha_6 x^5 + 7\alpha_7 x^6 + 8\alpha_8 x^7 + \dots,$$

en dus is

$$P'(x) - P(x) = (\alpha_1 - \alpha_0) + (2\alpha_2 - \alpha_1)x + (3\alpha_3 - \alpha_2)x^2 + (4\alpha_4 - \alpha_3)x^3 + \dots,$$

hetgeen alleen maar 0 is als

$$0 = \alpha_1 - \alpha_0 = 2\alpha_2 - \alpha_1 = 3\alpha_3 - \alpha_2 = 4\alpha_4 - \alpha_3 = \dots!$$

Het uitroepteken staat er niet voor niets bij. Een waarheid als een koe. Toch? Of niet? Ja, wel!

Opgave 5.18. Neem aan dat $r > 0$ en dat $P(x)$ convergent is voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < r$, en dat $P(x) = 0$ voor al die x . Waarom is $\alpha_0 = 0$? Haal vervolgens x buiten haakjes en concludeer dat $\alpha_1 = 0$, waarom? Etc.

Toegepast op de verschilmachtreeks zien we de recurrente betrekking

$$\alpha_n = \frac{\alpha_{n-1}}{n}$$

verschijnen. Als bijvoorbeeld $\alpha_0 = 1$ worden de volgende coëfficiënten gegeven door

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{1}{2} \frac{1}{3}, \alpha_4 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4}, \dots,$$

m.a.w.

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Stelling 5.19. *Laat $r > 0$. De enige machtreeks die voldoet aan zowel $P'(x) = P(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < r$ als aan $P(0) = 1$ is*

$$P(x) = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \dots$$

Opgave 5.20. Laat zien dat de reeks in Opgave 5.19 voor elke $x \in \mathbb{R}$ convergent is. De machtreeks heeft dus convergentiestraal $R = \infty$ en is zijn eigen afgeleide.

Definitie 5.21. *Voor een functie $F : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zeggen we dat $F(x) \rightarrow 0$ als $x \rightarrow \infty$, als er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\xi \in [a, \infty)$ bestaat waarmee geldt:*

$$x \geq \xi \implies |F(x)| \leq \varepsilon.$$

Opgave 5.22. Laat zien dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\frac{x^n}{\exp(x)} \rightarrow 0 \quad \text{als } x \rightarrow \infty,$$

de bekende standaardlimiet die zegt dat $\exp(x)$ het wint van elke macht van x .

5.3 De natuurlijke logaritme

Expliciete schattingen zijn handig als je sommen wil nemen zoals in de stap van monomen x^n naar machtreeksen als in (5.5). Bijvoorbeeld om de vraag te beantwoorden voor welke $x \in \mathbb{R}$ de Laurentreeks

$$L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n x^n = \dots + \frac{\alpha_{-2}}{x^2} + \frac{\alpha_{-1}}{x} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$$

convergent is en term voor term gedifferentieerd kan worden, met $|x|$ niet te groot voor de positieve machten en $|x|$ niet te klein voor de negatieve machten. Verzin hiertoe eerst maar een mooie variant op (5.4) in de vorm

$$\frac{1}{x^7} = \frac{1}{a^7} - \frac{7}{a^8}(x - a) + R_a(x).$$

Misschien doe je dit liever eerst voor de functie

$$x \rightarrow \frac{1}{x},$$

die bij de omgekeerde operatie (primitiveren) meteen het buitenbeentje is, want geen afgeleide van een algebraïsche functie!

Definitie 5.23. Voor $x > 0$ wordt $\ln x$, de natuurlijke logaritme van x , wat onnatuurlijk gedefinieerd door

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{s} ds.$$

Opgave 5.24. Leidt rechtsreeks uit de definities af dat voor $0 < a < b$, $f \in \text{RI}([a, b])$ en $c > 0$ geldt dat

$$\int_a^b (f(x) dx) = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f\left(\frac{x}{c}\right) dx,$$

en gebruik dit om voor $x > 1$ en $y > 1$ de integraal voor $\ln y$ te schrijven als integraal van x tot xy . Concludeer dat

$$\ln xy = \ln x + \ln y.$$

Bewijs dat deze identiteit geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}^+$. Hint: laat apart zien dat

$$\ln x + \ln \frac{1}{x} = 0$$

voor alle $x > 0$.

Opgave 5.25. Uit de definitie volgt dat $\ln$ een strict stijgende functie is op $\mathbb{R}^+$. Bewijs en gebruik de ongelijkheid

$$\ln n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

om te laten zien⁴ dat $\ln x \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow \infty$. Geef daarvan en daartoe ook een definitie zoals Definitie 5.21. Wat geldt er voor $x \rightarrow 0$?

⁴ Kijk nog even naar (1.22).

Opgave 5.26. Vanwege Opgave 5.25 en Stelling 4.16 heeft $\ln$ een inverse functie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Laat zie dat uit de stelling ook volgt dat $F(0) = 1$ en $F'(y) = F(y)$ voor alle $y \in \mathbb{R}$. Leg uit waarom $\ln$ maar één inverse functie kan hebben en concludeer dat $F = \exp$.

Opgave 5.27. Laat zien dat $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$, en dat met $e = \exp(1)$ gedefinieerd door

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{x} dx = 1$$

geldt dat

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}$$

voor alle $p \in \mathbb{Z}$ en alle $q \in \mathbb{N}$. Bij afspraak is $e^x = \exp(x)$ ook voor alle andere $x \in \mathbb{R}$.

Waarom die afspraak? In Opgave 5.27 zijn machten van e^x van e eerst voor $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ uitgewerkt. Voor zulke x vallen $\exp(x)$ en e^x dus samen. Omdat $x \rightarrow \exp(x)$ een differentieerbare en dus continue functie is geldt nu dat $e^r = \exp(r) \rightarrow \exp(x)$ als $r \rightarrow x$ langs $r \in \mathbb{Q}$, hetgeen de algemene consensus dat e^x als limiet van e^r gedefinieerd MOET worden wel rechtvaardigt: bij deze is e^x dus voortaan gelijk aan $\exp(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Over de uitspraak e tot de macht x kan in rede⁵ getwist worden.

Voor machten x^α van een willekeurige $x > 0$ is het verhaal precies hetzelfde. Met de hierboven gevonden rekenregels voor $\exp$ en $\ln$ is eerst

$$x^n = (e^{\ln x})^n = e^{n \ln x}$$

voor $n \in \mathbb{N}$, vervolgens leid je af dat $n \in \mathbb{N}$ door $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ vervangen mag worden en eenzelfde consensus als voor de e -macht is nu gerechtvaardigd:

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad \text{voor } x > 0 \quad \text{en } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

Het is leuk om daar even reëel mee te spelen. De volgende twee opgaven zijn een eerste kennismaking met *asymptotische formules*. De notatie

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{voor } x \rightarrow a \quad (5.12)$$

⁵ Over e tot de macht πi niet natuurlijk, komt geen machtsverheffen bij van pas.

betekent bij afspraak dat

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \quad \text{als} \quad x \rightarrow a,$$

waarbij voor a bijvoorbeeld 0 of ∞ mag worden gelezen. Zulke formules worden ook gebruikt met $n \in \mathbb{N}$ i.p.v. $x \in \mathbb{R}$. Bijvoorbeeld

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{als} \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.13)$$

de formule van *Stirling* waarover we hier iets minder uitgebreid dan in [HM] nog over komen te spreken.

Als wat links van het $\sim$ teken lastig te doorgronden is en de rechterkant wel transparant is dan kunnen dit soort uitspraken bijzonder nuttig zijn. Kwestie van smaak soms, want de keuze van $g(x)$ ligt uiteraard niet vast.

Opgave 5.28. Onderzoek de functie $F : x \rightarrow x^x$ met $x \in \mathbb{R}^+$ m.b.v. de definitie in (5.11). Schets de grafiek. Bepaal een zo simpel mogelijke functie $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ zodanig dat

$$F(x) - 1 \sim xg(x)$$

als $x \rightarrow 0$, i.e.

$$\frac{F(x) - 1}{xg(x)} \rightarrow 1.$$

Als we $F(0) = 1$ stellen is F dan (rechts)differentieerbaar in $x = 0$?

Opgave 5.29. Omdat x^x strict stijgend is in x als x voldoende groot is (groter dan wat?) heeft $x \rightarrow x^x$ een inverse functie $y \rightarrow f(y)$ gedefinieerd voor y voldoende groot. Laat zien dat f gedefinieerd is door de vergelijking $x \ln x = \ln y$, breng $\ln x$ naar de andere kant en gebruik de formule die je dan krijgt voor x weer in de rechterkant teneinde een zo simpel mogelijke $g(y)$ te vinden zodanig dat

$$f(y) \sim \frac{\ln y}{g(y)}$$

als $y \rightarrow \infty$. Hint: uitdrukkingen met x en y die je naar 1 wil laten gaan kun je in x uitdrukken en vervolgens via $t = \ln x$ en Opgave 5.22 behandelen.

5.4 Zijstapje: tetratie

Dit is een verhaaltje over a tot de macht a tot de macht a tot de macht a en ga zo maar door, dat voor $a > 1$ niet alleen in verband staat met een echte⁶ toepassing, maar ook voor $a \rightarrow 0$ laat zien hoe a tot de macht a tot de macht a tot huppeldepup maar niet kan kiezen tussen 0 en 1.

Neem daartoe voor $a > 0$ de rij gegeven door

$$x_0 = 1, \quad x_1 = a, \quad x_2 = a^a, \quad x_3 = a^{a^a}, \quad x_4 = a^{a^{a^a}}, \dots,$$

dus x_n , notatie ook wel $x^n = {}^n a$, is gedefinieerd door

$$x_n = a^{x_{n-1}} = F_a(x_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{met} \quad x_0 = 1.$$

Een zogenaamd *discreet dynamisch systeem* waarbij de afbeelding

$$x \rightarrow F_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

wordt geitereerd.

Opgave 5.30. Voor $a > 1$ is er een kritieke waarde $a = a_c$ waarvoor de grafiek $y = F_a(x)$ de diagonaal $y = x$ in het x, y -vlak raakt⁷. Bepaal a_c en de limiet van de rij ${}^n a_c$ voor $n \rightarrow \infty$. Bewijs de uitspraken die je doet.

Opgave 5.31. Laat zien dat de vergelijking $F_a(x) = x$ voor $1 < a < a_c$ twee oplossingen $\underline{a} < \bar{a}$ heeft, en dat de rij ${}^n a$ voor $n \rightarrow \infty$ naar $\underline{a}$ convergeert. Laat zien dat voor $a > a_c$ de rij ${}^n a$ naar oneindig gaat als $n \rightarrow \infty$.

Opgave 5.32. Laat zien dat de vergelijking $F_a(x) = x$ voor $0 < a < 1$ één oplossing $x = \underline{a}$ heeft, en dat de rij ${}^n a$ voor $n \rightarrow \infty$ naar $\underline{a}$ convergeert als $a > a^*$ met a^* gegeven door een conditie op $F'_a(\underline{a})$. Wat is die conditie? Bepaal a^* exact.

Opgave 5.33. Laat zien dat voor $0 < a < a^*$ de rij ${}^{2n} a$ convergeert naar één van de drie oplossingen van de vergelijking $F_a(F_a(x)) = x$ die geen oplossing is van $F_a(x) = x$, en dat de rij ${}^{2n-1} a$ naar de andere oplossing convergeert. Noem die limieten $\bar{b}$ en $\underline{b}$. Deze hangen van a af. Wat gebeurt er met $\bar{b}$ en $\underline{b}$ als $a \rightarrow 0$?

⁶ Vraag het Henk Knoester van Tejin Twaron of anders Federico Camia (die zag het).

⁷ Lees: $F_a(x) = x, F'_a(x) = 1$.

5.5 Meer differentiaalvergelijkingen

De machtreeks voor $\exp(x)$ als oplossing van een differentiaalvergelijking smaakt naar meer.

Stelling 5.34. *Laat $r > 0$. De enige machtreeks die voldoet aan zowel $P''(x) + P(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| < r$, als aan $P(0) = 0$ en $P'(0) = 1$, is*

$$P(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots.$$

Opgave 5.35. Bewijs Stelling 5.34. Schrijf $P(x)$ in de fatsoenlijke somnotatie zonder stippels. Wat is de convergentiestraal? Wat is de afgeleide van $\sin$? Noem deze functie maar $\cos$. Wat is de afgeleide van $\cos$?

Dat $\exp(x)$, $\sin x$, $\cos x$ zijn⁸ wat ze, moeten zijn, namelijk $e = \exp(1)$ tot de macht x , en sinus en cosinus van een hoek x in radialen, is nog niet meteen duidelijk⁹. Ook willen we wel even zeker weten dat er geen andere functies dan deze machtreeksen zijn met de eigenschappen die $\exp(x)$, $\cos x$, $\sin x$ als machtreeks uniek definiëren. Eenzelfde vraag is reeds beantwoord voor functies met de eigenschap dat $F'(x) = 0$ voor alle x met $|x| < r$.

De eigenschappen van $\cos$ en $\sin$ zijn natuurlijk te halen uit het feit dat de reeksen van $\cos x$ en $\sin x$ net als die voor $\exp(x)$ absoluut convergent zijn voor alle $x \in \mathbb{R}$ en dus uitvermenigvuldigd¹⁰ kunnen worden. Dat is wat gepriegel.

Opgave 5.36. Laat zien dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

door voor $\cos x$ en $\sin x$ de machtreeksen in te vullen, de kwadraten¹¹ uit te werken en op te tellen.

⁸ We zouden eigenlijk $\sin(x)$ en $\cos(x)$ moeten schrijven, maar dat doet vrijwel niemand.

⁹ Voor $\exp$ inmiddels wel, maar alleen dankzij $\ln$.

¹⁰ Bewijs (met Stelling 3.18) en gebruik daarna dat voor absoluut convergente reeksen

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}\right). \quad (5.14)$$

¹¹ Lees $\cos^2 x = (\cos x)^2$ en idem voor $\sin$.

Opgave 5.37. Bewijs de gelijkheid in Opgave 5.36 zonder al dat rekenwerk door op te merken dat $\cos^2 x$ en $\sin^2 x$ als kwadraten van machtreeksen weer machtreeksen zijn. Hint: hun som is dus ook een machtreeks. Wat weet je via Opgave 5.34 van de afgeleide van die machtreeks? Dus?

Bovenstaande opgaven zijn nuttige oefeningen¹², maar inzicht bieden ze niet echt. De machtreeksen zijn oplossingsformules voor een differentiaalvergelijking die met $F''(x) + F(x) = 0$ een notatie heeft die de tenen van een natuurkundige terecht doen krommen. Dit is namelijk de vergelijking voor een harmonische oscillator die we bij voorkeur schrijven als

$$\ddot{x} + x = 0,$$

waarin x de afhankelijke grootheid (plaats) is en t de onafhankelijke grootheid, die overeenkomt met wat wiskundigen de hoek in radialen noemen. Dus $x = x(t)$ en $\ddot{x}$ staat voor de tweede afgeleide van $t \rightarrow x(t)$. Oplossingen zijn periodiek met periode 2π . Het verband met cirkels en met name *eenparige* cirkelbewegingen¹³ via $y = -\dot{x}$ in het x, y -vlak is natuurlijk de moeite van het bespreken waard en we verwijzen in dit verband naar [HM].

Met name omdat formules als

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

en de vorm van de grafiek van $x = \sin t$ in het t, x -vlak bij voorkeur uit de differentiaalvergelijking gehaald worden en juist niet uit de oplossingsformules. Maar voor wie meer wil rekenen met zulke formules, het is zeker niet verboden, zeer leerzaam zelfs:

Opgave 5.38. Bewijs met de theorie tot nu toe door middel van o.a. machtsreeksberekeningen dat $\sin$ een periodieke functie is met een periode die we wel 2π mogen noemen, en dat $-\sin(-x) = \sin x = \sin(\pi - x) > 0$ voor $0 < x < \pi$. Schets de grafiek van $\sin$.

Terug naar de differentiaalvergelijking $F'(x) = F(x)$: wat nog niet duidelijk is of er nog andere oplossingen zijn dan machtreeksoplossingen. Te prefereren is wellicht een directe uitspraak dat oplossingen van zulke differentiaalvergelijkingen altijd wel machtreeksen moeten zijn. Voor nu is het echter de

¹² En aanbevolen voor wie niet van formules houdt.

¹³ Zie op Valentijnsdag 2017 de Bildungsscheurkalender van Henk Sissing.

(later wellicht overbodige¹⁴) vraag of een functie F die aan $F'(x) = F(x)$ voldoet op een interval I , op dat interval nulpunten kan hebben, zonder¹⁵ op dat zelfde interval de nulfunctie te zijn.

We beantwoorden die vraag nu door juist te kijken naar oplossingen die ergens positief zijn (voor negatief is het argument hetzelfde door naar $-F(x)$ te kijken).

Opgave 5.39. Laat $I \subset \mathbb{R}$ een open interval zijn en $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar met $F'(x) = F(x)$ voor alle $x \in I$ en $(a, b) \subset I$ een maximaal open interval waarop $F(x) > 0$. Dan is $(a, b) = I$. Bewijs dit door de vergelijking op te lossen via scheiding van variabelen onder de aanname dat $F(x) > 0$, gebruikmakend van ondermeer Opgave 5.10 en

$$F'(x) = F(x) \iff \frac{F'(x)}{F(x)} = 1 \iff \ln(F(x)) = x + C \iff F(x) = e^{x+C}$$

Opgave 5.40. Dezelfde vraag als in Opgave 5.39 maar nu voor $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ die voldoet aan $F'(x) = F(x)g(x)$ met $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Los de differentiaalvergelijking ook weer (zoals dat op school genoemd wordt) exact op m.b.v. een primitieve G van g .

Opgave 5.41. Voor $\alpha \in \mathbb{R}$ voldoet de functie $F_\alpha : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ gedefinieerd door $F_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$ aan een differentiaalvergelijking zoals in Opgave 5.40. Schrijf deze in de vorm $(1+x)F'(x) = \alpha F(x)$ en bepaal een machtreeksoplossing van de vorm

$$1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Schrijf de coëfficiënten in een vorm waarmee je in het geval $\alpha = n \in \mathbb{N}$ het binomium van Newton herkent. De convergentiestraal van deze machtreeks (voor $\alpha \notin \mathbb{N}_0$) is $R = 1$. Kun je dat aantonen? Waarom volgt nu dat $F_\alpha(x)$ (alleen) voor $|x| < 1$ gelijk is aan de machtreeks¹⁶ die je net hebt uitgerekend?

¹⁴ Dat zijn soms de belangrijkste vragen...

¹⁵ Als je weet dat $F(x+y) = F(x)F(y)$ ben je natuurlijk wel meteen klaar.

¹⁶ Om echt te onthouden is $\alpha = -1$, ook $\alpha = \pm \frac{1}{n}$ komt vaak van pas.

Opgave 5.42. Schrijf een paar termen uit van¹⁷

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n} + \cdots \quad \text{en} \quad \frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} = 1 - \frac{x}{n} + \cdots$$

Bovenstaande opgaven bevatten ad hoc argumenten om de oplossing van een eerste orde lineaire differentiaalvergelijking gegeven een randvoorwaarde als machtreeks te identificeren. Voor vergelijkingen als $F''(x) + F(x) = 0$ gaat het rekenwerk net zo, maar zijn de ad hoc argumenten wat anders, een reden te meer om de ad hoc redeneringen te vervangen door een aanpak gebaseerd op integraalvergelijkingen, die we oplossen in de vectorruimte van continue functies op gesloten begrensde intervallen, in $C([a, b])$ dus. Dat doen we in Sectie 7.4.

Een alternatieve vraag om wellicht hier al te stellen blijft hoe je van een functie gedefinieerd als oplossing van zo'n integraalvergelijking, bijvoorbeeld

$$F(x) = 1 + \int_0^x F(s) ds, \quad (5.15)$$

meteen ziet dat de functie, in ieder geval voor $|x|$ kleiner dan een te bepalen en zo groot mogelijke r , gegeven wordt door een ondubbelzinnig gedefinieerde machtreeks.

5.6 Meer inverse functies

In Sectie 4.3 hadden we nog niet zoveel functies tot onze beschikking, maar nu wel. Hier volgen wat opgaven om de belangrijkste functies de revue te laten passeren.

Opgave 5.43. Laat zien dat de functie

$$x \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

strict stijgend is op $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ en een inverse

$$y \rightarrow \arctan y$$

heeft op $\mathbb{R}$ met afgeleide

$$\frac{1}{1+y^2}$$

¹⁷ Zie weer [Eves, §2.5] over het gebruik van zulke reeksen voor YBC7289?

en leid hieruit af dat

$$\arctan y = y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 - \dots$$

voor $|y| < 1$.

Opgave 5.44. Laat zien dat de functie

$$x \rightarrow \sin x$$

strict stijgend is op $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ en een inverse

$$y \rightarrow \arcsin y$$

heeft op $(-1, 1)$ met afgeleide

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

en leid hieruit een machtreeks af voor $\arcsin y$ voor $|y| < 1$.

Opgave 5.45. Ook

$$x \rightarrow \cos x$$

is strict monotonoon op een maximaal open interval, bijvoorbeeld op $(0, \pi)$. Laat zien dat voor de inverse geldt dat $\arccos y + \arcsin y$ constant is op $(-1, 1)$. Wat is de constante?

5.7 Rare voorbeelden

Er zijn ook functies $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die in elke $x_0 \in [a, b]$ differentieerbaar zijn met een afgeleide $F'(x_0)$, waarvoor $F' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wel als functie

$$x \rightarrow F'(x) \tag{5.16}$$

is gedefinieerd maar niet in $C([a, b])$ zit. Dat komt omdat de meest *vreemde functies* differentieerbaar kunnen zijn.

Opgave 5.46. Als $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie is die continu is in $x = 0$ met waarde $g(0) = 0$, dan is de functie $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $R(x) = xg(x)$ differentieerbaar in $x = 0$ met afgeleide $R'(x) = 0$. Laat dit zien rechtstreeks vanuit Definitie 4.1.

Voor de functie g in Opgave 5.46 kun je bijvoorbeeld $g(x) = 0$ voor $x \in \mathbb{Q}$ en $g(x) = x$ voor $x \notin \mathbb{Q}$ nemen. Zo krijg je een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die in geen enkele $x \neq 0$ continu is maar wel differentieerbaar is in $x = 0$.

Opgave 5.47. Definieer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(0) = 0$ en (voor $x \neq 0$)

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}.$$

Laat zien dat f in elke $x \in \mathbb{R}$ differentieerbaar is maar dat $f'(x)$ niet eens begrensd is op het interval $[0, 1]$. Hint: gebruik dat de functies $\cos$ en $\sin$ periodiek zijn maar niet constant.

Opgave 5.48. Definieer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $f(0) = 0$ en (voor $x \neq 0$)

$$\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Schets de grafiek van f . Laat met de theorie tot nu toe zien dat f afgeleiden $f', f'', \dots$ van iedere orde heeft en dat in $x = 0$ alle afgeleiden van f gelijk zijn aan 0.

5.8 Stirling's formule via schalen en limieten

We hebben partieel integreren in Sectie 4.10 gebruikt om Taylorbenaderingen te maken, maar partieel integreren wordt natuurlijk ook gebruikt om gewoon integralen uit te rekenen. Een mooi voorbeeld is de integraalformule voor $n!$ met $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 5.49. Bereken

$$\int_0^\infty \exp(-x) dx, \quad \int_0^\infty x \exp(-x) dx, \quad \int_0^\infty x^2 \exp(-x) dx, \quad \int_0^\infty x^3 \exp(-x) dx,$$

en geef voor $n!$ een integraalformule¹⁸. NB Dit zijn zogenaamde oneigenlijke integralen, zie Definitie 2.43. Lees dus

$$\int_0^\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R$$

en doe daar verder vooral niet te moeilijk over (maar leg wel uit welke al behandelde standaardlimiet je steeds gebruikt).

¹⁸ Het is niet verboden om die formule met inductie te bewijzen hoor.

Met Opgave 5.49 komen we nu terug op (5.13). Waar die formule vandaan komt wordt aanstonds duidelijk.

Opgave 5.50. Schets de grafiek $y = x^n e^{-x}$ (voor n nog niet te groot) in het x, y -vlak. Waar ligt de top van de berg? *Teken plaatje!*

Opgave 5.51. Door de in Opgave 5.49 gevonden integraal voor $n!$ met het maximum van de integrand te schalen en horizontaal te schuiven volgt dat

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-n}^{\infty} g_n(x) dx$$

met

$$g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x}$$

Laat dit zien m.b.v. (5.11) en schets de nieuwe grafiek $y = g_n(x)$.

Opgave 5.52. De eerste factor van $g_n(x)$ is de rente op rente benadering van e^x die in [HM] in detail wordt besproken alvorens $\exp(x)$ wordt gedefinieerd als de puntsgewijze limiet van

$$e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

voor $n \rightarrow \infty$. Verifieer deze limiet met wat je nu aan tools tot je beschikking hebt, en ook dat $e_n(x)$ stijgt met n voor $x > -n$.

Bijgevolg stijgt $g_n(x)$ dus naar 1 voor elke $x \in \mathbb{R}$. Omdat $g_n(x)$ stijgend is in x voor $x \in [-n, 0]$ en dalend in x voor $x \geq 0$ is wel duidelijk dat

$$\int_{-n}^{\infty} g_n(x) dx \rightarrow \infty$$

als $n \rightarrow \infty$. Kunnen we het gebied waarvan deze integraal de oppervlakte geeft horizontaal schalen (met een n -afhankelijke schaafactor) teneinde wel een eindige limiet te krijgen?

Opgave 5.53. Schrijf daartoe

$$g_n(x) = e^{-\psi_n(x)} \quad \text{met} \quad \psi_n(x) = -\ln(g_n(x)),$$

en verifieer dat

$$\psi_n(x) = x - n \ln(1 + \frac{x}{n}) = n(\frac{x}{n} - \ln(1 + \frac{x}{n})) = n\psi_1(\frac{x}{n}).$$

De rij functies ψ_n ontstaat dus door schalen uit één en dezelfde functie $\Psi = \psi_1$, en die functie heeft als formulevoorschrift

$$\Psi(x) = x - \ln(1 + x). \quad (5.17)$$

Hoe ziet de grafiek van Ψ eruit? Je weet al dat $\Psi(0) = \Psi'(0) = 0$ omdat $g_n(x)$ een maximum ter grootte 1 heeft in $x = 0$. Omdat

$$\Psi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \sim x$$

als $x \rightarrow 0$, volgt voor Ψ zelf dat

$$\Psi(x) \sim \frac{1}{2}x^2$$

als $x \rightarrow 0$. De grafiek van Ψ wordt verder gekenmerkt door een verticale asymptoot bij $x = -1$ en bijna-lineaire groei voor $x \rightarrow \infty$.

Wel een schetsje waard deze grafiek maar belangrijker is dat voor ψ_n nu geldt dat

*Teken
plaatje!*

$$\psi_n(x) = n\Psi(\frac{x}{n}) \sim \frac{x^2}{2n},$$

niet alleen voor $x \rightarrow 0$, maar ook voor $\frac{x}{n} \rightarrow 0$, hetgeen steeds grotere x toelaat, maar waarbij in de limiet $n \rightarrow \infty$ niets overblijft.

Een schaling waarbij wel wat overblijft lezen we onmiddellijk af. We moeten x zo schalen dat de n in het rechterlid verdwijnt, en dus substitueren we $x = s\sqrt{n}$. Met deze schaling volgt nu dat

$$n! = (\frac{n}{e})^n \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}})} ds \quad (5.18)$$

In de integrand zien we een nieuwe anders geschaalde versie van Ψ , die we zo hebben gekozen dat voor elke n geldt dat

$$n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{2}s^2, \quad (5.19)$$

nu niet alleen voor $s \rightarrow 0$, maar ook voor $\frac{s}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$. Het fraaie is dat met grotere n deze geschaalde $\Psi(s)$ steeds meer op zijn kwadratische benadering

bij $s = 0$ gaat lijken. We zoomen zó in op de oorsprong dat in de limiet alleen de parabool overblijft, juist omdat we (de grafiek van) Ψ verticaal en horizontaal anders schalen. De schaling is zo gekozen dat $\frac{1}{2}s^2$ van schalen niets merkt en in de limiet $n \rightarrow \infty$ wordt het linkerlid in (5.19) gelijk aan het rechterlid. De linkergrens van de integraal schuift daarbij op naar $-\infty$.

Wat we nu nog moeten doen om te kunnen concluderen dat

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \quad (5.20)$$

als $n \rightarrow \infty$ is bewijzen dat

$$\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} e^{-n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}})} ds \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \quad (5.21)$$

als $n \rightarrow \infty$. Puntsgewijs geldt weliswaar dat

$$f_n(s) = e^{-n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}})} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}s^2}$$

als $n \rightarrow \infty$, maar dat op zich is niet genoeg om (5.21) te kunnen concluderen.

Opgave 5.54. Bereken de afgeleide van $f_n(s)$ naar n voor vaste s en laat zien dat deze afgeleide een teken heeft dat alleen van het teken van s afhangt. Hint: gebruik de formule voor Ψ pas op het allerlaatst.

We zien nu dat, net als hun integranden, de integralen

$$\int_{-\sqrt{n}}^0 e^{-n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}})} ds \quad \text{en} \quad \int_0^{\infty} e^{-n\Psi(\frac{s}{\sqrt{n}})} ds$$

stijgend respectievelijk dalend zijn in n . Zijn deze rijen convergent met limiet respectievelijk

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \quad \text{en} \quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds?$$

Een positief antwoord vertelt ons dan dat (5.20) waar is, en alleen de limiet-integraal zelf moet dan nog worden uitgerekend. Wat we nodig hebben zijn een paar niet te moeilijke stellingen over het *verwisselen van integralen en limieten*.

5.9 Makkelijke convergentiestellingen

Opgave 5.55. We bekijken nu eerst het geval van eindige intervallen $[a, b]$ en integralen van rijen functies $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$\forall x \in [a, b] \quad 1 \leq n_1 \leq n_2 \implies f_{n_1}(x) \leq f_{n_2}(x),$$

en

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a \leq x_1 \leq x_2 \leq b \implies f_n(x_1) \leq f_n(x_2).$$

Neem aan dat zo'n rij f_n begrensd is. Bewijs rechtstreeks vanuit de definitie met onder- en bovensommen van de integraal voor monotone functies dat

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx,$$

waarbij $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Er zijn nog drie versies van deze stelling. Welke drie?

Merk op dat we niets aannamen over het teken van $f_n(x)$. In de volgende opgave doen we dat wel.

Opgave 5.56. We bekijken nu het geval van het interval $[0, \infty)$ en integralen van rijen functies $f_n : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ met

$$\forall x \in [0, \infty) \quad 1 \leq n_1 \leq n_2 \implies f_{n_1}(x) \geq f_{n_2}(x),$$

en

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \implies f_n(x_1) \geq f_n(x_2).$$

Neem aan dat

$$\int_0^\infty f_1(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f_1(x)dx$$

bestaat. Bewijs rechtstreeks vanuit de definities dat dan

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x)dx,$$

waarbij

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Van deze stelling zijn er geen drie versies omdat positieve monotoon stijgende functies niet integreerbaar zijn op $[0, \infty)$ en ook omdat het geval f_n stijgend echt anders is.

Opgave 5.57. Formuleer en bewijs een bruikbare stelling als in Opgave 5.56 voor rijen functies met

$$\forall x \in [0, \infty) \quad 1 \leq n_1 \leq n_2 \implies f_{n_1}(x) \leq f_{n_2}(x),$$

en

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \implies f_n(x_1) \geq f_n(x_2).$$

Opgave 5.58. Bewijs (5.20) met behulp van de laatste twee opgaven.

6 Analyse met meer variabelen

In dit hoofdstuk doen we vooral differentiaal- en wat integraalrekening voor functies van meer variabelen. We beginnen in $\mathbb{R}^2$ met rechthoekige coördinaten $x, y \in \mathbb{R}$ en maken veelvuldig gebruik van de transformatie

$$x = r \cos \theta;$$

$$y = r \sin \theta,$$

waarmee punten $(x, y) \neq (0, 0)$ in het vlak via hun afstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ tot de oorsprong $(0, 0)$ en hoek θ tussen de halfrechte

$$\{(tx, ty) : t \geq 0\}$$

en de positieve x -as beschreven worden. Ook identificeren we indien gewenst $\mathbb{R}^2$ met de verzameling $\mathbb{C}$ van de *complexe getallen*

$$z = x + iy$$

en schrijven $|z| = r$ voor wat de *absolute waarde* van z genoemd wordt, de afstand van z tot de oorsprong $z = 0$. De hoek $\theta = \arg z$ heet het *argument* en is voor iedere $z \neq 0$ modulo 2π uniek bepaald.

Naast de gewone optelling

$$w + z = (u + iv) + (x + iy) = u + x + i(v + y) = (u + x, v + y) = (u, v) + (x, y)$$

is er de wat complexere vermenigvuldiging

$$wz = (u + iv)(x + iy) = ux - vy + i(uy + vx) = (ux - vy, uy + vx) = (u, v)(x, y)$$

gebaseerd op de rekenregel $i^2 = -1$, voor $w = u + iv = (u, v)$ en $z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Hiermee wordt $\mathbb{C}$ een lichaam¹ dat algebraïsch gesloten is. Erg fijn is het regeltje dat bij vermenigvuldigen van twee complexe getallen de absolute waarden vermenigvuldigd en de argumenten opgeteld moeten worden om absolute waarde en argument van het produkt te krijgen.

Opgave 6.1. Schrijf $z_j = r_j(\cos \theta_j + i \sin \theta_j)$ voor $j = 1, 2$ en gebruik de somregels voor cos en sin om te laten zien dat

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Dit regeltje is een van de vele redenen om

$$\cos \theta + i \sin \theta = \exp(i\theta)$$

te schrijven en $\exp(z) = \exp(x) \exp(iy)$.

¹ Lees: heeft dezelfde rekenregels als $\mathbb{R}$. Ook geldt $|w + z| \leq |w| + |z|$ en $|wz| = |w| |z|$.

De poolcoördinaten zijn overigens niet nodig² om tot het inzicht te komen dat voor vaste $\gamma \in \mathbb{C}$ de afbeelding

$$z \rightarrow \gamma z \quad (6.1)$$

een draaivermenigvuldiging is, zie (6.11) en Opgave 6.4.

6.1 Zijstapje: de hoofdstelling van de algebra

De uitspraak dat $\mathbb{C}$ algebraïsch gesloten is betekent dat elk polynoom

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k z^k + z^n \quad (6.2)$$

met $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ en $n \geq 2$ een nulpunt $z_1 \in \mathbb{C}$ heeft, en vervolgens geldt met dank aan de staartdeling dat

$$P(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k + z^n = (z - z_1)Q(z)$$

waarin

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n-2} \beta_k z^k + z^{n-1},$$

met $\beta_0, \dots, \beta_{n-2} \in \mathbb{C}$. Herhaald toepassen geeft

$$P(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k) \quad \text{met} \quad z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}. \quad (6.3)$$

Deze uitspraak wordt helaas de *hoofdstelling van de algebra* genoemd. Een sympathieke wiskundige geboren in Reeuwijk heeft meer dan 50 verschillende bewijzen van deze stelling verzameld. Geen daarvan is echt algebraïsch en het bewijs dat nu volgt is er daar één van. Ik vond het toen ik probeerde het standaardbewijs met complexe functies te vermijden. Dat complexe bewijs zie je doorgaans bij een college over complexe functietheorie als toepassing van de Stelling van Liouville die zegt dat er geen begrensde complex differentieerbare functies $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zijn behalve de constante functies. Zie ook

www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Fund_theorem_of_algebra.html

² Waar zijn die hoeken eigenlijk wel voor nodig?

Een vergelijkbare stelling zegt dat er geen positieve harmonische³ functies $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ zijn. Dat bewijs probeerde ik hier in stelling te brengen en toen ging het argument een eigen leven leiden. Uiteindelijk maakt het alleen gebruik van Stelling 9.11 in de appendix, die voor het geval $N = 1$ overeenkomt met Opgave 2.34, de opgave die de exercities na Definitie 2.25 afsluit.

Didaktisch wel aardig is dat je het bewijs eerst kunt doen voor een tweedegraads polynoom⁴ zonder wortelformules⁵ te gebruiken, en dan ziet dat het voor elke hogere graad hetzelfde gaat. Hieronder doe ik het echter meteen voor het algemene geval en dat is min of meer hoe Argand het deed.

Als $z \rightarrow P(z) = p(x, y) + iq(x, y)$ geen nulpunten heeft in $\mathbb{C}$ dan is

$$(x, y) = x + iy = z \rightarrow |P(z)| > 0$$

vanwege enig voorwerk als in Opgave 5.13 een continue strict positieve $\mathbb{R}$ -waardige functie op $\mathbb{R}^2$ die op cirkels van de vorm $x^2 + y^2 = r^2$ naar beneden begrensd is middels⁶

$$\begin{aligned} |P(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k z^k + z^n \right| \geq |z^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k z^k \right| \geq r^n - \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k| r^k \\ &\geq r^{n-1} \left(r - \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k| \right) \rightarrow \infty \end{aligned}$$

als $r \rightarrow \infty$. Maar dan heeft $(x, y) \rightarrow |P(z)|$ op iedere disk

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

een strict positief globaal minimum dat voor grote r niet meer verandert als r nog groter genomen wordt, en dus een globaal minimum op $\mathbb{R}^2$, zeg in $z = z_0$.

Stel nu $w = z - z_0$ en

$$Q(w) = \frac{P(z)}{P(z_0)}.$$

Dan is

$$Q(w) = 1 + \sum_{k=1}^n \gamma_k w^k \tag{6.4}$$

³ Functies met $\Delta f = 0$, zie (6.14) en Sectie 6.11.

⁴ Met $z^2 + 1$ bijvoorbeeld, als je de lachers op je hand wil krijgen.

⁵ Die zijn er niet voor graad vijf en hoger.

⁶ Bewijs en gebruik $|a + b| \geq |a| - |b|$ voor $a, b \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

met $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \mathbb{C}$, $\gamma_n \neq 0$, en $w \rightarrow |Q(w)|$ heeft nu een globaal minimum ter grootte $Q(0) = 1$.

Hetzelfde geldt⁷ voor $z \rightarrow |Q(z)|$ en dus neemt $u + iv = w = Q(z) = Q(x + iy)$ geen w -waarden aan met $u^2 + v^2 < 1$. Maar met Opgave 6.1 is $\gamma_k = c_k \exp(i\phi_k)$ en dus

$$w = Q(z) = 1 + \sum_{k=1}^n c_k r^k \exp(i(\phi_k + k\theta)), \quad (6.5)$$

een uitdrukking⁸ waarin de ϕ_k -tjes als parameters⁹ gezien kunnen worden met r klein maar vast genomen. En dat geeft een tegenspraak:

Opgave 6.2. Leidt nu een tegenspraak af door aan te tonen dat er waarden met $u^2 + v^2 < 1$ worden aangenomen. Hint: er is een eerste c_k die niet nul is, en voor r klein is die term groter dan de rest van de som.

6.2 Differentiaalrekening, ook met complexe getallen

In Sectie 5.2 hebben we gezien, uitgaande van het voorbeeld $x \rightarrow x^7$, dat

$$x \rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$$

voor iedere keuze van $\alpha_n \in \mathbb{R}$ voor $n \in \mathbb{N}_0$ een functie definieert op een

$$B_R = \{x \in \mathbb{R} : |x| < R\}$$

met $R \in [0, \infty]$, een functie waarmee voor wat betreft differentiaalrekening mag worden gerekend als met polynomen. Het punt om hier te maken is dat, met een search en replace waarbij het linker gedeelte van

$$x, x_0, a, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \leftrightarrow \quad z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0, c = a + bi, \gamma_n = \alpha_n + i\beta_n \in \mathbb{C}$$

wordt vervangen door het rechtergedeelte¹⁰, de hele vrijwel algebraïsche behandeling van differentiaalrekening van machtreeksen gewoon doorgaat, met het begrip complex differentieerbaar voor functies

$$H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

⁷ We komen letters te kort, dus hergebruiken we ze hier maar voor de *dummy* variabele.

⁸ Niet zo fraai aan het bewijs is het gebruik van die niet-algebraïsche poolcoördinaten.

⁹ Maar Ptolemaeus had dit wel mooi gevonden.

¹⁰ Ik probeer systematisch te zijn met het alfabet voor zolang het duurt.

overgeschreven van gewoon differentieerbaar voor $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

We beginnen dus met de complexe versie van (4.3) in de vorm

$$\begin{aligned} w = H(z) &= H(z_0) + \gamma(z - z_0) + T(z; z_0) \\ &= H(z_0) + H'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \end{aligned} \quad (6.6)$$

als $z \rightarrow z_0$, en pakken dit nu uit, waarbij $w = u + iv$ en u en v dus functies van x en y zijn, $u = F(x, y)$ en $v = G(x, y)$, en¹¹ $H(z) = F(x, y) + iG(x, y)$.

We kunnen H dan natuurlijk ook zien als vectorwaardige functie

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

via de identificatie $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, met componenten $H_1 = F$ en $H_2 = G$ als functies van¹² $x_1 = x$ en $x_2 = y$.

Voor zulke functies hebben we ook de gewone aanpak van differentieerbaarheid, met lineaire expansies

$$H_1(x_1, x_2) = H_2(x_1, x_2) + A_{11}(x_1 - a_1) + A_{12}(x_2 - a_2) + R_1(x_1, x_2; a_1, a_2);$$

$$H_2(x_1, x_2) = H_2(a_1, a_2) + A_{21}(x_1 - a_1) + A_{22}(x_2 - a_2) + R_2(x_1, x_2; a_1, a_2),$$

en resttermen $R_{1,2}$ die klein moeten zijn in verhouding tot het lineaire stuk¹³ als $x_1 \rightarrow a_1$ en $x_2 \rightarrow a_2$. Dat zeggen we zo wat precieser, maar eerst nog een opgave om te laten zien waar de observaties hierboven toe leiden als je een eenvoudige voorbeeldje uitwerkt.

Opgave 6.3. Werk $w = \exp(z) = \exp(x + iy)$ uit met de machtreeks voor $\exp(z)$ en verifieer dat $\exp(z) = \exp(x) \exp(iy)$ met $\exp(iy) = \cos x + i \sin x$. Leg uit waarom dit leidt het invoeren van de meerwaardige¹⁴ functie

$$w \rightarrow \log w = \ln |w| + i \arg w.$$

In vectorvorm schrijven we de expansies voor H_1 en H_2 als $H(x_1, x_2) =$

$$\begin{pmatrix} H_1(x_1, x_2) \\ H_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_2(x_1, x_2) \\ H_2(a_1, a_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}(x_1 - a_1) + A_{12}(x_2 - a_2) \\ A_{21}(x_1 - a_1) + A_{22}(x_2 - a_2) \end{pmatrix} + R,$$

¹¹ Met toevallig de H van holomorf.

¹² Variabelen nummeren we met alfabet en indices, al naar wat uitkomt.

¹³ De termen met de coëfficiënten $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$.

¹⁴ Een kniesoor die er op let: meerwaardige functies zijn geen functies.

waarin ook $R = R(x_1, x_2; a_1, a_2)$ net als $H(x_1, x_2)$ en $H(a_1, a_2)$ weer een 2-vector is. Met $h_i = x_i - a_i$ is het lineaire stuk in de expansie voor $H(x_1, x_2)$ hierboven in matrixnotatie¹⁵ gelijk aan

$$Ah = \begin{pmatrix} A_{11}h_1 + A_{12}h_2 \\ A_{21}h_1 + A_{22}h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

en af te schatten via bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} |A_{11}h_1 + A_{12}h_2| &\leq \sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2}; \\ |A_{21}h_1 + A_{22}h_2| &\leq \sqrt{A_{21}^2 + A_{22}^2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2}, \end{aligned}$$

als

$$|A_{11}h_1 + A_{12}h_2|^2 + |A_{21}h_1 + A_{22}h_2|^2 \leq \underbrace{(A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{21}^2 + A_{22}^2)}_{|A|^2} (h_1^2 + h_2^2),$$

ofwel

$$|Ah| \leq |A| |h|, \quad (6.8)$$

waarin de absolute waarde strepen nu voor Euclidische lengte van $h = x - a$, Ah en ook A staan¹⁶, steeds de wortel uit de som van de kwadraten van de entrees, ook voor de matrix A geïntroduceerd in (6.7), die we ook zien als (lineaire) afbeelding¹⁷

$$h \xrightarrow{A} Ah.$$

De conditie voor differentieerbaarheid¹⁸ is met

$$H(x) = H(a) + A(x - a) + R(x; a) \quad \text{dat} \quad |R(x; a)| = o(|x - a|) \quad (6.9)$$

als $|x - a| \rightarrow 0$, typografisch nu niet meer te onderscheiden van de differentieerbaarheid van $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, met bijvoorbeeld $m = n = 1$. Ook voor $H : X \rightarrow Y$ met X en Y genormeerde ruimten, $A : X \rightarrow Y$ lineair en continu¹⁹, ziet het er precies hetzelfde, zie eventueel al Sectie 7.2.

Door per component van H steeds één variabele tegelijk te variëren zien we dat A de afgeleiden van de partiële functies

$$x_1 \rightarrow H_1(x_1, x_2), x_2 \rightarrow H_2(x_1, x_2), x_1 \rightarrow H_2(x_1, x_2), x_2 \rightarrow H_2(x_1, x_2)$$

¹⁵ Spot the matrix.

¹⁶ Ook wel $|h|_2^2 = h_1^2 + h_2^2$ en $|A|_2^2 = A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{21}^2 + A_{22}^2$ schrijven.

¹⁷ Wat moet je hier van matrices weten? Deze afspraak en de matrixnotatie als in (6.7).

¹⁸ Vergelijk ook met (4.24) in Sectie 4.6, waar $a = (0, 0)$ genomen is in (4.23).

¹⁹ Lineaire afbeeldingen zijn dan niet meer automatisch continu!

gevalueerd in $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$ als entries heeft, dus

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} & \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = H'(x) = DH(x) = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (6.10)$$

als $m = n = 2$. In Sectie 6.7 komen we hier nog op terug. We zien $A = H'(x)$ als lineaire afbeelding²⁰ van in dit geval $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$, die we identificeren met zijn Jacobimatrix $DH(x)$, een matrix die we ook graag noteren met $\frac{\partial H}{\partial x}$. In die Jacobimatrix staan in de rijen (horizontaal) de coördinaten van de gradiënten van de $\mathbb{R}$ -waardige functies H_1 en H_2 .

Vergelijk dit nu met (6.6), waarin, met $h = x - x_0$ en $k = y - y_0$, de lineaire term herschrijft als

$$\gamma(z - z_0) = (\alpha + i\beta)(h + ik) = \alpha h - \beta k + i(\beta h + \alpha k),$$

en correspondeert met

$$\begin{pmatrix} \alpha h - \beta k \\ \beta h + \alpha k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

met daarin de matrix die de afbeelding (6.1) beschrijft. In het bijzonder staat in de eerste kolom het beeld van de eerste eenheidsvector, en in de tweede kolom het beeld van de tweede eenheidsvector.

Opgave 6.4. Overtuig jezelf ervan dat (6.1) een draaivermenigvuldiging is, i.e. de samenstelling van een rotatie rond de oorsprong en een puntvermenigvuldiging vanuit de oorsprong.

We zien nu dat (6.9) dan moet gelden met een bijzondere vorm voor de 2×2 matrix A . Dat formuleren we als stelling.

Stelling 6.5. *Laat $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ differentieerbaar zijn in (a_1, a_2) met lineaire benadering gegeven door (6.7). Dan is H gezien als $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ook complex differentieerbaar in (a_1, a_2) dan en slechts dan als voor de matrix A geldt dat*

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = A_{11} = A_{22} = \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial H_1}{\partial x_2} = A_{12} = -A_{21} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_1},$$

de afgeleiden geevalueerd in $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$.

²⁰ Wat moet je met zulke A kunnen? Vooral de inverse uitrekenen, zie Sectie 6.3.

Is H op deze manier complex differentieerbaar, dan schrijven we natuurlijk liever $(x, y) = (x_0, y_0)$ dan $(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$. Via

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{en} \quad w = u + iv \in \mathbb{C} \leftrightarrow (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

en met

$$\alpha + i\beta = H'(z_0)$$

geldt dan dat α en β gegeven worden door

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{en} \quad \beta = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad (6.12)$$

waarbij u en v als functies van x en y voldoen aan de zogenaamde Cauchy-Riemann vergelijkingen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.13)$$

in $(x, y) = (x_0, y_0)$.

Zijn deze partiële afgeleiden zelf differentieerbaar²¹ in $(x, y) = (x_0, y_0)$ dan volgt dat

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

als de volgorde van differentiëren er niet toe doet, en net zo voor $v(x, y)$. In dat geval geldt

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \Delta v \quad (6.14)$$

in (x_0, y_0) .

Op de differentiaaloperator Δ , die de *Laplaciaan* heet, komen we nog uitgebreid terug, en juist daarom willen we nu wel even zeker weten hoe het zit met de volgorde van de partiële afgeleiden. Dit is zo'n beetje de laatste stelling uit de analyse over differentiaalrekening die we echt nodig hebben.

Stelling 6.6. *Laat $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de eigenschap hebben dat*

$$(x, y) \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = v_x(x, y) \quad \text{en} \quad (x, y) \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = v_y(x, y)$$

differentieerbaar zijn in (x_0, y_0) . Dan bestaan in (x_0, y_0) de tweede orde partiële afgeleiden en geldt

$$v_{yx}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = v_{xy}(x_0, y_0).$$

²¹ Geldt onder de aanname dat f complex differentieerbaar is in de buurt van (x_0, y_0) !

Bewijs. Neem zonder beperking der algemeenheid $(x_0, y_0) = (0, 0)$. De aanname impliceert dat de eerste orde partiële afgeleiden bestaan in de buurt van $(0, 0)$. Voor $x \neq 0$ en $y \neq 0$ voldoende klein geldt vanwege de middelwaardstelling (Stelling 4.5) toegepast op

$$y \rightarrow v(x, y) - v(0, y)$$

voor zekere (ook x -afhankelijke) η tussen 0 en y dat

$$\begin{aligned} v(x, y) - v(0, y) - v(x, 0) + v(0, 0) &= (v_y(x, \eta) - v_y(0, \eta))y \\ &= (v_{yx}(0, 0)x + v_{yy}(0, 0)\eta + R(x, \eta) - v_{yy}(0, 0)\eta - R(0, \eta))y \\ &= (v_{yx}(0, 0)x + R(x, \eta) - R(0, \eta))y, \end{aligned}$$

met

$$R(x, \eta) = o(\sqrt{x^2 + \eta^2}) \quad \text{en dus ook} \quad R(0, \eta) = o(\eta) \quad \text{als} \quad \sqrt{x^2 + \eta^2} \rightarrow 0.$$

De differentieerbaarheid van

$$(x, y) \rightarrow v_y(x, y)$$

in $(0, 0)$ is hier twee keer gebruikt, met dezelfde R . We concluderen dat

$$\begin{aligned} v(x, y) - v(0, y) - v(x, 0) + v(0, 0) &= v_{yx}(0, 0)xy + y o(r) \\ &= v_{yx}(0, 0)xy + o(r^2) = v_{xy}(0, 0)xy + o(r^2) \end{aligned} \tag{6.15}$$

als $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$.

De tweede versie onder (6.15) volgt door de rollen van x en y te verwisselen. Merk op dat het eerste gelijktteken op de regel hierboven van links naar rechts moet worden gelezen. Als een restterm y keer kleine o van r is, dan is die term zeker kleine o van r^2 , en zo bewijst (6.15) dat $v_{yx}(0, 0) = v_{xy}(0, 0)$.

Opgave 6.7. Zie (4.4) en gebruik de definitie van kleine o om de conclusie dat $v_{yx}(0, 0) = v_{xy}(0, 0)$ te rechtvaardigen.

Twee keer differentieerbare functies $u(x, y)$ en $v(x, y)$ die op een open²² verzameling van $\mathbb{R}^2$ voldoen aan (6.14) heten harmonisch. Bijgevolg zijn de functies

$$(x, y) \rightarrow \operatorname{Re}(x + iy)^n \quad \text{en} \quad (x, y) \rightarrow \operatorname{Im}(x + iy)^n$$

²² Zie Opgave 9.14 in Hoofdstuk 9 voor een definitie van open.

harmonisch op heel $\mathbb{R}^2$. Dit zijn de zogenaamde homogene harmonische polynomen van graad $n = 1, 2, 3, \dots$ die in (6.17) nog terugkomen.

Twee keer differentieerbaar betekent hier dat de afbeelding

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

zelf weer differentieerbaar is. Met de kettingregel²³ zijn dan ook

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \right) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{en} \quad (x, y) \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \right) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}$$

differentieerbaar en dus heeft $\Delta u = 0$ betekenis als

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (6.16)$$

zonder dat daar een v bij hoort²⁴ via een complexwaardige functie.

Niet-constante oplossingen van (6.16) zijn er in overvloed. Bijvoorbeeld de homogene *harmonische polynomen*

$$x, y, x^2 - y^2, 2xy, x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3, x^4 - 6x^2y^2 + y^4, 4x^3y - 4xy^3, \dots \quad (6.17)$$

van respectievelijk graad 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, $\dots$ hierboven.

6.3 Randvoorwaarden en de methode van Lagrange

Dit onderwerp is al begonnen in Sectie 4.7 waar we de formule

$$\Phi_x = \Phi_y (F_y)^{(-1)} F_x \quad (6.18)$$

in $(x, y) = (0, 0)$ hebben afgeleid voor het stationair zijn van

$$x \xrightarrow{\phi} \phi(x) = \Phi(x, f(x)),$$

met de in Sectie 4.6 gevonden impliciete functie

$$y = f(x)$$

als lokale beschrijving van $F(x, y) = 0$ in de buurt van $(x, y) = (0, 0)$.

De continuïteit van de partiële afgeleiden

$$(x, y) \rightarrow F_x(x, y) \quad \text{en} \quad (x, y) \rightarrow F_y(x, y)$$

²³ Triviaal toegepast op een ketting waarin de tweede schakel lineair is.

²⁴ Althans niet a priori.

in de buurt van $(0,0)$, en de inverteerbaarheid van F_y in $(0,0)$ waren voldoende voor een bewijs dat de niveauverzameling

$$S = \{(x, y) : F(x, y) = F(0, 0)\} \quad (6.19)$$

in de buurt van $(x, y) = (0, 0)$ beschreven wordt als de grafiek van een impliciet gedefinieerde continu differentieerbare functie f .

De verzameling S is zo lokaal geparametriseerd door

$$x \rightarrow X(x) = (x, f(x))$$

met een 2×1 Jacobimatrix $\frac{\partial X}{\partial x}$. De parametrizatie is lokaal een bijectie tussen S en een omgeving van $x = 0$, en dat is dankzij de inverteerbaarheid van de 1×1 matrix

$$A = F_y \quad (6.20)$$

in $(0, 0)$.

Differentieerbaarheid van

$$(x, y) \rightarrow \Phi(x, y)$$

was vervolgens voldoende voor (6.18) als noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor $\phi'(x) = 0$, niet alleen in $x = 0$ maar in de hele omgeving van $x = 0$ waar $f(x)$ gemaakt en $F_y(x, f(x))$ inverteerbaar is, en daar deden we een beetje moeilijk over in Opgave 4.23, waar *delen door* werd vermeden met meetkundige reeksen.

Dat had een reden want met bijvoorbeeld

$$x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^3,$$

$$F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3, \Phi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

zijn de stellingen en bewijzen hetzelfde als in Secties 4.4, 4.5, 4.6, 4.7. We laten dat nu eerst zien voor de multiplicatoren methode van Lagrange en lezen (6.18) daartoe als een uitspraak voor Jacobimatrices en de bijbehorende lineaire afbeeldingen. Als je vertrouwd bent met matrixrekening kun je het volgende overslaan en verder lezen vanaf (6.23), de getransponeerde versie van (6.18).

In het algemeen is een²⁵ $m \times n$ reële matrix A een blok met reële entrees a_{ij} , de verticale index i lopend van 1 tot en met m , de horizontale index j

²⁵ Met m en n in $\mathbb{N}$ natuurlijk.

van 1 tot en met n . Als lineaire afbeelding stuurt A dan een n -vector $x \in \mathbb{R}^n$ met coördinaten $x_1, \dots, x_n$ naar een m -vector $y \in \mathbb{R}^m$ met coördinaten

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

We zeggen dat

$$A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

de verzameling van lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$, die zelf weer een vectorruimte vormen.

Is B een reële $n \times p$ matrix met entries b_{jk} , de verticale index j lopend van 1 tot en met n , de horizontale index k van 1 tot en met p , dan is per definitie AB de $m \times p$ matrix met entries

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, \quad (6.21)$$

met bijbehorende lineaire afbeelding²⁶

$$A \circ B : \mathbb{R}^p \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m.$$

Klappen we beide blokken om door met de eerste index juist horizontaal, en met de tweede index verticaal te nummeren, dan krijgen we *getransponeerde* matrices A^T en B^T met entries $a_{ji}^T = a_{ij}$ en $b_{kj}^T = b_{jk}$, leest (6.21) als de entries van $B^T A^T$, en is $(AB)^T = B^T A^T$.

In het bijzonder geval dat $m = n = p$ kan het voorkomen dat $AB = I$, de $n \times n$ matrix met op de diagonaal alleen maar 1-en en voor de rest alleen maar 0-en. Met I correspondeert de lineaire afbeelding $I = I_n$ die elke $x \in \mathbb{R}^n$ naar zichzelf stuurt. *Wat je van lineaire algebra nu echt moet weten*²⁷ is niet alleen dat in dat geval de lineaire afbeelding $A \circ B$ gelijk is aan de afbeelding I_n , maar ook dat A en B nu elkaars inverse zijn als lineaire afbeeldingen: $A \circ B = B \circ A = I_n$, $B = A^{(-1)}$, $A = B^{(-1)}$. En hetzelfde geldt dan voor de getransponeerden. Uitspraken die alleen te maken hebben met het oplossen van vergelijkingen van de vorm $Ax = y$ met A een vierkante matrix, en daarop komen we in Sectie 6.4 nog terug.

Met nog een derde $p \times r$ matrix C met entries c_{kl} is $(AB)C$ de matrix met entries

$$\sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} c_{kl}, \quad (6.22)$$

²⁶ A voorafgegaan door B .

²⁷ Een bewijs zou bij Lineaire Algebra in een van de eerste colleges moeten zitten.

hetgeen ook de entrees zijn van $A(BC)$ door de sommatie volgorde te verwisselen. Kortom $(AB)C = A(BC)$ en dus schrijven we ABC voor het produkt van A , B en C . De bijbehorende lineaire afbeelding is $A \circ B \circ C$. Transponeren geeft dan weer dat $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, en dat gebruiken we nu voor (6.18).

We schrijven (6.18) getransponeerd als

$$\nabla_x F (\nabla_y F)^{(-1)} \nabla \Phi_y = \nabla_x \Phi, \quad (6.23)$$

waarin

$$\nabla_x F, \nabla_y F, \nabla_x \Phi, \nabla_y \Phi$$

de getransponeerde matrices zijn van de “partiële” Jacobimatrices

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

behorende bij F_x, F_y, Φ_x, Φ_y .

Uitpakken²⁸ van de notatie geeft

$$\nabla_x F = (\nabla_x F_1 \quad \nabla_x F_2 \quad \nabla_x F_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

en hetzelfde voor $\nabla_y F$, een bij aanname in $(0, 0, 0, 0, 0)$ vierkante inverteerbare 3×3 matrix, waarvan de inverse als afbeelding de gradiëntvectoren

$$\nabla_y F_1, \nabla_y F_2, \nabla_y F_3$$

terugstuurt²⁹ naar de eenheidsvectoren e_1, e_2, e_3 in $\mathbb{R}^3$.

Schrijf nu $\nabla_y \Phi \in \mathbb{R}^3$ als lineaire combinatie³⁰

$$\nabla_y \Phi = \lambda_1 \nabla_y F_1 + \lambda_2 \nabla_y F_2 + \lambda_3 \nabla_y F_3, \quad (6.24)$$

met $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Dan volgt dat $\nabla_x F (\nabla_y F)^{(-1)}$ in het linkerlid van (6.23) werkt op (6.24) als

$$\nabla_y \Phi \xrightarrow{(\nabla_y F)^{(-1)}} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \xrightarrow{\nabla_x F} \lambda_1 \nabla_x F_1 + \lambda_2 \nabla_x F_2 + \lambda_3 \nabla_x F_3 = \nabla_x \Phi$$

vanwege (6.23), hetgeen met (6.24) combineert tot

$$\nabla \Phi = \lambda_1 \nabla F_1 + \lambda_2 \nabla F_2 + \lambda_3 \nabla F_3, \quad (6.25)$$

²⁸ Meer is het niet, maar ga dat wel na!

²⁹ Ga na: de kolomvectoren van een matrix A zijn de beelden onder A van de e -tjes.

³⁰ Dit kan vanwege de inverteerbaarheidseis op F_y .

simpelweg³¹ omdat het voor ∇_x en ∇_y apart geldt! Het stationair zijn van

$$\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$$

is zo equivalent met het bestaan van Lagrange multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ waarvoor (6.25) geldt.

6.4 Aftelbare sommen van vierkante matrices

Het enige dat we na Opgave 4.23 nog moeten doen om zeker te weten dat alles uit Secties 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 hier overgeschreven kan worden, is hoe het zit met meetkundige reeksen als

$$I + A + A^2 + A^3 + \cdots, \quad (6.26)$$

met A een vierkante matrix, bijvoorbeeld een 2×2 matrix als in (6.7). Dat verdient deze aparte sectie. In de volgende sectie behandelen we de impliciete functiestelling voor $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Voor een 2×2 matrix als in (6.7) hebben we voor de bijhorende lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ een schatting van de vorm (6.8). Je gaat eenvoudig na³² dat voor elke $n \times n$ matrix en elke reële n -vector h geldt dat

$$|Ah| \leq M|h|, \quad (6.27)$$

waarin de enkele strepen zoals gebruikelijk staan voor de lengte van een reële n -vector volgens Pythagoras, en $M \geq 0$ gedefinieerd is door

$$M^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2,$$

zeg maar de Pythagoraslengte van A . De kleinste M waarvoor (6.27) geldt heet de norm van A , notatie $\|A\|$, waarbij we A nu zien als lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^n$. Deze $\|A\|$ is dus de grootst mogelijke verhouding tussen de Euclidische lengtes van Ah en h .

We zeggen weer dat

$$A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = L(\mathbb{R}^n),$$

waarmee de verzameling $L(\mathbb{R}^n)$ gedefinieerd is, niet alleen een lineaire vectorruimte over $\mathbb{R}$, maar ook een genormeerde algebra, vanwege de extra bewerking

$$(A, B) \rightarrow AB,$$

³¹ Er hoeft dus geen 3×3 matrix geïnverteerd te worden.....

³² Voor mijn part met volledige inductie.

en de eigenschappen van de norm

$$A \rightarrow \|A\|.$$

Het is eenvoudig om rechtstreeks uit de definities te zien dat niet alleen

$$\|A\| = 0 \iff A = 0, \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\| \geq 0, \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

maar ook

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

voor alle $A, B \in L(\mathbb{R}^n)$ en $\lambda \in \mathbb{R}$.

Merk op dat $L(\mathbb{R}^n)$ als vectorruimte hetzelfde³³ is als $\mathbb{R}^{n^2}$, met de standaardnorm

$$A \rightarrow |A|$$

gegeven door

$$|A|^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2.$$

Of ook geldt dat $|AB| \leq |A| |B|$ laten we vrolijk in het midden³⁴ hier, maar we weten dat $\|A\| \leq |A|$ voor alle $A \in L(\mathbb{R}^n)$.

Opgave 6.8. Bewijs dat er een $\mu_n \in (0, 1]$ bestaat waar mee geldt dat

$$\mu_n |A| \leq \|A\| \leq |A|$$

voor alle $A \in L(\mathbb{R}^n)$. Hint³⁵: stel niet, dan kun je op

$$\{A \in L(\mathbb{R}^n) : \|A\| = 1\}$$

de Pythagorasnorm $|A|$, en dus ook een van de lengtes van de kolomvectoren willekeurig groot krijgen, en dat zal toch een tegenspraak moeten geven met $\|A\| = 1$.

Opgave 6.9. Neem aan dat $A \in L(\mathbb{R}^n)$ voldoet aan $\|A\| < 1$. Laat zien dat voor de reeks in (6.26) geldt dat

$$(I - A)(I + A + A^2 + A^3 + \dots) = I,$$

³³ Of je de entries nu in een blok of in een matrix zet maakt niet echt uit.

³⁴ Bij nader inzien: bewijs dat dit zo is! Echter: in Opgave 6.9 liever de kleinere norm.

³⁵ Terzijde: $\|A\|$ is de wortel uit de grootste eigenwaarde van A^*A .

en leg uit waarom

$$(I + A)^{(-1)} = I - A + A^2 - A^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} (-A)^j$$

als $\|A\| < 1$, hetgeen zeker het geval is als $|A| < 1$.

De details van de impliciete functiestelling voor vectorwaardige functies van meer variabelen en de multiplicatorenmethode van Lagrange kun je nu wel invullen. Maar ook zie je met een wat suggestieve notatie dat de machtreeks

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

van de functie

$$x \xrightarrow{f} (1 - x)^{-1}$$

correspondeert met

$$A \xrightarrow{f} \sum_{j=0}^{\infty} A^j = I + A + A^2 + A^3 + \cdots. \quad (6.28)$$

Voor welke functies f en welke $A \in L(\mathbb{R}^n)$ is $f(A)$ op een natuurlijke manier gedefinieerd met rekenregels die uit de rekenregels voor de functies volgen? Een vraag om op terug te komen, maar voor machtreeksen³⁶ kun je een partieel antwoord wel geven nu.

6.5 Impliciete functiestelling in Euclidische ruimten

We gebruiken de notatie

$$x \in X = \mathbb{R}^n, y \in Y = \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \in X \times Y = \mathbb{R}^{n+m},$$

en formuleren de impliciete functiestelling in de buurt van een vast punt $(x, y) = (a, b)$. Omdat we net als in (4.22) continue differentieerbaarheid van de impliciete functie willen hebben eisen we nu meteen dat $(x, y) \rightarrow F_x(x, y)$ en $(x, y) \rightarrow F_y(x, y)$ continu zijn in een omgeving van $(x, y) = (a, b)$, en dat is hetzelfde³⁷ als F continu differentieerbaar op die omgeving.

³⁶ Denk als eerste aan $\exp(A)$.

³⁷ Daar komen we nog op terug in algemenere context.

Stelling 6.10. (*Impliciete functiestelling*) Laat voor $r > 0$ de functie F continu differentieerbaar zijn op $\bar{B}_r(a) \times \bar{B}_r(b)$. Als $F_y(a, b)$ inverteerbaar is dan bestaan er $\delta_0 > 0$ en $\varepsilon_0 > 0$, en een continu differentieerbare functie $f : \bar{B}_{\delta_0}(a) \rightarrow \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$, zodanig dat

$$\{(x, y) \in \bar{B}_{\delta_0}(a) \times \bar{B}_{\varepsilon_0}(b) : F(x, y) = F(a, b)\} = \{(x, f(x)) : x \in \bar{B}_{\delta_0}(a)\},$$

waarbij geldt dat $f'(x) = -(F_y(x, f(x)))^{-1}F_x(x, f(x))$ voor alle $x \in \bar{B}_{\delta_0}(a)$.

Het bewijs kan nu worden overgeschreven van de bewijzen in Secties 4.4 en 4.5. In het bijzonder wordt de samengestelde functie $x \rightarrow F(x, f(x))$ niet gedifferentieerd om de uitdrukking voor $f'(x)$ af te leiden.

Omdat in de constructie van $y = f(x)$ eerst $0 < \varepsilon_0 \leq r$ en daarna $\delta_0 > 0$ klein genoeg gekozen wordt, en vervolgens δ_0 nog kleiner moet worden gekozen om $f'(x) = -(F_y(x, f(x)))^{-1}F_x(x, f(x))$ gedefinieerd te hebben voor $|x| \leq \delta_0$, zal in het algemeen niet gelden dat $\delta_0 > \varepsilon_0$. De facto kan Stelling 6.10 dus gelezen worden als het bestaan van $0 < \delta_0 \leq \varepsilon_0 \leq r$ waarvoor de uitspraken in de stelling gelden.

Passen we de stelling toe op

$$F(x, y) = x - g(y),$$

dan krijgen we de inverse functiestelling via de uitspraak

$$\{(x, y) \in \bar{B}_{\delta_0}(a) \times \bar{B}_{\varepsilon_0}(b) : g(y) = x\} = \{(x, f(x)) : x \in \bar{B}_{\delta_0}(a)\},$$

waarbij geldt dat $f'(x) = (g'(f(x)))^{-1}$ voor alle $x \in \bar{B}_{\delta_0}(a)$. Merk op dat de oplossing $y = f(x)$ van $x = g(y)$ nu wordt geconstrueerd met

$$y_{n+1} = y_n - g'(0)^{-1}(g(y_n) - x),$$

startend vanaf $y_0 = 0$. We formuleren het resultaat voor $X = Y$ en $g : Y \rightarrow Y$.

Stelling 6.11. (*Inverse functiestelling*) Laat voor $r > 0$ de functie $g : Y \rightarrow Y$ continu differentieerbaar zijn op $\bar{B}_r(b)$ en laat $a = g(b)$. Als $g'(b)$ inverteerbaar is dan bestaan er $0 < \delta_0 \leq \varepsilon_0 \leq r$, en een continu differentieerbare injectieve functie $f : \bar{B}_{\delta_0}(a) \rightarrow \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$, zodanig dat voor alle $(x, y) \in \bar{B}_{\delta_0}(a) \times \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$ geldt: $x = g(y) \iff y = f(x)$. Bovendien geldt dat $f'(x) = (g'(f(x)))^{-1}$ voor alle $x \in \bar{B}_{\delta_0}(a)$.

N.B. Stelling 6.10 geeft de $f : \bar{B}_{\delta_0}(a) \rightarrow \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$ in Stelling 6.11 alleen als continu differentieerbare functie. Omdat $y = f(x)$ voor $x \in \bar{B}_{\delta_0}(a)$ geldt

echter $x = g(y) = g(f(x))$, dus f is injectief op $\bar{B}_{\delta_0}(a)$, en vanwege $f'(x) = (g'(f(x)))^{-1}$ is $f'(x)$ inverteerbaar in elke $x \in \bar{B}_{\delta_0}(a)$.

Voor g werkt dit argument niet zonder meer: om $x = g(y)$ in $y = f(x)$ in te mogen vullen moet $g(y)$ wel in het domein van f liggen. Stelling 6.11 kan echter nog een keer worden toegepast (draai de rollen van x en y om) om $0 < \varepsilon_1 \leq \delta_1 \leq \delta_0$ en een continu differentieerbare $g_1 : \bar{B}_{\varepsilon_1}(b) \rightarrow \bar{B}_{\delta_1}(a)$ te vinden zodanig dat voor $(x, y) \in \bar{B}_{\delta_1}(a) \times \bar{B}_{\varepsilon_1}(b)$ weer geldt: $x = g_1(y) \iff y = f(x)$. Met de eerdere equivalentie $x = g(y) \iff y = f(x)$ voor alle $(x, y) \in \bar{B}_{\delta_0}(a) \times \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$ zien we dat $g_1 = g$ op $\bar{B}_{\varepsilon_1}(b)$. Net als eerder voor $f : \bar{B}_{\delta_0}(a) \rightarrow \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$ volgt nu dat g_1 en dus g injectief is op $\bar{B}_{\varepsilon_1}(b)$. Samenvattend concluderen we dat in de keten

$$\bar{B}_{\varepsilon_1}(b) \xrightarrow{g} \bar{B}_{\delta_1}(a) \xrightarrow{f} \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$$

beide afbeeldingen injectief zijn, en de keten kan steeds naar links worden uitgebreid, bijvoorbeeld

$$\bar{B}_{\varepsilon_2}(b) \xrightarrow{g} \bar{B}_{\delta_2}(a) \xrightarrow{f} \bar{B}_{\varepsilon_1}(b) \xrightarrow{g} \bar{B}_{\delta_1}(a) \xrightarrow{f} \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$$

met $0 < \varepsilon_2 \leq \delta_2 \leq \varepsilon_1 \leq \delta_1 \leq \delta_0$ en iedere schakel injectief (maar in het algemeen niet surjectief) en inverteerbare $f'(x)$ en $g'(y)$ (vanwege $f'(x) = (g'(f(x)))^{-1}$ en $g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}$). Over het beeld van ieder zulk bolletje onder f dan wel g is nog wel wat te zeggen natuurlijk, maar eerst kijken we in Sectie 6.6 naar andere vragen waarbij Stelling 6.10 een rol speelt.

Opgave 6.12. Leid Stelling 6.10 af uit Stelling 6.11. Hint: maak m.b.v. F een functie $\tilde{F} : \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, waarvan de laatste m componenten gegeven worden door $F(x, y)$ en de eerste n door x .

6.6 Karakterisaties van deelvarieteiten

Lineaire deelvarieteiten van $\mathbb{R}^N$ zijn per definitie oplossingsverzamelingen van lineaire vergelijkingen. Denk aan punten, lijnen en vlakken als de niet-triviale voorbeelden in $\mathbb{R}^3$. Bij lineaire algebra heb je gezien dat, behalve in het geval van punten, deze niet-triviale lineaire deelvarieteiten, na eventueel hernummeren van de coördinaten, altijd te beschrijven zijn als grafiek van een lineaire functie

$$y = Ax + b, \tag{6.29}$$

waarbij $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineair, $b \in \mathbb{R}^m$, en $N = n + m$ met $n, m \in \mathbb{N}$.

Aan (6.29) is nog niet te zien of we matrixnotatie gebruiken. Als we x en y zien als kolomvectoren dan is (6.29) te lezen met A een matrix bestaande uit m rijen en n kolommen. In (6.29) staan dan m vergelijkingen die geschreven kunnen worden in de vorm $Ax - y = b$ voor $(x, y) \in \mathbb{R}^N$, i.e.

$$(A \ -I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \in \mathbb{R}^m,$$

met $C = (A \ -I)$ een (wat bijzondere) matrix met m rijen en N kolommen, waarvan de eerste n kolommen de matrix A vormen, en de laatste m kolommen een diagonaal matrix met -1 op de diagonaal. Die matrix C werkt op $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, een kolomvector in $\mathbb{R}^N$. Zo gelezen is (6.29) dus een voorbeeld van een stelsel van m lineaire vergelijkingen voor N onbekenden $z_1, z_2, \dots, z_N$. Uitgeschreven met puntjes is dat stelsel

$$\begin{aligned} C_{11}z_1 + C_{12}z_2 + \dots + C_{1N}z_N &= b_1; \\ C_{21}z_1 + C_{22}z_2 + \dots + C_{2N}z_N &= b_2; \\ &\vdots \\ C_{m1}z_1 + C_{m2}z_2 + \dots + C_{mN}z_N &= b_m. \end{aligned}$$

In het voorbeeld heeft de coëfficiëntenmatrix C maximale rang, hetgeen equivalent is met het kunnen kiezen van m kolommen van C die samen een inverteerbare (vierkante) matrix vormen, hier de laatste m kolommen, en is y door inverteren van in dit geval $-I$ in x uit te drukken. Dat is net als in het algemene geval, waarin $C = (A \ B)$ en B inverteerbaar is, en oplossen via $y = B^{-1}(b - Ax)$ weer een grafiek van de vorm (6.29) produceert. We zien hier dus de equivalentie van $Cz = b$ en $y = Ax + b$ als beschrijvingen in $\mathbb{R}^N$ van de niet-triviale lineaire deelvarieteiten anders dan de singletons, waarbij C bij aanname maximale rang heeft.

6.6.1 Niet per se lineaire deelvarieteiten

Voor niet-lineaire deelvarieteiten³⁸ stellen we nu de vraag of er ook zo'n equivalentie is, uitgaande van de niet-lineaire versie van $Cz = b$, geschreven zoals in de impliciete functiestelling, dus

$$F(z) = 0,$$

met $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ continu differentieerbaar. Omdat (6.29) een beschrijving is zonder verdere condities op A gebruiken we de niet-lineaire versie van (6.29)

³⁸ We moet nog een definitie geven van wat we daaronder verstaan!

om af te spreken wat we onder een deelvarieteit $M \subset \mathbb{R}^N$ willen verstaan: we zeggen dat een n -dimensionale deelvarieteit $M \subset \mathbb{R}^N$ een verzameling is die in de buurt van elk punt van M na henummeren van de coördinaten te schrijven is zoals de verzameling waar $F(x, y) = F(a, b)$ in Stelling 6.10, dus als de grafiek van een continu differentieerbare functie³⁹. Hierbij is de dimensie $n \in \{1, \dots, N-1\}$ vast gekozen. We sluiten het analagon van singletons dus uit⁴⁰.

Opgave 6.13. Laat $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ continu differentieerbaar zijn. Als voor alle $z \in \mathbb{R}^N$ met $F(z) = 0$ geldt dat $F'(z)$, gezien als matrix, maximale rang heeft, dan is $\{z \in \mathbb{R}^N : F(z) = 0\}$ een n -dimensionale deelvarieteit van $\mathbb{R}^N$, met $n + m = N$. Bewijs dit.

Opgave 6.14. Geef een voorbeeld van een n -dimensionale deelvarieteit $M \subset \mathbb{R}^N$ die niet gegeven wordt door een functie F zoals in Opgave 6.13.

Een standaardvoorbeeld bij Opgave 6.13 is de rand van een bol in $\mathbb{R}^n$ met middelpunt $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ en straal $\delta > 0$, beschreven door

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 - \delta^2 = 0. \quad (6.30)$$

Opgave 6.15. Bewijs dat de verzameling van $x \in \mathbb{R}^n$ die voldoen aan (6.30) een $(n-1)$ -dimensionale deelvarieteit is.

Er zijn drie equivalente manieren om te zeggen dat $M \subset \mathbb{R}^N$ een n -dimensionale deelvarieteit is

(A) M is lokaal de grafiek van een continu differentieerbare

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (n + m = N),$$

gegeven door $y = f(x)$ na henummeren in $z = (x, y)$.

(B) M is lokaal de nulverzameling van een continu differentieerbare

$$F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (n + m = N),$$

³⁹ Preciezer: M heet dan een C^1 -deelvarieteit.

⁴⁰ Dat analagon zou een deelverzameling van geïsoleerde punten zijn.

F_y inverteerbaar in de betreffende hernummerde $z = (x, y) \in M$.

(C) M is lokaal het beeld⁴¹ van een continu differentieerbare injectieve

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

met Φ' van maximale rang.

Stelling 6.10 liet al (A) $\implies$ (B) zien, en (B) $\implies$ (A) geldt omdat (A) een speciaal geval is van B met $F(x, y) = g(y) - x$. Evenzo is (A) een speciaal geval is van C met $\Phi(x) = (x, f(x))$. Om de implicatie (C) $\implies$ (A) te laten zien en zo het kringetje rond te maken gebruiken we Stelling 6.11, maar hebben we ook de kettingregel nodig, de regel die meestal vóór de impliciete functiestelling wordt behandeld.

De *kettingregel* generaliseert de regel in Opgave 5.10, zie ook Sectie 4.6, Opgave 5.11 en later Opgave 7.19. Met de opmerking dat (5.3) gelezen moet worden met matrices⁴² is de regel met bewijs en al over te schrijven en nu meteen⁴³ toepasbaar. We zien Φ daartoe nu als

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

met, na hernummeren weer, $\Phi(x) = (\Psi(x), \chi(x))$, $\Psi : \bar{B}_r(a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ en $\chi : \bar{B}_r(a) \rightarrow \mathbb{R}^m$ continu differentieerbaar, en $\Psi'(a)$ inverteerbaar in a , bij aanname van de maximale rang van $\Phi'(x)$ in $x = a$. Stelling 6.11 toegepast op $g = \Psi$ met $y = x$ geeft nu een continu differentieerbare injectieve functie f die we ϕ noemen, $\phi : \bar{B}_{\delta_0}(\Phi(a)) \rightarrow \mathbb{R}^n$, met $\phi'(\xi)$ inverteerbaar voor alle $\xi \in \bar{B}_{\delta_0}(\Phi(a))$, al gebruiken we dat verder niet, en $\Psi(\phi(\xi)) = \xi$ voor alle $\xi \in \bar{B}_{\delta_0}(\Phi(a))$. Zo parametrizeert

$$\xi \rightarrow \Phi(\phi(\xi)) = (\Psi(\phi(\xi)), \chi(\phi(\xi))) = (\xi, f(\xi))$$

met $f(\xi) = \chi(\phi(\xi))$ nu ook M in de buurt van $\Psi(a)$ en is M lokaal dus gegeven door de grafiek van $f : \bar{B}_{\delta_0}(b) \rightarrow \mathbb{R}^N$. De continue differentieerbaarheid van f volgt uit de kettingregel, en het is de eerste keer dat we die hier gebruiken.

Opgave 6.13 betreft het geval dat M met één F als in (B) globaal te beschrijven is zoals bijvoorbeeld in Opgave 6.15. In Stelling 6.11 en de daaropvolgend discussie werd zo'n bol met rand en al injectief afgebeeld door een injectieve continu differentieerbare functie f (met $f'(x)$ inverteerbaar voor alle x in die gesloten bol) naar een deelverzameling van (een bol in) $\mathbb{R}^n$. Is het beeld van de rand van de bol nu ook weer een $(n - 1)$ -dimensionale deelvarieteit?

⁴¹ Als afbeelding naar dat beeld heeft Φ een inverse die een kaart op M genoemd wordt.

⁴² Beter: lineaire afbeeldingen, in dit hele hoofdstuk de facto matrices.

⁴³ Nou ja, aan het eind van het argument dat nu komt.

Opgave 6.16. Laat $M \subset \mathbb{R}^n$ een deelvarieteit zijn en $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continu differentieerbaar in een omgeving van elk punt van M . Als $f'(x)$ inverteerbaar is voor elke $x \in M$ en f injectief is op M , dan is het beeld van f ook een deelvarieteit.

6.6.2 Beelden (van randen) van bollen

Stelling 6.11 leidde met $0 < \varepsilon_1 \leq \delta_1 \leq \delta_0 \leq \varepsilon_0$ tot een keten

$$\bar{B}_{\varepsilon_1}(b) \xrightarrow{g} \bar{B}_{\delta_1}(a) \xrightarrow{f} \bar{B}_{\varepsilon_0}(b)$$

waarin beide afbeeldingen injectief maar in het algemeen niet surjectief zijn. De kleinere δ_1 en ε_1 waren nodig voor de injectiviteit van g op de kleinere (gesloten) bol $\bar{B}_{\varepsilon_1}(b)$.

De randen $\partial B_{\varepsilon_1}(b)$ en $\partial B_{\varepsilon_0}(a)$ hebben als beeld de deelvarieteiten $g(\partial B_{\varepsilon_1}(b))$ en $f(\partial B_{\varepsilon_0}(a))$. In het geval dat g en f lineaire afbeeldingen zijn en $a = b = 0$, ga je eenvoudig na dat deze beelden te zien zijn als grafiek over de eenheids-sfeer

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}.$$

Als $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zo'n inverteerbare lineaire afbeelding is, dan kun je een gladde hoogtefunctie $h : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$ maken zodanig dat het beeld van (de bolrand) $\partial B_1(0)$ onder A van de vorm

$$S_h = \{h(x)x : x \in S^{n-1}\} \tag{6.31}$$

is, al moeten we nog precies maken wat we hier met gladheid van h bedoelen. Je maakt de functie h door voor elke $x \in S^{n-1}$ de halfrechte

$$\{\lambda x : \lambda > 0\}$$

met $A(\partial B_1(0))$ te snijden, waarbij je x misschien liever een andere naam wil geven als je denkt in termen van $y = Ax$.

Opgave 6.17. Laat $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ een inverteerbare lineaire afbeelding zijn. Bewijs dat er voor elke $\xi \in S^{n-1}$ precies een $\lambda > 0$ is waarvoor $\lambda\xi \in A(\partial B_1(0))$. Door $\lambda = h_A(\xi)$ te stellen is $h_A : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$ gedefinieerd. Het beeld van $\partial B_\delta(0)$ onder A heeft als hoogtefunctie $\xi \rightarrow \delta h_A(\xi)$.

De eerdere vragen over $g(\partial B_{\varepsilon_1}(b))$ en $f(\partial B_{\varepsilon_0}(a))$ geven aanleiding tot de vraag of de uitspraak in Opgave 6.17 ook waar is voor het beeld van de rand

van een voldoende klein gekozen bol $\bar{B}_{\delta_1}(0)$ onder het beeld van een continue differentieerbare functie $F : \bar{B}_{\delta}(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ van de vorm

$$F(x) = Ax + R(x) \quad \text{met} \quad R(x) = o(|x|) \quad \text{voor} \quad |x| \rightarrow 0.$$

Op grond van Stelling 6.11 weten we dat F injectief is op een kleinere bol $\bar{B}_{\delta_0}(0)$ met $F'(x)$ invertbaar (niet alleen voor $x = 0$ maar ook) voor alle $x \in \bar{B}_{\delta_0}(0)$. De volgende opgave is een klein project waarin ook Stelling 6.10 gebruikt moet worden, nog uit te werken in een definitieve versie van dit basisboek.

Opgave 6.18. Bewijs de uitspraak in Opgave 6.17 voor het beeld $F(\partial B_{\delta_1}(0))$ van de rand van een voldoende kleine bol $\bar{B}_{\delta_1}(0)$. Laat zien dat de hoogtefunctie h die je maakt continu differentieerbaar is in de buurt van ieder punt op S^{n-1} , als functie van geschikt gekozen coördinaten in een omgeving van dat punt.

6.6.3 Overgang op andere coördinaten

Als een punt P in n -dimensionale deelvarieteit M van $\mathbb{R}^N$ in het beeld van een Φ en Ψ ligt zoals in beschrijving (C) in Sectie 6.6.1, zeg met $\Phi(\xi)$ en $\Psi(\eta)$, en $P = \Phi(0) = \Psi(0)$, met 0 een inwendig punt van de in (C) gebruikte domeinen van Φ en Ψ , dan wordt het verband tussen ξ en η in de buurt van 0 gegeven door uitspraken zoals in Stelling 6.11.

6.6.4 Meer dan continu differentieerbaar

Om uit te werken nog. Als $F : X \rightarrow Y$ continu differentieerbaar is, met bijvoorbeeld $X = \mathbb{R}^m$ en $Y = \mathbb{R}^n$, dan is $x \rightarrow F'(x)$ een continue functie (of afbeelding) van X naar

$$L(X, Y) = \{A : X \rightarrow Y : A \text{ is lineair}\},$$

waarin we als norm op $L(X, Y)$ naar keuze de normen

$$\|A\| = \max_{|x| \leq 1} |Ax| \quad \text{of} \quad |A| = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$$

kunnen gebruiken. Deze F' kan weer continu differentieerbaar zijn en in dat geval is ook

$$\tilde{F} : (x, h) \rightarrow (F(x), F'(x)h)$$

continu differentieerbaar. In het geval dat $X = Y$ is inverteerbaarheid van F' in $x = x_0$ equivalent met inverteerbaarheid van $\tilde{F}'$ in $(x, h) = (x_0, 0)$. Dit leidt tot een formulering van Stelling 6.11 voor twee keer continu differentieerbare functies. Ook de impliciete functiestelling krijgt zo een twee keer differentieerbare versie, en deelvariateiten kunnen vervolgens C^2 zijn in plaats van C^1 . Of C^k met $k \in \mathbb{N}$.

XXXXXXXXXX

6.7 Gradient, kettingregel, coördinatentransformaties

De *kettingregel* generaliseert de regel in Opgave 5.10, zie ook Sectie 4.6, Opgave 5.11 en later Opgave 7.19. Met de opmerking dat (5.3) gelezen moet worden met matrices⁴⁴ is de regel met bewijs en al over te schrijven en nu meteen toepasbaar.

We spellen een en ander nu uit in het geval van coördinatentransformaties, met als belangrijk voorbeeld de overgang op poolcoördinaten die we al gebruikten om $\mathbb{C}$ te beschrijven en in $\mathbb{C}$ te rekenen: ieder punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kunnen we via

$$x = r \cos \theta \quad \text{en} \quad y = r \sin \theta \quad (6.32)$$

zien als gegeven door poolcoördinaten $r, \theta \in \mathbb{R}$ voor $(x, y) \neq (0, 0)$.

Een differentieerbare scalaire functie $F(x, y)$ van x en y is zo automatisch ook een differentieerbare functie van r en θ . In wat volgt zien we (6.32) als transformatie

$$Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

van de onafhankelijke plaatsvariabelen, en $F(x, y) = F(Z(r, \theta))$ als de *afhankelijke* variabele. Buiten de wiskunde, met name in de natuurkunde, is het gebruikelijk om de afhankelijke variabele met hetzelfde symbool te noteren als alleen de onafhankelijke variabelen worden getransformeerd.

6.7.1 Gradient, divergentie en Laplaciaan

Voor $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is de definitie van differentieerbaarheid in de gewone rechthoekige coördinaten x en y en $h = x - x_0$, $k = y - y_0$ te lezen als

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = F(x_0, y_0) + ah + bk + R(h, k; x_0, y_0), \quad (6.33)$$

met $a, b \in \mathbb{R}$ en

$$\frac{R(h, k; x_0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0, \quad (6.34)$$

⁴⁴ Beter: lineaire afbeeldingen, in dit hele hoofdstuk de facto matrices.

zie ook Sectie 4.6 en vergelijk met het uitpakken van (6.9) hierboven. De volgende opgave is misschien nu wat dubbelop, maar dat kan geen enkel kwaad.

Opgave 6.19. Neem voor $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ en $a, b \in \mathbb{R}$ aan dat (6.33) geldt met (6.34). Dan volgt dat

$$\frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} \rightarrow a \quad \text{en} \quad \frac{F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0)}{k} \rightarrow b$$

als $h, k \rightarrow 0$. Laat dit zien.

Meerdere notaties worden gebruikt, zoals

$$a = F_x(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = (\delta_x F)(x_0, y_0) = (D_1 F)(x_0, y_0); \quad (6.35)$$

$$b = F_y(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = (\delta_y F)(x_0, y_0) = (D_2 F)(x_0, y_0), \quad (6.36)$$

waarbij (x_0, y_0) en haakjes vaak worden weggelaten want

$$a = F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = \delta_x F = D_1 F \quad \text{en} \quad b = F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = \delta_y F = D_2 F$$

ziet er gewoon fijner uit.

Als kolomvector schrijven we ook, met

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.37)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} e_x + \frac{\partial F}{\partial y} e_y = e_x \frac{\partial F}{\partial x} + e_y \frac{\partial F}{\partial y}, \quad (6.38)$$

de *gradient* van F in (x_0, y_0) , geschreven zonder (x_0, y_0) . Merk op dat het lineaire gedeelte in (6.33) te schrijven is als

$$ah + bk = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = h \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y}, \quad (6.39)$$

het inproduct⁴⁵ van ∇F en de verschilvector $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.

⁴⁵ Het inproduct van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven door $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = ah + bk$.

We zien dus hoe de gradiënt de vector is die de lineaire afbeelding $DF : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ via het inproduct representeert als

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \xrightarrow{DF} \nabla F \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix},$$

maar ook dat (6.39) te lezen is als de *differentiaaloperator*

$$h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{werkend op} \quad F.$$

Evenzo zien we ∇ als

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{werkend op} \quad F \quad \text{geeft} \quad \nabla F, \quad (6.40)$$

een vectorwaardige differentiaaloperator.

Middels het inproduct kan ∇ ook werken op een vectorwaardige differentieerbare functie

$$(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} V_x(x, y) \\ V_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = V_x e_x + V_y e_y,$$

en wel als

$$\nabla \cdot V = \left(e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (V_x e_x + V_y e_y) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}, \quad (6.41)$$

de *divergentie* van V .

We schrijven hier nu V met subscripten⁴⁶ x, y voor de x - en y -coördinaten V_x en V_y van V t.o.v. de orthonormale vectoren (6.37) die samen de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$ vormen. Merk wel op dat V_x en V_y van x en y afhangen maar e_x en e_y niet. De indices x en y staan voor de x -richting en de y -richting, en die richtingen zijn overal in het x, y -vlak hetzelfde.

Elk van de twee termen in ∇ werkt nu alleen op V_x en V_y , en omdat

$$e_x \cdot e_x = e_y \cdot e_y = 1 \quad \text{en} \quad e_x \cdot e_y = e_y \cdot e_x = 0, \quad (6.42)$$

blijven er maar twee termen over in (6.41). Omdat e_x en e_y niet van x en y afhangen geeft elk van de vier termen

$$e_x \frac{\partial}{\partial x} \cdot V_x e_x, \quad e_x \frac{\partial}{\partial x} \cdot V_y e_y, \quad e_y \frac{\partial}{\partial y} \cdot V_x e_x, \quad e_y \frac{\partial}{\partial y} \cdot V_y e_y$$

⁴⁶Niet te verwarren met het gebruik van subscripten voor partiële afgeleiden!

die we krijgen bij het uitwerken van (6.41) maar één term, te weten

$$e_x \frac{\partial}{\partial x} \cdot V_x e_x = e_x \frac{\partial}{\partial x} \cdot V_x e_x = e_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} V_x e_x = e_x \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} e_x = \frac{\partial V_x}{\partial x} e_x \cdot e_x = \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

voor de eerste,

$$e_x \frac{\partial}{\partial x} \cdot V_y e_y = e_x \frac{\partial}{\partial x} \cdot V_y e_y = e_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} V_y e_y = e_x \cdot \frac{\partial V_y}{\partial x} e_y = \frac{\partial V_y}{\partial x} e_x \cdot e_y = 0$$

voor de tweede, en

$$e_y \frac{\partial}{\partial y} \cdot V_x e_x = 0, \quad e_y \frac{\partial}{\partial x} \cdot V_y e_y = \frac{\partial V_y}{\partial y}$$

voor de derde en vierde. Van de vier termen worden er dus nog twee nul vanwege $e_x \cdot e_y = 0$ in (6.42) en de andere twee vereenvoudigen en blijven in die vorm over in (6.41).

Als $V = \nabla F$ differentieerbaar is dan volgt zo dat

$$\nabla \cdot \nabla F = (e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y}) \cdot (\frac{\partial F}{\partial x} e_x + \frac{\partial F}{\partial y} e_y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} = \Delta F, \quad (6.43)$$

de Laplaciaan van F , die weer gezien kan worden als

$$\Delta F \quad \text{is} \quad \Delta = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{werkend op} \quad F. \quad (6.44)$$

Omschrijven van gradiënt, divergentie en Laplaciaan naar poolcoördinaten is nu een nuttige oefening waarvoor de volgende subsecties van belang zijn. Het is handig om daarbij naar twee net iets anders uitgewerkte notaties voor de kettingregel te kijken, zie ook Sectie 4.6 waar dat voor $t \rightarrow F(x(t), y(t))$ al is gedaan.

6.7.2 Kettingregel uitgeschreven voor transformaties

We weten dat we de kettingregel toe mogen passen op

$$(r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta) = (X(r, \theta), Y(r, \theta)) = (x, y) \rightarrow F(x, y) = G(r, \theta),$$

door de lineaire benadering van

$$(r, \theta) \rightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

rond (r_0, θ_0) in te vullen in de lineaire benadering van

$$(x, y) \rightarrow F(x, y)$$

rond (x_0, y_0) . We doen dit nu met $\tilde{h} = r - r_0$ en $\tilde{k} = \theta - \theta_0$, met weglating van (r_0, θ_0) in de partiële afgeleiden.

Omdat we in deze sectie $F(x, y) = G(r, \theta)$ als onbekende afhankelijke grootheid willen zien, bijvoorbeeld de oplossing van een partiële differentiaalvergelijking, kiezen we nu eerst voor de schrijfwijze zoals rechts in (6.39). De lineaire termen in de expansies

$$\begin{aligned} X(r_0 + \tilde{h}, \theta_0 + \tilde{k}) &= X(r_0, \theta_0) + \tilde{h} \frac{\partial X}{\partial r} + \tilde{k} \frac{\partial X}{\partial \theta} + \dots, \\ Y(r_0 + \tilde{h}, \theta_0 + \tilde{k}) &= Y(r_0, \theta_0) + \tilde{h} \frac{\partial Y}{\partial r} + \tilde{k} \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \dots \end{aligned}$$

moeten dan als

$$h = \tilde{h} \frac{\partial X}{\partial r} + \tilde{k} \frac{\partial X}{\partial \theta} \quad \text{en} \quad k = \tilde{h} \frac{\partial Y}{\partial r} + \tilde{k} \frac{\partial Y}{\partial \theta}$$

in (6.39) worden ingevuld⁴⁷, en het resultaat

$$\begin{aligned} &(\tilde{h} \frac{\partial X}{\partial r} + \tilde{k} \frac{\partial X}{\partial \theta}) \frac{\partial F}{\partial x} + (\tilde{h} \frac{\partial Y}{\partial r} + \tilde{k} \frac{\partial Y}{\partial \theta}) \frac{\partial F}{\partial y} = \\ &\tilde{h} \left(\frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial y} \right) + \tilde{k} \left(\frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

is dan volgens de kettingregel gelijk aan

$$\tilde{h} \frac{\partial G}{\partial r} + \tilde{k} \frac{\partial G}{\partial \theta}.$$

Er volgt dus dat

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial y} \tag{6.45}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial y}, \tag{6.46}$$

in vector-matrixnotatie te schrijven als

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial r} \\ \frac{\partial G}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}, \tag{6.47}$$

waarin we links een 2 bij 1 matrix zien met de partiële afgeleiden van G , en rechts net zo'n matrix voor F , en een 2 bij 2 matrix voor

$$(r, \theta) \xrightarrow{Z} (X(r, \theta), Y(r, \theta)),$$

⁴⁷ We gaan er nu niet echt vanuit dat de lezer al met matrices heeft leren rekenen.

met $Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ via (6.32) gedefinieerd door

$$Z(r, \theta) = (X(r, \theta), Y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Horizontaal worden deze matrices genummerd met de variabele grootte in het beeld, verticaal met die in het domein van de betreffende afbeelding. Precies andersom als in (6.10) dus, omdat we de schrijfwijze rechts in (6.39) hebben gebruikt. Transponeren geeft natuurlijk de vorm die consistent is met (5.3).

De kolomvectoren in (6.47) zien er uit als gradiënten, maar dat is slechts misleidende schijn, zoals we in Sectie 6.7.4 zullen zien.

6.7.3 Kettingregel met Jacobimatrices

Mooie voorbeelden van matrixprodukten als in (6.22) zien we als we in (6.47) aan beide kanten links $(\tilde{h} \ \tilde{k})$ erbij zetten. Dan is

$$(\tilde{h} \ \tilde{k}) \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial r} \\ \frac{\partial G}{\partial \theta} \end{pmatrix} = (\tilde{h} \ \tilde{k}) \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (6.48)$$

nu links en rechts uit te werken tot een 1 bij 1 matrix, met daarin precies de twee lineaire stukken die we hierboven aan elkaar gelijkstelden bij het uitwerken van de kettingregel, om tot (6.45) en (6.46) te komen.

Via links en rechts transponeren is (6.48) equivalent met

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial r} & \frac{\partial G}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{k} \end{pmatrix}, \quad (6.49)$$

waarin we de *Jacobimatrices* van G , F en Z herkennen, waarin de beeldvariabelen niet horizontaal maar verticaal genummerd worden, zoals we in (6.10) al gezien hebben. Ook zien we dat de volgorde in (6.49) nu net is als in (5.3), hetgeen prettig is als we $\tilde{h}$ en $\tilde{k}$ zien als variabele.

Als $F(x, y) = G(r, \theta)$ een grootte is met twee componenten

$$F_1(x, y) = G_1(r, \theta) \quad \text{en} \quad F_2(x, y) = G_2(r, \theta),$$

dan kan (5.3) voor beide componenten in één keer opgeschreven worden als

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial r} & \frac{\partial G_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial G_2}{\partial r} & \frac{\partial G_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{k} \end{pmatrix}, \quad (6.50)$$

en zien we hoe de kettingregel toegepast op

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{Z} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$$

de Jacobimatrix van G produceert via het matrixprodukt van de Jacobimatrixes van F en Z .

Deze notatie suggereert om de afhankelijke grootheid $F(x, y) = G(r, \theta)$ als 2-vector te zien, dus

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad G(r, \theta) = \begin{pmatrix} G_1(r, \theta) \\ G_2(r, \theta) \end{pmatrix},$$

en dus ook x, y en r, θ als componenten van de 2-vectoren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}.$$

We blijven echter $F = F(x, y)$ en $G = G(r, \theta)$ schrijven.

6.7.4 Omschrijven van differentiaaloperatoren

De notatie (6.48) is handiger als we zoals gebruikelijk in de natuurkunde aan $F(x, y) = G(r, \theta)$ denken als één en dezelfde afhankelijke grootheid, en niet als een functie zoals gebruikelijk in de wiskunde.

In dat geval ligt het voor de hand om die grootheid af te splitsen uit de notatie in (6.47) en de kettingregel voor coördinatentransformaties te schrijven als

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial \theta} & \frac{\partial Y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (6.51)$$

hetgeen de matrixnotatie is voor

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial X}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

waaruit de differentiaaloperatoren

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial y}$$

kunnen worden opgelost in termen van de coëfficiënten

$$\frac{\partial X}{\partial r}, \frac{\partial Y}{\partial r}, \frac{\partial X}{\partial \theta}, \frac{\partial Y}{\partial \theta} \quad \text{en de differentiaaloperatoren} \quad \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Opgave 6.20. In het concrete geval van poolcoördinaten geeft dit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

Laat dit zien.

Met Opgave 6.20 zijn we nog niet klaar als we in (6.40)

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y}$$

willen omschrijven naar r en θ . De vraag is ook hoe we e_x en e_y omschrijven naar e_r en e_θ , en daarvoor komt de vraag wat e_r en e_θ eigenlijk zijn.

Een natuurkundige zal hier niet lang over nadenken. Teken maar een plaatje en het is evident dat

*Teken
plaatje!*

$$e_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

en

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} = e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (6.52)$$

de gradiënt in poolcoördinaten geeft. Daar had 'ie de hele kettingregel überhaupt niet voor nodig. Omdat

$$e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = 1 \quad \text{en} \quad e_r \cdot e_\theta = e_\theta \cdot e_r = 0,$$

staan de vectoren e_r en e_θ in ieder punt onderling loodrecht⁴⁸, met elk lengte 1, en wijzen in de richtingen waarin het punt $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ loopt als je r respectievelijk θ varieert. De voorfactor $\frac{1}{r}$ compenseert de met r evenredige snelheid bij gelijkmatige toename van θ .

Opgave 6.21. In (6.52) staan twee representaties van dezelfde operator. Door e_x en e_y in e_r en e_θ uit te drukken en Opgave 6.20 te gebruiken kun je zien dat ze inderdaad hetzelfde zijn. Doe dat. Schrijf ook $V = V_x e_x + V_y e_y$ om als $V = V_r e_r + V_\theta e_\theta$.

⁴⁸ Wiskundig is dit per definitie en consistent met wat je ziet als je pijltjes tekent.

Opgave 6.22. Laat zien dat de divergentie in poolcoördinaten wordt gegeven door

$$\nabla \cdot V = (e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \cdot (V_r e_r + V_\theta e_\theta) = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}.$$

Hint: Omdat e_r en e_θ van θ afhangen werkt met de produktregel van Leibniz de $e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$ in de factor links nu ook op e_r en e_θ in de factor rechts, en één van die twee geeft na inproduct met de voorfactor e_θ een bijdrage.

Opgave 6.23. Pas de regel in Opgave 6.22 nu toe op ∇ zelf en laat zien dat

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}}_{\Delta_r} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}}_{\Delta_S}$$

Hint: wellicht eerst Opgave 6.22 toepassen op ∇ als werkend op de afhankelijke grootheid $G = F$, waarvoor de natuurkundige dezelfde letter gebruikt en de wiskundige dan met $G(r, \theta) = F(r \cos \theta, r \sin \theta)$ in de war raakt, omdat G en F niet dezelfde functies zijn.

In Opgave 6.23 zien we

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_S, \quad (6.53)$$

waarin Δ_r de radiële Laplaciaan is, die ook werkt op functies $R = R(r)$, en Δ_S de Laplace-Beltrami operator op

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

uitgedrukt in de hoekvariabele θ als

$$\Delta_S = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Het aardige nu is dat de integraal van de Laplaciaan van een nette functie

$$u(x, y) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

over een disk B_R met straal $R > 0$ in poolcoördinaten meteen tot een belangrijke conclusie leidt, maar daarvoor moeten we eerst weten wat meervoudige integralen zijn.

6.8 Integralen over rechthoeken

Integraalrekening voor continue functies

$$u : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R},$$

met $[a, b] \times [c, d]$ een rechthoek in $\mathbb{R}^2$ gaat met partities P als in (2.4) voor $[a, b]$, en

$$c = y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_M = b \quad (6.54)$$

voor $[c, d]$.

Om kort te gaan, met onder- en bovensommen, of met tussensommen van de vorm

$$\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M u(\xi_k, \eta_l)(x_k - x_{k-1})(y_l - y_{l-1}),$$

met tussenwaarden $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ en $\eta_l \in [y_{l-1}, y_l]$, volgt het bestaan van één unieke $J \in \mathbb{R}$ die de integraal van u over $[a, b] \times [c, d]$ genoemd wordt, met notatie (en stelling over het vrij mogen kiezen van de integratievolgorde)

$$\begin{aligned} J &= \iint_{[a,b] \times [c,d]} u(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_c^d u(x, y) dy dx \\ &= \int_c^d \int_a^b u(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (6.55)$$

De herhaalde integralen worden uitgewerkt met de technieken en regels voor gewone integralen.

We maken daar hier nu verder geen woorden aan vuil maar wijzen wel nog even op de details in de hier gebruikte notaties in relatie tot de discussie na Stelling 4.12 en Opgave 2.47 onder Definitie 2.41.

6.8.1 Notationele kwesties met die d-tjes

Anders dan de notatie suggereert is (6.55) geen uitdrukking met de onder Stelling 4.12 aangekondigde 2-vormen. In (6.55) is de herhaalde integraal immers te lezen als

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b u(x, y) dx \right\} dy,$$

een integraal van een integraal, net als de herhaalde integraal direct daarvoor, met de afsluitende accolade stevig tussen dx en dy in.

Beide herhaalde integralen zijn echter gelijk aan

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} u(x, y) d(x, y),$$

gedefinieerd via Riemannsommen en een limietovergang, met een notatie waarin $dx dy$ of $dy dx$ als produkt van dx en dy zorgvuldig vermeden is.

Opgave 6.24. Net als in Opgave 2.47 kun je je nu drie assen (nu in de ruimte in plaats van in het vlak) voorstellen die loodrecht op elkaar staan in hun gemeenschappelijke snijpunt $x = y = z = 0$, met richtingen nog te kiezen, maar dat pas nadat je op de x -as a en b gemarkeerd hebt, op de y -as c en d , en de grafiek van zo maar een continue functie zonder nulpunten en tekenwisselingen hebt gekozen. Nu zijn er acht gevallen waarin je de integraal kunt relateren aan de inhoud ingesloten door $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $z = 0$ en $z = u(x, y)$. Kijk nu naar de tekens van $b - a$ en $d - c$, zeg maar van dx en dy , in de twee gevallen dat zowel u als de integraal positief zijn, en laat zien dat ze hetzelfde teken hebben: zeg maar $dx dy > 0$.

Opgave 6.25. Neem nu eventueel voor het gemak $a = c = 0$, $|b| = |d| = 1$. In het geval dat $dx dy$ en $u(x, y)$ allebei positief zijn is er een oriënterende ordening tussen de drie assen die overeenkomt met de correspondentie

positieve x -as	$\leftrightarrow$	middelvinger
positieve y -as	$\leftrightarrow$	wijsvinger
positieve z -as	$\leftrightarrow$	duim

op je linkerhand. Overtuig jezelf daarvan en ook van het volgende: teken je een x -as en een y -as op het schoolbord die elkaar loodrecht snijden in $x = y = 0$ dan vertellen de positieve x -as en de positieve y -as als geordend assenpaar welke kant van het bord $z > 0$ heeft; bij de standaardkeuze met x naar rechts en y naarboven komt de positieve z -as naar voren het bord uit. Het bijbehorende assenkruis heet dan rechtsdraaiend⁴⁹.

Als je wil rekenen met formules waarin produkten van dx en dy voorkomen dan kun je in het licht van Opgave 6.24 en Opgave 6.25 tot de conclusie komen dat het handig is om af te spreken dat

$$d(x, y) = dx dy = -dy dx,$$

zonder de afsluitende accolade tussen dx en dy , in de zin dat

$$J = \iint_{[a,b] \times [c,d]} u(x, y) d(x, y) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} u(x, y) dx dy,$$

gezien als

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} \text{werkend op } u(x, y) dx dy,$$

⁴⁹ Dit is moeilijk voor jongens.

gelijk is aan

$$- \iint_{[a,b] \times [c,d]} u(x, y) dy dx,$$

gezien als

$$- \iint_{[a,b] \times [c,d]} \text{werkend op } u(x, y) dy dx,$$

waarbij die werking dan precies gedefinieerd moet worden op zo'n manier dat onder coördinatentransformaties de integralen transformeren op een manier die consistent is met wat er gebeurt met de inhoud en waar het verhaal mee begonnen is. Maar dat hebben we hier nog niet behandeld.

6.8.2 Formele d-algebra zonder betekenis?

Ondertussen spreekt de algebra voor differentiaalvormen deels voor zich. Na $du = u'(x)dx$ voor $u = u(x)$ hebben we natuurlijk ook

$$du = u_x dx + u_y dy$$

als de d van de 0-vorm $u = u(x, y)$, een uitdrukking van de vorm

$$f dx + g dy = f(x, y) dx + g(x, y) dy,$$

een 1-vorm waarvan de d via

$$d(f(x, y) dx + g(x, y) dy)$$

vraagt⁵⁰ om een som en produktregel met d van $f(x, y)$ en $g(x, y)$, en een nog te definiëren d van dx en dy .

Voor de hand als som- en daarna twee keer de produktregel ligt

$$d(f dx + g dy) = d(f dx) + d(g dy) =$$

$$df dx + f ddx + dg dy + g ddy =$$

$$f_x dx dx + f_y dy dx + g_x dx dy + g_y dy dy + f ddx + g ddy.$$

Als $dx dy = -dy dx$ volgt dan

$$d(f dx + g dy) = f_x dx dx + g_y dy dy + (g_x - f_y) dx dy + f ddx + g ddy.$$

Met $y = x$ leest $dx dy = -dy dx$ nu toch echt als $dx dx = -dx dx$, dus $dx dx = 0 = dy dy$ als consistent voor te schrijven tweede rekenregel ligt dan ook voor de hand. Daarmee reduceert het bovenstaande tot

$$d(f dx + g dy) = (g_x - f_y) dx dy + f ddx + g ddy,$$

⁵⁰ Wat d is dat kun je straks weten.

en blijft de vraag wat ddx en ddy dan wel mogen zijn.

Keine blasse Ahnung zou ik zeggen dus doe dan maar NUL. Dan wordt de werking van d op 1-vormen

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy \xrightarrow{d} (g_x(x, y) - f_y(x, y))dxdy,$$

en dus

$$u(x, y) \xrightarrow{d} u_x(x, y)dx + u_y(x, y)dy \xrightarrow{d} (u_{yx}(x, y) - u_{xy}(x, y))dxdy = 0.$$

Der blasse Ansatz $ddx = ddy = 0$ gibt $ddu = 0$ voor alle $u = u(x, y)$.

Ik zou zeggen: machen wir. Dus $d^2 = 0$ ⁵¹, en met $f = f(x, y), g = g(x, y)$ hebben we in de notatie met partiële differentiaalquotiënten nu dat

$$f \xrightarrow{d} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \quad fdx + gdy \xrightarrow{d} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy, \quad gdx dy \xrightarrow{d} 0 \quad (6.56)$$

Opgave 6.26. Doe de algebra voor

$$\begin{aligned} f &\xrightarrow{d} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz, \\ fdx + gdy + hdz &\xrightarrow{d} \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy, \\ fdydz + gdzdx + hdx dy &\xrightarrow{d} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)dxdydz, \\ hdx dydz &\xrightarrow{d} 0, \end{aligned}$$

met $f = f(x, y), g = g(x, y), h = h(x, y)$, gebruikmakend van de som- en produktregel voor d , $dxdy = -dydx$, $dxdz = -dzdx$, $dydz = -dzdy$, en $ddx = ddy = ddz = 0$. Verifieer dat niet alleen $ddf = 0$ maar ook $dd(fdx + gdy + hdz) = 0$: dd maakt alles nul en zo hoort dat kennelijk.

Opgave 6.27. Doe de algebra nog een keer voor $F \xrightarrow{d} F'(x)dx$ en $f(x)dx \xrightarrow{d} 0$ met $f(x)$ en $F(x)$.

⁵¹ Daar kan i een puntje aan zuigen.

6.8.3 Transformaties en parametrisaties

Als $x \rightarrow f(x) = F'(x)$ en $t \rightarrow x'(t)$ continu zijn met bijvoorbeeld $x(0) = a$ en $x(1) = b$, dan is

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b dF = F(b) - F(a) = F(x(1)) - F(x(0)) =$$

$$[F(x(t))]_0^1 = \int_0^1 F'(x(t))x'(t) dt = \int_0^1 f(x(t))x'(t) dt,$$

waarin we

$$dx = x'(t)dt \quad (6.57)$$

als een stukje van de formele d-algebra in Sectie 6.8.2 herkennen.

Een 1-vorm $f(x)dx$ in x wordt via $t \rightarrow x(t)$ zo teruggetrokken tot een 1-vorm

$$f(x)dx = f(x(t))x'(t)dt \quad (6.58)$$

in t . Evenzo wordt de 1-vorm

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

via $t \rightarrow x(t)$ en $t \rightarrow y(t)$ met dezelfde algebra teruggetrokken tot een 1-vorm

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy = (f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t))dt \quad (6.59)$$

in t .

De gelijktokens in (6.58) en zeker (6.59) zijn wat dubieus, het is wellicht beter om (6.58) en (6.59) nu als afbeeldingen te lezen, bijvoorbeeld

$$f(x, y)dx + g(x, y)dy \xrightarrow{\text{terugtrekken}} (f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t))dt,$$

waarbij het terugtrekken gebeurt via de afbeelding in kwestie, in dit voorbeeld $t \rightarrow (x(t), y(t))$, die van 1 naar 2 variabelen gaat.

Nemen we in plaats van een 1-vorm een 2-vorm, zeg $dx dy$ zelf, dan geeft terugtrekken via dezelfde $t \rightarrow (x(t), y(t))$ dat

$$dx dy \rightarrow x'(t)dt y'(t)dt = x'(t)y'(t)dtdt = 0.$$

Weinig zinvol wellicht, maar met

$$(r, \theta) \rightarrow (x(r, \theta), y(r, \theta))$$

krijgen we

$$dxdy \rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)drd\theta, \quad (6.60)$$

met de determinant⁵² van de Jacobimatrix.

In het geval dat $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ wordt dit

$$dxdy \rightarrow r dr d\theta,$$

op grond van een algebra die zich (ook) voor coördinatentransformaties genereert uit de regeltjes die we in de d-algebra hebben geponeerd.

Merk op dat (6.59) niet met een coördinatentransformatie kan corresponderen maar (6.60) wel, en lees de afleiding van (6.59) nog eens terug met t vervangen door ϕ in bijvoorbeeld $[0, 2\pi]$. Met $x(0) = x(2\pi)$ en $y(0) = y(2\pi)$ kun je dit voorbeeld nu goed vergelijken met (6.60) waarin r vast is genomen, alvorens verder te ontdekken hoe de terugtrek-algebra werkt voor

$$(\theta, \phi) \rightarrow (x(\theta, \phi), y(\theta, \phi), z(\theta, \phi)) \quad (6.61)$$

en 2-vormen in x, y, z .

Opgave 6.28. Trek $f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz$ terug naar een 2-vorm in θ en ϕ .

6.8.4 Een transformatiestelling?

Voor $R \subset \mathbb{R}^2$ en $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ geldt dat

$$\iint_R f(x, y) dxdy = \iint_Q f(x(r, \theta), y(r, \theta)) \left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta}\right) dr d\theta,$$

als

$$Q \xrightarrow{(r, \theta) \rightarrow (x, y)} R$$

aan wat aannamen voldoet. Voorbeeld: Sectie 6.9. Hoe doen we dit? Ik ben er nog niet helemaal uit. Onderstaande is om de gedachten te bepalen. Dit kan makkelijk uitdijen tot iets groters.

Met een bijjectie

$$(x, y) \xrightarrow{\Phi} (u, v)$$

⁵² Plus of min de oppervlakte van de ruit opgespannen door de twee kolomvectoren.

tussen $R \subset \mathbb{R}_{x,y}^2$ en $A \subset \mathbb{R}_{u,v}^2$ is wat we willen een uitspraak die de integraal

$$\iint_A g(u, v) \, dudv$$

relateert aan een integraal met $g(u(x, y), v(x, y))$ en $dxdy$ over R , liefst met een al met de conventie dat $dudv = -dvdu$ en $dxdy = -dydx$.

Als de bijctie niet-lineair is dan zijn R en A zeker niet allebei een rechthoek, laat staan van de vorm zoals in Sectie 6.8, dus neem in eerste instantie alleen R van die vorm. We nemen R gesloten, dus met de rand erbij, en Φ gedefinieerd⁵³ op heel $\mathbb{R}^2$, met continue partiële afgeleiden. Voor het gemak nemen we $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

Zie nu Opgave 4.25 en lees i.p.v

$$F(x, y) = g(y) - x \quad \text{nu} \quad F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x, y) - u \\ \Phi_2(x, y) - v \end{pmatrix}.$$

De uitgekakte versie van de stelling die je daar bewezen hebt is de inverse functiestelling die we nu nodig hebben. Die stelling zegt dat als in (x_0, y_0) de Jacobimatrix

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

inverteerbaar is, in een omgeving van $(u_0, v_0) = (\Phi_1(x_0, y_0), \Phi_2(x_0, y_0))$ de inverse functie

$$(u, v) \xrightarrow{\Phi^{(-1)}} (x, y)$$

bestaat en continu differentieerbaar is. De Jacobimatrix van de inverse afbeelding is de inverse van de Jacobimatrix van Φ .

Voor de te formuleren transformatiestelling nemen we nu aan dat de Jacobimatrix $J(x, y)$ in elk punt van R inverteerbaar is. Daarmee is A een gebied in $\mathbb{R}_{u,v}^2$ met vier randen geparametriseerd⁵⁴ door

$$u \rightarrow \Phi(u, 0), \quad v \rightarrow \Phi(1, v), \quad u \rightarrow \Phi(u, 1), \quad v \rightarrow \Phi(0, v).$$

Bij partities

$$(P) \quad 0 = u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_N = 1 \quad \text{met} \quad N \in \mathbb{N},$$

⁵³ Zonder beperking der algemeenheid, maar dat moet nog blijken.

⁵⁴ Het alternatief dat later nog komt wellicht is:

$$t \rightarrow \Phi(t, 0), \quad t \rightarrow \Phi(1, t), \quad t \rightarrow \Phi(1 - t, 1), \quad t \rightarrow \Phi(1 - t, 0),$$

$$(Q) \quad 0 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_M = 1 \quad \text{met} \quad M \in \mathbb{N},$$

horen $(M+1)(N+1)$ parametrisaties

$$u \rightarrow \Phi(u, v_j) \quad \text{en} \quad v \rightarrow \Phi(u_i, v) \quad (i = 0, \dots, M, j = 0, \dots, N),$$

die een rooster van vervormde rechthoekjes S_{ij} maken in A .

De goede definitie van Riemann integreerbaarheid van $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ moet⁵⁵ nu geven dat met

$$M_{ij} = \sup_{S_{ij}} g \quad \text{en} \quad m_{ij} = \inf_{S_{ij}} g$$

geldt dat

$$\sum_{ij} m_{ij} |S_{ij}| \leq \iint_A g \leq \sum_{ij} M_{ij} |S_{ij}|,$$

waarin $|S_{ij}|$ de oppervlakte is van S_{ij} , hetgeen we herschrijven als

$$\sum_{ij} m_{ij} \frac{|S_{ij}|}{|R_{ij}|} |R_{ij}| \leq \iint_A g \leq \sum_{ij} M_{ij} \frac{|S_{ij}|}{|R_{ij}|} |R_{ij}|,$$

en opmerken dat ook geldt dat

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f \quad \text{en} \quad m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f$$

met $f = g \circ \Phi$.

We moeten nu precies⁵⁶ maken dat

$$\frac{|S_{ij}|}{|R_{ij}|} \sim |\det J(x_i, y_i)| \tag{6.62}$$

als $M, N \rightarrow \infty$ om op de Riemann integreerbaarheid van

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) |J(x, y)|$$

over R uit te komen MET gelijkheid van de integralen:

$$\iint_R f |\det J| = \iint_A g.$$

Wat is wijsheid? Hier al de vraag naar de maat van de vervormde rechthoekjes koppelen aan vraag naar de maat van willekeurige deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$, en meteen een voorbeeld van taart opgehakt in aftelbaar veel identieke stukjes die dus niet meetbaar kunnen zijn en Banach-Tarski in $\mathbb{R}^3$ met bewijs dat $3 = 4$? Belangrijker is wellicht het precies maken van (6.62).

⁵⁵ Moet nog blijken!

⁵⁶ Misschien gelijk voor een andere $(x, y) \in R_{ij}$???????

6.9 Integraalrekening in poolcoördinaten

Merk op dat we *in het echte leven* over meer verzamelingen zullen willen integreren dan over rechthoeken. Bijvoorbeeld over heel $\mathbb{R}^2$. Voor niet-negatieve functies $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u = \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\iint_{[-R,R] \times [-R,R]} u(x,y) d(x,y)}_{J(R)} = \lim_{R \rightarrow \infty} J(R) \quad (6.63)$$

op natuurlijke manier gedefinieerd in $[0, \infty]$ als limiet van een niet-dalende functie $R \rightarrow J(R) \geq 0$.

Er is natuurlijk geen enkele reden om een integraal over heel $\mathbb{R}^2$ per se als een limiet van integralen in rechthoekige coördinaten over in dit geval vierkanten te introduceren. Poolcoördinaten zijn vaak veel handiger. Voor Riemanssommen in poolcoördinaten ten behoeve van de rechtstreekse definitie en uitwerking van

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} u(x,y) d(x,y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^R u(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} u(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta r dr \end{aligned} \quad (6.64)$$

gebruiken we

$$0 = r_0 \leq r_1 \leq \dots \leq r_M = R \quad \text{met} \quad M \in \mathbb{N} \quad (6.65)$$

en

$$0 = \theta_0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_N = 2\pi \quad \text{met} \quad N \in \mathbb{N}, \quad (6.66)$$

en tussensommen van de vorm

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N u(\rho_k \cos \phi_l, \rho_k \sin \phi_l) \underbrace{\frac{1}{2}(r_k^2 - r_{k-1}^2)(\theta_l - \theta_{l-1})}_{\text{waarom dit dan?}} = \\ \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N u(\rho_k \cos \phi_l, \rho_k \sin \phi_l) \underbrace{\frac{r_k + r_{k-1}}{2}}_{\tilde{\rho}_k} (r_k - r_{k-1})(\theta_l - \theta_{l-1}), \end{aligned}$$

met tussenwaarden $\rho_k, \tilde{\rho}_k \in [r_{k-1}, r_k]$ en $\phi_l \in [\theta_{l-1}, \theta_l]$. De details zijn zelf in te vullen. Leuker is deze mooie toepassing van (6.64) in de volgende stelling over harmonische functies.

Opgave 6.29. Een twee keer continu differentieerbare functie $(x, y) \rightarrow u(x, y) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$ heet harmonisch als $\Delta u = 0$. Laat zien dat

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta,$$

en dat harmonische functies dus in elk punt het gemiddelde van hun waarden op een diskvormige omgeving zijn. Hint: gebruik Stelling 4.34 als je de integraal van Δu over $\bar{B}_R$ hebt vertaald naar een integraal met alleen maar $d\theta$.

Ook leuk is dat voor niet-negatieve continue functies $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de integraal

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} u(x, y) d(x, y) \quad (6.67)$$

nu net zo natuurlijk gedefinieerd is in $[0, \infty]$ als door (6.63). Alleen een wiskundige vraagt zich dan af dit consistent is. Dat moet en dat mag hoor:

Opgave 6.30. Voor niet-negatieve continue $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ geldt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} u(x, y) d(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{[-R, R] \times [-R, R]} u(x, y) d(x, y).$$

Zoek maar uit waarom en onthoud dat

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u$$

op twee (eigenlijk vier) manieren is uit te rekenen als dat nodig is, zie (6.55) en (6.64).

6.10 Integraalrekening en kansverdelingen

In de formule van Stirling, zie (5.20), stond nog een integraal die we nu netjes kunnen uitrekenen met behulp van Opgave 6.30 en de functie

$$(x, y) \xrightarrow{u} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

Kort door de bocht opgeschreven concluderen we dat

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} d(x, y) \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} r d\theta dr = \int_0^{\infty} 2\pi e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr = 2\pi [-e^{-\frac{1}{2}r^2}]_0^{\infty} = 2\pi. \end{aligned}$$

Opgave 6.31. Laat met Opgave 6.30 zien dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Bijgevolg hebben

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{en} \quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \quad (6.68)$$

dus de eigenschap dat ze (positief zijn en) en totale integraal gelijk aan 1 hebben. We noemen zulke functies *kansdichtheden*. De dichtheid $f(x)$ hoort bij een stochastische grootheid X waarvoor geldt dat de kans op uitkomst $X \in [a, b]$ gelijk is aan

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx,$$

en

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds$$

wordt de cumulatieve verdelingsfunctie van X genoemd.

Een van X onafhankelijke stochastische grootheid Y kan een kansdichtheid $g(y)$ hebben die beschrijft dat de kans op $Y \in [c, d]$ gelijk is aan

$$P(Y \in [c, d]) = \int_c^d g(y) dy.$$

De simultane kansdichtheid $u(x, y) = f(x)g(y)$ geeft dan de kans op $X \in [a, b]$ en $Y \in [c, d]$ als

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy.$$

De kansdichtheden in (6.68) worden de 1-en 2-dimensionale standaard *normale verdeling* genoemd. Is de functie g hetzelfde als de functie f in (6.68), dan zijn X en Y allebei standaard normaal verdeeld. De twee stochastische grootheden X en Y kunnen op elkaar gedeeld worden. De kans op

$$Q = \frac{Y}{X} \in [a, b]$$

is dan gelijk aan de integraal van $u(x, y)$ over het gebied ingesloten door de lijnen $y = ax$ en $y = bx$.

In het geval dat X en Y standaard normaal verdeeld en onderling onafhankelijk zijn, bestaat die integraal uit twee identieke stukken waarvan er één gegeven wordt door

$$\{(x, y) : x \geq 0, ax \leq y \leq bx\},$$

een gebied dat in poolcoördinaten beschreven wordt door θ in een deelinterval van $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

We willen concluderen dat

$$\begin{aligned} P(Q \in [a, b]) &= 2 \int_0^\infty \int_{ax}^{bx} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dy dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{\arctan a}^{\arctan b} e^{-\frac{1}{2}r^2} r d\theta dr = \frac{1}{\pi} (\arctan b - \arctan a) = \int_a^b \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+q^2} dq. \end{aligned}$$

De stochastische grootte Q heeft dan een kansdichtheid gegeven door de functie

$$q \rightarrow \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+q^2}.$$

Opgave 6.32. Hierboven manipuleerden we met meervoudige oneigenlijke integralen over “taartpunten” in $\mathbb{R}^2$. De daarvoor benodigde theorie vraagt om een uitbreiding van de theorie van integralen over het hele vlak in poolcoördinaten. Dat kun je ook zelf proberen precies te maken nu.

6.11 Harmonische polynomen

We vinden deze polynomen ook als we de Laplace vergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

voor $u = u(x, y)$ met *scheiding van variabelen* in poolcoördinaten oplossen door de operator in Opgave 6.23 los te laten op

$$u(x, y) = R(r)\Theta(\theta), \tag{6.69}$$

en het resultaat gelijk aan nul te stellen. Dit geeft

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) R(r)\Theta(\theta) \\ &= \Theta(\theta) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r) + \frac{R(r)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Theta(\theta) \end{aligned}$$

$$= \Theta(\theta)(R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)) + \frac{R(r)}{r^2}\Theta''(\theta).$$

Als Θ'' een veelvoud is van Θ , zeg

$$-\Theta'' = \mu\Theta \quad (6.70)$$

dan volgt Euler's vergelijking

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) = \mu \frac{R(r)}{r^2} \quad (6.71)$$

voor $R(r)$.

Merk op dat (6.70) gezien kan worden als een (eigenwaarde)probleem voor

$$-\Delta_S = -\frac{d^2}{d\theta}$$

op de eenheidscirkel waar bij Θ een 2π -periodieke functie moet zijn om een functie op de cirkel

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

te definiëren.

Opgave 6.33. Welke μ zijn toegestaan in (6.70) voor oplossingen (6.69) die op heel $\mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd? Leg uit dat je die waarden ook meteen⁵⁷ aan de harmonische polynomen kunt zien zonder de precieze vorm van (6.70) te kennen. Schrijf die harmonische polynomen in gescheiden variabelen r en θ als $R(r)\Theta(\theta)$ en verifieer dat $R(r)$ een oplossing is van (6.71) met de bijbehorende μ .

Opgave 6.34. Voor elke $N \in \mathbb{N}$ en $a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ in $\mathbb{R}$ is

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) r^k$$

via $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ een harmonische functie. Overtuig jezelf van de juistheid van de informele uitspraak dat deze oplossing in $(0, 0)$ gelijk is aan zijn gemiddelde op elke disk met middelpunt $(0, 0)$.

⁵⁷ In $\mathbb{R}^3$ eigenwaarden en -functies van Laplace-Beltrami operator ook via polynomen.

Opgave 6.34 suggereert

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) r^k$$

als een algemene oplossing voor de Laplacevergelijking op de eenheidsdisk met randvoorwaarde

$$u(\cos \theta, \sin \theta) = f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad (6.72)$$

een zogenaamde *Fourierreeks*⁵⁸ voor een 2π -periodieke functie $\theta \rightarrow f(\theta)$. Ook deze $u(x, y)$ is dan in $(x, y) = (0, 0)$ het gemiddelde van $u(x, y)$ op elke disk met middelpunt $(0, 0)$ en straal voldoende klein, kleiner dan 1 in dit geval.

Opgave 6.35. In $\mathbb{R}^3$ gebruiken we *bolcoördinaten*

$$x = r \sin \theta \cos \phi;$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi;$$

$$z = r \cos \theta,$$

en

$$e_r = \sin \theta \cos \phi e_x + \sin \theta \sin \phi e_y + \cos \theta e_z$$

$$e_\theta = \cos \theta \cos \phi e_x + \cos \theta \sin \phi e_y - \sin \theta e_z$$

$$e_\phi = -\sin \phi e_x + \cos \phi e_y.$$

Schrijf e_r, e_θ, e_ϕ al of niet als kolomvectoren, en verifieer dat

$$e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = e_\phi \cdot e_\phi = 1; \quad e_r \cdot e_\theta = e_r \cdot e_\phi = e_\theta \cdot e_\phi = 0.$$

Overtuig jezelf van

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} e_\phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (6.73)$$

en gebruik (6.73) om voor

$$V = V_r e_r + V_\theta e_\theta + V_\phi e_\phi$$

eerst af te leiden dat

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r} V_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} V_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right),$$

⁵⁸ Uitgebreid behandeld in de *mamanotes* van vorig jaar.

en vervolgens via $V = \nabla F$ dat

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}}_{\Delta_r} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)}_{\Delta_S}.$$

Wederom zien we hier (6.23), maar nu met Δ_S gedefinieerd op

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

De formules in $\mathbb{R}^n$ laten zich nu raden, afgezien wellicht van de exacte vorm van Δ_S in de hoekvariabelen $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, maar met

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

voor het radiële gedeelte.

Opgave 6.36. In $\mathbb{R}^3$ gebruiken we bolcoördinaten

$$x = r \sin \theta \cos \phi;$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi;$$

$$z = r \cos \theta,$$

en

$$e_r = \sin \theta \cos \phi e_x + \sin \theta \sin \phi e_y + \cos \theta e_z$$

$$e_\theta = \cos \theta \cos \phi e_x + \cos \theta \sin \phi e_y - \sin \theta e_z$$

$$e_\phi = -\sin \phi e_x + \cos \phi e_y.$$

Schrijf e_r, e_θ, e_ϕ al of niet als kolomvectoren en verifieer dat

$$e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = e_\phi \cdot e_\phi = 1; \quad e_r \cdot e_\theta = e_r \cdot e_\phi = e_\theta \cdot e_\phi = 0.$$

Overtuig jezelf van

$$\nabla = e_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} e_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (6.74)$$

en gebruik (6.74) om voor

$$V = V_r e_r + V_\theta e_\theta + V_\phi e_\phi$$

eerst af te leiden dat

$$\nabla V = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r} V_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} V_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right),$$

en vervolgens via $V = \nabla F$ dat

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}}_{\Delta_r} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)}_{\Delta_S}.$$

Wederom zien we hier (6.23), maar nu met Δ_S gedefinieerd op

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

De formules in $\mathbb{R}^n$ laten zich nu raden, afgezien wellicht van de exacte vorm van Δ_S in de hoekvariabelen $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, maar met

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

voor het radiële gedeelte.

6.12 Intermezzo: het waterstofatoom

Met

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}$$

is de stationaire Schrödinger vergelijking voor het waterstofatoom

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - \frac{e^2}{r} \psi = E \psi, \quad (6.75)$$

waarin m de massa van het electron is, e de lading van het electron, $\hbar$ de constante van Planck. De negatieve waarden van E waarvoor (6.75) een oplossing met

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, y, z)|^2 d(x, y, z) = 1$$

heeft zijn de energieniveaus die het electron in gebonden toestand kan aannemen.

We hebben gezien dat

$$\Delta = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}}_{\Delta_r} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)}_{\Delta_S}.$$

Via

$$\psi(x, y, z) = R(r) P_l\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right),$$

waarin $P_l(x, y, z) = Y(\theta, \phi)$ een harmonisch homogeen polynoom van graad l in x, y, z is, en een nieuwe x en n gedefinieerd door

$$x = \frac{1}{\hbar} \sqrt{-2mE} r \quad \text{en} \quad -E = \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2},$$

leidt dit tot

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dR}{dx} - \frac{l(l+1)}{x^2} R + \frac{2n}{x} R = R$$

met $R(x) \sim x^l$ voor $x \rightarrow 0$ en $R(x) \sim e^{-x}$ voor $x \rightarrow \infty$.

Substitueer daarom $R(x) = x^l e^{-x} u(x)$ en leidt voor $u(x)$ af dat

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\frac{4l}{x} - 2\right) \frac{du}{dx} = 2 \frac{n-l-1}{x} u.$$

Opgave 6.37. Corrigeer eventuele typo's hierboven. De machtreeksoplossing⁵⁹

$$u(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

breekt af voor een n die van l afhangt. Welke n is dat?

6.13 Lijnintegralen over polygonen en Coursat

We beginnen met formule (4.8) uit Sectie 4.1, al of niet via de “verboden” operaties daarboven, geschreven als

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_0^1 \underbrace{F'((1-t)x_0 + tx_1)}_{f(x(t))} \underbrace{(x_1 - x_0)dt}_{dx} = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx,$$

waarin, met $x, x(t), x_0, x_1, f(x)$ vervangen door $z, z(t), z_0, z_1, f(z)$,

$$t \rightarrow z(t) = (1-t)z_0 + tz_1 \tag{6.76}$$

het interval $[z_0, z_1]$ parametrizeert, en

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(z(t)) z'(t) dt = \\ \int_{z_0}^{z_1} f((1-t)z_0 + tz_1) dt (z_1 - z_0) = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz. \end{aligned} \tag{6.77}$$

⁵⁹Instructief om eerst $\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dR}{dx} = R$ op te lossen.

Dit is een formule die we, zonder dat (4.8) daarvoor nog nodig is, nu kunnen lezen met $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ en $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, met het linkerlid als ondubbelzinnige definitie van het rechterlid: de lijnintegraal

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$$

over het rechte lijnstuk van z_0 naar z_1 , van de functie $z \rightarrow f(z)$. Niet meer praten over andere parameterrepresentaties van $[z_0, z_1]$ dan (6.76), tenzij het nodig⁶⁰ is zou ik zeggen. Merk op dat $[z_0, z_1]$ voor alle $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ is gedefinieerd, dus $[1, 0]$ heeft nu ook betekenis. Je moet er even aan wennen maar het spreekt vanzelf. Het ligt voor de hand om aan z_0 als het begin- en z_1 als het eindpunt van $[z_0, z_1]$ te denken. Daarmee wordt $[z_0, z_1]$ meer dan alleen een verzameling: $[z_0, z_1]$ is zo een georiënteerd lijnstuk.

Opgave 6.38. Laat zien dat

$$\int_{z_0}^{z_1} z dz = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

Evalueer⁶¹ vervolgens $\int_{z_0}^{z_1} z^n dz$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 6.39. Evalueer $\int_{z_0}^{z_1} z^n dz$ voor alle $n \in -\mathbb{N} = \{-1, -2, -3, \dots\}$. Doe $n = -1$ als laatste⁶². Welke voorwaarde moet je leggen op z_0 en z_1 ?

Opgave 6.40. Laat zien dat

$$\left| \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz \right| \leq |z_0 - z_1| \max_{z \in [z_0, z_1]} |f(z)|.$$

Integralen gedefinieerd als hierboven door (6.77) kunnen we rijgen tot een integraal over een *polygonaal pad*

$$z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow \dots \rightarrow z_n$$

⁶⁰ Quod non.

⁶¹ Kan al door uitspraak met $z_0 = 0$ en $z_1 = 1$ verkregen via (??) etc. om te schrijven.

⁶² De eersten zullen de laatsten zijn.

middels

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz + \cdots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} f(z) dz = \int_{z_0, \dots, z_n} f(z) dz, \quad (6.78)$$

als $z \rightarrow f(z)$ een continue functie

$$[z_0, z_1] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n] \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

definieert. In het bijzondere geval dat $z_0 = z_n$ is eenvoudig na te gaan dat hier NUL uitkomt als $n = 2$.

Opgave 6.41. Ga dit na. Hint: neem eerst $z_0 = z_2, z_1 \in \mathbb{R}$ om te zien hoe het moet werken.

Wat deze opgave zegt is dat heen en weer lopen geen bijdrage aan een keten als in (6.78) geeft omdat vrijwel per definitie

$$\int_{z_0, z_1, z_0} f(z) dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz + \int_{z_1}^{z_0} f(z) dz = 0,$$

voor iedere $[z_0, z_1] \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ continu. We kunnen integralen dus vereenvoudigen door heen en weer stukjes weg te laten, ook als die niet achter elkaar zitten in het polygonale pad.

Neem nu in je complexe vlak z_0, z_1, z_2 , not all on a line⁶³, en neem aan dat

$$\Delta = \Delta_{z_0, z_1, z_2} = \{t_0 z_0 + t_1 z_1 + t_2 z_2 : t_0, t_1, t_2 \geq 0, t_0 + t_1 + t_2 = 1\} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

continu is. De verzameling Δ bestaat dus uit alle convexe combinaties van z_0, z_1, z_2 gezien als punten in het complexe vlak. Dat is een driehoekige tegel waarvan de rand een driehoek⁶⁴ is.

Laat z_3, z_4, z_5 de middens zijn van $[z_0, z_1]$, $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_0]$, die je krijgt door achtereenvolgens t_2, t_0, t_1 nul, en steeds de andere twee t -tjes $\frac{1}{2}$ te kiezen. Dan is

$$\begin{aligned} \int_{z_0, z_1, z_2, z_0} f(z) dz &= \int_{z_0, z_3, z_5, z_4, z_3, z_1, z_4, z_2, z_5, z_0} f(z) dz = \\ &= \int_{z_0, z_3, z_5, z_0} f(z) dz + \int_{z_3, z_4, z_5, z_3} f(z) dz + \int_{z_3, z_1, z_4, z_3} f(z) dz + \int_{z_5, z_4, z_2, z_5} f(z) dz. \end{aligned}$$

⁶³ Sommigen horen hierbij de stem van Erdős.

⁶⁴ Vereniging van 3 lijnstukjes: $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup [z_2, z_0]$, met zo gewenst een orientatie.

Teken
plaatje!

De integraal over het gesloten⁶⁵ pad

$$z_0 \rightarrow z_3 \rightarrow z_5 \rightarrow z_4 \rightarrow z_3 \rightarrow z_1 \rightarrow z_4 \rightarrow z_2 \rightarrow z_5 \rightarrow z_0$$

is zo enerzijds gelijk aan de integraal over het gesloten pad

$$z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_0$$

rond de grote driehoek, en anderzijds de som van vier integralen over de vier gesloten paden

$$z_0 \rightarrow z_3 \rightarrow z_5 \rightarrow z_0, \quad z_3 \rightarrow z_4 \rightarrow z_5 \rightarrow z_3,$$

$$z_3 \rightarrow z_1 \rightarrow z_4 \rightarrow z_3, \quad z_5 \rightarrow z_4 \rightarrow z_2 \rightarrow z_5$$

rond de vier kleinere driehoeken.

Als de oorspronkelijke integraal niet nul was, zeg gelijk⁶⁶ aan 1, dan is tenminste één van de vier integralen in absolute waarde minstens gelijk aan $\frac{1}{4}$, en kan daarna met die integraal het argument herhaald worden om een rij geneste driehoeken

$$\Delta = \Delta_{z_0, z_1, z_2} \supset \Delta_{z_0^{(1)}, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}} \supset \Delta_{z_0^{(2)}, z_1^{(2)}, z_2^{(2)}} \supset \Delta_{z_0^{(3)}, z_1^{(3)}, z_2^{(3)}} \supset \dots$$

te maken met

$$\left| \int_{z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, z_0^{(k)}} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^k}$$

voor $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Opgave 6.42. Bewijs dat de rijen $z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, z_2^{(k)}$ convergeren naar een limiet in Δ_{z_0, z_1, z_2} als $k \rightarrow \infty$.

Zonder beperking der algemeenheid mogen we nu wel aannemen⁶⁷ dat deze limiet gelijk is aan 0, i.e.

$$z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, z_2^{(k)} \rightarrow 0.$$

Kan het zo zijn dat f complex differentieerbaar is in 0? Zo ja, dan geldt voor $z \in \Delta$ dat

$$f(z) = f'(0)z + R(z)$$

⁶⁵ Teken het in je plaatje.

⁶⁶ Door $f(z)$ te delen door zijn integraal over de rand van Δ_{z_0, z_1, z_2} .

⁶⁷ Schuif de boel anders op.

met $R(z) = o(|z|)$ als $|z| \rightarrow 0$.

Maar dan is

$$\begin{aligned} \int_{z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, z_0^{(k)}} f(z) dz &= \int_{z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, z_0^{(k)}} f'(0)z dz + \int_{z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, z_0^{(k)}} R(z) dz \\ &= \int_{z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, z_0^{(k)}} R(z) dz, \end{aligned}$$

omdat de eerste integraal nul is vanwege (6.38) toegepast op $\int_{z_0}^{z_1} z dz$, $\int_{z_1}^{z_2} z dz$, $\int_{z_2}^{z_0} z dz$. Dus volgt

$$\frac{1}{4^k} \leq \left| \int_{z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, z_0^{(k)}} R(z) dz \right| \leq \frac{|z_0 - z_1| + |z_1 - z_2| + |z_2 - z_0|}{2^k} \max_{z \in \delta\Delta^{(k)}} |R(z)|,$$

waarin $\delta\Delta^{(k)}$ de rand is van

$$\Delta^{(k)} = \Delta_{z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, z_0^{(k)}} \ni 0.$$

Omdat $|z|$ op zijn hoogste gelijk is aan de grootste afstand tussen twee punten in $\Delta^{(k)}$ geldt

$$|z| \leq \frac{d}{2^k} \quad \text{met} \quad d = \max_{z, w \in \Delta} |z - w|,$$

en samen met de 2^k die we al hadden krijgen nu ook een bovengrens voor de integraal, met een 4^k in de noemer en een $\varepsilon > 0$ naar keuze in de teller:

Opgave 6.43. Gebruik (de definitie van) $|R(z)| = o(|z|)$ als $|z| \rightarrow 0$ om met de laatste twee ongelijkheden een tegenspraak te forceren.

Stelling 6.44. Voor iedere $f : \Delta_{z_0, z_1, z_2} \rightarrow \mathbb{C}$ die complex differentieerbaar is op de gesloten⁶⁸ driehoek Δ_{z_0, z_1, z_2} met hoekpunten $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ geldt dat

$$\oint_{z_{012}} f(z) dz = \int_{z_0, z_1, z_2, z_0} f(z) dz = 0,$$

nu ook met een notatie⁶⁹ die wellicht hierboven al voor de hand lag.

⁶⁸ Voor w op de rand $f(z) = f(w) + f'(w)(z - w) + R(z; w)$ met $z \in \Delta_{z_0, z_1, z_2}$ lezen.

⁶⁹ Zie het rondje door de integraalslang heen maar als driehoekje.

Eenzelfde uitspraak geldt voor iedere n -hoek ($n > 3$) gemaakt uit n driehoeken

$$\Delta_{w_0, z_0, z_1}, \Delta_{w_0, z_1, z_2}, \dots, \Delta_{w_0, z_{n-1}, z_0},$$

met

$$\Delta_{w_0, z_0, z_1} \cap \Delta_{w_0, z_1, z_2} = [w_0, z_1], \quad \Delta_{w_0, z_1, z_2} \cap \Delta_{w_0, z_2, z_3} = [w_0, z_2],$$

...

$$\Delta_{w_0, z_{n-2}, z_{n-1}} \cap \Delta_{w_0, z_{n-1}, z_n} = [w_0, z_{n-1}], \quad \Delta_{w_0, z_{n-1}, z_0} \cap \Delta_{w_0, z_0, z_1} = [w_0, z_0].$$

Als de lijnstukjes waarmee (6.78) is gemaakt de zijden zijn van zo'n door

$$z_n = z_0, \dots, z_{n-1} \tag{6.79}$$

gemaakte n -hoek met een punt w_0 in de n -hoek waarvoor alle $[w_0, z_k]$ in de veelhoek liggen⁷⁰, dan is

$$\oint_{z_0, \dots, z_n} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{w_0, z_{k-1}, z_k, w_0} f(z) dz.$$

Als $z \rightarrow f(z)$ complex differentieerbaar is in elk punt van

$$P_{z_0, \dots, z_{n-1}} = \cup_{k=1}^n \Delta_{w_0, z_{k-1}, z_k},$$

dan volgt zo dat

$$\oint_{z_n = z_0, \dots, z_n} f(z) dz = 0. \tag{6.80}$$

Bovendien kan ieder punt z_k dan met de andere punten vastgehouden naar binnen geschoven worden naar een $\tilde{z}_k$ in de door (6.79) gemaakte veelhoek, waarbij (6.80) niet verandert met eenzelfde argument waarin driehoeken met hoekpunten $z_{k-1}, z_k, \tilde{z}_k, z_{k+1}$ voorkomen. Kortom, (6.80) geldt voor iedere complex differentieerbare

$$f : P_{z_0, \dots, z_{n-1}} \rightarrow \mathbb{C}$$

op ieder domein $P_{z_0, \dots, z_{n-1}}$ begrensd door lijnstukjes $[z_{k-1}, z_k] \subset P_{z_0, \dots, z_{n-1}}$.

Merk op dat we op een vanzelfsprekende manier kunnen praten over het links- of rechtsom genummerd zijn van de hoekpunten (6.79), ook als de n -hoek niet gemaakt is zoals boven (6.79) beschreven is. Als er er (maar) eindig veel punten $\zeta_1, \dots, \zeta_p$ zijn in $P_{z_0, \dots, z_{n-1}}$ (maar niet op de rand van) waar f niet

⁷⁰ De veelhoek is dan convex.

complex differentieerbaar is, dan het niet moeilijk om na te gaan dat (6.80) gelijk is aan de som van de integralen over de randen van kleine driehoekjes

$$\Delta^{(j)} = \Delta_{z_0^{(j)}, z_1^{(j)}, z_2^{(j)}, z_0^{(j)}}$$

in $P_{z_0, \dots, z_{n-1}}$ waar ζ_j echt in ligt, als die allemaal maar met dezelfde orientatie genomen worden. In dat geval is dus

$$\oint_{z_n=z_0, \dots, z_n} f(z) dz = \sum_{j=1}^p \oint_{z_2^{(j)}=z_0^{(j)}, z_1^{(j)}, z_2^{(j)}} f(z) dz, \quad (6.81)$$

en we werken dat idee in het geval dat $p = 1$ met een hele bijzondere integrand nu uit in de volgende sectie, teneinde uiteindelijk ook te zien dat de termen in het rechterlid van (6.81) een verrassend simpele vorm krijgen.

6.14 Machtreeksen via een Cauchy integraalformule

Neem nu aan dat

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

een complex differentieerbare functie is op de open eenheidsdisk. Neem een $\zeta \in \mathbb{C}$ met $|\zeta| = \rho < 1$. We laten nu rechtstreeks zien dat

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n,$$

met integraalformules voor de coëfficiënten $a_n \in \mathbb{C}$. De integralen zijn daarbij over regelmatige polygonen in D , met hoekpunten dicht bij de cirkelvormige⁷¹ rand van D .

We leiden de formules of door Stelling 6.44 toe te passen op integralen van

$$z \rightarrow \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

over geschikt gekozen driehoeken. Voor iedere $r \in (0, 1)$ en $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 3$ definiëren de punten

$$z_k = r \exp(2\pi i \frac{k}{n})$$

de hoekpunten van een regelmatig n -hoek $C_{r,n}$ in D met middelpunt 0. Maak een plaatje met $0 < |\zeta| < r$ en $n = 8$ of zo. Laat k van 0 tot en met n lopen om het kringetje rond⁷² te maken.

*Teken
plaatje!*

⁷¹ Denk aan deze contouren: <http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/7244.pdf>

⁷² Nou ja, rond...

Op dezelfde manier maken

$$w_k = \zeta + \rho \exp(2\pi i \frac{k}{n})$$

de hoekpunten van een regelmatig n -hoek $\zeta + C_{\rho,n}$, met middelpunt ζ dat binnen $C_{r,n}$ ligt als $\rho < r - |\zeta|$. Teken beide polygonen in je plaatje en merk op dat voor iedere complex differentieerbare functie

$$\{z \in D : z \neq \zeta\} \xrightarrow{g} \mathbb{C}$$

nu geldt dat

$$\begin{aligned} \oint_{z_{0-n}} g(z) dz &= \\ \int_{z_0, z_1, \dots, z_n = z_0} g(z) dz &= \int_{w_0, w_1, \dots, w_n = w_0} g(z) dz \quad (6.82) \\ &= \oint_{w_{0-n}} g(z) dz, \end{aligned}$$

voor elke $n \geq 3$, waarbij we ook hier de voor de hand liggende notatie⁷³ met $\oint$ gebruiken voor de integralen van $g(z)$ over de linksom⁷⁴ doorlopen n -hoeken.

Opgave 6.45. Bewijs (6.82) door de zigzagintegraal

$$\int_{w_0, z_0, w_1, z_1, \dots, w_n, z_n} g(z) dz$$

mee te nemen in de beschouwingen en de stelling van Coursat toe te passen op in totaal $2n$ driehoekjes.

Nu nemen we voor $g(z)$ het differentiaalquotiënt

$$\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

en concluderen dat

$$\oint_{w_{0-n}} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} dz = \oint_{z_{0-n}} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} dz. \quad (6.83)$$

⁷³ Voor grote n is de veelhoek bijna een rondje.

⁷⁴ Dat is maar een woord hier, de punten bepalen de richting.

Opgave 6.46. De integraal in het linkerlid van (6.83) hangt van ρ af. Gebruik de differentieerbaarheid van f in ζ om te laten zien dat

$$\oint_{w_{0-n}} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} dz \rightarrow 0$$

als $\rho \rightarrow 0$.

Maar de integraal in het linkerlid van (6.83) is gelijk aan de integraal in het rechterlid en hing niet van ρ af als $\rho < r - |\zeta|$. Hij ging⁷⁵ dus niet naar 0 want hij was al 0. Zo reduceert (6.83) tot

$$0 = \oint_{z_{0-n}} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \oint_{z_{0-n}} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} dz,$$

en volgt

$$f(\zeta) \oint_{z_{0-n}} \frac{1}{z - \zeta} dz = \oint_{z_{0-n}} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

Opgave 6.47. Laat zien dat

$$\oint_{z_{0-n}} \frac{1}{z - \zeta} dz = \oint_{w_{0-n}} \frac{1}{z - \zeta} dz = 2\pi i.$$

Hint: de eerste gelijkheid volgt als in Opgave 6.45 en de tweede integraal hangt niet van ζ of ρ af. In het linkerlid kan dus $\zeta = 0$ genomen worden. Op elke $[z_{k-1}, z_k]$ heeft $\frac{1}{z}$ een primitieve: de meerwaardige functie gedefinieerd in Opgave 6.3 die je als het goed is in Opgave 6.39 als laatste hebt gebruikt.

Stelling 6.48. Als ζ ligt binnen een n -hoek zoals hierboven in de open eenheidsdisk D , en $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar is, dan is

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_{0-n}} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

This is the Cauchy Integral Formula, maar dan met n -hoeken in plaats van de gebruikelijke cirkels met middelpunt 0 en straal $r < 1$ groot genoeg.

Tenslotte volgt na het invullen van⁷⁶ de meetkundige reeksontwikkeling

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z^2} + \frac{\zeta^2}{z^3} + \frac{\zeta^3}{z^4} + \dots$$

⁷⁵ Letterlijk gesproken.

⁷⁶ We prefereren weer de notatie met puntjes natuurlijk.

de machtreeksontwikkeling in de vorm als aangekondigd, via

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0-n} f(z) \left(\frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z^2} + \frac{\zeta^2}{z^3} + \frac{\zeta^3}{z^4} + \dots \right) dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0-n} \frac{f(z)}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0-n} \frac{f(z)}{z^2} dz \zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0-n} \frac{f(z)}{z^3} dz \zeta^2 + \dots,$$

met

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0-n} \frac{f(z)}{z^{j+1}} dz \quad (6.84)$$

voor alle $j \in \mathbb{N}_0$.

Stelling 6.49. *Als $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar is, dan geldt*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

met a_j gegeven door (6.84), waarin de integraal nu door $z_k = r \exp(2\pi i \frac{k}{n})$ ($k = 0, 1, \dots, n$) wordt gedefinieerd. En achteraf zijn dan zowel $r \in (0, 1)$ als $n \geq 3$ arbitrair.

Het rechtvaardigen van het verwisselen van $\oint$ en $\sum$ is wezen niets anders dan opmerken dat voor elke α en β in $\mathbb{C}$ de verzameling

$$\{f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ is continu}\}$$

een (complexe) Banachruimte is, net zoals $C([a, b])$ een reële Banachruimte is. Het wordt dus tijd voor het volgende hoofdstuk.

Voor hier is het nog de vraag of we de limiet $n \rightarrow \infty$ willen nemen in Stelling 6.48 en (6.84) teneinde de $\oint$ te nemen over de cirkel geparametriseerd door

$$z = r \exp(i\theta) \quad \text{met} \quad dz = ir \exp(i\theta) d\theta \quad (6.85)$$

und so weiter.

Dat laatste kan komen na de observatie dat voor $0 \leq \rho < R$ en complex differentieerbare

$$A_{\rho, R} = \{z \in \mathbb{C} : \rho < |z| < R\} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

geldt dat $f(z)$ te schrijven is als een zogenaamde *Laurentreeks*, i.e.

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{-j}}{z^j}, \quad (6.86)$$

met a_j gegeven door (6.84) voor *alle* $j \in \mathbb{Z}$, maar $n \geq 3$ en $r \in (\rho, R)$ wel zo gekozen dat met de punten $z_k = r \exp(2\pi i \frac{k}{n})$ de n -hoek in de annulus $A_{\rho,R}$ ligt.

Je bewijst dit met drie veelhoeken in $A_{\rho,R}$, waar ζ dan tussen twee van de drie in moet liggen, en in de kleinste. Als je eenmaal op het idee⁷⁷ bent gekomen wijst het zich vanzelf. De integraal over de nieuwe veelhoek wordt ook weer via een net iets andere meetkundige reeks in een machtreeks vertaald, nu met $\frac{1}{\zeta}$ die naar buiten gehaald wordt uit $\frac{1}{z-\zeta}$.

Deze zo verkregen spectaculaire uitspraak wordt gewoonlijk bewezen na het invoeren van lijnintegralen over echte krommen⁷⁸ zoals gegeven door (6.85) en de hele machinerie die nodig is om netjes te beschrijven wat krommen⁷⁹ eigenlijk zijn, waarbij vaak ook de continuïteit van $z \rightarrow f'(z)$ wordt gebruikt om de nog te bespreken stellingen van Green te kunnen gebruiken.

Die laatste stellingen zijn dus hier niet nodig. En de veelhoeken bieden veel meer mogelijkheden. Bijvoorbeeld voor functies die gedefinieerd en complex differentieerbaar zijn op gebieden ingesloten door twee geneste veelhoeken. Dat is misschien nog leuk om uit te zoeken.

Opgave 6.50. Natuurlijk geldt Stelling 6.49 niet alleen voor de eenheidsdisk, en kan r zowel zo klein als zo groot mogelijk gekozen worden voor het polygon waarmee de coëfficiënten worden berekend. Gebruik dit om te bewijzen dat er geen niet-constante begrensde complex differentieerbare functies $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zijn.

6.15 De Cauchy Integraal Transformatie

De formule in Stelling 6.48 schrijven we met $1 = I$ en $\zeta = A$ als

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0-n} f(z)(zI - A)^{-1} dz, \quad (6.87)$$

nu voor een willekeurig polygon waar A binnen ligt en waarop

$$z \rightarrow (zI - A)^{-1} \quad (6.88)$$

dus bestaat als zeker een continue functie. Het polygon hoeft ook niet per se in de eenheidsdisk te liggen. Van de functie $z \rightarrow f(z)$ hoeven we bij nadere

⁷⁷ Gauss en Cauchy gingen ons voor.....

⁷⁸ Denk aan die goal van nummer 14 in het Zuiderpark en de enige echte Kromme.

⁷⁹ Denk ook aan hoe Murre dit woord uitsprekt.

beschouwing alleen maar aan te nemen dat f complex differentieerbaar is op het gebied begrensd door een polygon, inclusief het polygon⁸⁰ zelf.

Let op, de hoekpunten van het polygon moeten wel “linksom” genummerd worden, hetgeen ondubbelzinnig gedefinieerd kan worden aan de hand van de vergelijkingen voor de lijnen door de opeenvolgende hoekpunten, met iedere $z_k = x_k + iy_k$ opgevat als $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$, waarbij je wil formuleren dat het binnengebied van het polygon steeds links van ieder georiënteerde interval $[z_{k-1}, z_k]$ ligt.

Met deze notatie kunnen we (6.87) nu ook lezen met A een vierkante eerst nog reële matrix gezien als een continue lineaire afbeelding van $X = \mathbb{R}^n$ naar zichzelf, afbeeldingen die een algebra⁸¹ vormen. Hier is nog het een en ander mee te doen, met behulp ook van

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{z}(I + \frac{1}{z}A + \dots)$$

als $|z|$ voldoende groot is, misschien beter meteen maar voor algemene X in Sectie 7.6.

De vraag is natuurlijk wel eerst wat we precies onder A *binnen het polygon gedefinieerd door*

$$z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow \dots \rightarrow z_n = z_0$$

moeten verstaan, als we (6.87) zomaar overschrijven met ζ vervangen door een lineaire operator $A : X \rightarrow X$. Voor de hand ligt dat A zo moet zijn dat met een groter polygon de zigzagtruc weer werkt, en de integrand als $L(X)$ -waardige functie complex differentieerbaar is op het gebied tussen de twee polygonen, en ook op de twee polygonen zelf, en dat weer voor ieder groter polygon.

Daartoe moeten X en ook $L(X)$ zelf eerst complex uitgebreid worden, hetgeen abstract een constructie vereist maar in voorbeelden automatisch⁸² gaat. En daarna is dan de natuurlijke eis dat (6.88) op het polygon en zijn buitengebied moet bestaan in de complexe versie van $L(X)$. Lees wat dit betreft verder in Sectie 7.6.

6.16 Kromme lijnintegralen

Met behulp van (6.77) is in (6.78)

$$\int_{z_0, \dots, z_n} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z) dz \quad (6.89)$$

⁸⁰ Via een zigzagintegraal als in Opgave 6.45 volgt de geldigheid van (6.87).

⁸¹ Een Banachalgebra zelfs, zie Charlie’s teleurstelling in *Flowers for Algernon*.

⁸² Denk hier even over na.

gedefinieerd voor een rij punten die we (nog) niet als partitie zien, waarvoor we ook (nog) niet Riemann-tussensommen als

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \quad \text{met} \quad \zeta_k \in [z_{k-1}, z_k] \quad (6.90)$$

hebben ingevoerd, zie Sectie 2.5. Maar als de “incrementen” $z_k - z_{k-1}$ klein zijn ligt gezien (6.77) iedere term in (6.90) voor de hand als benadering voor de overeenkomstige term in het rechterlid van (6.89) via

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z) dz = \int_0^1 f((1-t)z_{k-1} + tz_k) dt (z_k - z_{k-1}) \approx f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

De vraag wat er gebeurt als $n \rightarrow \infty$ is echter nog niet goed gesteld, want de rij “partities” kan in principe willekeurig zijn.

In iedere schatting die het limietgedrag onder controle moet krijgen zal, behalve het klein worden van de incrementen, ook het gedrag van

$$\sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}|$$

een rol spelen, met

$$z_k = z_k^{(n)}$$

zinnig afhankelijk van n gekozen, maar wat is zinnig? Hieronder wat overwegingen en een aanzet tot een uitgewerkt antwoord.

Het stuksgewijs lineaire pad P_n van $z_0^{(n)}$ via $z_1^{(n)}, \dots, z_{n-1}^{(n)}$, naar $z_n^{(n)}$ voor $n \rightarrow \infty$ moet een nog te formuleren limietgedrag hebben, waarmee in ieder geval voor continue $z \rightarrow f(z)$ volgt dat

$$\int_{P_n} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}^{(n)}}^{z_k^{(n)}} f(z) dz \quad \text{en} \quad \sum_{k=1}^n f(\zeta_k^{(n)})(z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)}) \quad (6.91)$$

convergeren naar een limiet die we $\int_P f(z) dz$ zouden willen noemen.

Voor het verschil van deze sommen geldt

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}^{(n)}}^{z_k^{(n)}} f(z) dz - \sum_{k=1}^n f(\zeta_k^{(n)})(z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)}) \right| = \\ & \left| \sum_{k=1}^n \int_0^1 f((1-t)z_{k-1}^{(n)} + tz_k^{(n)}) dt (z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)}) - \sum_{k=1}^n f(\zeta_k^{(n)})(z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)}) \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=1}^n \int_0^1 (f((1-t)z_{k-1}^{(n)} + tz_k^{(n)}) - f(\zeta_k^{(n)})) dt (z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)}) \right| \leq \\
& \max_{k=1, \dots, n} |f((1-t)z_{k-1}^{(n)} + tz_k^{(n)}) - f(\zeta_k^{(n)})| \sum_{k=1}^n |z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)}| \leq \\
& \max_{k=1, \dots, n} \sup_{z, w \in [z_{k-1}^{(n)}, z_k^{(n)}]} |f(z) - f(w)| \sum_{k=1}^n |z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)}|,
\end{aligned}$$

en dat zou klein moeten zijn als f uniform continu is op een geschikt gekozen domein dat alle paden P_n bevat. In dat geval zijn de aannames dat

$$\mu_n = \max_{k=1, \dots, n} |z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)}| \rightarrow 0 \quad (6.92)$$

en

$$L_n = \sum_{k=1}^n |z_k^{(n)} - z_{k-1}^{(n)}| \quad \text{begrensd} \quad (6.93)$$

is als $n \rightarrow \infty$ voldoende om het verschil tussen de termen in (6.91) naar 0 te doen gaan als $n \rightarrow \infty$.

Voor we een definitie geven bekijken we wat we langs deelrijen sowieso kunnen bereiken kwa convergentie van P_n onder de aanname dat (6.92) en (6.93) gelden, en

$$z_0^{(n)} = a \quad \text{en} \quad z_n^{(n)} = b \quad (6.94)$$

vastgehouden worden in $\mathbb{C}$. We kijken dus naar mogelijke limieten van stuks-gewijs lineaire paden van a naar b .

Het ligt voor de hand meteen een deelrij te nemen waarlangs L_n convergent is, zeg $L_{n_k} \rightarrow L \geq |b - a|$ met n_k een stijgende rij in $\mathbb{N}$. Vanaf zekere zulke n is er dan steeds een eerste $j = j_n$ waarvoor geldt dat de totale lengte langs P_n van a tot $z_{j_n}^{(n)}$ minstens $\frac{L}{2}$ is, en langs een verdere deelrij convergeren dan zowel $z_{j_n}^{(n)}$ als $z_{j_n-1}^{(n)}$ naar een limiet $z_{\frac{1}{2}}$.

Maar dit argument werkt niet alleen voor $\frac{1}{2}$. Voor elke $t \in (0, 1)$ kunnen we vanaf zekere n een eerste $j = j_n^t$ vinden waarvoor de totale lengte langs P_n van a tot $z_{j_n^t}^{(n)}$ minstens tL is. Doen we dit voor

$$t = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \dots,$$

dan geeft een diagonaalrijargument⁸³ dat, voor elke rationale $t \in (0, 1)$ met een noemer die een pure macht van 2 is, dat langs de geconstrueerde deelrij geldt dat

$$z_{j_n^t}^{(n)}$$

⁸³ Zie Sectie 3.3.

convergeert naar een limiet z_t voor al zulke t . Dit definieert een afbeelding

$$t \rightarrow z(t) = z_t,$$

waarvoor per constructie geldt⁸⁴ dat

$$|z(t_1) - z(t_2)| \leq |t_1 - t_2|L, \quad (6.95)$$

en die uniek uitbreidt tot een afbeelding $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ met dezelfde eigenschap.

Onze eerste geparametrizeerde kromme die niet per se van de vorm (6.76) is. Een kromme waarvan de lengte nog niet gedefinieerd maar wel gelijk aan L is, als alles goed is⁸⁵, en waarlangs we kunnen integreren, middels benaderingen met Riemannsommen van de vorm

$$\sum_j f((z(\tau_j))(z(t_j) - z(t_{j-1})).$$

Wat we van dit alles hier willen uitwerken is nog de vraag, maar voor continu differentieerbare zulke $t \rightarrow z(t)$ is

$$\int_P f(z) dz = \int_0^1 f(z(t)) z'(t) dt$$

een uitspraak die we willen hebben, waarbij het linkerlid gedefinieerd is als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{P_n} f(z) dz$$

en de limiet langs de deelrij wordt genomen en moet bestaan. Dat vergt nog een stelling voor bijvoorbeeld continue $z \rightarrow f(z)$.

⁸⁴ Wel even nagaan!

⁸⁵ En de lengte van het stuk tussen t_1 en t_2 gelijk aan $|t_1 - t_2|L$.

7 Analyse in genormeerde ruimten

We hebben het al gehad over vectorruimten van functies. In zulke vectorruimten willen we over limieten kunnen spreken net zoals we dat doen in $\mathbb{R}$. In $\mathbb{R}$ gebruiken we daarvoor absolute waarden van verschillen, in algemene vectorruimten zoeken we naar een geschikte norm waarmee we de verschillen meten. Een eerste voorbeeld is de zogenaamde 1-norm.

Definitie 7.1. Voor iedere $f \in \mathbb{R}[a, b]$ schrijven we

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Definitie 7.2. Als X een lineaire vectorruimte over $\mathbb{R}$ is, en

$$x \in X \rightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$$

een afbeelding met de eigenschap dat voor alle $x, y \in X$ en voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$(i) \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0; \quad (ii) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

dan heet X genormeerd met norm $\|\cdot\|$.

Een Cauchyrij in X is een door $n \in \mathbb{N}$ genummerde rij $x_n \in X$ met $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ als $m, n \rightarrow \infty$.

Als alle Cauchyrijen in X convergent zijn, met per definitie hun limiet in X , dan heet X volledig. Volledige ruimten worden Banachruimten genoemd.

Opgave 7.3. Geef de ε -definitie van $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ als $m, n \rightarrow \infty$. Geef ook de definitie van het convergent zijn van de rij x_n in X .

Opgave 7.4. Waarom is $\|\cdot\|_1$ geen norm op $\mathbb{R}([a, b])$ maar wel op $C([a, b])$?

De voor de liggende norm op $C([a, b])$ is de ∞ -norm, die de limiet is van de p -normen¹

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (7.1)$$

¹ $p \geq 1$.

voor $p \rightarrow \infty$, al zie je dat aan de definitie

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (7.2)$$

misschien niet meteen. Deze norm wordt op $C([a, b])$ ook wel de maximum-norm genoemd.

Stelling 7.5. *Met de maximumnorm (7.2) is $C([a, b])$ een Banachruimte.*

Bewijs. We bewijzen alleen dat $C([a, b])$ met de maximum norm (wel) volledig is. Neem een Cauchyrij in f_n in $C([a, b])$. Je had in Opgave 7.3 al bedacht dat de uitspraak dat $\|f_n - f_m\|_\infty \rightarrow 0$ als $m, n \rightarrow \infty$ equivalent is met

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \implies \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon, \quad (7.3)$$

ofwel

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \implies |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]. \quad (7.4)$$

Maar dan is voor elke vast gekozen $x \in [a, b]$ de rij $f_n(x)$ een Cauchyrij in $\mathbb{R}$ en dus convergent met een limiet die we $f(x)$ noemen. Daarmee is een functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd en te bewijzen is natuurlijk dat $f \in C([a, b])$.

Voor we dat doen merken we op dat in (7.4) nu de limiet $m \rightarrow \infty$ genomen kan worden waarmee de uitspraak

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \quad (7.5)$$

zich aandient. Als nu f (en dus ook $f - f_n$) inderdaad in $C([a, b])$ zit dan is (7.5) equivalent met

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \implies \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad (7.6)$$

en zijn we klaar.

Waarom zit f in $C([a, b])$? Neem weer $\varepsilon > 0$ en probeer $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ te krijgen door $|x - y| \leq \delta$ voor een bijbehorende $\delta > 0$ te eisen. Dat moet wel via de f_n want die zijn uniform continu. Schrijf daartoe

$$f(x) - f(y) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y),$$

waarmee

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \varepsilon \text{ als } n \geq N} + |f_n(x) - f_n(y)| + \underbrace{|f_n(y) - f(y)|}_{\leq \varepsilon \text{ als } n \geq N}. \quad (7.7)$$

In (7.7) kiezen we nu $n = N$ en bij die vaste N een $\delta > 0$ zodanig dat voor de middelste term geldt dat

$$|f_N(x) - f_N(y)| \leq \varepsilon \quad \text{als} \quad |x - y| \leq \delta,$$

culminerend in

$$|f(x) - f(y)| \leq 3\varepsilon \quad \text{als} \quad |x - y| \leq \delta$$

vanwege (7.7). Hiermee is het bewijs klaar omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen was.

Opgave 7.6. De voorfactor 3 doet er niet toe. Waarom niet?

Definitie 7.7. Als de rij $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ voldoet aan (7.5) in het bewijs hierboven dan heet de rij f_n uniform convergent op $[a, b]$. In deze definitie kan $[a, b]$ natuurlijk vervangen worden door een willekeurig interval I .

7.1 Calculus voor X -waardige functies

Als X een genormeerde ruimte is dan kunnen we voor $f : [a, b] \rightarrow X$ de definitie van uniform continu overschrijven met $\|f(x) - f(y)\|$ in plaats van $|f(x) - f(y)|$, zie Definitie 2.22. Als de aardige en nuttige oefening in Sectie 2.5 is gelukt dan heb je nu een bewijs van de volgende stelling.

Stelling 7.8. Laat X een Banachruimte zijn en $f : [a, b] \rightarrow X$ uniform continu. Dan bestaat er een unieke $J \in X$ waarvoor geldt dat

$$\|S - J\| \leq \varepsilon(b - a)$$

voor elke S van de vorm (2.7), mits $x_k - x_{k-1} \leq \delta$ voor alle $k = 1, \dots, N$ waarmee de bijbehorende partitie P in (2.4) genummerd wordt. Per definitie is

$$J = \int_a^b f(x) dx.$$

Dat uniforme continuïteit ook hier uit puntsgewijze continuïteit volgt is ook weer een kwestie van overschrijven.

Opgave 7.9. Als $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ een lineaire functie is, hetgeen nog steeds betekent dat

$$g(x + y) = g(x) + g(y) \quad \text{en} \quad g(\lambda x) = \lambda g(x) \quad \text{voor alle} \quad x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R},$$

dan is $x \rightarrow g(f(x))$ weer een $\mathbb{R}$ -waardige functie. Met een schatting van de vorm

$$|g(x)| \leq L||x|| \quad \text{voor alle } x \in X, \quad (7.8)$$

en dat voor een vaste $L \geq 0$, moet uit je bewijs voor Stelling 7.8 nu volgen dat

$$g(J) = \int_a^b g(f(x)) dx,$$

als integraal van een gewone continue $\mathbb{R}$ -waardige functie op $[a, b]$. Verifieer dit eerst voor $L = 1$. Hint: de relevante schattingen voor ondermeer de Riemannsommen bij $x \rightarrow g(f(x))$ zijn voor $L = 1$ identiek aan die voor de sommen bij f .

Definitie 7.10. Een lineaire afbeelding $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ van een genormeerde ruimte X naar $\mathbb{R}$ heet begrensd als (7.8) geldt voor een zekere $L \geq 0$.²

Opgave 7.11. Bewijs voor lineaire afbeeldingen $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ van een genormeerde ruimte X naar $\mathbb{R}$ dat

$$g \text{ is uniform Lipschitz continu} \iff g \text{ is begrensd} \iff g \text{ is continu in } x = 0$$

Bewijs ook de volgende stelling.

Stelling 7.12. Laat X^* de verzameling van alle begrensde lineaire functies $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ zijn. Dan is X^* met de voor de hand liggende bewerkingen en de norm

$$||g|| = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{|g(x)|}{||x||}$$

een Banachruimte, die de duale ruimte van X genoemd wordt.

Voor $F : [a, b] \rightarrow X$ kunnen we de definitie van differentieerbaarheid in een vaste $x_0 \in [a, b]$ overschrijven van Definitie 4.1 met de expansie

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + hF'(x_0) + R(h; x_0), \quad (7.9)$$

waarin

$$h \xrightarrow{F'(x_0)} hF'(x_0)$$

met $F'(x_0) \in X$ gezien wordt als continue lineaire afbeelding en de restterm moet voldoen aan

$$||R(h; x_0)|| = o(|h|) \quad \text{als } h \rightarrow 0. \quad (7.10)$$

Ook Stelling 4.3 kan nu met bewijs en al worden overgeschreven voor $f : [a, b] \rightarrow X$ (uniform) continu.

² Op $\mathbb{R}^n$ zijn alle lineaire functies begrensd.

Stelling 7.13. *Laat X een Banachruimte zijn. Definieer voor een continue functie $f : [a, b] \rightarrow X$ de functie $F : [a, b] \rightarrow X$ door*

$$F(x) = \int_a^x f(s) ds.$$

Dan is F differentieerbaar in elke $x_0 \in [a, b]$, met afgeleide $F'(x_0) = f(x_0)$.

Merk op dat in het bewijs de 3-hoeksongelijkheid voor integralen werd gebruikt. Die geldt ook hier, rechtstreeks vanuit de definities. Voor f als in Stelling 7.8 geldt

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx,$$

waarbij de continuïteit van $x \rightarrow \|f(x)\|$ volgt uit

$$|\|f(x)\| - \|f(y)\|| \leq \|f(x) - f(y)\|,$$

de omgekeerde³ 3-hoeksongelijkheid toegepast op $f(x)$ en $f(y)$.

Stelling 7.13 zegt weer dat F een primitieve is van kleine f en voor deze primitieve geldt met $x = b$ dat

$$\int_a^b f(s) ds = F(b) - F(a), \quad (7.11)$$

omdat $F(a) = 0$. Als $\tilde{F}$ een andere primitieve is van f dan geldt voor

$$G = F - \tilde{F} : [a, b] \rightarrow X$$

dat G differentieerbaar is met $G'(x) = 0$ voor alle $x \in [a, b]$.

Opgave 7.14. Laat zien dat voor elke $g \in X^*$ de reëelwaardige functie

$$x \xrightarrow{\phi} g(G(x))$$

nu differentieerbaar is op $[a, b]$ met afgeleide in iedere $x \in [a, b]$ gedefinieerd door

$$h \xrightarrow{\phi'(x)} g(G(x))G'(x)h = 0$$

voor $h \in \mathbb{R}$. Dus $\phi(b) = \phi(a)$ via de middelwaardestelling (Stelling 4.5).

³ Onthouden als $x \rightarrow \|x\|$ is uniform Lipschitz continu met Lipschitz constante $L = 1$.

We concluderen hieruit dat $g(G(b)) - g(G(a)) = 0$ voor elke $g \in X^*$. Voor $y = G(b) - G(a)$ geldt dus dat $g(y) = 0$ voor alle $g \in X^*$. We zeggen dat de continue lineaire functies de punten in X scheiden als dit impliceert dat $y = 0$. In dat geval zijn we klaar want dan is $F(b) - F(a) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)$. Hiermee is de volgende stelling bewezen, waarin we $\tilde{F}$ weer F noemen.

Stelling 7.15. *Laat X een Banachruimte zijn waarop de continue lineaire functies de punten scheiden⁴. Als $f : [a, b] \rightarrow X$ continu is op $[a, b]$ en de continue differentieerbare functie $F : [a, b] \rightarrow X$ als primitieve heeft⁵, dan is*

$$\int_a^b f(s) ds = F(b) - F(a).$$

7.2 Differentiaalrekening voor functies op X

Ook als X een genormeerde ruimte is en

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}$$

een reëelwaardige functie⁶ op X , dan kunnen we de definitie van differentieerbaarheid in een vaste $x_0 \in X$ overschrijven van Definitie 4.1, beginnende met de expansie

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + F'(x_0)(h) + R(h; x_0), \quad (7.12)$$

waarin

$$F'(x_0) : X \rightarrow \mathbb{R}$$

lineair is en de restterm moet voldoen aan

$$\|R(x_0, h)\| = o(\|h\|) \quad \text{als} \quad \|h\| \rightarrow 0. \quad (7.13)$$

Definitie 7.16. *Een functie $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ op een genormeerde ruimte heet differentieerbaar in $x_0 \in X$ als er een $g = F'(x_0) : X \rightarrow \mathbb{R}$ in X^* bestaat⁷ zodanig dat (7.12) geldt met (7.13).*

Opgave 7.17. Als een reëelwaardige $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ op een genormeerde ruimte differentieerbaar in $x_0 \in X$ dan is F ook continu in x_0 . Bewijs dit.

⁴ Op Banachruimten scheiden de continue lineaire functies de punten (Hahn-Banach).

⁵ Hetgeen ook hier betekent dat $F'(x) = f(x)$ voor alle $x \in [a, b]$.

⁶ Iedere $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ met $A \subset X$ breidt uit tot $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ via $F(x) = 0$ voor $x \notin A$.

⁷ Let op, de continuïteit van de lineaire $F'(x_0) : X \rightarrow \mathbb{R}$ is essentieel: Opgave 7.17!

Opgave 7.18. Formuleer en bewijs de regel van Leibniz voor $F, G : X \rightarrow \mathbb{R}$. Hint: schrijf Opgave 5.7 en je uitwerking van die opgave over met dubbele normstrepen in plaats van enkele absolute waarde strepen.

Ook van $F' : X \rightarrow X^*$ willen we kunnen zeggen of F' differentieerbaar is in een $x_0 \in X$ en daartoe schrijven we Definitie 7.16 over voor $F : X \rightarrow Y$ als X en Y genormeerde ruimten zijn.

Een search op $\rightarrow \mathbb{R}$ en replace by $\rightarrow Y$ dus, waarbij absolute waarde strepen in $\mathbb{R}$ weer vervangen worden door normstrepen voor de norm in Y , en $F'(x_0) \in X^*$ moet worden vervangen door $F'(x_0) \in L(X, Y)$, de genormeerde ruimte van lineaire afbeeldingen $A : X \rightarrow Y$ waarvoor $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ voor alle $x \in X$, nu met de norm van $\|Ax\|$ in Y . Met $Y = X^*$ hebben we dan ook de definitie van twee keer differentieerbaar, enzovoorts.

Zonder extra algebraïsche structuur is de Leibnizregel niet meer zo maar over te schrijven, maar de kettingregel gaat weer precies hetzelfde.

Opgave 7.19. Schrijf Opgaven 5.10 en 5.11 en je uitwerking over voor $F : X \rightarrow Y$ en $G : Y \rightarrow Z$ met X, Y, Z genormeerde ruimten.

Kortom, veel van de gewone differentiaalrekening is precies hetzelfde in de algemene context. Belangrijke uitzonderingen zijn de middelwaardestelling (Stelling 4.5) en de inverse functiestelling zoals geformuleerd voor monotone functies. Beide stellingen maken echt gebruikt gebruik van de 1-dimensionale structuur die $\mathbb{R}$ heeft en de bijbehorende argumenten waarin het woordje “tussen” essentieel is.

De middelwaardestelling kan echter wel mooi in stelling gebracht worden voor

$$F : X \rightarrow \mathbb{R},$$

door voor twee punten $x, y \in X$ een functie $t \rightarrow \xi(t) \in X$ te introduceren die x en y met elkaar “verbindt”, bijvoorbeeld

$$\xi(t) = (1 - t)x + ty, \quad \xi : [0, 1] \rightarrow X, \quad (7.14)$$

waarbij we spreken over het interval

$$[x, y] = \{\xi(t) = (1 - t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}, \quad (7.15)$$

de door $t \in [0, 1]$ geparametriseerde convexe combinaties van x en y , en ook over het interval

$$(x, y) = \{\xi(t) = (1 - t)x + ty; 0 < t < 1\}. \quad (7.16)$$

Stelling 7.20. Als $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar is op X , dan is er voor elke $x, y \in X$ een $\xi \in (x, y)$ waarvoor geldt dat

$$F(y) - F(x) = F'(\xi)(y - x).$$

Bewijs. Volgens de kettingregel is $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$t \xrightarrow{\phi} F(\xi(t)) \in \mathbb{R} \quad (7.17)$$

differentieerbaar op $[0, 1]$, met

$$\phi'(t) = F'(\xi(t))(y - x).$$

De middelwaardestelling (Stelling 4.5) geeft nu een $\tau \in (0, 1)$ waarvoor geldt dat $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\tau)$. Noem $\xi(\tau)$ nu ξ en het bewijs is klaar.

Neem nu een willekeurige Banachruimte Y en $F : X \rightarrow Y$ continu differentieerbaar. Als we Stelling 7.15 toepassen met $a = 0$ en $b = 1$ op de functie $\phi : [0, 1] \rightarrow Y$ gedefinieerd door (7.17), dan volgt uit

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t) dt$$

en

$$\phi'(t) = F'((1-t)x + ty)(y - x)$$

dat

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 F'((1-t)x + ty)(y - x) dt \quad (7.18)$$

als Y -waardige integraal.

In het geval dat $Y = \mathbb{R}$ wordt deze $\mathbb{R}$ -waardige integraal begrensd door het maximum en het minimum van de integrand, en dus volgt dat $F(y) - F(x) = F'(\xi)(y - x)$ voor een zekere

$$\xi \in [x, y] = \{(1-t)x + ty, 0 \leq t \leq 1\},$$

een iets zwakkere uitspraak dan in Stelling 7.20.

Als F niet $\mathbb{R}$ -waardig maar Y -waardig dan werkt dit argument niet. Echter, als we Stelling 7.15 toepassen met $a = 0$ en $b = 1$ op de functie $\phi : [0, 1] \rightarrow Y$ gedefinieerd door

$$\phi : t \xrightarrow{\xi} (1-t)x + ty \xrightarrow{F} Y$$

met $x, y \in X$ en $F : X \rightarrow Y$ continu differentieerbaar, dan volgt uit

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t) dt$$

en

$$\phi'(t) = F'((1-t)x + ty)(y-x)$$

dat

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 F'((1-t)x + ty)(y-x) dt \quad (7.19)$$

als Y -waardige integraal, hetgeen ook te schrijven is als

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 F'((1-t)x + ty) dt (y-x), \quad (7.20)$$

een $B(X, Y)$ -waardige integraal werkend op $y-x \in X$.

Vanwaar al deze uitwijdingen? Omdat formulering en bewijs van de impliciete functiestelling voor $F : X \times Y \rightarrow Z$ nu kunnen worden overgeschreven van Stelling 4.24 in Sectie 4.4. Speciaal geval $Z = Y$. Nog specialer: $X = \mathbb{R}^m$ en $Y = Z = \mathbb{R}^n$. Ook interessant: $X = \mathbb{R}$ en $Y = Z = C([a, b])$. Denk aan Sectie 7.5.

7.3 Partieel differentieerbaar $\implies$?

We hebben gezien dat $F : \mathbb{R}^2$ differentieerbaar is in x_0, y_0 als er $a, b \in \mathbb{R}$ bestaan zo dat (6.33) geldt en de restterm voldoet aan de conditie onder (6.33). In dat geval bestaan de partiële afgeleiden

$$a = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(x_0, y_0) = F_x(x_0, y_0) \quad \text{en} \quad b = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0),$$

en leest (6.33) met $x = x_0 + h$ en $y = y_0 + k$ als

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \text{restterm}.$$

We gebruiken de subscripts hier dus weer voor de partiële afgeleiden die we in Opgave 6.19 gevonden hebben voor a en b als

$$a = F_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$b = F_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F(x_0, y_0 + k) - F(x_0, y_0)}{k} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{F(x_0, y) - F(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

door de eigenschap van de restterm te gebruiken.

Het kan natuurlijk zijn dat voor een gegeven $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en $x_0 \in \mathbb{R}$ en $y_0 \in \mathbb{R}$ de partiële afgeleiden $F_x(x_0, y_0)$ en $F_y(x_0, y_0)$ zo bestaan als twee limieten, maar op zich zegt dat weinig. Als bijvoorbeeld $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

gedefinieerd is door $F(x, y) = 0$ als $xy = 0$ en $F(x, y) = 1$ als $xy \neq 0$ dan is $F_x(0, 0) = F_y(0, 0) = 0$, maar F is zeker niet differentieerbaar in $(0, 0)$, want de lineaire benadering zou dan de nulfunctie zijn en die komt voor $xy \neq 0$ niet de buurt van de functiewaarde 1.

Dus wat hebben we nodig van $x \rightarrow F(x, y)$ en $y \rightarrow F(x, y)$ als we alleen deze “partiële” functies mogen gebruiken om te kunnen concluderen dat

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

differentieerbaar is in (x_0, y_0) ? We denken⁸ bij deze vraag aan het algemenere geval van

$$F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R},$$

en $x_0 \in X, y_0 \in Y$, en nemen aan dat $x \rightarrow F(x, y)$ en $y \rightarrow F(x, y)$ voor respectievelijk vaste $y \in B_\delta(y_0)$ en vaste $x \in B_\delta(x_0)$ differentieerbaar⁹ zijn op respectievelijk $B_\delta(x_0)$ en $B_\delta(y_0)$, met $\delta_0 > 0$ vast.

Via de middelwaardestelling (Stelling 7.20) voor functies van genormeerde ruimten naar $\mathbb{R}$ is

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_0, y_0) + F(x, y) - F(x_0, y_0) = \\ &= F(x_0, y_0) + \underbrace{F(x, y) - F(x_0, y)}_{\text{vary } x} + \underbrace{F(x_0, y) - F(x_0, y_0)}_{\text{vary } y} = \\ &= F(x_0, y_0) + F_x(\xi(y), y)(x - x_0) + F_y(x_0, \eta)(y - y_0), \end{aligned}$$

voor $x \in B_\delta(x_0)$ en $y \in B_\delta(y_0)$ met $\xi(y) \in (x_0, x)$ en $\eta \in (y_0, y)$. Bijgevolg is

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R \quad (7.21)$$

met restterm

$$R = (F_x(\xi(y), y) - F_x(x_0, y_0))(x - x_0) + (F_y(x_0, \eta) - F_y(x_0, y_0))(y - y_0).$$

Als

$$(x, y) \rightarrow F_x(x, y) \quad \text{en} \quad (x, y) \rightarrow F_y(x, y)$$

continu zijn in (x_0, y_0) dan voldoet R nu aan

$$\begin{aligned} |R| &\leq |(F_x(\xi(y), y) - F_x(x_0, y_0))(x - x_0)| + |(F_y(x_0, \eta) - F_y(x_0, y_0))(y - y_0)| \leq \\ &\leq \underbrace{|F_x(\xi(y), y) - F_x(x_0, y_0)|}_{\leq \varepsilon} |x - x_0| + \underbrace{|F_y(x_0, \eta) - F_y(x_0, y_0)|}_{\leq \varepsilon} |y - y_0| \end{aligned}$$

⁸ Of dit wiskundig denken is? Beats me. Geen flauw idee wat dat is.

⁹ We gebruiken van $y \rightarrow F(x, y)$ alleen maar de differentieerbaarheid voor $y = y_0$.

$$\leq \varepsilon \max(|x - x_0|, |y - y_0|) = \varepsilon |(x, y) - (x_0, y_0)|$$

als $\delta > 0$ voldoende klein is. We gebruiken hier als norm op $X \times Y$ de norm

$$|(x, y)| = \max(|x|, |y|).$$

We onthouden dit resultaat als de volgende stelling.

Stelling 7.21. *Laat X en Y genormeerde ruimten zijn. Als $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ partiële functies*

$$x \rightarrow F(x, y) \quad \text{en} \quad y \rightarrow F(x, y)$$

heeft die voor $x \in B_\delta(x_0)$ en $y \in B_\delta(y_0)$ met $x_0 \in X, y_0 \in Y, \delta > 0$ gedefinieerd en differentieerbaar zijn, met

$$(x, y) \rightarrow F_x(x, y) \in X^* \quad \text{en} \quad (x, y) \rightarrow F_y(x, y) \in Y^*$$

continu in (x_0, y_0) , dan is F differentieerbaar in (x_0, y_0) met

$$(h, k) \xrightarrow{F'(x_0, y_0)} F_x(x_0, y_0)h + F_y(x_0, y_0)k.$$

Opgave 7.22. De voorwaarden in Stelling 7.21 zijn voldoende maar natuurlijk niet noodzakelijk. Als $F : X \times Y$ differentieerbaar is in (x_0, y_0) dan zijn zowel $x \rightarrow F(x, y_0)$ als $y \rightarrow F(x_0, y)$ differentieerbaar in respectievelijk x_0 en y_0 en hun afgeleiden heten de partiële afgeleiden, notatie o.a. $F_x(x_0, y_0)$, $F_y(x_0, y_0)$. Verifieer dit rechtstreeks aan de hand van de definities, en ook dat

$$F'(x_0, y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = F_x(x_0, y_0)h + F_y(x_0, y_0)k$$

voor alle $h \in X$ en $k \in Y$.

Opgave 7.23. Als X, Y, Z genormeerde ruimten zijn en $F : X \times Y \rightarrow Z$ dan werkt de bewijstechniek met de middelwaardestelling niet. Schrijf echter weer

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \underbrace{F(x, y) - F(x_0, y)}_{\text{vary } x} + \underbrace{F(x_0, y) - F(x_0, y_0)}_{\text{vary } y}$$

en behandel de twee variërende termen met (7.18), waarbij je moet aannemen dat Z volledig is. Neem hiertoe aan dat $x \rightarrow F(x, y_0)$ continu differentieerbaar is voor $x \in X$ met $\|x - x_0\| < \delta_x$, en dat voor elke van deze x de functie $y \rightarrow F(x, y)$ continu differentieerbaar is voor $y \in Y$ met $\|y - y_0\| < \delta_y$, $\delta_x, \delta_y > 0$, en bovendien dat $(x, y) \rightarrow F_y(x, y)$ continu is in (x_0, y_0) . Bewijs dat F differentieerbaar is in (x_0, y_0) .

Opgave 7.24. Als X, Y, Z genormeerde ruimten zijn, met Z volledig, en $F : X \times Y \rightarrow Z$ heeft partiële functies met partiële afgeleiden F_x en F_y die continu zijn op een open verzameling O in $X \times Y$, dan is F differentieerbaar in elk punt van O en $F' : O \rightarrow L(X \times Y, Z)$ is continu, gedefinieerd in elke $(x_0, y_0) \in O$ als in Opgave 7.22.

7.4 Differentiaal- en integraalvergelijkingen

Terug naar functies van $t \in \mathbb{R}$ naar $x \in \mathbb{R}$. In (5.15) is de differentiaalvergelijking die de functie $\exp$ definieert omgeschreven tot integraalvergelijking. Vanaf hier kiezen we zo veel mogelijk voor de t van tijd als onafhankelijke variabele in de differentiaalvergelijkingen onder consideratie, en voor x als de afhankelijke variabele. Daarbij we spreken over $x = x(t)$ als de oplossing, en de lezer wordt gevraagd deze “abuse of notation” voor lief te nemen. Dus $x = x(t)$ voor $t \in I$ is een verkorte schrijfwijze om een functie $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ aan te duiden.

Bijvoorbeeld $x(t) = \exp(t)$, de unieke oplossing van

$$x' = x \quad \text{met} \quad x(0) = 1 \quad \text{op} \quad I = \mathbb{R},$$

een probleem van de vorm

$$x'(t) = f(x(t)) \quad \text{voor alle} \quad t \in I \quad \text{met} \quad x(0) = \xi. \quad (7.22)$$

Merk op dat een oplossing van (7.22) per definitie differentieerbaar is op I en dus continu.

Voor iedere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $\xi \in \mathbb{R}$ is (7.22) een probleem om op te lossen voor t in een liefst maximaal interval I , met $0 \in I$ omdat anders de voorwaarde $x(0) = \xi$ geen betekenis heeft. We beperken ons hier nu tot differentiaalvergelijkingen waarin de onafhankelijke variabele t niet expliciet voorkomt. Dus $x'(t) = f(x(t))$ en niet $x'(t) = f(t, x(t))$.

Zulke differentiaalvergelijkingen hebben de eigenschap dat een horizontaal verschoven grafiek van een oplossing in het t, x -vlak weer de grafiek van een oplossing is. Met één oplossing heb je er dankzij deze *translatie-variantie* dus meteen een heleboel en soms zelfs allemaal (als f geen nulpunten heeft).

Opgave 7.25. Teken in het x, y -vlak een grafiek $y = f(x)$ van een mooie functie f met een paar nulpunten en gebruik de informatie uit die grafiek om grafieken van oplossingen in t, x -vlak te schetsen. Hint: schets eerst de grafieken van de constante oplossingen.

Onder de aanname dat f continu is op $\mathbb{R}$ is (7.22) equivalent met

$$x(t) = \xi + \int_0^t f(x(s)) ds \quad \text{voor alle } t \in I. \quad (7.23)$$

Opgave 7.26. Bewijs de equivalentie van (7.22) en (7.23) voor continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $\xi \in \mathbb{R}$ gebruikmakend van de integraal- en differentiaalrekening ontwikkeld tot nu toe.

Opgave 7.27. Dezelfde vraag (met $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu en $\xi, \eta \in \mathbb{R}$) voor

$$x'' = f(x) \quad \text{met} \quad x(0) = \xi \quad \text{en} \quad x'(0) = \eta$$

en de integraalvergelijking die je krijgt door twee keer te integreren. Hint: gebruik je uitwerking van Opgave 4.36 om de herhaalde integraal om te schrijven tot een enkele integraal.

Om een oplossing van (7.23) te maken kunnen we eerst $a, b \in \mathbb{R}$ kiezen met $0 \in [a, b] \subset I$ en (7.23) herschrijven als een vergelijking

$$x = \xi + \Phi(x), \quad (7.24)$$

voor $x \in C([a, b])$, met $\Phi : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ gedefinieerd door

$$(\Phi(x))(t) = \int_0^t f(x(s)) ds, \quad (7.25)$$

een formulevoorschrift voor de “nieuwe” functie $\Phi(x) \in C([a, b])$ gegeven de “oude” functie $x \in C([a, b])$.

In (7.24) is ξ nu te lezen als een constante functie $x_0 : t \rightarrow \xi$ en met het schema

$$x_{n+1} = \xi + \Phi(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (7.26)$$

ontstaat dan een rij x_n in $C([a, b])$ waarvan we nu willen weten of deze via zijn limiet een unieke oplossing van (7.23) definieert. De vraag nu is onder welke aannames op f en $[a, b]$ dit lukt. Om dat te onderzoeken nemen we eerst zonder beperking der algemeenheid $\xi = 0$.

In wat volgt vermijden we notationeel gepriegel met bovengrenzen t die kleiner zijn dan de ondergrens 0 in (7.25), door de afbeelding Φ te bekijken

op $X = C([0, T])$. Vaste punten van Φ zijn dan oplossingen van (7.23) met $\xi = 0$ en daarmee van (7.22). Oplossingen van (het beginwaardeprobleem)

$$x'(t) = f(x(t)) \quad \text{voor } t \in [0, T] \quad \text{en} \quad x(0) = 0$$

corresponderen dus met vaste punten van $\Phi : X \rightarrow X$. En voor het vinden van zulke “dekpunten” is er een stelling die iedereen die wiskunde doceert gezien moet hebben¹⁰.

Stelling 7.28. *Laat X een Banachruimte zijn. Als $\Phi : X \rightarrow X$ een afbeelding is die voor een vaste $\theta \in [0, 1)$ voldoet aan*

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \theta \|x - y\| \quad \forall x, y \in X,$$

dan heeft Φ een uniek vast punt $\bar{x} = \Phi(\bar{x}) \in X$. Gegeven iedere $x_0 \in X$ geldt voor de rij gedefinieerd door $x_n = \Phi(x_{n-1})$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat $x_n \rightarrow \bar{x}$ als $n \rightarrow \infty$.

Bewijs. Dat Φ geen twee vaste punten kan hebben volgt meteen uit de aanname. Gegeven een willekeurige x_0 en $x_1 = \Phi(x_0)$ volgt ook uit de aanname dat

$$\|x_2 - x_1\| = \|\Phi(x_1) - \Phi(x_0)\| \leq \theta \|x_1 - x_0\|,$$

$$\|x_3 - x_2\| = \|\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\| \leq \theta \|x_2 - x_1\| \leq \theta^2 \|x_1 - x_0\|,$$

etc. Voor de incrementen geldt dus dat¹¹

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \theta^n \|x_1 - x_0\|, \quad (7.27)$$

en dus volgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \|x_1 - x_0\| = \|x_1 - x_0\| \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = \|x_1 - x_0\| \frac{1}{1 - \theta}.$$

De reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$$

is dus convergent met een limiet $S \in X$ vanwege de uitspraak in Opgave 7.29 hieronder.

Omdat

$$x_{N+1} = x_0 + \sum_{n=0}^N (x_{n+1} - x_n)$$

¹⁰ We hebben deze stelling al een keer niet gebruikt toen het wel kon. In welke bewijs?

¹¹ Eigenlijk moet dit weer met inductie.....

volgt dat

$$x_{N+1} = \Phi(x_N) \rightarrow x_0 + S \quad \text{als} \quad N \rightarrow \infty.$$

Met $\bar{x} = x_0 + S$ hebben we de limiet van de rij x_n dus te pakken en omdat

$$\begin{aligned} \|\Phi(\bar{x}) - \bar{x}\| &\leq \|\Phi(\bar{x}) - \Phi(x_n)\| + \|\Phi(x_n) - x_n\| + \|x_n - \bar{x}\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + 2\|x_n - \bar{x}\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

is $\bar{x}$ een vast punt van Φ . Daarmee is het bewijs klaar.

Opgave 7.29. Laat X een Banachruimte zijn en $a_n \in X$ voor $n \in \mathbb{N}_0$. Schrijf¹² het bewijs van het convergent zijn van absoluut convergente reeksen in $\mathbb{R}$ over met normstrepen i.p.v. absolute waarde strepen en bewijs zo dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ bestaat en } \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|.$$

Opgave 7.30. Neem aan dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniform Lipschitz continu is met Lipschitz constante $L > 0$. Dus

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bewijs dat Φ in (7.25) voldoet aan

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{\infty} \leq LT\|x - y\|_{\infty} \quad \forall x, y \in X = C([0, T]).$$

Stelling 7.31. *Neem aan dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniform Lipschitz continu is, en dat $\xi \in \mathbb{R}$. Dan heeft de differentiaalvergelijking*

$$x'(t) = f(x(t))$$

precies één oplossing met $x(0) = \xi$. Die oplossing is gedefinieerd voor alle $t \in \mathbb{R}$.

¹² Zie Stelling 3.18.

Bewijs. Met $\xi = 0$ volgt het bestaan van een unieke oplossing op $[0, T]$ via Opgave 7.26, Stelling 7.28 en Opgave 7.30 onder de aanname dat $LT < 1$.

Voor $\xi \neq 0$ is het bewijs precies hetzelfde, niet alleen op $[0, T]$ maar ook op $[-T, 0]$, of in één keer op $[-T, T]$. Maar vanwege de translatie-invariantie geldt dit ook voor oplossingen met $x(T) = \eta \in \mathbb{R}$ op $[T, 2T]$.

Kies nu $\eta = x(T)$ met x de oplossing die we al hadden op $[0, T]$. Dit geeft een oplossing op $[T, 2T]$ met $x(0) = \xi$. Enzovoort. Stap voor stap, naar links en naar rechts, steeds met dezelfde stapgrootte T , breiden we de oplossing zo uit tot uiteindelijk heel $\mathbb{R}$ en het bewijs is klaar.

Opgave 7.32. Neem aan dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniform Lipschitz continu is en $\tau, \xi \in \mathbb{R}$ willekeurig. Als we de unieke oplossing van $x'(t) = f(x(t))$ met $x(\tau) = \xi$ noteren als $x(t; \tau, \xi)$ dan geldt $x(t; \tau, \xi) = x(t - \tau; 0, \xi)$. Leg uit waarom. Definieer nu de afbeeldingen $S_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door $S_t(\xi) = x(t; 0, \xi)$. Leg uit waarom voor alle $s, t \in \mathbb{R}$ geldt dat $S_{t+s} = S_t(S_s(\xi))$ voor alle $\xi \in \mathbb{R}$, i.e.

$$S_{t+s} = S_t \circ S_s.$$

We schrijven ook $S_t(\xi) = x(t; \xi)$ en dan luidt deze regel dat

$$x(t + s; \xi) = x(t; x(s; \xi)) = x(s; x(t; \xi)).$$

Gebruik dit met $f(x) = x$ om te concluderen dat $\exp(t + s) = \exp(t)\exp(s)$, waarbij $\exp(t)$ gedefinieerd is door $\exp(t) = x(t; 1)$.

Opgave 7.33. Neem aan dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniform Lipschitz continu is, en dat $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Dan heeft de differentiaalvergelijking

$$x''(t) = f(x(t))$$

precies één oplossing met $x(0) = \xi$ en $x'(0) = \eta$. Die oplossing is gedefinieerd voor alle $t \in \mathbb{R}$. Schets een bewijs van deze uitspraak gebruikmakend van Opgave 7.27 en de strategie in het voorafgaande.

Opgave 7.34. De oplossing in Opgave 7.33 kan genoteerd worden als $x(t; \xi, \eta)$. Herschrijf $x(t + s; \xi, \eta)$ zoals in Opgave 7.32. Gebruik dit met $f(x) = -x$ om de bekende regels voor $\cos(s + t)$ en $\sin(s + t)$ af te leiden rechtstreeks vanuit de definitie dat $\sin(t) = x(t; 0, 1)$ en $\cos(t) = x(t; 1, 0)$.

Opgave 7.35. Verifieer dat $\exp, \cos, \sin$ als machtreeksoplossingen samenvallen met de oplossingen hierboven door de iteratieschema's voor de betreffende integraalvergelijkingen expliciet uit te voeren.

7.5 Impliciete functiestelling en integraalvergelijkingen

We besluiten met het uitwerken onder welke voorwaarden x in (7.24) een continu differentieerbare functie van $\xi \in \mathbb{R}$ wordt. Zie Sectie 7 in

<http://www.few.vu.nl/~jhulshof/NOTES/fa.pdf>

Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $0 \in [a, b]$ en $\xi \in \mathbb{R}$ gaat dit om de vergelijking

$$x = \xi + \Phi(x) \quad \text{met} \quad (\Phi(x))(t) = \int_0^t f(x(s)) \, ds, \quad (7.28)$$

als formulevoorschrift voor de (nieuwe) functie $\Phi(x) \in C([a, b])$ gegeven de (“oude”) functie $x \in C([a, b])$, waarbij we aannemen dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tenminste continu is. De impliciete functiestelling is toepasbaar als

$$\Phi : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$$

continu differentieerbaar is.

Immers, neem $h \in C([a, b])$ en schrijf, de neus volgend,

$$\begin{aligned} (\Phi(x+h))(t) &= \int_0^t f(x(s) + h(s)) \, ds = \int_0^t [f(x(s) + \tau h(s))]_0^1 \, ds \\ &= \int_0^t \int_0^1 f'(x(s) + \tau h(s)) h(s) \, d\tau \, ds \\ &= \int_0^t \int_0^1 f'(x(s)) h(s) \, d\tau \, ds + \underbrace{\int_0^t \int_0^1 (f'(x(s) + \tau h(s)) - f'(x(s))) h(s) \, d\tau \, ds}_{R(h;x)(t)} \\ &= (\Phi'(x)h)(t) + R(h;x)(t), \end{aligned}$$

waarin

$$h \xrightarrow{\Phi'(x)} \Phi'(x)h \quad \text{met} \quad (\Phi'(x)h)(t) = \int_0^t f'(x(s)) h(s) \, ds, \quad (7.29)$$

en

$$|R(h;x)(t)| = \left| \int_0^t \int_0^1 (f'(x(s) + \tau h(s)) - f'(x(s))) h(s) \, d\tau \, ds \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_0^t \left| \int_0^1 (f'(x(s) + \tau h(s)) - f(x(s))h(s) d\tau \right| ds \right| \\
&\leq \left| \int_0^t \left| \int_0^1 |(f'(x(s) + \tau h(s)) - f(x(s))h(s)| d\tau \right| ds \right| \\
&\leq \left| \int_0^t \left| \int_0^1 \underbrace{|f'(x(s) + \tau h(s)) - f(x(s))|}_{\leq \varepsilon} \underbrace{|h(s)|}_{\|h\|_\infty} d\tau \right| ds \right| \leq (b-a)\varepsilon\|h\|_\infty
\end{aligned}$$

als $\|h\|_\infty \leq \delta$, met $\delta > 0$ bij $\varepsilon > 0$ uit de definitie van uniforme continuïteit van $f' : [-A, A] \rightarrow \mathbb{R}$ op een interval gegeven door bijvoorbeeld $A = \|x\|_\infty$ plus een beetje.

Opgave 7.36. Op zijn kortst door de bocht: pas de impliciete functiestelling toe om te laten zien dat voor de oplossing $x = x(\xi)$ van (7.28) geldt dat

$$\xi \rightarrow x(\xi)$$

continu differentieerbaar is, en x_ξ de oplossing is van de integraalvergelijking die hoort bij

$$y'(t) = f'(x(t))y(t) \quad \text{met} \quad y(0) = 1,$$

eerst onder de voorwaarde dat a en b dicht bij 0 zitten.

7.6 Calculus in Banachalgebra's van operatoren

Deze sectie is nog wat schetsmatig maar niettemin precies. We willen (6.87) uitwerken voor $A \in L(X)$ en schrijven met z vervangen door λ

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_P f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad (7.30)$$

nu voor een willekeurig polygon¹³ met hoekpunten $\lambda_1, \dots, \lambda_n = \lambda_0$, waarop en waarbuiten¹⁴

$$\lambda \rightarrow (\lambda - A)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} \quad (7.31)$$

gedefinieerd is. Het complement van het domein van (7.31) in $\mathbb{C}$ heet het spectrum van A , notatie $\sigma(A)$. Het domein zelf heet de resolvente verzameling, notatie $\rho(A)$, en de afbeelding in (7.31) heet de resolvente van A .

¹³ Of een vereniging daarvan.

¹⁴ Wat bedoelen we daarmee?

Opgave 7.37. Gebruik berekeningen met meetkundige reeksen om te laten zien dat iedere $\lambda \in \mathbb{C}$ met $\lambda > \|A\|$ in $\rho(A)$ ligt en dat $\rho(A)$ open is. Bewijs ook dat (7.31) complex differentieerbaar is op $\rho(A)$. Wat is de afgeleide?

Opgave 7.38. Kan het zijn dat $\rho(A) = \mathbb{C}$? Het antwoord is nee, maar dat vergt nog een argument dat we weer zo licht mogelijk willen houden. Uit het ongerijmde, we zouden dan hebben dat (7.31) een $L(X)$ -waardige functie definieert die naar $0 \in L(X)$ gaat als $\lambda \rightarrow \infty$ en dat moet niet kunnen, met een argument dat over te schrijven zou moeten zijn van wat we voor gewone complexwaardige functies weten, zie Opgave 6.50.

In deze opgaven heb je niet gebruikt dat met $AB = BA = I$ en $A \in L(X)$ ook volgt dat $B \in L(X)$, een wat diepere stelling voor Banachruimten, die ook maar eens heel kort en clean moet worden uitgelegd. Dat komt nog wel een keer. Denk in het vervolg voorlopig bijvoorbeeld eerst aan $X = \mathbb{C}^2$ als complexe uitbreiding van $\mathbb{R}^2$ en A een lineaire afbeelding gegeven door een 2×2 matrix, met complexe of reële entries. In dat geval bestaat $\sigma(A)$ meestal uit 2 punten, en met twee disjuncte driehoekjes Δ_1 en Δ_2 om die punten heen kunnen we al aan de slag met ieder paar complex differentieerbare functies

$$f_1 : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{en} \quad f_2 : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{C}$$

die samen één functie

$$f : \Delta_1 \cup \Delta_2 \rightarrow \mathbb{C}$$

maken waarvan de twee stukken elkaar niet zien. Maar ook het rechterlid van (4.50) gezien als afbeelding van een gecomplexificeerde $X = C([0, 1])$ naar zichzelf is een voorbeeld.

In het algemeen kan $\sigma(A)$ van alles zijn en daarom kijken we nu eerst wat voor gebieden we met eindig veel disjuncte polygonen kunnen maken. Elk polygon P heeft op natuurlijke manier een binnengebied C en een buitengebied U , waar we steeds de rand bijnemen, dus

$$P = U \cup C.$$

Als binnen een polygon P_0 een aantal kleinere polygonen $P_1, \dots, P_n$ ligt, wier binnengebieden onderling disjunct zijn, dus

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \text{als} \quad i \neq j \quad \text{voor} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

dan kan het zijn dat

$$\sigma(A) \subset K_{int} \subset K = C_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n, \quad (7.32)$$

waarbij we K zien als begrensd door de buitenkant P_0 naarbuiten en door binnenkanten $P_1, \dots, P_n$ naar binnen, en

$$K_{int} = K \cap P_0^c \cap \dots \cap P_n^c$$

de doorsnijding van K met de complementen van de polygonen $P_0, \dots, P_n$ is, dus alles in K dat niet op de rand ligt. Als we polygonen *altijd* als linksom doorlopen zien dan schrijven we in dit geval

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta K} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{P_0} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda - \sum_{j=1}^n \oint_{P_j} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \right) \quad (7.33)$$

voor $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar.

Ligt $\sigma(A)$ in een disjuncte eindige vereniging

$$K_1 \cup \dots \cup K_m$$

van zulke K_j , en zijn

$$f_j : K_j \rightarrow \mathbb{C} \quad (j = 1, \dots, m)$$

complex differentieerbaar, dan vormen die samen weer een complex differentieerbare functie

$$f : K = K_1 \cup \dots \cup K_n \rightarrow \mathbb{C}$$

waarvoor we

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^m \oint_{\delta K_j} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \quad (7.34)$$

met iedere term in de som gedefinieerd als in (7.33) als definitie van $f(A)$ gebruiken.

Elk van de K_j kan van de vorm alleen maar $K_j = C_j$ zijn, en één $K = C$ is altijd mogelijk om dat $\sigma(A)$ begrensd is, maar hoe kleiner K gekozen wordt, hoe meer speelruimte er is. De mogelijk steeds grotere¹⁵ uitdrukkingen voor K moet daarbij graag op de koop toe worden genomen, en als $K_j \neq C_j$ kunnen de bijbehorende buitenkanten ook genest liggen. In het simpele geval dat $\sigma(A)$ een eindige discrete puntverzameling is kunnen we natuurlijk toe met $K = C_j = \Delta_j$, met de driehoekjes Δ_j zo klein als we maar willen en

$$\sigma(A) \subset K^{int} \subset K = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_m.$$

¹⁵ Als we alle zijden van alle polygonen dicht bij $\sigma(A)$ willen hebben.

Wat we nu sowieso in alle gevallen willen is dat, als we de hoekpunten van de polygonen een beetje naar binnen schuiven, K in dus, de integralen die in (7.33) en (7.34) de nieuwe lineaire afbeelding $f(A) : X \rightarrow X$ moeten maken, niet veranderen. En hetzelfde als we K groter maken door de punten naar buiten te schuiven, zolang we maar niet uit het definitiegebied van de continu differentieerbare complexwaardige f lopen. Bij het verder kleiner of groter maken kan de structuur van K versimpelen als twee polygonen elkaar ontmoeten en vervolgens samen één polygon vormen. Strict genomen hebben we niet nodig hoe dat precies kan gaan, maar het is toch aardig om daar even over na te denken.

Opgave 7.39. Het is een aardige project om dat versimpelen precies te maken. Bij het groter maken van K kunnen twee buitenkanten van twee K_j -tjes elkaar ontmoeten waarna verder groter maken tot één nieuwe buitenkant leidt waarmee de bijbehorende binnenkanten dan samen de nieuwe binnenkanten van een nieuwe K_j worden. Ook kan uit een groeiende buitenkant die binnen een krimpende binnenkant ligt meteen na het eerste contact één nieuwe binnenkant ontstaan. Bij kleiner maken kunnen een binnen- en een buitenkant van eenzelfde K_j -tje elkaar ontmoeten en daarna een nieuwe buitenkant vormen, en ook kunnen twee binnenkanten elkaar ontmoeten en een nieuwe binnenkant vormen. Ga in alle gevallen na wat de nieuwe structuur wordt en welke andere scenario's er nog zijn, zoals ondermeer polygonen tot een punt laten krimpen en verdwijnen.

Via de inmiddels vertrouwde zigzagkrommen vernandert bij het geschuif met de hoekpunten (7.34) niet, mits de Stelling van Coursat geldt voor drie-hoekjes waarop en waarbinnen (7.31) complex differentieerbaar is. De betreffende integralen bestaan weer uit integralen over lijnstukjes. Integralen die gedefinieerd zijn dankzij het werk in Sectie 7.1, waarvoor het voorwerk al in Sectie 2.5 was gedaan: continue $L(X)$ -waardige functies van $t \in [0, 1]$ zijn integreerbaar via de tussensommen van Riemann, en

$$t \rightarrow f((1-t)\lambda_{k-1} + t\lambda_k)((1-t)\lambda_{k-1} + t\lambda_k - A)^{-1}$$

is zo'n functie waarmee $L(X)$ -waardige integralen als

$$\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

nu gedefinieerd zijn.

Mooi, dan kan voor

$$\lambda \rightarrow f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}$$

de Stelling van Coursat met bewijs en al worden overgeschreven¹⁶ en is (7.33)

¹⁶ Op detail nog te bespreken.

een goede definitie van $f(A)$. Voorlopig houden we nu A vast en kijken naar nog zo'n f , een g dus, waarbij we eerst aannemen dat we het allersimpelste geval hebben, één polygon rond $\sigma(A)$ waarmee de berekeningen gedaan worden. In dat geval is de samenstelling van de afbeeldingen $f(A)$ en $g(A)$ te schrijven als

$$f(A)g(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\lambda_{0-n}} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mu_{0-n}} g(\mu)(\mu - A)^{-1} d\mu,$$

met in de Cauchyintegraal voor $g(A)$ de hoekpunten μ_l een klein beetje naar binnen geschoven hebben, niet omdat het moet, maar omdat het kan, iets minder ver naar binnen dan de hoekpunten λ_k . Het μ -polygon komt zo binnen het λ -polygon te liggen.

Omdat

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

$$g(A) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^n \int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} g(\mu)(\mu - A)^{-1} d\mu,$$

wordt $f(A)g(A)$ afgezien van de voorfactoren dankzij overwegingen als bij (6.55) een som van produkten

$$\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} g(\mu)(\mu - A)^{-1} d\mu =$$

$$\int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} f(\lambda)g(\mu)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} d\lambda d\mu =$$

$$\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} \int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} f(\lambda)g(\mu)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} d\mu d\lambda.$$

Dankzij wat fraaie algebra, te weten

$$(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} = \frac{1}{\mu - \lambda}(\lambda - A)^{-1} + \frac{1}{\lambda - \mu}(\mu - A)^{-1},$$

kunnen de integralen gesplitst worden in

$$\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} \int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu d\lambda$$

en

$$\int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} g(\mu)(\mu - A)^{-1} \int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu,$$

en in beide herhaalde integralen zien we een bij sommeren over de index in de binnenste integraal een gewone complexwaardige lijnintegraal verschijnen waar nul uit komt als de noemer niet nul is in het binnengebied, en een functiewaarde anders, kijk maar naar de Cauchy integraalformule. Sommeren over l in de eerste geeft derhalve 0, en sommeren over k in de tweede

$$\int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} g(\mu)(\mu - A)^{-1} 2\pi i f(\mu) d\mu = 2\pi i \int_{\mu_{l-1}}^{\mu_l} f(\mu) g(\mu)(\mu - A)^{-1} d\mu,$$

en nog een keer sommeren vervolgens $(2\pi i)^2 (fg)(A)$. We concluderen dat

$$(fg)(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\lambda_{0-n}} f(\lambda)g(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda = f(A)g(A) = g(A)f(A), \quad (7.35)$$

en daar is nog veel mee te spelen.

Opgave 7.40. Ga na dat in het algemene geval (7.34), wanneer $f(A)$ en $g(A)$ de som zijn van een eindig aantal integralen over links- dan wel rechtsom¹⁷ doorlopen polygonen P_j , er in de compositie alleen bijdragen zijn van de vorm zoals juist behandeld en dat ook in dat geval volgt dat $(fg)(A) = f(A)g(A)$.

De tweede gelijkheid in (7.35) is een gelijkheid in de niet-commutatieve Banachalgebra $L(X)$ van continue lineaire afbeeldingen van X naar zichzelf, en $f \rightarrow f(A)$ is een afbeelding die gedefinieerd is voor een klasse van functies gedefinieerd op een omgeving van het $\sigma(A)$. Die omgeving mag van f afhangen, dus met f en g moeten we ons beperken tot de doorsnede van de twee definitiegebieden. Wat we nog willen laten zien is dat een schrijfwijze met (7.33) en (7.34) altijd mogelijk is met alle polygonen zo dicht bij $\sigma(A)$ als we maar willen. Daarmee bewijzen we dan ook meteen de volgende stelling.

Stelling 7.41. *Laat voor $A \in L(X)$ en een complexwaardige f de operator $f(A)$ gedefinieerd zijn via (7.33) en (7.34). Dan geldt*

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)).$$

Om deze stelling te bewijzen maken we nu precies hoe we K kiezen. Kies daartoe een triangulatie van het complexe vlak opgespannen door $\rho > 0$ en $\rho \exp(\frac{\pi i}{6})$. De verzameling van al deze driehoekjes noemen we I . Voor elke $\Delta \in I$ maken we onderscheid tussen

$$\Delta \cap \sigma(A) = \emptyset, \quad \Delta \cap \sigma(A) \neq \emptyset = \delta\Delta \cap \sigma(A), \quad \delta\Delta \cap \sigma(A) \neq \emptyset,$$

¹⁷ Lees: linksom, maar met een min voor het integraalteken.

waarmee $I = I_0 \cup I_1 \cup J$, met I_0, I_1, J de onderling disjuncte deelverzamelingen waarvoor respectievelijk de eerste, tweede dan wel derde karakterisatie geldt. Zowel I_1 als J hebben maar eindig veel elementen omdat $\sigma(A)$ begrensd is. Iedere $\Delta \in I_1$ kan als een K_j genomen worden in (7.34).

De driehoekjes in I_0 zijn niet relevant voor (7.34), maar iedere $\Delta \in J$ heeft 12 burens¹⁸ waarvan er tenminste één ook in J ligt, zeg $\tilde{\Delta}$, gekarakteriseerd door

$$\delta\tilde{\Delta} \cap \delta\Delta \cap \sigma(A) \neq \emptyset,$$

en in dat geval noemen we Δ en $\tilde{\Delta}$ fijne burens in J . Twee zulke fijne burens die verder geen andere fijne burens hebben vormen samen een fijn duo verenigd in

$$\Delta \cup \tilde{\Delta},$$

en I_2 is per definitie de verzameling van zulke verder geïsoleerde fijne burens, die verenigd steeds een ruit vormen, een ruit die als een K_j kan worden meegenomen in (7.34).

Een paar niet geïsoleerde fijne burens kan nog 1 of meerdere fijne burens hebben, en als het maar 1 is, zeg $\hat{\Delta}$, dan kan het zijn dat die verder zelf geen fijne burens meer heeft. Dan vormen ze een fijn trioootje waarbij verschillende standjes denkbaar zijn. Dit definieert de verzameling I_3 , alle driehoeken Δ die onderdeel vormen van een fijn trio verenigd in

$$\Delta \cup \tilde{\Delta} \cup \hat{\Delta},$$

dat een parallelogram of een halve zeshoek is.

En zo gaat dat door met fijne quatrootjes, fijne quintootjes, etc totdat J op is, waarbij het aantal standjes flink maar niet oneindig toe kan nemen. Kortom, met I gepartioneerd als

$$I = I_0 \cup I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_p$$

is het nu nog de vraag wat de mogelijke onderlinge standjes zijn: als $\Delta_1 \in I_k$ met $k-1$ andere driehoeken in I_k een fijn k -stel vormt hoe kan de vereniging

$$\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_k$$

er dan uitzien?

Antwoord: als een binnengebied van een polygon, of als het rechterlid van (7.32). Dat moet dus nog door iemand¹⁹ bewezen worden, als dat niet al eens gebeurd is. Maar verder zijn we nu wel klaar met de beschrijving van

¹⁸ Waarvan er drie een zijde met Δ gemeen hebben en de rest alleen een hoekpunt.

¹⁹ Ik pas, maar dat is voor even.

$f(A)$. Dat kan altijd met eindig veel polygonen die willekeurig dicht bij $\sigma(A)$ liggen door ρ klein te kiezen. Hoe dichter bij $\sigma(A)$ hoe meer je er nodig hebt en hoe wilder de standjes kunnen worden.

We zijn nu klaar voor het bewijs van Stelling 7.41. Neem een $\mu \notin f(\sigma(A))$ en definieer g door

$$\lambda \xrightarrow{g} \frac{1}{\mu - f(\lambda)},$$

met f complex differentieerbaar op een omgeving van $\sigma(A)$. Kies een mogelijk kleinere omgeving waarop $f(\lambda) \neq \mu$. Uit de functional calculus volgt nu dat $g(A)$ gedefinieerd is en de algebra geeft

$$g(A)(\mu - f(A)) = (\mu - f(A))g(A) = I,$$

waarmee $\mu \in \rho(f(A))$. Dus $\sigma(f(A)) \subset f(\sigma(A))$.

Kan de inclusie strict zijn? In dat geval is er een $\mu_0 = f(\lambda_0) \in \sigma(f(A))$ waarvoor $\mu_0 - f(A)$ inverteerbaar is terwijl $\lambda_0 - A$ het niet is. Door schuiven en schalen van f , en schuiven van A en λ kunnen we zonder beperking der algemeenheid wel aannemen dat $\lambda_0 = 0 = \mu_0$ en dat de machtreeks van f begint met λ^n voor zekere $n \in \mathbb{N}$ omdat $f(0) = 0$. In dat geval is

$$f(\lambda) = \lambda^n g(\lambda) \quad \text{met} \quad g(\lambda) = 1 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + \dots$$

en dus is $g(A)$ inverteerbaar, net als $f(A)$. Maar de algebra geeft

$$f(A) = A^n g(A).$$

Voor $n = 1$ is de tegenspraak onmiddellijk. Voor $n > 1$ niet helemaal. Pas daarom het argument hierboven aan en concludeer eerst dat $\mu_0 = f(\lambda_0)$ zo gekozen kan worden dat $f'(\lambda_0) \neq 0$. Hiermee is het bewijs van de stelling wel klaar. Als g een andere functie is die complex differentieerbaar is op een omgeving van $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$ dan volgt ook vrij direct uit de definities dat

$$g(f(A)) = (g \circ f)(A).$$

Opgave 7.42. Bewijs dit.

Nog een expliciet voorbeeld. Als

$$\lambda = \lambda \sum_{j=1}^N \chi_j(\lambda) = \sum_{j=1}^N \lambda \chi_j(\lambda),$$

met

$$\chi_j(\lambda) = \delta_{ij} \quad \text{voor} \quad \lambda \in K_i,$$

dan

$$I = \sum_{j=1}^N I \chi_j.$$

Definieer de “spectraalprojecties”

$$P_j = \chi_j(A).$$

Opgave 7.43. Laat zien dat $P_i P_j = \delta_{ij} P_j$, $AP_j = P_j A$, $\sigma(AP_j) = \sigma(A) \cap K_j$,

$$I = \sum_{j=1}^N P_j \quad \text{en} \quad A = \sum_{j=1}^N AP_j = \sum_{j=1}^N P_j A.$$

Zo wordt

$$X = R(P_1) \oplus \cdots \oplus R(P_n),$$

en beeld A iedere $X_i = R(P_i)$ op zich zelf af, en volgt voor

$$A_j : X_i \xrightarrow{AP_j} X_i$$

dat $\sigma(A_j) = \sigma(A) \cap K_j$.

Zo, en dat alles met een beetje lijnintegreren.

8 Extremisme

Nu we de differential calculus voor afbeeldingen van Banachruimten naar Banachruimten min of meer in onze vingers hebben is de te beantwoorden vraag hoe het zit met extrema¹ van reëelwaardige functies op Banachruimten. De eerste probleemstelling in dit hoofdstuk is hoe we gegeven een reële Banachruimte X , een functie $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, en een deelverzameling $A \subset X$, de extremen van F beperkt tot A vinden door vergelijkingen op te schrijven, en die op te lossen.

Als $A = X$ en f differentieerbaar is op heel X dan neemt f eventuele extrema alleen maar aan in *stationaire punten* van f , oplossingen van

$$F'(x) = 0,$$

dus stel nu dat $F'(x_0) = 0$ met $x_0 \in X$. De eerste vraag is dan of F in x_0 een maximum of een minimum aanneemt, en voor functies $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ doe je dit met wat vroeger het functieonderzoek heette, dat culmineerde in het zonder hulpmiddelen tekenen van de grafiek van F .

8.1 Tweede afgeleide, Hessiaan, Lemma van Morse

Welnu, dat functieonderzoek is afgeschaft. Er is bijna geen schoolboek meer dat vraagstellingen over een functie presenteert zonder je de grafiek kado te doen. Wat nog wel behandeld wordt is het criterium van de tweede afgeleide. Het teken van $F''(x_0)$ vertelt je of de grafiek er lokaal als $\smile$ of als $\frown$ uit ziet².

Op zoek naar de happy minimizers is nu de eerste vraag hoe voor

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}$$

de restterm in

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + R(x; x_0)$$

er expliciet uit ziet. In het geval dat $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ weten we dat

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

als $F'' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu is in x_0 , en zien we waarom het teken van $F''(x_0)$ in een punt waar $F'(x_0) = 0$ het verschil maakt tussen happy minima and sad maxima: $\smile$ or $\frown$.

¹maxima EN minima.

² Happy or sad parabolas in case of $F(x) = \alpha(x - x_0)^2 + \beta$.

Kijk nog even naar Opgave 4.14 en Opgave 4.38 voor we een eerste Taylorbenadering maken van $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ rond x_0 , en vervolgens kijken wat we dan kunnen zien in stationaire punten, punten waar $F'(x_0) = 0$. Voor het gemak nemen we zo $x_0 = 0$ en brengen Opgave 4.38 in stelling via

$$[0, 1] \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad \text{gedefinieerd door} \quad g(t) = F(tx)$$

als

$$g(t) = g(0) + g'(0) + \int_0^1 (1-t)g''(t) dt,$$

waarin $g(0) = F(0)$ en $g'(0) = F'(0)x$. Als $x = 0$ een stationair punt is van F dan gaat het dus om

$$R(x) = \int_0^1 (1-t)g''(t) dt \quad \text{met} \quad g'(t) = F'(tx)x, \quad (8.1)$$

waarbij de uitdrukking voor $g'(t)$ rechtstreeks uit de definities volgt maar natuurlijk ook consistent is met de kettingregel.

Opgave 8.1. Verifieer dit!

In (8.1) komt de afgeleide van $t \rightarrow F'(tx)x$ voor, dus we hebben nu voor het eerst de differentieerbaarheid van

$$x \rightarrow F'(x) \in X^*$$

nodig, die in $x = x_0 \in X$ per definitie geformuleerd wordt als

$$F'(x) = F(x_0) + F''(x_0)(x - x_0) + S(x; x_0),$$

met $F''(x_0) : X \rightarrow X^*$ begrensd en lineair en $\|S(x; x_0)\|_{X^*} = o(\|x - x_0\|)$ als $\|x - x_0\| \rightarrow 0$.

Met $x_0 = t_0x$ volgt dus dat

$$\begin{aligned} F'(tx) &= F'(t_0x) + F''(t_0x)(tx - t_0x) + S(tx; t_0x) \\ &= F'(t_0x) + (t - t_0)F''(t_0x)x + S(tx; t_0x), \end{aligned}$$

en dus

$$g'(t) = g'(t_0) + (t - t_0)(F''(t_0x)x) + S(tx; t_0x)x,$$

waaruit we aflezen dat $g'(t)$ uit (8.1) differentieerbaar is in t_0 , met

$$g''(t_0) = (F''(t_0x)x)x. \quad (8.2)$$

Merk op dat $F''(x_0)h \in X^*$ voor alle $h \in X^*$ en $F''(x_0)hk \in \mathbb{R}$, dus

$$(h, k) \xrightarrow{F''(x_0)} F''(x_0)hk \in \mathbb{R} \quad (8.3)$$

is een kwadratische vorm die natuurlijk symmetrisch is, met een bewijs dat uit Stelling 6.6 volgt. Neem daartoe zonder beperking der algemeenheid $x_0 = 0$, maak de volgende opgave en lees meteen door!

Opgave 8.2. Definieer voor h en k in X en $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, met $x \rightarrow F'(x)$ differentieerbaar in $x = 0$, de functie

$$(s, t) \xrightarrow{g} F(sh + tk)$$

en bewijs rechtstreeks uit de definities dat $g_{st}(0, 0) = F''(0)k h$ en $g_{ts}(0, 0) = F''(0)h k$.

Via Opgave 8.2 is (8.3) te schrijven als

$$\langle F''(0)h, k \rangle = \langle F''(0)k, h \rangle, \quad (8.4)$$

waarin de haken nu staan voor de onderlinge actie³ tussen X^* en X , dus

$$\langle \phi, x \rangle = \phi(x) \quad \text{voor} \quad \phi \in X^* \quad \text{en} \quad x \in X.$$

In (8.4) zien we hoe $A = F''(x_0) \in L(X, X^*)$ voldoet aan

$$\langle Ah, k \rangle = \langle Ak, h \rangle,$$

hetgeen we als definiërende eigenschap voor

$$A \in S(X, X^*) \quad (8.5)$$

en $S(X, X^*) \subset L(X, X^*)$ zien.

Met ook $F''(tx) \in S(X, X^*)$ volgt nu dat in (8.1) de restterm gegeven wordt door

$$\begin{aligned} R(x) &= \int_0^1 (1-t)F''(tx)x \, dt = \int_0^1 (1-t)F''(tx)x \, dt \\ &= \int_0^1 (1-t)F''(tx) \, dt \, x = \left\langle \int_0^1 (1-t)F''(tx) \, dt, x \right\rangle \end{aligned}$$

³ The French notation, on écrit aussi $X' = X^*$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \langle F''(0)x, x \rangle + \left\langle \int_0^1 (1-t)(F''(tx) - F''(0)) dt x, x \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} Q_0(x, x) + T(x),
\end{aligned} \tag{8.6}$$

met $T(x) = o(\|x\|^2)$ als $\|x\| \rightarrow 0$ omdat F'' continu is in $x = 0$.

Opgave 8.3. Ga na dat F'' continu in $x = 0$ betekent dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zo dat de implicatie

$$\|x\| \leq \delta \implies \|(F''(x) - F''(0))y\| \leq \varepsilon \|y\|$$

geldt voor alle $y \in X$.

Opgave 8.4. Werk het bovenstaande uit voor $X = \mathbb{R}^2$ en laat zien dat

$$Q_0(x, x) = F_{x_1 x_1}(0, 0)x_1^2 + 2F_{x_1 x_2}(0, 0)x_1 x_2 + F_{x_2 x_2}(0, 0)x_2^2$$

voor $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Opgave 8.5. Laat zien dat er $r > 0$ is zo dat voor elke $x \in X$ met $\|x\| \leq r$ geldt dat er een $\theta = \theta(x) \in [0, 1]$ is waarvoor

$$T(x) = \int_0^1 (1-t)(F''(tx) - F''(0))x x dt = \frac{1}{2} F''(\theta(x))x x$$

(dit geldt onder de zwakkere aanname dat F twee keer differentieerbaar is in de buurt van $x = 0$).

In (8.6) is hebben we evenzo dat

$$|Q_0(x, x)| \leq \|F''(0)\| \|x\|^2.$$

Als⁴ er een $\mu > 0$ is met

$$Q_0(x, x) \geq \mu \|x\|^2$$

voor alle $x \in X$ kunnen we dus concluderen dat $F(x)$ in $x = 0$ lokaal minimaal is.

⁴ Maar kan dat?

We merken op dat in plaats van (8.6) we ook kunnen schrijven dat

$$R(x) = (\Phi(x)x)x = \langle \Phi(x)x, x \rangle$$

met

$$\Phi(x) = \int_0^1 (1-t)F''(tx) dt \in S(X, X^*) \subset L(X, X^*), \quad (8.7)$$

en dat vervolgens de vraag gesteld kan worden of via een coördinatentransformatie

$$x \rightarrow \langle \Phi(x)x, x \rangle \quad \text{en} \quad y \rightarrow \langle \Phi(0)y, y \rangle$$

in wezen dezelfde functies zijn.

Bob Rink liet me zijn oude dictaat van Hans Duistermaat en Joop Kolk zien, en daarin wordt daartoe zo'n transformatie gezocht in de vorm

$$y = A(x)x,$$

hetgeen leidt tot de vraag of $A = A(x) \in L(X, X)$ zo gevonden kan worden dat

$$\langle \Phi(x)x, x \rangle = (\Phi(x)x)x = (\Phi(0)y)y = \langle \Phi(0)y, y \rangle \quad (8.8)$$

voor x in de buurt van $x = 0$. Dus voor $y = A(x)x$ willen we

$$x \xrightarrow{A(x)} A(x)x = y \xrightarrow{\Phi(0)y} (\Phi(0)y)y = (\Phi(0)A(x)x) \circ A(x))x = (\Phi(x)x)x,$$

waarin x aan beide kanten twee keer lineair op zichzelf voorkomt.

Hieraan is zeker voldaan als

$$(\Phi_0 A x) \circ A = \Phi(x)x \quad (8.9)$$

in X^* , waarin we $A = A(x)$ zoeken bij $x \neq 0$ en $\Phi(x)$ met $\Phi(0) = \Phi_0$. Aan (8.9) is vervolgens zeker voldaan als de afbeelding

$$h \rightarrow \Phi(x)h \quad \text{in} \quad L(X, X^*) \quad \text{gelijk is aan} \quad h \rightarrow \Phi_0 A h \circ A, \quad (8.10)$$

een kwadratische $L(X, X^*)$ -waardige vergelijking voor $A \in L(X, X)$, abstract te schrijven als

$$\kappa_0(A, A) = \Phi(x). \quad (8.11)$$

In (8.11) is

$$X \times X \xrightarrow{\kappa_0} L(X, X^*) \quad \text{in} \quad L(X \times X, L(X, X^*))$$

gedefinieerd door

$$h \rightarrow \kappa_0(A, B)h = \Phi_0 A h \circ B$$

als afbeelding in $L(X, X^*)$ voor iedere $A, B \in L(X)$. Voor $x = 0$ is $A = I$ een oplossing van $\kappa_0(A, A) = \Phi(x)$ omdat $\Phi(0) = \Phi_0$.

De impliciete functiestelling is toepasbaar als de afgeleide van de kwadratische functie

$$A \rightarrow \kappa_0(A, A)$$

in $A = I$ inverteerbaar is, en $x \rightarrow \Phi(x)$ continu is in $x = 0$. Dat laatste is bij aanname dat F'' continu is in 0 het geval.

Met betrekking tot de afgeleide naar A in I schrijven we $A = I + H$ en merken voordat we gaan expanderen in de kleine H op dat (8.11) nu herschrijft als

$$\chi_0(H)h = \Phi_0 Hh + \Phi_0 h \circ H + \Phi_0 Hh \circ H = (\Phi(x) - \Phi_0)h \quad (8.12)$$

voor alle $h \in X$. Het linkerlid definieert een X^* -waardige functie

$$H \xrightarrow{\chi_0} \chi_0(H)$$

van H in X , met een $\chi_0(H)$ die twee lineaire termen en een kwadratisch term heeft, waarin Φ_0 steeds als coefficient gezien kan worden.

Omdat de afgeleide in $H = 0$ evident gegeven wordt door

$$h \xrightarrow{\chi'_0(I)H} \Phi_0 Hh + \Phi_0 h \circ H,$$

lijkt de inverteerbaarheidsconditie te zijn dat

$$\Phi_0 Hh + \Phi_0 h \circ H = Ch \quad (8.13)$$

voor alle $h \in X$, oplosbaar moet zijn voor elke $C \in L(X, X^*)$. Merk echter op dat het rechterlid van de op te lossen vergelijking

$$\chi_0(H) = \Phi(x) - \Phi_0 \quad (8.14)$$

in $S(X, X^*)$ zit, zie (8.5). Nadere beschouwing van het linkerlid van (8.12) middels

$$\begin{aligned} \langle \chi_0(H)h, k \rangle &= \langle \Phi_0 Hh, k \rangle + \langle \Phi_0 h \circ H, k \rangle + \langle \Phi_0 Hh \circ H, k \rangle \\ &= \langle \Phi_0 Hh, k \rangle + \langle \Phi_0 h, Hk \rangle + \langle \Phi_0 Hh, Hk \rangle \\ &= \langle \Phi_0 Hh, k \rangle + \langle \Phi_0 Hk, h \rangle + \langle \Phi_0 Hh, Hk \rangle \end{aligned} \quad (8.15)$$

voor h en k in X omdat $\Phi_0 \in S(X, X^*)$, leert ons dat $\chi'_0(0)H \in L(X, X^*)$ gekarakteriseerd wordt door

$$\langle \chi'_0(0)Hh, k \rangle = \langle \Phi_0 Hh, k \rangle + \langle \Phi_0 Hk, h \rangle, \quad (8.16)$$

en daarom volgt dat $\chi'_0(0)H \in S(X, X^*)$.

De kwadratische restterm $R_0(H) \in L(X, X^*)$ in

$$\chi_0(H) = \chi'_0(0)H + R_0(H)$$

is af te lezen uit in(8.15) als gekarakteriseerd door

$$\langle R_0(H)h, k \rangle = \langle \Phi_0 H h, H k \rangle, \quad (8.17)$$

en derhalve is ook $R_0(H) \in S(X, X^*)$. We kunnen en moeten (8.14) dus lezen als de vergelijking

$$\chi_0(H) = \chi'_0(0)H + R_0(H) = \Phi(x) - \Phi_0 \quad \text{in} \quad S(X, X^*). \quad (8.18)$$

Daarmee wordt ook (8.13) beperkt tot $C \in S(X, X^*)$ en herschrijft als

$$\langle \Phi_0 H h, k \rangle + \langle \Phi_0 H k, h \rangle = \langle C h, k \rangle \quad (8.19)$$

voor alle $h, k \in X$.

In het geval dat $X = \mathbb{R}^2$ zijn Φ_0 en C symmetrische 2×2 matrices en staan hier vier vergelijkingen voor een 2×2 matrix H in termen van maar drie coëfficiënten in C . Zonder extra aannamen op H is (8.19) dan een onderbepaald stelsel. De voor hand liggende extra conditie op H is nu dat $\Phi_0 H \in S(X, X^*)$. In dat geval is (8.19) equivalent met

$$2\Phi_0 H = C, \quad (8.20)$$

een vergelijking die weer equivalent is met

$$H = \frac{1}{2}\Psi_0 C, \quad (8.21)$$

als

$$\Psi_0 = \Phi_0^{(-1)} \quad (8.22)$$

bestaat, en in dat geval is $\Phi_0 H = \Phi_0(\frac{1}{2}\Phi_0^{(-1)})C = \frac{1}{2}C \in S(X, X^*)$.

Aan de conditie voor het toepassen van de impliciete functiestelling op (8.18) in $S(X, X^*)$ rond $H = 0$ en $x = 0$ is dus voldaan als (8.18) als een vergelijking voor

$$\{H \in L(X, X^*) : \Phi_0 H \in S(X, X^*)\} \xrightarrow{\chi_0} S(X, X^*)$$

gezien wordt. Met $B = \Phi_0 H$ als nieuw onafhankelijke variabele verandert dit in

$$2Bh + Bh \circ (\Psi_0 B) = (\Phi(x) - \Phi_0)h$$

voor alle $h \in X$, ofwel

$$2B + T_0(B) = C(x) = \Phi(x) - \Phi_0 \quad (8.23)$$

in $S(X, X^*)$, met $T_0 : S(X, X^*) \rightarrow S(X, X^*)$ gedefinieerd door

$$T_0(B)h = Bh \circ (\Psi_0 B) \quad (8.24)$$

voor alle $h \in X$, en

$$X \xrightarrow{C} S(X, X^*)$$

continu en $C(0) = 0$.

De impliciete functiestelling kan nu gebruikt worden om, zonder meer⁵ te eisen dan continuïteit van $\Phi(x)$, een unieke oplossing $B(x)$ te vinden voor x in de buurt van $x = 0$, die daar continu van x afhangt. Hiermee is de volgende stelling bewezen.

Stelling 8.6. *Laat X een Banachruimte zijn en $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ twee keer continu differentieerbaar in de buurt van $x = 0$. Neem aan dat $F'(0) = 0$ en dat $F''(0) \in L(X, X^*)$ inverteerbaar is, met een inverse in $L(X, X^*)$. Dan is er een coördinatentransformatie van de vorm*

$$y = A(x)x = (I + \Phi_0^{(-1)}B(x))x,$$

waarin

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}F''(0)$$

en

$$x \xrightarrow{B} S(X, X^*)$$

continu is met $B(0) = 0$, zodanig dat

$$F(x) = \langle \Phi_0 A(x)x, A(x)x \rangle,$$

in de buurt van $x = 0$.

De aanname dat $F''(0)$ inverteerbaar is, is nogal zwaar en sluit een aantal standaardruimten meteen uit. Is dit eigenlijk een Hilbertruimtestelling, vraag je⁶ dan achteraf af⁷. Ook is op te merken dat de impliciete functiestelling hier achteraf helemaal niet⁸ nodig was. Merk daartoe op dat via $\phi = \Phi_0 h$ en $\psi = \Phi_0 k$ geldt dat

$$\langle \phi, \Psi_0 \psi \rangle = \langle \psi, \Psi_0 \phi \rangle \quad \text{voor alle } \phi, \psi \in X^*,$$

⁵ Zie (4.20) en formulering en bewijs daarboven.

⁶ To check: X en X^* lineair homeomorf $\implies X$ is a Hilbert space in disguise?

⁷ Via André Ran kwam van Jan Fourie antwoord: nee, $X \oplus X^*$, met X reflexief.

⁸ Maar de stelling zette ons wel op het juiste spoor.

i.e. $\Psi_0 \in S(X^*, X)$, en enig spelen met deze definitie en die van $B, \Phi_0 \in S(X, X^*)$ geeft dat (8.23) equivalent is met

$$2\Psi_0 B + \Psi_0 B \Psi_0 B = \Psi_0 C(x). \quad (8.25)$$

Voor H zelf betekent dit dat

$$I + 2H + H^2 = I + P(x) \quad \text{in} \quad L(X) = L(X, X), \quad (8.26)$$

waarbij⁹ zowel $H(x)$ als $P(x)$ (moeten) voldoen aan $\Phi_0 P(x), \Phi_0 H(x) \in S(X, X^*)$. Met de machtreekstechnieken die we gezien hebben¹⁰ voor matrices volgt dat

$$H = \frac{1}{2} P - \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{3!} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} P^3 - \frac{1}{4!} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} P^4 + \dots \quad (8.27)$$

als $\|P\| < 1$, en dus $y = A(x)x$ met¹¹

$$A(x) = I + E(x) - \frac{1}{2!} E(x)^2 + \frac{1 \cdot 3}{3!} E(x)^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4!} E(x)^4 + \dots$$

en

$$E(x) = \int_0^1 (1-t)(F''(0)^{(-1)} F''(tx) - I) dt,$$

wel aardig. Modulo rekenfouten wellicht maar ik denk het niet. Aan de formules zie je niet meer dat het niet alleen over $X = \mathbb{R}$ gaat.

8.2 Nog een keer de methode van Lagrange

In Sectie 6.3 hebben we essentieel gebruikt gemaakt van de gradiënten van Φ, F_1, F_2, F_3 . Dat was niet echt nodig, en dat laten we nu zien in de abstracte setting met $x \in X, y \in Y, F : X \times Y \rightarrow Y$ en $\Phi : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$.

Onder de aanname dat

$$(x, y) \xrightarrow{F_x} F_x(x, y) \quad \text{en} \quad (x, y) \xrightarrow{F_y} F_y(x, y)$$

continu zijn in de buurt van $(x, y) = (0, 0)$ met F_y inverteerbaar, volgt weer het bestaan van een continu differentieerbare impliciete functie $y = f(x)$ en een lokale beschrijving van S zoals voor (6.19). Voor differentieerbare Φ , met dus $(x, y) \rightarrow \Phi_x(x, y) \in X^*$ en $(x, y) \rightarrow \Phi_y(x, y) \in Y^*$, is (6.18) weer over te schrijven als criterium voor het stationair zijn van Φ beperkt tot S .

⁹ De omweg via H was ook niet nodig. De vergelijking was gewoon $A^2 = I + \Psi_0 C(x)$.

¹⁰ Zie Opgave 5.42.

¹¹ Er vallen een heleboel 2-en weg bij de terugvertaling naar F'' .

Als nu $\Phi_y \in Y^*$ te schrijven is als

$$\Phi_y = \Lambda \circ F_y,$$

dan volgt

$$\Phi_x = \Phi_y(F_y)^{(-1)}F_x = \Lambda \circ F_y(F_y)^{(-1)}F_x = \Lambda \circ F_x,$$

en samengenomen dat

$$\Phi' = \Lambda \circ F'$$

als criterium voor het stationair zijn.

Wat we hierboven nodig hebben is een stelling die zegt dat bij iedere begrensde lineaire $A : Y \rightarrow Y$ en $\psi \in Y^*$ een (unieke) $\Lambda \in Y^*$ hoort met $\psi = \Lambda \circ A$. Dat is voor een college functionaalanalyse.

9 Appendix: al of niet metrische topologie

Een aardig dictaatje is hier te vinden, uit de tijd dat Leiden de R nog in de naam had:

<http://www.few.vu.nl/~jhulshof/NOTES/anal.pdf>

9.1 Metrische ruimten

Onze genormeerde ruimten X , waaronder $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ en ook $C([a, b])$ met de maximumnorm, maar helaas niet $R([a, b])$ met de 1-norm, zijn voorbeelden van metrische ruimten met het afstandsbegrip gedefinieerd door de metriek

$$(x, y) \xrightarrow{d} d(x, y) = \|x - y\|, \quad (9.28)$$

een afbeelding¹ d van $X \times X$ naar $[0, \infty)$ met de eigenschappen dat voor alle $x, y, z \in X$ geldt dat

$$(i) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y; \quad (ii) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$(iii) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, x). \quad (9.29)$$

Iedere niet-lege deelverzameling A van X is zo een metrische ruimte, waarbij we de algebraïsche vectorruimte operaties nu vergeten.

Definitie 9.1. *Een metrische ruimte is een niet-lege verzameling X met een afbeelding $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ waarvoor (i), (ii) en (iii) uit (9.29) hierboven gelden voor alle $x, y, z \in X$.*

Opgave 9.2. Zie Opgave 7.3. De ε, N -definitie van $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ als $m, n \rightarrow \infty$ definieert wat een Cauchyrij in X is. Geef die definitie. Geef ook de definitie van het convergent zijn van de rij x_n in X .

We gebruiken hieronder de notatie $x_n \rightarrow x$ voor $x_1, x_2, x_3, \dots, x \in X$ zonder er steeds $n \rightarrow \infty$ bij te zetten en spreken over ook een rij x_n zonder te vermelden dat $n \in \mathbb{N}$ (of een andere deelverzameling van $\mathbb{Z}$ van de vorm $m + \mathbb{N}$ met $m \in \mathbb{Z}$, bijvoorbeeld $\mathbb{N}_0$).

¹ De d van distance, a van afstand doen we maar niet.

Opgave 9.3. Een flauwe opgave om aan de de notaties, definities en axioma's te wennen: laat zien dat als $x_n \rightarrow x$ en $x_n \rightarrow y$ (alles in X) voor de limieten x en y geldt dat $x = y$. De limiet van een convergente rij is dus uniek.

Met convergente rijen kunnen we voor metrische ruimten X en Y zeggen wat het voor een afbeelding

$$F : X \rightarrow Y$$

betekent om continu te zijn in $a \in X$.

Definitie 9.4. Een afbeelding F van een metrische ruimte X naar een (niet per se andere) metrische ruimte Y heet continu in $a \in X$ als de implicatie

$$x_n \rightarrow a \implies F(x_n) \rightarrow F(a)$$

geldt voor elke rij x_n in X . Als dit het geval is voor elke $a \in X$ dan zeggen we dat $F : X \rightarrow Y$ continu is.

Opgave 9.5. Als X, Y, Z metrische ruimten en

$$X \xrightarrow{F} Y \quad \text{en} \quad Y \xrightarrow{G} Z$$

afbeeldingen dan is de afbeelding

$$X \xrightarrow{G \circ F} Z \quad \text{gedefinieerd door} \quad X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z$$

continu in $a \in X$ als F continu is in a en G continu is in $b = F(a)$. Hint: triviaal, leg uit.

Definitie 9.6. Een metrische ruimte heet rijkompakt als elke rij in X een convergente deelrij heeft, en volledig als elke Cauchyrij in X convergent is (in beide gevallen met limiet in X dus).

Opgave 9.7. Bewijs dat rijkompakte metrische ruimten volledig zijn.

Opgave 9.8. Als X en Y metrische ruimten zijn, met X rijkompakt, dan is iedere continue $F : X \rightarrow Y$ uniform continu, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, a \in X : d(x, a) \leq \delta \implies d(F(x), F(a)) \leq \varepsilon.$$

Bewijs dit door een eerder bewijs (van Stelling 2.31) over te schrijven.

Opgave 9.9. Als X een rijcompacte metrische ruimte is, dan heeft iedere continue $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ een globaal maximum en een globaal minimum op X . Bewijs ook dit door een eerder bewijs over te schrijven.

9.2 Omgevingen, open en gesloten verzamelingen

Continuïteit kunnen we ook met open verzamelingen beschrijven. In het standaardjargon heet een deelverzameling $G \subset X$ van een metrische ruimte X gesloten als voor iedere rij x_n in G met $x_n \rightarrow x \in X$ de limiet x in G zit (je kan G niet uit door limieten te nemen). Een verzameling $O \subset X$ heet open² als zijn complement gesloten is.

Opgave 9.10. Bewijs dat in een Banachruimte iedere rijcompacte deelverzameling begrensd en gesloten is en dat in $\mathbb{R}^n$ ook de omgekeerde uitspraak geldt.

Uit Opgave 9.9 en Opgave 9.10 volgt dat de stelling over maxima en minima van continue functies op gesloten begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}^N$.

Stelling 9.11. *Laat $K \subset \mathbb{R}^N$ begrensd en gesloten zijn en $F : K \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn. Dan zijn er $a, b \in K$ met $F(a) \leq F(x) \leq F(b)$ voor alle $x \in K$. De punten a en b heten de minimizer en de maximizer voor F , en de waarden $F(a)$ en $F(b)$ het minimum en het maximum van F .*

Opgave 9.12. De collectie $\mathcal{G}$ van alle gesloten deelverzamelingen van een metrische ruimte X heeft drie belangrijke eigenschappen:

$$(i) \quad \emptyset \in \mathcal{G}, X \in \mathcal{G}; \quad (ii) \quad G_1, G_2 \in \mathcal{G} \implies G_1 \cup G_2 \in \mathcal{G};$$

en (voor elke indexverzameling I)

$$(iii) \quad G_i \in \mathcal{G} \quad \forall i \in I \implies \bigcap_{i \in I} G_i \in \mathcal{G}.$$

Bewijs dit via de definitie dat $G \in \mathcal{G}$ als voor iedere rij x_n in G met $x_n \rightarrow x \in X$ voor de limiet geldt $x \in G$.

² Minder gelukkige naamgeving, sorry, is niet anders.

Opgave 9.13. De collectie $\mathcal{O}$ van alle open deelverzamelingen van een metrische ruimte X heeft de volgende eigenschappen:

$$\emptyset \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}; \quad O_1, O_2 \in \mathcal{O} \implies O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O};$$

en (voor elke indexverzameling I)

$$O_i \in \mathcal{O} \quad \forall i \in I \implies \cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

Bewijs dit via de definitie dat $O \in \mathcal{O}$ als

$$O^c = \{x \in X : x \notin O\} \in \mathcal{G}.$$

Opgave 9.14. Laat zien dat in een metrische ruimte X een deelverzameling $O \subset X$ open is dan en slechts dan als voor elke $a \in O$ er een $r > 0$ is zo dat

$$\bar{B}_r(a) = \{x \in A : d(x, a) \leq r\} \subset O.$$

Bewijs ook dat $\bar{B}_r(a)$ gesloten is.

Om te weten welke verzamelingen open zijn moet je dus weten wat de gesloten bollen $\bar{B}_r(a)$ zijn maar niet eens dat. Heb je bijvoorbeeld twee normen en noemen we de bijbehorende bollen $\bar{B}_r(a)$ en $\bar{K}_s(a)$ dan krijgen we precies dezelfde open verzamelingen als elke $\bar{B}_r(a)$ met $r > 0$ altijd een $\bar{K}_s(a)$ bevat met $s > 0$ en omgekeerd. Is X een vectorruimte over $\mathbb{R}$ met twee normen dan noemen we die normen equivalent als ze dezelfde collectie $\mathcal{O}$ definiëren. Via Opgave 9.12 leidt dat tot deze karakterisatie van equivalente normen op X .

Opgave 9.15. Als twee normen

$$x \mapsto \|x\|_1 \quad \text{en} \quad x \mapsto \|x\|_2$$

dezelfde collectie $\mathcal{O}$ van open verzamelingen definiëren dan zijn er constanten A_1 en A_2 zo dat voor alle $x \in X$ geldt

$$\|x\|_1 \leq A_2 \|x\|_2 \quad \text{en} \quad \|x\|_2 \leq A_1 \|x\|_1.$$

Bewijs dit. Terzijde, omgekeerd geldt ook en is makkelijker.

Opgave 9.16. Laat zien dat in een metrische ruimte X een deelverzameling $O \subset X$ open is dan en slechts dan als voor elke $a \in O$ er een $r > 0$ is zo dat

$$B_r(a) = \{x \in A : d(x, a) < r\} \subset O.$$

Bewijs ook dat $B_r(a)$ open is.

Stelling 9.17. *Laat X en Y metrische ruimten zijn en $F : X \rightarrow Y$. Dan is F continu dan en slechts dan als alle inverse beelden van open verzamelingen in Y open zijn in X .*

Opgave 9.18. Wel een kluitje: bewijs Stelling 9.17. Triviaal daarna is dat als X, Y, Z metrische ruimten zijn en

$$X \xrightarrow{F} Y \quad \text{en} \quad Y \xrightarrow{G} Z$$

continue afbeeldingen, dat de afbeelding

$$X \xrightarrow{G \circ F} Z \quad \text{gedefinieerd door} \quad X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z$$

continu is. Waarom? Zie nog even Opgave 9.5.

In $\mathbb{R}^2$ hebben we behalve the standaardnorm

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{x \cdot x} \quad \text{voor} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

afkomstig van het standaardinproduct

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

de normen

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p} \quad \text{voor} \quad p \geq 1 \quad \text{en} \quad \|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|).$$

Als deze normen zijn equivalent.

Opgave 9.19. Bewijs dat al deze p -normen equivalent zijn en teken in het x_1, x_2 -vlak de gesloten eenheidsbollen $\bar{B}^p = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ voor $p = 1, 2$ en $p = \infty$, en voor nog twee p 's naar keuze. Blader nog even terug naar Opgave 9.15 en de karakterisatie daaronder en boven van open verzamelingen met behulp bollen, gesloten of open, zoals $B_\varepsilon^p(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - x_0\|_p < \varepsilon\}$ met $\xi \in \mathbb{R}^2$ en $\varepsilon > 0$.

Opgave 9.20. De bollen B^1 en B^∞ zijn ook te beschrijven als doorsnijdingen van open halfvlakken van de form $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) < b\}$ met $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineair gegeven door $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2$ en $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$. Laat dat zien.

Opgave 9.21. Een alternatieve manier om te zeggen dat een $O \in \mathbb{R}^2$ open is te zeggen dat er voor elke $\xi \in O$ drie³ open halfvlakken K_1, K_2, K_3 zijn zoals in Opgave 9.20, waarvoor geldt

$$\xi \in K_1 \cap K_2 \cap K_3 \subset O.$$

Waarom definieert dit dezelfde open verzamelingen? Geef ook zo'n definitie van open in $\mathbb{R}^3$.

Opgave 9.22. Een verzameling W in een genormeerde ruimte X heet zwak open als er voor elke $\xi \in W$ geldt dat er er eindig veel open halfvlakken zijn zo dat geldt

$$\xi \in K_1 \cap \dots \cap K_n \subset W.$$

Bewijs dat voor deze zwak open verzamelingen W dezelfde eigenschappen gelden als in Opgave 9.13. Met eindige doorsnijdingen van open halfvlakken is dus een topologie te maken: een collectie van "open" verzamelingen die voldoet aan de "axioma's" in Opgave 9.13. In het geval dat $X = \mathbb{R}^n$ zijn alle normen op X en deze topologie equivalent.

<https://www.youtube.com/watch?v=fmTcSGuk04o>

Opgave 9.23. Bewijs dat iedere norm $x \rightarrow \|x\|$ op $\mathbb{R}^2$ equivalent is met de 2-norm. Hint: laat eerst zien dat $x \rightarrow \|x\|$ op $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ een positief minimum en maximum heeft.

Opgave 9.24. Laat X_1 en X_2 genormeerde ruimten zijn. Bewijs dat

$$X_1 \times X_2 = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$$

met de voor de hand liggende bewerkingen weer een genormeerde ruimte is met (equivalente) normen (voor $p \geq 1$)

$$x \rightarrow \sqrt[p]{\|x_1\|^p + \|x_2\|^p} \quad \text{en} \quad x \rightarrow \max(\|x_1\|, \|x_2\|).$$

³3 = 2 + 1.

Opgave 9.25. Laat X_1 en X_2 genormeerde ruimten zijn en $X = X_1 \times X_2$. Bewijs dat iedere $f \in X^*$ van de vorm

$$x = (x_1, x_2) \xrightarrow{f} f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

is met $f_1 \in X_1^*, f_2 \in X_2^*$. Met andere woorden $X^* = X_1^* \times X_2^*$.

Opgave 9.26. Laat X_1 en X_2 genormeerde ruimten zijn en $f \in X^* = X_1^* \times X_2^*$. Bepaal de norm van f in X^* als voor de norm op $X = X_1 \times X_2$ de norm $x \rightarrow \|x_1\| + \|x_2\|$ genomen wordt. Zelfde vraag voor $x \rightarrow \max(\|x_1\|, \|x_2\|)$.

NAWOORD

Dit boek is een redelijk systematische inleiding in de analyse geworden.

Er is (nog) geen literatuurlijst. Alles is uit de lucht geplukt. Alleen aan het Lemma van Morse had ik niet gedacht om het op te nemen. De formulering en het bewijs van Stelling 8.6 zijn een aanpassing van wat de Utrechters kennen uit het vermaarde Analyse dictaat van Duistermaat en Kolk. Bob Rink gaf me dat dictaat, dat daarna een boek geworden is, in verband met wat iedereen over sub- en immersies zou moeten weten. Nu, dat wordt door dit nieuwe manuscript wel gedekt, al worden de woorden nog niet expliciet gebruikt. En toen zag ik daar dat Lemma van Morse als toepassing van de impliciete functiestelling. Aardig nu is dat je die impliciete functiestelling helemaal niet nodig hebt omdat de matrixvergelijking in het bewijs van het Lemma van Morse makkelijker is dan 'ie eruit ziet. Maar dat zag ik pas bij het in stelling brengen van die stelling ten behoeve van (8.10). Wel leerzaam, in meerdere opzichten.

Index

- $3 = 4$, Banach-Tarski paradox, 171
 $\forall \varepsilon > 0$, zie voetnoten, 52
 e tot de macht x , 121
- absolute waarde van $z \in \mathbb{C}$, 132
absoluut convergent, 30, 89
afgeleide functie, 76
afgeleide in punt: $F'(x_0) = f(x_0)$, 75
afhankelijke variabelen, 155
algebra voor afgeleide van x^7 , 112
alles via convergente rijen, 54
arctangens en zo, 125
argument van $z \in \mathbb{C}$: $\arg z$, 132
asymptotische formules, 118
axioma's voor de natuurlijke getallen, 33
- Banachruimte $C([a, b])$, 61
Basisboek Wiskunde, 30
bijecties komen in paren, 81
bolcoördinaten, 177
Boolese algebra, 33
bovengrens, 51
bovensom, 47
- Cauchy integraalformule, 188
Cauchy integraaltransformatie, 190
Cauchyrij, 30
cijferen, 14, 15, 19, 22
commutatieve Banachalgebra, 61
complexe getallen, 132
continu in een punt, 53
continuïteit: regels, 111
convergent, 30
convergentiestraal, 114
cosinus, 121
- delen vermijden., 142
delta expliciet bij 2ε , 113
- differentiaaloperator, 157
differentiaalquotiënt, 107
differentiaalvergelijking, 115
differentieerbaarheid impliciete f , 88
differentieerbare functie, 76
differentiequotiënten, 76
differenties als $\int_0^1$, 80
divergentie, 157
divergentie in poolcoördinaten, 163
domein, 36
driehoeksongelijkheid integralen, 60
dummy, 49
dynamisch systeem, 120
- echte toepassing, 120
eenparige cirkelbeweging, 122
epsilons en delta's rijen, 55, 86
equivalentieklasse, 35
equivalentierelatie, 35
exp, 121
- Flowers for Algernon, 191
Fourierreeks, 177
- gehele getallen $\mathbb{Z}$, 9
gemeenschappelijke verfijning, 53
gradiënt, 92, 156
gradiënt in poolcoördinaten, 162
grafiek, 36, 41
grote O van, 81
- Hölder continu, 53
harmonische polynomen, 141
hoofdstelling van de algebra, 133
- iedere begrensde rij in $\mathbb{R}$ heeft....., 55
implicatie, 32
impliciete functiestelling, 91
in de buurt van, 82

in het echte leven, 172
 index nog niet klaar, 3
 infimum, 51
 injectief, 81
 inleveren, 35
 integraal $\int_a^b f(x) dx$, 49
 integraal met parameter, 100
 integraalrekening: hoofdstelling 1, 76
 integraalrekening: hoofdstelling 2, 78
 integreerbaar: definitie, 56
 inverse functies op intervallen, 81
 inverse via meetkundige reeks, 90
 IS, 105

 Jacobimatrix, 160

 kansdichtheden, 174
 kettingregel, 3, 108, 110, 152, 155, 158
 kleine o van, 75
 kleinste bovengrens, 28
 kopen dat boekje, 9
 kwadratische vorm, 223

 Laplaciaan, 139
 Laurentreeks, 189
 Lemma van Morse, 221
 limiet van een functie voor $x \rightarrow a$, 54
 limietpunt, 55, 66
 lineaire benadering met restterm, 74
 Lipschitz continu, 53, 74, 80, 87, 96

 machtreeksen, 37, 113
 matrix, 137
 matrixrekening, 143
 matrixvergelijking, 40
 maxima en minima, Opgave 2.34, 56
 meerwaardige functie, 136
 meetkundige reeks, 86, 90, 142, 145, 147, 188, 190
 middelwaardestelling, 37, 76, 85
 multiplicatorenstelling, 96

 natuurlijke getallen $\mathbb{N}$, 9
 Newton schema aangepast, 84
 Newton's methode voor nulpunten, 83
 normale verdeling, 174

 omgekeerde 3-hoeksongelijkheid, 199
 ondersommen, 47
 onvoorwaardelijk convergent, 30
 oppervlakte, 34

 partitie, 47
 polyonaal pad, 181
 primitieve functie, 76
 probleemstelling, 37, 38, 221
 produktregel, 109

 quotiëntregel, 111

 radialen, 121, 122
 rationale getallen $\mathbb{Q}$, 36
 reële getallen $\mathbb{R}$, 9
 reeks, 28
 regel van Leibniz, 109
 relatie, 35
 resolvente van A , 212
 restterm, 75, 93, 99, 103, 109, 136
 rijnotatie, 31
 Ronald, 35

 scheiding van variabelen, 175
 sinus, 121
 spectrum $\sigma(A)$ van A , 212
 sport, 38
 standaardlimiet, 116
 startwaarde voor iteratie, 83
 stationair (punt), 77
 stationair punt, 221
 Stirling uitroepeteken, 119
 substitutieregels voor integralen, 104
 supremum, 51
 surjectief, 81

 tautologie, 28

Taylor benaderingen, 102
 techniek, 38
 totaal differentieerbaar, 92
 transponeren, 143, 160
 tussen, 50
 tussen (al of niet strict), 47
 tussenpunten, 50
 tweede orde afgeleiden, 105, 139

 uniform continu, 52

 vast punt van stricte contractie, 87
 vectorruimte over $\mathbb{R}$, 59
 verfijnen van een partitie, 51
 verwisselen integralen limieten, 61, 129
 volledige inductie, 32
 voor alle $\varepsilon > 0$, zie voetnoten, 52
 vreemde functies, 125

 waardenverzameling, 50
 wat praktischer: $\leq \varepsilon$, 31
 wiskundig netjes, 33

 zigzagintegraal, 187, 191
 zonder ordening boven- en onder, 63
 zonder woorden alleen kwantoren, 54

Wat uitwerkingen

Opgave 4.15. Hoe doen we dit? Als $F(\xi) < c$ dan is $\xi < b$ omdat $F(b) > c$. Neem bij een $\epsilon > 0$ met $\epsilon < c - F(\xi)$ de bijbehorende $\delta > 0$ uit de definitie van continuïteit. Dan is $F(x) - F(\xi) \leq |F(x) - F(\xi)| \leq \epsilon < c - F(\xi)$ voor alle $x \in [a, b]$ met $|x - \xi| \leq \delta$ en in het bijzonder is dus $\xi + \delta < b$ en $F(\xi + \delta) < c$, een tegenspraak met de aanname dat ξ een bovengrens is. Dus $F(\xi) \geq c$. Stel $F(\xi) > c$. Neem dan bij $\epsilon > 0$ met $\epsilon < F(\xi) - c$ de bijbehorende $\delta > 0$ uit de definitie van continuïteit. Dan is $F(\xi) - F(x) \leq |F(x) - F(\xi)| \leq \epsilon < F(\xi) - c$ voor alle $x \in [a, b]$ met $|x - \xi| \leq \delta$. Voor die x -waarden geldt dus dat $F(x) > c$. Omdat $F(a) < c$ volgt $\xi - \delta > a$. Maar nu is $\xi - \delta$ ook een bovengrens, in tegenspraak met ξ zijnde de kleinste bovengrens. De enige mogelijkheid is dus dat $F(\xi) = c$.

Opgave 4.17. Zonder beperking der algemeenheid nemen we nu aan dat $x_0 = 0 = F(x_0)$ en $F'(0) > 0$. De differentieerbaarheid van F in $x = 0$ betekent dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zodanig dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x| \leq \delta$ geldt dat

$$|F(x) - F'(0)x| \leq \varepsilon|x|,$$

hetgeen voor positieve x equivalent is met

$$(F'(0) - \varepsilon)x \leq F(x) \leq (F'(0) + \varepsilon)x.$$

De grafiek $y = F(x)$ ligt voor $x \in [0, \delta]$ dus in de driehoek begrensd door de lijnen $y = (F'(0) - \varepsilon)x$, $y = (F'(0) + \varepsilon)x$ en $x = \delta$.

We kunnen de ongelijkheden voor $x \in [0, \delta]$ schrijven als

$$\frac{1}{F'(0) + \varepsilon} F(x) \leq x \leq \frac{1}{F'(0) - \varepsilon} F(x),$$

en omdat we al weten dat F en G elkaars inverse functies zijn volgt nu dat

$$\frac{1}{F'(0) + \varepsilon} y \leq G(y) \leq \frac{1}{F'(0) - \varepsilon} y,$$

voor y in een interval $[0, \eta]$, waarbij we $\eta = (F'(0) - \varepsilon)\delta$ kunnen kiezen. Met die keuze van η ligt de grafiek $x = G(y)$ voor $y \in [0, \eta]$ in de driehoek begrensd door dezelfde twee “scheve” lijnen en de lijn $y = \eta$.

De ongelijkheden voor $G(y)$ gelden voor $y \in [0, \eta]$. Toewerkend naar de definitie van differentieerbaarheid van G in $y = 0$ volgt

$$\left(\frac{1}{F'(0) + \varepsilon} - \frac{1}{F'(0)}\right)y \leq G(y) - \frac{y}{F'(0)} \leq \left(\frac{1}{F'(0) - \varepsilon} - \frac{1}{F'(0)}\right)y,$$

i.e.

$$-\frac{\varepsilon}{F'(0)(F'(0) + \varepsilon)} y \leq G(y) - \frac{y}{F'(0)} \leq \frac{\varepsilon}{F'(0)(F'(0) - \varepsilon)} y$$

als

$$0 \leq y \leq \eta = (F'(0) - \varepsilon)\delta.$$

Om academische gezeur over delen door 0 te vermijden beperken we onze ε nu door

$$0 < \varepsilon \leq \frac{F'(0)}{2}$$

waarmee voor η volgt dat

$$\eta \geq \frac{F'(0)\delta}{2},$$

en vervolgens voor $G(y)$ dat

$$-\frac{\varepsilon}{F'(0)^2} y \leq G(y) - \frac{y}{F'(0)} \leq \frac{2\varepsilon}{F'(0)^2} y \quad \text{als} \quad 0 \leq y \leq \frac{F'(0)\delta}{2}.$$

Verifieer nu (voor $y < 0$ is het argument precies hetzelfde) dat

$$|G(y) - \frac{y}{F'(0)}| \leq \frac{2\varepsilon}{F'(0)^2} |y| \quad \text{als} \quad |y| \leq \frac{F'(0)\delta}{2},$$

met nog steeds dezelfde $\delta > 0$ bij $0 < \varepsilon \leq \frac{F'(0)}{2}$. We concluderen dat G in $y = 0$ differentieerbaar is met

$$G'(0) = \frac{1}{F'(0)},$$

de positieve voorfactoren bij ε en δ doen er immers niet toe.

De Stelling van Hartman Grobman voor afbeeldingen

In [HM] hebben we uitgebreid gekeken naar de Methode van Newton voor het oplossen van vergelijkingen, met als eerste voorbeeld het snel benaderen van algebraïsche getallen, bijvoorbeeld $\sqrt{2}$, dat een vast punt is van de afbeelding

$$x \xrightarrow{F} F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right),$$

een afbeelding die ongeveer 3000 jaar oud is, en later herontdekt is via

$$f(x) = x^2 - 2 \quad \text{en} \quad F(x) = x - f'(x)^{-1}f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

De mooie eigenschappen van het discrete dynamisch systeem gedefinieerd door

$$x_n = F(x_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

worden deels verklaard door het feit

$$F'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

gelijk is aan 0 in nulpunten van $f(x)$ en

$$F(x) = x \iff f(x) = 0$$

voor elke x met $f'(x) \neq 0$. Een curieus voorbeeldje in Hoofdstuk 6 van *The Beauty of Fractals* van Peitgen en Richter is

$$f(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{en} \quad F(x) = x^2,$$

en dat is er eentje uit een curieuze familie, bijvoorbeeld

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^{\frac{1}{7}}(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)^{\frac{1}{7}}} \quad \text{en} \quad F(x) = x^8,$$

maar dat terzijde. De afbeeldingen

$$x \rightarrow x^2 \quad \text{en} \quad x \rightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

hebben vaste punten waar hun afgeleide 0 is en het is niet moeilijk jezelf ervan te overtuigen dat dit leidt tot snelle convergentie de rij x_n naar evenwicht, als je begint met x_0 in de buurt van een evenwicht.

Neem je zomaar een functie F om een dynamisch systeem te maken zoals hierboven, en is $F(0) = 0$, dan bepaalt de afgeleide $F'(0)$ in het algemeen of $x = 0$ een (lokaal) stabiel of onstabiel evenwicht is, zoals het voorbeeld

$$x \rightarrow \lambda x$$

met $\lambda \in \mathbb{R}$ bij inspectie meteen laat zien. Een voor de hand liggende vraag is dan of de dynamische systemen gedefinieerd door

$$x \rightarrow F(x) \quad \text{en} \quad \tilde{x} \rightarrow F'(0)\tilde{x}$$

niet eigenlijk hetzelfde zijn via een conjugatie:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\phi} & \tilde{x} \\ F \downarrow & & \downarrow F'(0) \\ F(x) & \xrightarrow{\phi} & F'(0)\tilde{x} \end{array}$$

Dus is er een inverteerbare afbeelding ϕ waarmee

$$F'(0)\phi(x) = \phi(F(x))$$

voor x in een zo groot mogelijke buurt van $x = 0$? Als we $F(x)$ schrijven als

$$F(x) = \lambda x + a(x)$$

dan is de vraag dus of we gegeven $\lambda \in \mathbb{R}$ en $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $a'(0) = 0$ de functie $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kunnen vinden zodanig dat

$$\lambda\phi(x) = \phi(\lambda x + a(x))$$

in de buurt van $x = 0$, en dit kunnen we proberen op te lossen door middel van

$$\phi_n(x) = \frac{\phi_{n-1}(\lambda x + a(x))}{\lambda} \quad \text{beginnend met} \quad \phi_0(x) = x.$$

Als we een a nemen met $a'(0) = 0$ en $a(x) = 0$ voor $|x|$ buiten een interval gedefinieerd door $|x| \leq \eta$ met η wellicht nog te kiezen, dan zien we dat de onbekende functie ϕ voor $|x| \geq \eta$ wel gegeven moet worden door $\phi(x) = x$. Hoewel? Is het duidelijk dat gegeven $\lambda \in \mathbb{R}$ uit

$$\lambda\phi(x) = \phi(\lambda x)$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$ volgt dat $\phi(x) = x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$? Niet meteen dus. Maar $\phi(x) = x$ doet het wel.

Terzijde, als ϕ differentieerbaar is volgt (als $\lambda \neq 0$) dat

$$\phi'(x) = \phi'(\lambda x)$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$, en daarmee zijn heel veel ϕ' waarden gelijk aan elkaar, tenzij $|\lambda| = 1$. Als ϕ' continu is in 0 moet wel te bewijzen zijn dat $\phi'(x) = \phi'(0)$ voor alle x . En $\phi'(0) = 1$ ligt voor de hand als normaliserende voorwaarde.

Of we voor voor $a(x) \not\equiv 0$ zo'n differentieerbare ϕ wel maken is echter zeer de vraag. In het iteratieproces helpt de λ in de noemer wellicht als $|\lambda| > 1$ is. Weer terzijde, het voorbeeld met $a(x) = x^2$ laat zien dat zonder de aanname dat $a(x) \equiv 0$ voor $|x|$ groot er weinig hoop is, want we krijgen

$$\phi_1(x) = x + \frac{x^2}{\lambda},$$

$$\phi_2(x) = x + \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right)x^2 + \frac{2x^3}{\lambda} + \frac{x^4}{\lambda^2},$$

$$\begin{aligned} \phi_3(x) = x + \left(\frac{1}{\lambda} + 1 + \lambda\right)x^2 + \left(\frac{2}{\lambda} + 2 + 2\lambda\right)x^3 + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} + 6 + \lambda\right)x^4 \\ + \left(\frac{6}{\lambda} + 4\right)x^5 + \left(\frac{2}{\lambda^2} + \frac{6}{\lambda}\right)x^6 + \frac{4x^7}{\lambda^2} + \frac{x^8}{\lambda^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_4(x) = x + \left(\frac{1}{\lambda} + 1 + \lambda + \lambda^2\right)x^2 + \left(\frac{2}{\lambda} + 2 + 4\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda^3\right)x^3 \\ + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} + 7 + 7\lambda + 6\lambda^3 + \lambda^4 + 7\lambda^2\right)x^4 + \cdots + \frac{x^{16}}{\lambda^4}, \end{aligned}$$

enzovoorts.

De Stelling van Hartman Grobman gaat in het simpelste geval om de vraag of voor de afbeelding

$$(x, y) \xrightarrow{F} (\xi, \eta) = (\lambda x + a(x, y), \mu y + b(x, y))$$

het stelsel

$$\lambda\phi(x, y) = \phi(\lambda x + a(x, y), \mu y + b(x, y))$$

$$\mu\psi(x, y) = \psi(\lambda x + a(x, y), \mu y + b(x, y))$$

kunnen oplossen naar de functies ϕ, ψ onder de aanname dat

$$0 < |\mu| < 1 < |\lambda|,$$

teneinde de afbeelding F te conjugeren met de afbeelding

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) \rightarrow (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = (\lambda\tilde{x}, \mu\tilde{y}).$$

Dit zijn twee vergelijkingen, in de eerste is de onbekende de functie ϕ , in de tweede de functie ψ . Die voor ϕ lijkt op de vergelijking waarmee we begonnen en waarvoor de geschetste aanpak kans van slagen heeft als $|\lambda| > 1$. De aannamen op $a(x, y)$ en $b(x, y)$ zijn nu zoals die op $a(x)$ hierboven, dus

$$a_x(0, 0) = a_y(0, 0) = b_x(0, 0) = b_y(0, 0) = 0,$$

en $a(x, y)$ en $b(x, y)$ tenminste continu differentieerbaar. Met die conditie is het stelsel

$$\xi = \lambda x + a(x, y)$$

$$\eta = \mu y + b(x, y)$$

in de buurt van $(0, 0)$ op te lossen naar x, y in de vorm

$$x = \frac{1}{\lambda} \xi + \alpha(\xi, \eta)$$

$$y = \frac{1}{\mu} \eta + \beta(\xi, \eta)$$

met $\alpha(\xi, \eta)$ en $\beta(\xi, \eta)$ continu differentieerbaar in de buurt van $(0, 0)$ en

$$\alpha_\xi(0, 0) = \alpha_\eta(0, 0) = \beta_\xi(0, 0) = \beta_\eta(0, 0) = 0.$$

De eerste vergelijking houden we zoals die was, de tweede schrijven we in ξ, η . Beide vergelijkingen hebben dan dezelfde vorm:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\lambda} \phi(\lambda x + a(x, y), \mu y + b(x, y))$$

$$\psi(\xi, \eta) = \mu \psi\left(\frac{1}{\lambda} \xi + \alpha(\xi, \eta), \frac{1}{\mu} \eta + \beta(\xi, \eta)\right)$$

Om deze vergelijkingen op te lossen moeten we dus eerst weten hoe we de eerdere vergelijking voor $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oplossen.

Als $|a(x)| \leq \varepsilon|x|$ dan volgt

$$|\phi_1(x) - \phi_0(x)| = \left| \frac{1}{\lambda} (\lambda x + a(x)) - x \right| = \left| \frac{a(x)}{\lambda} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\lambda} |x|,$$

en dan

$$\begin{aligned} |\phi_2(x) - \phi_1(x)| &= \left| \frac{1}{\lambda} \phi_1(\lambda x + a(x)) - \frac{1}{\lambda} \phi_0(\lambda x + a(x)) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2} |\lambda x + a(x)| \leq \frac{\varepsilon(|\lambda| + \varepsilon)}{|\lambda|^2} |x|, \end{aligned}$$

waarna

$$\begin{aligned} |\phi_3(x) - \phi_2(x)| &= \left| \frac{1}{\lambda} \phi_2(\lambda x + a(x)) - \frac{1}{\lambda} \phi_1(\lambda x + a(x)) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon(|\lambda| + \varepsilon)}{|\lambda|^3} |\lambda x + a(x)| \leq \frac{\varepsilon(|\lambda| + \varepsilon)^2}{|\lambda|^3} |x|. \end{aligned}$$

Zo wordt duidelijk dat

$$|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)| \leq \frac{\varepsilon(\lambda + \varepsilon)^{n-1}}{|\lambda|^n} |x|,$$

niet genoeg om de rij $\phi_n(x)$ convergent te krijgen, maar als ook geldt dat $a(x) = 0$ voor $|x| \geq \eta$ dan kunnen we met $0 < \delta < 1$ de schattingen aanpassen als

$$|\phi_1(x) - \phi_0(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \eta^{1-\delta} |x|^\delta,$$

$$|\phi_2(x) - \phi_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2} \eta^{1-\delta} |\lambda x + a(x)|^\delta \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|^2} \eta^{1-\delta} (|\lambda| + \varepsilon) |x|^\delta,$$

en dan wordt duidelijk dat

$$|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)| \leq \varepsilon \eta^{1-\delta} \frac{(|\lambda| + \varepsilon)^{\delta(n-1)}}{|\lambda|^n} |x|^\delta.$$

Uniforme convergentie volgt als

$$(|\lambda| + \varepsilon)^\delta < |\lambda|.$$

Wiskunde onder spanning

Ik bespreek hier de opgaven met een analysekarakter in het centraal examen Wiskunde B van 15 mei 2017.

1 is een kale som. De functies f en g zijn gegeven door

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{en} \quad g(x) = \frac{1}{2e} \cdot x^2 = \frac{1}{2e} x^2,$$

ik neem aan met x in het domein $\mathbb{R}^+$ voor f en domein $\mathbb{R}$ voor g , en dat de punt voor vermenigvuldigen staat. Die punt laat ik dus liever weg. Gevraagd wordt een exacte berekening die laat zien dat de grafieken van f en g elkaar raken. Dan moet er dus een x_0 in het gemeenschappelijk domein $\mathbb{R}^+$ zijn waarvoor $f(x_0) = g(x_0)$ en $f(x) - g(x)$ geen tekenwisseling heeft in x_0 . Bijgevolg heeft $f(x) - g(x)$ in x_0 een lokaal extremum en geldt dat $f'(x_0) - g'(x_0) = 0$ omdat $f(x) - g(x)$ differentieerbaar is in elke $x \in \mathbb{R}^+$. We vinden zulke x_0 door de vergelijkingen

$$f(x) = g(x) \quad \text{en} \quad f'(x) = g'(x)$$

gezamenlijk op te lossen, dus

$$\ln(x) = \frac{1}{2e} x^2 \quad \text{en} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{e} x.$$

De tweede vergelijking geeft $x^2 = e$ en heeft in $\mathbb{R}^+$ als enige oplossing $x = \sqrt{e}$. Als de gezochte x_0 bestaat dan is dus $x_0 = \sqrt{e}$.

De eerste vergelijking reduceert dan tot $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2e} e$ ofwel $\frac{1}{2} \ln(e) = \frac{1}{2e} e$ en dus $\ln(e) = 1$. Omdat $e = \exp(1)$ en $\ln$ de inverse functie van $\exp$ is geldt $\ln(e) = 1$. Met $x = \sqrt{e}$ is dus aan allebei de vergelijkingen voldaan. We moeten nog nagaan dat $f(x) - g(x)$ geen tekenwisseling heeft in $\sqrt{e}$. Daartoe berekenen we

$$f''(x) - g''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{e} \quad \text{en dus is} \quad f''(\sqrt{e}) - g''(\sqrt{e}) = -\frac{2}{e} < 0.$$

We concluderen dat $f(x) - g(x)$ in $\sqrt{e}$ een strict lokaal maximum heeft (dat ook het globale maximum blijkt bij nadere inspectie maar dat werd niet gevraagd). Klaar in 3 stappen: oplossen $f'(x) = g'(x)$, enige oplossing voldoet aan $f(x) = g(x)$ (die was niet exact op te lossen) en $f''(x) \neq g''(x)$.

NB. Leuker was geweest: voor welke $a > 0$ raken de grafieken van $\ln(x)$ en ax^2 elkaar. Verder zal het laatste stuk van de uitwerking wellicht niet verwacht worden.

2,3,4 horen bij elkaar en zijn bepaald niet kaal. De eerste formule wordt nu niet met een functie in verband gebracht en is

$$U(t) = 325 \sin(100\pi t),$$

zonder de drie vermenigvuldigingspunten in de notatie. De speciale waarden $U = 230$ en $U = -230$ zijn in de grafiek van U versus t aangegeven, alsmede het tweede positieve nulpunt $t = \frac{1}{50} = 0,02$. Onduidelijk waarom de decimale notatie wordt gebruikt. Nog voor je verder leest komt de al of niet wiskundige gedachte op om $x = 100\pi t$ te stellen lijkt me, en U door 325 te delen. Kortom, via

$$x = 100\pi t \quad \text{en} \quad \frac{U(t)}{325} = \underbrace{u(x) = \sin(x)}_{\text{dit dus}} \quad \text{en} \quad \frac{46}{65} = \frac{230}{325}$$

oogt dit dus wat fijner.

Vraag 2 gaat nu over het meer dan 230 afwijken van $U(t)$ van 0, dus dat betreft de t -waarden waarvoor $U(t) > 230$ of $U(t) < -230$. In termen van x is dat $\sin(x) > \frac{46}{65}$ of $\sin(x) < -\frac{46}{65}$. Het eerste is op $[0, 2\pi]$ het geval voor $\arcsin(\frac{46}{65}) < x < \pi - \arcsin(\frac{46}{65})$, het tweede voor $\pi + \arcsin(\frac{46}{65}) < x < 2\pi - \arcsin(\frac{46}{65})$. Deze twee intervallen hebben samen een lengte van $2(\pi - 2\arcsin(\frac{46}{65}))$, en dat is een fractie

$$\frac{2(\pi - 2\arcsin(\frac{46}{65}))}{2\pi} = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(\frac{46}{65})$$

van de lengte van het periodiciteits interval $[0, 2\pi]$, hetgeen je in een percentage kunt vertalen door intikken op een rekenmachine met een arcsin-knop en vermenigvuldigen met 100. Dat geeft 49.9 nog wat, zeg maar 50%, en dat is het bedoelde antwoord op de vraag hoeveel procent van de tijd de spanning meer dan 230 volt van 0 afwijkt. Want U was de spanning in volt, en $U(t)$ niet als ik goed lees, dus ook 0 niet maar toch weer wel. Storender: er staat niet bij welke tijd. De goede verstaander wordt geacht het inzicht te hebben dat het om een veelvoud van de periode gaat, en voor een veelvoud van een kwart periode is het dan ook goed. Voor andere tijdspannen niet.

3 gaat verder met wat op grond van het verhaaltje verwacht kan worden en introduceert U_{eff} door middel van (daar is de punt weer wel)

$$T \cdot U_{\text{eff}}^2 = \int_0^T U(t)^2 dt,$$

waarin T de periode is van de spanning U . Bedoeld wordt $T = \frac{1}{50}$, hetgeen voor $x = 100\pi t$ overeenkomt met periode 2π . Storend: er staat niet bij dat $U_{\text{eff}} > 0$ (al of niet in volt). Met

$$U = 325u, \quad U(t) = 325u(x) \quad \text{is} \quad U_{\text{eff}} = 325u_{\text{eff}}$$

en volgt zonder primitiveren natuurlijk dat (ik laat de punt weer weg)

$$2\pi u_{\text{eff}}^2 = \int_0^{2\pi} u(x)^2 dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)^2 dx = \pi,$$

en dus

$$u_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{en} \quad U_{\text{eff}} = \frac{325}{\sqrt{2}},$$

dat nog decimaal moet worden geschreven en afgerond de 230 uit Opgave 2 reproduceert.

Het was echter niet de bedoeling om de integraal exact uit te rekenen, hetgeen ook zonder de schaling van t naar x en U, U_{eff} naar u, u_{eff} een fluitje van misschien wel twee cent was geweest, want de GRM moest gebruikt worden. Terwijl het antwoord op de goede vraag exact is. Immers, bij spanning

$$U(t) = a \sin \omega t$$

met amplitude $a > 0$, golfgetal $\omega > 0$ en periode T gedefinieerd door $2\pi\omega = T$, is de effectieve U altijd

$$U_{\text{eff}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

en daar zit $|U(t)|$ per periode de helft van de tijd boven. Zo wordt in deze twee opgaven zowel de wiskunde als de natuurkunde weer vertroebeld door het sturen naar zinloos gebruik van de GRM. En daar kan de politiek natuurlijk wel wat aan doen zeg ik na de discussie met Paul van Meenen op het BON-symposium en diens terechte punt over mobieltjes en rekenmachines.

4 gaat verder met drie U -tjes waarvan er (daar zijn de punten weer weg) twee gegeven worden,

$$U_1(t) = 325 \sin(100\pi t) \quad \text{en} \quad U_2(t) = 325 \sin(100\pi t - \frac{2}{3}\pi),$$

in x en u

$$u_1(t) = \sin(x) \quad \text{en} \quad u_2(t) = \sin(x - \frac{2}{3}\pi),$$

en vraagt naar de exacte maximale waarde van (de 325 wordt voor de zekerheid maar vast naar buitengehaald)

$$U_{\text{kracht}}(t) = U_1(t) - U_2(t) = 325(\sin(100\pi t) - \sin(100\pi t - \frac{2}{3}\pi)).$$

Dat is natuurlijk 325 keer de maximale waarde van (mag de functie of formule nu weer f heten?)

$$f(x) = u_{\text{kracht}}(x) = u_1(x) - u_2(x) = \sin(x) - \sin(x - \frac{2}{3}\pi),$$

waarvoor geldt dat

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) - \cos(x - \frac{2}{3}\pi) = \cos(x) - \cos(x) \cos(\frac{2}{3}\pi) - \sin(x) \sin(\frac{2}{3}\pi) \\ &= (1 + \frac{1}{2}) \cos(x) - \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin(x) = \frac{3}{2} \cos(x) - \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin(x), \end{aligned}$$

hetgeen 0 is als $\tan(x) = \sqrt{3}$. Dat is voor $x = \frac{\pi}{3}$ modulo π en de maximale waarde van $f(x)$ is $f(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi) = \sin(\frac{\pi}{3}) + \sin(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$. De maximizer $x = \frac{\pi}{3}$ ligt precies midden tussen de twee nulpunten en dat was wel te raden geweest. Voor U_{kracht} is het maximum dus $325\sqrt{3}$ en dat mag je zo laten staan voor deze ene keer.

NB Je kunt natuurlijk ook $f(x)$ als één sinusfunctie schrijven, maar die formules heb ik nooit uit mijn hoofd geleerd dus dit was sneller.

Waar waren alle getallen en verhaaltjes nu voor nodig? Joost mag het weten. Maar de wiskunde die getoetst wordt in de eerste vier opgaven is minimaal. Veel veredeld rekenen, dat wel. In Opgave 5 en 6 wordt dat vast goed gemaakt. We gaan verder met

7, 8, 9, 10, allemaal bijna kaal en weer zonder vermenigvuldigingspunten.
De eerste gaat over

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{2}{3}\pi) - \frac{1}{4}\sqrt{3} \quad \text{en} \quad g(x) = \sin(x - \frac{2}{3}\pi)$$

en vraagt om het maximum van $f(x) - g(x)$ waarbij x varieert tussen 0 en $\frac{2}{3}\pi$. Alleen heet x even p vanwege de nodeloos ingewikkeld uitleg. Dat lijkt dus heel erg op wat er net in Opgave 4 langskwam. Eigenlijk wordt het maximum van $|f(x) - g(x)|$ gevraagd maar omdat de grafieken er zoals altijd al bijstaan betreft het het maximum van $f(x) - g(x)$. Via

$$f'(x) - g'(x) = \cos(2x - \frac{2}{3}\pi) - \cos(x - \frac{2}{3}\pi)$$

gaat het nu wel anders verder dan in Opgave 4. Om $f'(x) - g'(x) = 0$ te krijgen moeten twee cosinussen aan elkaar gelijk zijn. Dat gaat hier alleen maar als

$$2x - \frac{2}{3}\pi = x - \frac{2}{3}\pi \quad \text{of} \quad 2x - \frac{2}{3}\pi = -(x - \frac{2}{3}\pi),$$

allebei modulo 2π , dus

$$x = 0 \pmod{2\pi} \quad \text{of} \quad 3x = \frac{4}{3}\pi \pmod{2\pi}.$$

In het gegeven interval is dat alleen $x = p = \frac{4}{9}\pi$

8 gaat over een functie die voor het eerst een domein heeft: voor $x \in [0, \pi]$ wordt de functie f gegeven door

$$f(x) = 3 \sin(x) - 2 \sin^2(x) = 3 \sin(x) - 2(\sin(x))^2,$$

een functie van $\sin(x)$ eigenlijk. Met $s = \sin(x)$ gaat het over

$$g(s) = 3s - 2s^2 = f(x)$$

maar voor de vraagstelling is dat misschien niet handig als we verder lezen. Er staat weer een plaatje bij waaruit blijkt dat $f(x)$ een lokaal minimum 1 heeft precies in het midden, dus in $x = \frac{\pi}{2}$ (ofwel $s = 1$) en voor twee andere x -waarden ook gelijk is aan 1. In termen van $s = \sin(x)$ gaat het dus om de s -waarden waarvoor $3s - 2s^2 = 1$ of wel $2s^2 - 3s + 1 = 0$ en omdat $s = 1$ een oplossing is factoriseert dit, te weten als $(2s - 1)(s - 1)$ dus de andere oplossing is $s = \frac{1}{2}$. De bijbehorende x -waarden voldoen dus aan $\sin(x) = \frac{1}{2}$ en dat zijn $x = \frac{\pi}{6}$ en $-\frac{\pi}{6}$ in $[0, 2\pi]$. De afstand tussen de andere snijpunten van $y = f(x)$ en $y = 1$ is dus $\frac{\pi}{3}$. En dat werd exact gevraagd, dus $s = \sin(x)$ was wel handig (niet voor afstanden natuurlijk, maar het ging ook niet over afstanden eigenlijk).

9 vraagt vervolgens om

$$\int_0^\pi f(x) dx = 3 \int_0^\pi \sin(x) dx - 2 \int_0^\pi \sin^2(x) dx = 6 - \pi,$$

de eerste via primitiveren, de tweede via $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (net als in Opgave 2, maar nu mag het zonder GR).

10 introduceert dan een functie g met

$$g(x) = ax^2 + bx$$

die voldoet aan $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$, $f(\pi) = g(\pi)$, $f'(\pi) = g'(\pi)$, en vraagt om a en b . Beter geweest was de vraag naar een kwadratische functie met die eigenschap, want die moet natuurlijk een veelvoud zijn van $x(\pi - x)$ omdat $g(0) = f(0) = 0 = f(\pi) = g(\pi)$. Met $f'(0) = 3$ wordt dat dus $g(x) = \frac{3}{\pi}x(\pi - x) = 3x - \frac{3}{\pi}x^2$ en het antwoord volgt want in π klopt het ook.

Iets vrolijker geworden, maar nu komen de bosbranden.

11,12,13 gaan over branden en daar zijn de punten weer. Waar de context in 2,3,4 wel OK was betreft het in 11 een bepaald soort **natuurlijke brand** beschreven door het model

$$T_{\text{nat}}(t) = 20 + 1050 \cdot e^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9},$$

wie verzint dit vraagt een mens zich dan af. Een formule als model, je ziet het vaker in het modelleren, maar meestal is het onzin. Zo ook hier is mijn nulhypothese. De formule zelf ziet er vervaarlijk uit. De 20 zal wel kamertemperatuur zijn. Haal die er maar van af en deel dan ook maar door die uit de duim gezogen 1050. Dan blijft, zonder die punt,

$$e^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9} = e^{-\ln^2(t)} e^{6\ln(t)} e^{-9} = e^{-\ln(t)\ln(t)} t^6 e^{-9}$$

over en haal die $e^{-9} \approx \frac{1}{8103}$ dan ook maar weg. Het gaat dan nog om

$$e^{-\ln(t)\ln(t)} t^6 = t^{6-\ln(t)},$$

je moet er maar opkomen. Omdat met

$$x = \ln(t) \quad \text{en} \quad T_{\text{nat}}(t) = 20 + 1050 e^{-x^2+6x-9}$$

het eigenlijk gaat om

$$e^{-(x-3)^2}$$

hadden de makers (Nederlandse uitspraak hanteren hier) iets anders in gedachten. De natuurlijke brand heeft kennelijk een tijdsverloop waarin de Gauss curve is te herkennen als je de tijd op een logaritmische schaal uitzet. Nou misschien dat daar nog wel een kansmodel achter zit dan, ik zal het eens aan Ronald vragen. Hoe het ook zij, het maximum ligt bij $x = 3$ en dat geeft voor de maximale “temperatuur” exact en zonder rekenmachine $20 + 1050 = 1070$.

12 gaat over de brand in het lab:

$$T_{\text{lab}}(t) = 20 + 345 \cdot \log(8t + 1)$$

met $\log$ ipv $\ln$, formule schijnt authentiek te zijn hoor ik van Gerard, al is onduidelijk waarvoor. Is dat de $^{10}\log$, of een andere $^a\log$? Gevraagd wordt algebraïsch (ja ja) naar de oplossing van

$$20 + 345 \cdot \log(8t + 1) = 300,$$

dat betreft dus de t waarvoor

$$\log(8t + 1) = \frac{300 - 20}{345} = \frac{280}{345} = \frac{56}{69},$$

een rationaal getal (of was het nu een breuk, mental note: navragen bij Jan Bergstra) met noemer 69. De gevraagde t -waarde is dus

$$t_{300} = \frac{1}{8}(a^{\frac{56}{69}} - 1)$$

met een a die je niet kunt weten. Ik gok op e of 10 en kijk naar de grafiek om mijn keus te maken. Maar die gaat over iets anders. Ik zie wel iets met 0,69. Met $a = 10$ volgt $t_{300} = 0,6850358$ nog wat. Dus het was de 10-log, hoe haal je het in je hoofd denk ik dan altijd.

13 gaat over de deur: als ik het goed zie gaat het om twee integralen die vergeleken moeten worden, om wat voor reden dan ook. De ene integraal is

$$I_{\text{lab}} = \int_{t_{300}}^{30} (T_{\text{lab}}(t) - 300) dt = \int_{t_{300}}^{30} (345^{10}\log(8t + 1) - 280) dt$$

en die is exact uit te rekenen maar niet gelijk aan

$$I_{\text{lab}} = \frac{625}{8} 10^{\frac{56}{69}} + \frac{83145}{8} \ln(241) - \frac{150625}{8} - 35 10^{\frac{56}{69}} \ln(10)$$

en dat is ongeveer 38160 maar het moest 11930 zijn, dank Gerard. Maple slikt immers de 10-log niet zomaar en moet via

$$\int_{t_{300}}^{30} (345 \frac{\ln(8t + 1)}{\ln 10} - 280) dt$$

gedwongen worden om het goed te doen en factoriseert om terug te pesten dan $\ln(10) = \ln(2) + \ln(5)$ om het antwoord zo onoverzichtelijk mogelijk te maken, maar er komt uiteindelijk afgerond 11930 uit.

Moet vergeleken worden met die andere integraal, en die is

$$I_{\text{nat}} = \int_{t_{300}}^{30} (T_{\text{nat}}(t) - 300) dt = \int_{\tau_{300}}^{30} (1050 e^{-\ln^2(t)+6\ln(t)-9} - 280) dt$$

met τ_{300} de waarde van t in het eerste snijpunt van de grafiek van T_{nat} met $T = 300$. Daarvoor moet de e -macht zelf gelijk zijn aan $\frac{4}{15}$ en dat geeft voor $x = \ln(t)$ dat

$$x = 3 \pm \sqrt{\ln\left(\frac{15}{4}\right)}$$

en kennelijk is

$$\tau_{300} = e^{3-\sqrt{\ln(\frac{15}{4})}}$$

want je moet de kleinste van de twee hebben. De integraal herschrijft met $t = e^x$ en $dt = e^x dx$ als

$$I_{\text{nat}} = \int_{3-\sqrt{\ln(\frac{15}{4})}}^{\ln(30)} (1050 e^{-(x-3)^3} - 280) e^x dx$$

en dat wordt iets met errorfuncties, ongeveer gelijk aan 14242 en minder dan die 38160, het zal wel (maar meer dan die 11930, die Gerard en ik nu allebei hebben).

Blijft de vraag: wat hierboven was wel en wat was niet de bedoeling? Over branden ging het echt niet en de wiskunde zit verstopt onder een dikke laag van wat tegenwoordig gecijferdheid heet.

De examens wiskunde van @hetCvTE voor het VWO

Ik pak als voorbeeld het herexamen VWO Wiskunde B van 2017. Van de 71 te verdienen punten betreffen 10 punten twee opgaven over een waterstraal uit een kraan. Figuur 1 geeft een duidelijke weergave van wat de makers in hun hoofd hebben maar strookt niet met de werkelijkheid. Het verloop van de diameter met de hoogte is immers veel kleiner dan het plaatje aangeeft. Formule (2) is juist onder de aanname dat het water recht naar beneden valt. Bij dit plaatje is dat evident (ook bij benadering) niet het geval en is het dus onjuist de snelheid v op deze manier in de formule te gebruiken, een formule die voor leerlingen die natuurkunde in hun pakket hebben vast wel betekenis heeft als voor v de verticale component van de snelheid wordt gelezen. Maar v is de snelheid zelf volgens de uitleg, en daarmee is de formule onjuist.

Formule (2) moet in Opgave 6 worden gecombineerd met Formule (1), waarin v juist wel de snelheid (dat is de lengte van de snelheidsvector) zelf is. Door beide formules te combineren kan Formule (3) worden afgeleid. Wie zich niets aantrekt van het verhaaltje zal daar met wiskunde uit de onderbouw geen moeite mee gehad hebben als het goed is. Het begeleidende verhaaltje is echter tamelijk omslachtig geformuleerd met een overbodige invoering van de spreekwoordelijke x , en de essentiële aanname dat het water verticaal een vrije val valt wordt niet geformuleerd.

In Opgave 7 wordt vervolgens om de inhoud van de waterstraal gevraagd, al wordt het anders geformuleerd. Daarvoor is alleen de net geverifieerde formule (3) nodig waarvan het kwadraat moet worden genomen en geïntegreerd van $x = 0$ tot $x = h_0$. De waarden van r_0 en h_0 (straal en hoogte van de kraanopening) worden in *cm* (centimeters) gegeven, de uitstroomsnelheid v_0 in *m/s* (meters per seconde), en de valversnelling g was eerder al in *m/s*² gegeven. Een vals valstrikje alvorens het knoppendrukken kan beginnen: je moet eerst van centimeters meters maken. Alle getallen zijn decimaal gegeven. Of je van de examenmakers nu mag schrijven dat $h_0 = \frac{3}{10}$, $r_0 = \frac{1}{50}$, $v_0 = \frac{1}{2}$ weet ik niet, maar met die waarden gaat het om de eenvoudig exact uit te rekenen integraal

$$\pi r_0^2 \int_0^{h_0} \sqrt{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gx}} dx = \frac{\pi}{2500} \int_0^{\frac{3}{10}} \frac{1}{\sqrt{1 + 8gx}} dx = \frac{\pi}{10000g} \left(\sqrt{1 + \frac{12g}{5}} - 1 \right),$$

waarin je $\pi = 3,14$ en $g = 9,81$ kunt invullen met je rekenmachine als je dat wilt. Helaas, @hetCvTE wil dat je *vanaf het begin de rekenmachine* gebruikt, met kommagetallen en numerieke benaderingen. Zo bestaat Opgave 7 alleen maar uit een oefening intoetsen op de rekenmachine en het niet in het valkuiltje van de fysische eenheden trappen.

Some time ago I was asked to give a talk on the work of Nash. I apologise for doing something else instead. On a family of theorems that bear his name and proofs Nash never wrote. In these notes I describe how Newton's method can be adapted in the case that the map

$$u \rightarrow u - f'(u)^{-1}f(u) \quad (30)$$

is not defined as a map from a Banach space X to itself. The resulting theorems are called HARD Implicit Function Theorems. My purpose here is to demystify the terminology and present a simple proof of convergence for a modification of Newton's method in such a case. Observe that a direct proof of the Inverse Function Theorem for a continuously differentiable function f amounts to solving the equation $f(u) = v$ for u given small v under the assumption that $f(0) = 0$, using the map

$$u \rightarrow u + f'(0)^{-1}(v - f(u)) \quad (31)$$

which is contractive if $f'(0)^{-1} : X \rightarrow X$ exists as a continuous linear map.

The proof of the Implicit Function Theorem for solving equations like $f(u, v) = 0$ in the form $u = u(v)$ if $f(0, 0) = 0$ and the partial derivative of f with respect to u is invertible in $(u, v) = (0, 0)$ is similar. To show that (31) produces a local solution $u = u(v)$ which is continuously differentiable the only regularity on f that has to be assumed is that $u \rightarrow f'(u)$ is continuous, as only $f'(u)$ is needed in the calculations and estimates. Newton's method, which employs a suitable inverse of $f'(u)$ for all u in some (say the unit) ball B in X , relies on Taylor's theorem with a quadratic remainder and therefore the assumption that also $u \rightarrow f''(u)$ be continuous is required.

10 Newton's method: a convergence proof

I will modify the treatment in [KP]⁴ which begins with a somewhat alternative treatment of Newton's method in the standard case. So to warm up consider an equation of the form $f(u) = 0$ in which $f : B \rightarrow X$ is a twice continuously differentiable function defined on the open unit ball B in a Banach space X , with first and second order derivative satisfying bounds

$$\|f'(u)\| \leq M_1 \quad \text{and} \quad \|f''(u)\| \leq M_2 \quad \forall u \in B. \quad (32)$$

The general case of Banach spaces is really not that different from the case in which $X = \mathbb{R}$, which you may think of in what follows below. Simply take $B = (-1, 1)$ and replace all norms by absolute values.

⁴ Krantz & Parks, The Implicit Function Theorem, Birkhäuser 2003.

What we need is that Taylor's theorem with a second order remainder,

$$f(u_n) = \underbrace{f(u_{n-1}) + f'(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})}_{\text{linear approximation}} + Q_f(u_{n-1}, u_n), \quad (33)$$

in which

$$\|Q_f(u_{n-1}, u_n)\| \leq \frac{M_2}{2} \|u_n - u_{n-1}\|^2, \quad (34)$$

applies to a sequence of iterates $u_n \in B$. For the standard Newton method one does not explicitly need the bound on $f'(u)$ in (32) which says that the linear map $f'(u) : X \rightarrow X$ satisfies

$$\|f'(u)v\| \leq M_1 \|v\| \quad \forall u \in B \quad \forall v \in X, \quad (35)$$

but a similar bound

$$\|L(u)\| \leq C \quad (36)$$

for maps $L(u)$, that act as right inverses of $f'(u)$ in the sense that

$$f'(u_{n-1})L(u_{n-1})f(u_{n-1}) = f(u_{n-1}), \quad (37)$$

is essential. Writing

$$p_n = \|u_n - u_{n-1}\| \quad \text{and} \quad q_n = \|f(u_n)\| \quad (38)$$

the Newton scheme

$$u_n = u_{n-1} - L(u_{n-1})f(u_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (39)$$

starting with $u_0 = 0$, then defines $u_n \in B$ as long as

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n < 1, \quad (40)$$

and the inequalities

$$p_n \leq Cq_{n-1} \quad \text{and} \quad q_n \leq \frac{1}{2}M_2p_n^2 \quad (41)$$

are immediate from (33,34,39). Note that (39) kills the linear approximation in (33). The inequalities in (41) are complemented by

$$q_0 = \|f(0)\| \quad \text{and} \quad p_1 \leq Cq_0 = C\|f(0)\|. \quad (42)$$

10.1 The optimal result

Clearly (41) and (42) combine as

$$p_n \leq \mu p_n^2 \quad \text{with} \quad \mu = \frac{1}{2}MC \quad \text{and} \quad p_1 \leq C\|f(0)\|, \quad (43)$$

and the condition to be stated is which $\bar{P} = \bar{P}(\mu)$ guarantees that the implication

$$C\|f(0)\| < \bar{P} \implies \sum_{n=1}^{\infty} p_n < 1 \quad (44)$$

holds. The larger $\bar{P}$ the stronger the statement in the sense that larger $\|f(0)\|$ are allowed to obtain a solution $u = \bar{u} \in B$ of $f(u) = 0$ via (39) with $u_0 = 0$. Note that with $C\|f(0)\| \leq \bar{P}$ the same conclusion will hold if only one of all the inequalities in the estimates below is strict, which will inevitably be the case of course.

Obviously the smallest $\bar{P}$ we can get follows from replacing the three inequalities in (43) and (44) by equalities. This leads to

$$p_n = \mu p_{n-1}^2 \quad \text{for } n \in \mathbb{N}; \quad p_1 = \bar{P}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1. \quad (45)$$

Via $\xi_n = p_n$ and $\xi_n = \xi_{n-1}^2$ this is easily seen to be equivalent to

$$\mu = G(\mu\bar{P}) \quad \text{with} \quad G(\xi) = \xi + \xi^2 + \xi^4 + \xi^8 + \xi^{16} + \dots \quad (46)$$

but this does not yield a simple formula for $\bar{P} = \bar{P}(\mu)$.

10.2 A suboptimal result

A rough estimate

$$G(\xi) < \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 + \xi^5 + \dots = \frac{\xi}{1 - \xi} \quad (47)$$

leads to a simple but suboptimal formula:

$$\bar{P} = \frac{1}{1 + \mu} \quad \text{or} \quad \mu = \frac{1}{\bar{P}} - 1. \quad (48)$$

11 Alternative proof of convergence

The alternative approach to (41) and (42) in [KP] is not to solve the corresponding system with equalities but to derive an estimate of the form

$$p_n \leq e^{-\gamma\lambda^n} \quad (49)$$

via induction starting from

$$p_1 \leq C||f(0)|| < \bar{P} = e^{-\gamma\lambda}, \quad (50)$$

with choices of γ and λ that guarantee both

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma\lambda^n} \leq 1 \quad (51)$$

as well as that the induction step can be done via

$$p_{n-1} \leq e^{-\gamma\lambda^{n-1}} \implies p_n \leq \mu p_{n-1}^2 \leq \underbrace{\mu e^{-2\gamma\lambda^{n-1}}}_{\text{should hold for all } n \geq 1} \leq e^{-\gamma\lambda^n},$$

which is the case if

$$\ln \mu \leq \gamma\lambda^{n-1}(2 - \lambda) \quad \forall n \geq 1.$$

11.1 The optimal alternative result

For a given μ this is equivalent to

$$\ln \mu \leq \gamma\lambda(2 - \lambda) \quad \text{and} \quad \lambda \leq 2 \quad (52)$$

if we make the obvious restriction that γ and λ be positive. Conditions (50) and (52) suggest $\alpha = \gamma\lambda$ and λ as the more relevant parameter so we have to pick $\alpha > 0$ and $1 < \lambda \leq 2$ with

$$\ln \mu \leq \alpha(2 - \lambda), \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha\lambda^n} \leq 1 \quad \text{and} \quad \bar{P} = e^{-\alpha} \quad \text{maximal.} \quad (53)$$

For $\mu > 1$ the inequalities define a region in the first quadrant of the λ, α -plane bounded by the two curves given by

$$\ln \mu = \alpha(2 - \lambda) \quad \text{and} \quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha\lambda^n} = 1, \quad (54)$$

which intersect in one point.

This point defines the minimal value of $\alpha = -\ln \bar{P}$ via

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha \lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{(2+\frac{\ln \mu}{\ln \bar{P}})^n}$$

if $\mu > 1$. The curve defined by

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{(2+\frac{\ln \mu}{\ln \bar{P}})^n} \quad \text{and} \quad \mu \geq 1 \quad (55)$$

hits the curve defined by (46) in $\mu = 1$ and lies below (46) of course, but above (48) in view of

$$\mu = \frac{1}{\bar{P}} - 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{(2+\frac{\ln \mu}{\ln \bar{P}})^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{(1+\frac{\ln(1-\bar{P})}{\ln \bar{P}})^n} < \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{1+n\frac{\ln(1-\bar{P})}{\ln \bar{P}}}}_{\text{a geometric series}} = 1.$$

For $\mu \leq 0$ the optimal choice of $\bar{P}$ via (53) is given by

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}^{2^n}.$$

11.2 A suboptimal alternative result

A more explicit formula is again obtained via a rough estimate

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma \lambda^n} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma(1+n(\lambda-1))}}_{\text{a geometric series}} = \frac{e^{-\gamma \lambda}}{1 - e^{-\gamma(\lambda-1)}} = \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{\gamma} e^{-\alpha}} \quad (56)$$

and replacing (53) by

$$\ln \mu \leq \alpha(2 - \lambda), \quad \lambda \geq \frac{\alpha}{\ln(e^{\alpha} - 1)} \quad \text{and} \quad \bar{P} = e^{-\alpha} \quad \text{maximal.}$$

This leads to

$$\mu = e^{\alpha(2-\lambda)} = \frac{1}{\bar{P}^{2-\lambda}} = \frac{1}{\bar{P}^{2+\frac{\ln \bar{P}}{\ln(\frac{1}{\bar{P}}-1)}}} = \bar{P}^{\frac{\ln(\bar{P})-2\ln(1-\bar{P})}{\ln(1-\bar{P})-\ln(\bar{P})}}$$

so that

$$1 \leq \mu = \frac{1}{\bar{P}^{2+\frac{\ln \bar{P}}{\ln(\frac{1}{\bar{P}}-1)}}} < \frac{1}{\bar{P}} - 1 \quad (57)$$

defines another curve with

$$\bar{P} \leq \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

which is below the three curves above, but to leading coincides with them in the limit $\mu \rightarrow \infty$ and $\bar{P} \rightarrow 0$.

11.3 A lousy alternative result

The even rougher estimate used in [KP] via

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma \lambda^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\gamma(\lambda-1)}$$

is to be avoided as at some point below the treatment of ill-behaved Newton's methods will show.

11.4 A much better suboptimal alternative result

Actually the first rough estimate above works better with α than with γ , as I only noticed May 21. Directly in terms of γ and λ we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma \lambda^n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma \lambda \lambda^{n-1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma \lambda (1+(n-1)(\lambda-1))} = \frac{e^{-\gamma \lambda}}{1 - e^{-\gamma \lambda (\lambda-1)}} \leq 1 \quad (58)$$

if

$$2 - \lambda \leq \frac{\ln(e^{\gamma \lambda} - 1)}{\gamma \lambda} = \frac{\ln(e^{\alpha} - 1)}{\alpha},$$

so that we arrive at

$$\ln \mu \leq \alpha(2 - \lambda), \quad \alpha(2 - \lambda) \leq \ln(e^{\alpha} - 1) \quad \text{and} \quad \bar{P} = e^{-\alpha} \quad \text{maximal.} \quad (59)$$

This is the optimal estimate using the Bernoulli type inequality

$$\lambda^n \geq 1 + n(\lambda - 1). \quad (60)$$

With equality in the final inequality in (58) we arrive at

$$\ln \mu \leq \ln(e^{\alpha} - 1) = \ln\left(\frac{1}{\bar{P}} - 1\right),$$

which for $\mu > 1$ coincides with (48) and we can forget about the annoying (57) above. Note that factoring out another λ in the exponent in (58) will and cannot help to improve this result, which says that if $\mu > 1$ the bound

$$\|f(0)\| \leq \frac{1}{C(\mu + 1)}$$

suffices.

This bound may be compared with the bound in [KP], where all constants are named M , for unclear reasons $M > 2$ is assumed, and the $\frac{1}{2}$ -coefficient in the Taylor-remainder term is omitted. Since $\mu = \frac{1}{2}CM$ our bounds looks similar to their bound $\|f(0)\| \leq M^{-5}$. In the next section the comparison will be a true pain, as [KP] have a formulation in which again all constants are called M with apparently $M > 1$, and the bound on some norm of $f(0)$ (the wrong norm actually) involving M^{-307} . Comparing to the lectures notes of Schwartz from 60 years ago this is hardly an improvement as Schwartz had M^{-202} (also for the wrong norm).

12 Nash' modification of Newton's method

Now that we have seen several small variants of the method to obtain convergence for Newton's method, we consider the problem of solving $f(u) = 0$ in $B \subset X$ in the case that $f : B \rightarrow Z$ and $L(u) : Z \rightarrow Y$ with X, Y and Z *different* Banach spaces that we assume to belong to a family of spaces denoted by C^k , which we think of as function spaces. Here k denotes the number of possibly fractional derivatives that elements $u \in C^k$ have. Think of k for X , l for Z and m for Y . The goal is to have conditions that guarantee the existence of a solution to $f(u) = 0$ with k -norm smaller than 1, provided $f(0)$ has a norm bounded by some power of M , where M is a universal bound for all constants related to the derivatives of f .

Both [KP] and Schwartz require a very strong norm of $f(0)$ to be bounded, but the treatment below will show that a bound on the l -norm suffices. It should be noted that [KP] more or less copied from Schwartz with some additional details explained. Both formulate a statement for the case that $k > l$, but give a not completely correct proof for the case that $k = l > m$ (without mentioning the difference). The main additional assumption is a natural affine bound for $\|L(u)f(u)\|_{\bar{m}}$ in terms of $\|u\|_{\bar{k}}$, for $\bar{m}$ and $\bar{k}$ sufficiently large and $\bar{k} - \bar{m} = k - m$. The ratio

$$N = \frac{\bar{k} - k}{k - m} \quad (61)$$

measures the required higher regularity of the Newton map for the modified scheme described below to still do the job.

Below the norms $u \rightarrow \|u\|_k$ on C^k are assumed to be monotone increasing in k and we assume that there are linear so-called smoothing operators $S(t)$ parametrized by $t \geq 1$ that satisfy

$$\|S(t)u\|_k \leq K_{kl}t^{k-l}\|u\|_l \quad \text{and} \quad \|(I - S(t))u\|_l \leq \frac{K^{kl}}{t^{k-l}}\|u\|_k \quad (62)$$

for all $k > l$ in a sufficiently large range as needed in the particular implementation of the modified Newton method presented next. Thus $S(t)$ maps C^l to C^k , with an estimate for the ratio between the norms that grows worse as $S(t)$ approaches the identity I for $t \rightarrow \infty$, when I is considered as the embedding $I : C^k \rightarrow C^l$. It is convenient to write the norms of $S(t)$ and $I - S(t)$ with subscripts indicating the norms used for u , $S(t)u$ and $(I - S(t))u$. Thus (62) says that

$$\|S(t)\|_{kl} \leq K_{kl} t^{k-l} \quad \text{and} \quad \|(I - S(t))\|_{lk} \leq \frac{K^{kl}}{t^{k-l}}. \quad (63)$$

Besides (63) we assume (now also) a bound M_1^{lk} on $\|f'(u)\|_{lk}$ and, as before, bounds M_2^{lk} on $\|f''(u)\|_{lk}$ and C_{ml} on $\|L(u)\|_{ml}$ for $\|u\|_k \leq 1$.

12.1 The modified scheme

The idea of Nash was to modify Newton's scheme into

$$u_n = u_{n-1} - S(t_{n-1})L(u_{n-1})f(u_{n-1}), \quad (64)$$

with a suitable choice of $t_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. In (64) the new factor $S_{n-1} = S(t_{n-1})$ maps $L(u_{n-1})f(u_{n-1})$ back to (the strict subset of smooth functions of) the original domain of f . This comes with a cost which is estimated using the norm of the smoothing operator S_{n-1} in the chain

$$u_{n-1} \in X = C^k \xrightarrow{f} Z = C^l \xrightarrow{L(u_{n-1})} Y = C^m \xrightarrow{S_{n-1}} u_n \in X = C^k.$$

Before we do so let's examine how (33) is modified when combined with (64). We have

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \underbrace{f(u_{n-1}) + f'(u_{n-1})(u_n - u_{n-1})}_{\text{vanishes with (39)}} + Q_f(u_{n-1}, u_n) \\ &= \underbrace{f'(u_{n-1})(I - S_{n-1})L(u_{n-1})f(u_{n-1})}_{\text{because of (64)}} + Q_f(u_{n-1}, u_n), \end{aligned}$$

so that, with

$$p_n = \|u_n - u_{n-1}\|_k \quad \text{and} \quad q_n = \|f(u_n)\|_l,$$

the estimate

$$q_n \leq \underbrace{M_1^{lk} \|I - S_{n-1}\|_{km} \|L(u_{n-1})f(u_{n-1})\|_m}_{\text{new error like term}} + \frac{1}{2} M_2^{lk} p_n^2 \quad (65)$$

holds.

12.2 The new error term

The third factor in the error like term in (65) will have to be controled using some assumption on the map

$$u \rightarrow L(u)f(u)$$

which was not needed in the case of (39) and that should guarantee that quadratic term in (65) will still allow us to establish a conclusion like (44). Clearly this is impossible if $m \leq k$ because we can only make $\|I - S_n\|_{km}$ small if $k < m$. Nash' solution was to replace m by a (much) larger $\bar{m}$ and assume an otherwise natural affine estimate of the form

$$\|L(u)f(u)\|_{\bar{m}} \leq A_{\bar{m}\bar{k}}(1 + \|u\|_{\bar{k}}) \quad (66)$$

with

$$\bar{k} - \bar{m} = k - m,$$

which requires an additional estimate for

$$r_n = 1 + \|u_n\|_{\bar{k}} \quad (67)$$

to be used in combination with

$$q_n \leq M_1^{lk} \underbrace{\|I - S_{n-1}\|_{k\bar{m}}}_{\text{controled by (63)}} r_{n-1} + \frac{1}{2} M_2^{lk} p_n^2 \quad (68)$$

and the estimate for p_n . Via (64) the latter now reads

$$p_n \leq \|S_{n-1}\|_{km} C_{ml} q_{n-1} \quad (69)$$

because $\|L(u_{n-1})f(u_{n-1})\|_m \leq C_{ml} q_{n-1}$.

The additional estimate needed for r_n also follows from (64). In view of

$$\|u_n - u_{n-1}\|_{\bar{k}} \leq \|S_{n-1}\|_{\bar{k}\bar{m}} \|L(u_{n-1})f(u_{n-1})\|_{\bar{m}} \leq \|S_{n-1}\|_{\bar{k}\bar{m}} A_{\bar{m}\bar{k}} (1 + \|u_{n-1}\|_{\bar{k}})$$

we have

$$1 \leq r_n \leq 1 + A_{\bar{m}\bar{k}} \sum_{j=1}^n \|S_{j-1}\|_{\bar{k}\bar{m}} r_{j-1}. \quad (70)$$

The “error” terms accumulate but can be kept under control as we shall see below.

The system of inequalities (69,68,70) and initial inequalities for $q_0, r_0 = 1$ and r_1 allows again estimates of the form (49), provided $\bar{k} - k = \bar{m} - m$ is

sufficiently large in terms of (61). The idea is to get the first term in (68) controlled by the right hand side of

$$p_n^2 \leq e^{-2\gamma\lambda^n}$$

in the induction argument, so that the norm $\|S_n\|_{km}$ in (69) can be chosen not too large so as still to have (49) with n if it already holds with $n-1$. To do so we need a control on $\|S_{n-1}\|_{km}$ of the same form and this is established by setting

$$t_{n-1} = e^{\beta\lambda^{n-1}} \quad (71)$$

with $\beta > 0$ to be chosen in terms of γ . Note that this gives λ^n in the exponents of the exponential bounds for S_n and $I - S_n$.

Here we choose to keep λ as a parameter in a range as large as possible, like we did in the analysis of (39). Clearly we can only complete the argument if we also specify a bound on r_n to be established in the course of the argument, and this bound has to be of the same form as the bound chosen for S_n . Thus we look for a proof that

$$p_n \leq e^{-\gamma\lambda^n} \quad \text{and} \quad r_n \leq e^{\delta\lambda^n} \quad (72)$$

with $\delta > 0$. We note that the proof presented in [KP] the choice $\delta = \gamma$ and $\lambda = \frac{3}{2}$ dates back to Schwartz's lecture notes. As we shall see below this is not quite the optimal choice.

12.3 The system of inequalities

With (71) we have the system of inequalities

$$p_n \leq K_{km} e^{(k-m)\beta\lambda^{n-1}} C_{ml} q_{n-1}; \quad (73)$$

$$q_n \leq M_1^{lk} K^{k\bar{m}} e^{(k-\bar{m})\beta\lambda^{n-1}} A_{\bar{m}\bar{k}} \underbrace{r_{n-1}}_{\leq e^{\delta\lambda^{n-1}}} + \frac{1}{2} M_2^{lk} \underbrace{p_n^2}_{\leq e^{-2\gamma\lambda^n}}; \quad (74)$$

$$1 \leq r_n \leq 1 + \underbrace{A_{\bar{m}\bar{k}} K_{k\bar{m}}}_{\mu_3} \sum_{j=1}^n e^{(\bar{k}-\bar{m})\beta\lambda^{j-1}} \underbrace{r_{j-1}}_{\leq e^{\delta\lambda^{j-1}}}, \quad (75)$$

and we aim for a proof of (72) via induction, using the underbraced estimates in the three inequalities above as induction hypothesis. In (74) the estimate of the first term is controlled by the estimate of the second term if

$$e^{(k-\bar{m})\beta\lambda^{n-1}} e^{\delta\lambda^{n-1}} \leq e^{-2\gamma\lambda^n},$$

requiring

$$(\bar{m} - k)\beta \geq \delta + 2\gamma\lambda, \quad (76)$$

which says that in the λ, β -plane we must be above a line that comes down as $\bar{m}$ is increased.

Combining the first two inequalities we arrive at

$$p_n \leq e^{(k-m)\beta\lambda^{n-1}} (\mu_1 e^{(k-\bar{m})\beta\lambda^{n-2}} r_{n-2} + \mu_2 p_{n-1}^2) \quad r_n \leq 1 + \mu_3 \sum_{j=0}^{n-1} e^{(\bar{k}-\bar{m})\beta\lambda^j} r_j, \quad (77)$$

the constants μ_{123} given by

$$\mu_1 = \underbrace{K_{km}C_{ml}}_C M_1^{lk} \underbrace{K^{k\bar{m}}A_{\bar{m}\bar{k}}}_A, \quad \mu_2 = \frac{1}{2} \underbrace{K_{km}C_{ml}}_C M_2^{lk}, \quad \mu_3 = \underbrace{K_{\bar{k}\bar{m}}A_{\bar{m}\bar{k}}}_{\bar{A}}. \quad (78)$$

12.4 Estimating the increments

Under the assumption that (76) holds, the induction hypotheses for p_{n-1} and r_{n-2} produce the desired inequality for p_n from (77) if

$$(\mu_1 + \mu_2) e^{(k-m)\beta\lambda^{n-1}} e^{-2\gamma\lambda^{n-1}} \leq e^{-\gamma\lambda^n}.$$

Thus we must have

$$\ln(\mu_1 + \mu_2) \leq -(k-m)\beta\lambda^{n-1} + 2\gamma\lambda^{n-1} - \gamma\lambda^n$$

for all $n \geq 2$. As in the case of the standard Newton scheme, this leads to

$$\ln(\mu_1 + \mu_2) \leq \lambda(\gamma(2-\lambda) - (k-m)\beta) \quad \text{with} \quad (k-m)\beta \leq \gamma(2-\lambda), \quad (79)$$

a sharp upper bound for β that we need to stay away from if we don't want to impose that $\mu_1 + \mu_2 \leq 1$.

As sufficient condition for

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n < 1$$

we can use the optimal condition found using Bernoulli's inequality, namely

$$\lambda\gamma(2-\lambda) \leq \ln(e^{\gamma\lambda} - 1). \quad (80)$$

12.5 Estimating the error terms

For the inductive construction of the upper bound for r_n we set

$$b = (\bar{k} - \bar{m})\beta = (k - m)\beta > 0 \quad (81)$$

and conclude from the inequality in (77) that (shifting the index)

$$r_n \leq 1 + \mu_3 \sum_{j=0}^{n-1} e^{b\lambda^j} r_j \leq 1 + \mu_3 \sum_{j=0}^{n-1} e^{b\lambda^j} e^{\delta\lambda^j}$$

in view of the induction assumption for (all) smaller n . Thus we need the inequality

$$1 + \mu_3 \sum_{j=0}^{n-1} e^{(b+\delta)\lambda^j} \leq e^{\delta\lambda^n} \quad (82)$$

for all $n \geq 2$. Recall that we start with $r_0 = 1 \leq e^\delta$ and

$$1 \leq r_1 \leq e^{\delta\lambda} \quad (\text{and also } p_1 \leq e^{\gamma\lambda} \text{ of course}) \quad (83)$$

via a smallness assumptions on q_0 still to be discussed.

Dividing by the right hand side, (82) is equivalent to

$$e^{-\delta\lambda^n} + \mu_3(e^{(b+\delta-\delta\lambda)\lambda^{n-1}} + e^{-\delta\lambda^n} \sum_{j=0}^{n-2} e^{(b+\delta)\lambda^j}) \leq 1 \quad (84)$$

in which we have separated the probably dominant term with $j = n-1$ from the sum. Neglecting the sum in (84) a sufficient (and in any case necessary) condition for the induction step to work for all $n \geq 2$ would be that

$$\ln \mu_3 + (b + \delta - \delta\lambda)\lambda^{n-1} \leq 0 \quad \text{with} \quad b \leq \delta(\lambda - 1), \quad (85)$$

so that in particular we now need to impose two inequalities on b , namely

$$b < \delta(\lambda - 1) \quad \text{and} \quad b < \gamma(2 - \lambda), \quad (86)$$

the latter being the (strict) inequality from (79).

These two bounds severely restrict the bound in (76), which in terms of b becomes

$$\frac{\bar{m} - k}{k - m} b \geq \delta + 2\gamma\lambda, \quad (87)$$

and this does not really depend on how we turn the necessary condition (85) into a sufficient condition, which we do next, rewriting it as

$$e^{-\delta\lambda^n} + \mu_3(e^{(b+\delta-\delta\lambda)\lambda^{n-1}} + \sum_{j=0}^{n-2} e^{(b+\delta-\delta\lambda^{n-j})\lambda^j}) \leq 1.$$

In view of (86) and using Bernoulli's inequality (60) the left hand side is smaller than

$$\begin{aligned} & e^{-\delta\lambda^2} + \mu_3(e^{(b+\delta-\delta\lambda)\lambda} + \sum_{j=0}^{n-2} e^{(b+\delta-\delta\lambda^2)\lambda^j}) < \\ & e^{-\delta\lambda^2} + \mu_3(e^{(b+\delta-\delta\lambda)\lambda} + \sum_{j=0}^{\infty} e^{(b+\delta-\delta\lambda^2)(1+j(\lambda-1))}) < \\ & e^{-\delta\lambda^2} + \mu_3(e^{(b+\delta-\delta\lambda)\lambda} + \frac{e^{b+\delta-\delta\lambda^2}}{1 - e^{(\lambda-1)(b+\delta-\delta\lambda^2)}}), \end{aligned}$$

in which we used that $b + \delta - \delta\lambda^2 < b + \delta - \delta\lambda < 0$. Thus we arrive at

$$e^{-\delta\lambda^2} + \mu_3 e^{(b+\delta-\delta\lambda)\lambda} (1 + \frac{e^{-(b+\delta)(\lambda-1)}}{1 - e^{(\lambda-1)(b+\delta-\delta\lambda^2)}}) \leq 1 \quad (88)$$

Note that the first term on the right hand side of (60) is essential here. Without this first term the numerator, which is the first term ($j = 0$) in the geometric series, would be 1 and we be stuck, as there would be no way to get a statement without an a priori bound on μ_3 . We note that in [KP] the proof is without the 1 in (60) but an accidental mistake of computing the series with $j = 1$ as the first term “allows” to conclude. Technically speaking that proof is incorrect⁵.

The quickest way to finish is to estimate the sum of the geometric series by a fixed constant, rewriting it as

$$\frac{e^{-s}}{1 - e^{s-S}} = \frac{e^S}{e^s(e^S - e^s)}$$

with

$$s = (b + \delta)(\lambda - 1) \leq \delta\lambda(\lambda - 1) = s_0 < S = \delta\lambda^2(\lambda - 1).$$

Provided

$$2e^{s_0} \leq e^S \quad \text{or} \quad \ln 2 \leq \delta\lambda(\lambda - 1)^2,$$

⁵ And it is not a proof of the theorem actually stated.

this expression is monotone decreasing in s on $[0, s_0]$ and thus

$$\frac{e^{-(b+\delta)(\lambda-1)}}{1 - e^{(\lambda-1)(b+\delta-\delta\lambda^2)}} \leq \frac{1}{1 - e^{-\delta(\lambda-1)\lambda^2}} \leq 2.$$

We conclude that

$$e^{-\delta\lambda^2} + 3\mu_3 e^{(b+\delta-\delta\lambda)\lambda} \leq 1 \quad \text{suffices if} \quad \ln 2 \leq \delta\lambda(\lambda-1)^2, \quad (89)$$

and the first inequality in (89) certainly holds if it holds with the first exponential replaced by the larger second exponential. Thus we arrive at

$$\ln(1 + 3\mu_3) \leq \lambda(\delta(\lambda-1) - b) \quad \text{and} \quad \ln 2 \leq \delta\lambda(\lambda-1)^2 \quad (90)$$

as the final condition needed.

12.6 Sufficient conditions for a convergence result

Summing up, with the condition on q_0 still to be imposed we arrive at

$$\lambda\gamma(2-\lambda) \leq \ln(e^{\gamma\lambda} - 1), \quad (91)$$

$$\ln 2 \leq \delta\lambda(\lambda-1)^2, \quad (92)$$

$$(\bar{m} - k)\beta \geq \delta + 2\gamma\lambda, \quad (93)$$

$$(k - m)\beta < \gamma(2 - \lambda) \quad \text{and} \quad (\bar{k} - \bar{m})\beta < \delta(\lambda - 1) \quad (94)$$

as conditions on the parameters that we still have to choose.

The first inequality, (91), is to have the sum of the increments, and thereby the solution, bounded by 1 in the l -norm. Of course it can be replaced by just asking that

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\gamma\lambda^n} \leq 1.$$

The second, (92), was a technical condition to bound the sum of the geometric series in (88) by 2. The third, (93), allows to bound the error term in estimate (74) for q_n by the bound on p_n^2 that has to be established. It involves the choice of sufficiently large $\bar{m}$ and $\bar{k}$ with $\bar{k} - \bar{m} = k - m$.

The last two conditions are strict inequalities that have to be chosen sufficiently strict depending on the constants related to f , to allow for an inductive proof of the desired estimates (72) for p_n and r_n . Thus, given μ_1, μ_2, μ_3 , we need to choose $1 < \lambda < 2$ and $\gamma, \beta, \delta > 0$ such that

$$\lambda(\gamma(2 - \lambda) - (m - k)\beta) \geq \ln(\mu_1 + \mu_2); \quad (95)$$

$$\lambda(\delta(\lambda - 1) - (\bar{m} - \bar{k})\beta) \geq \ln(1 + 3\mu_3). \quad (96)$$

After a simultaneous rescaling of γ, β, δ , this is always possible once the first 5 conditions are satisfied. The inequalities in (94) being strict is essential for convergence of Nash' modified Newton scheme.

Of course we still have to formulate the necessary sufficient bound on $q_0 = \|f(0)\|_l$, given the constants in (78) and the choice of parameters above. Recall that

$$\mu_1 + \mu_2 = \underbrace{K_{km}C_{ml}}_C (M_1^{lk} \underbrace{K^{k\bar{m}}A_{\bar{m}\bar{k}}}_A + \frac{1}{2}M_2^{lk}) = C(M_1A + \frac{1}{2}M_2)$$

and

$$\mu_3 = K_{\bar{k}\bar{m}}A_{\bar{m}\bar{k}} = \bar{A},$$

with $C, M_1, M_2, A, \bar{A}$ constants related to f and the smoothing operators. From here on we drop the superscripts from the bounds M_1 and M_2 on the first and second derivative of $f : C^k \rightarrow C^l$.

12.7 Sufficient condition on initial value for convergence

Finally we examine the initial inequalities we need. For p_1 we need, since $u_0 = 0$, that

$$p_1 = \|u_1\|_k = \|S_0\|_{km} \|L(0)\|_{ml} \|f(0)\|_l \leq e^{(k-m)\beta} \underbrace{K_{km}C_{ml}}_C \|f(0)\|_l \leq e^{-\gamma\lambda},$$

while via

$$\|u_1\|_{\bar{k}} \leq \|S(0)\|_{\bar{k}m} \|L(0)\|_{ml} \|f(0)\|_l \leq K_{\bar{k}m} e^{(\bar{k}-m)\beta} C_{ml} \|f(0)\|_l \leq e^{\delta\lambda}$$

we need

$$1 + \underbrace{K_{\bar{k}m}C_{ml}}_{\bar{C}} e^{(\bar{k}-m)\beta} \|f(0)\|_l \leq e^{\delta\lambda}$$

for r_1 . Thus

$$Cq_0 \leq e^{-(k-m)\beta} e^{-\gamma\lambda} \quad \text{and} \quad \bar{C}q_0 \leq e^{-(\bar{k}-m)\beta} (e^{\delta\lambda} - 1) \quad (97)$$

are sufficient conditions on

$$q_0 = \|f(0)\|_l$$

to have a solution of $f(u) = 0$ with $\|u\|_k < 1$, once the parameters have been chosen according to Section 12.6 to make the induction steps work in the proof of the desired estimates (72) for p_n and r_n .

12.8 The optimal choice of parameters

At this point we compare (95) and (96) to (52). The strict inequalities in (94) are really strict in the sense that the gaps have to be taken sufficiently large large given the explicit constants related to f and $S(t)$. The other two inequalities are not strict. Recalling that $k - m = \bar{k} - \bar{m}$, the coefficient

$$\frac{\bar{m} - k}{k - m} = \frac{\bar{m} - m}{k - m} - 1 = \frac{\bar{m} - m}{\bar{k} - \bar{m}} - 1 = \frac{\bar{k} - k}{k - m} - 1 = N - 1 \quad (98)$$

has to be sufficiently large for the set of allowable b , as defined by (81), to be nonempty. Note that in Nash' strategy to get around the ill-posedness of Newton's method, (61) is the natural definition of N as the ratio of the required increase of smoothness by $\bar{k} - k$ to the loss of smoothness by $m - k$ in $u \rightarrow L(u)f(u)$.

The minimal largeness condition on N is obtained by taking the right hand sides of the inequalities in (94) equal to one another, so as to maximize the allowable upper bound for β . Thus we choose $1 < \lambda < 2$ such that

$$\gamma(2 - \lambda) = \delta(\lambda - 1) \quad \text{whence} \quad \lambda = \frac{2\gamma + \delta}{\gamma + \delta} \quad (99)$$

and (93,94) become

$$\frac{4\gamma^2 + 3\gamma\delta + \delta^2}{\gamma + \delta} \leq (N - 1)b < (N - 1)\frac{\gamma\delta}{\gamma + \delta} \quad (100)$$

for

$$b = (k - m)\beta = (\bar{k} - \bar{m})\beta$$

in terms of γ, δ, N , subject to (91,92) which reduce to

$$e^{\frac{2\gamma+\delta}{\gamma+\delta} \frac{\delta}{\gamma+\delta}} + 1 \leq e^{\gamma \frac{2\gamma+\delta}{\gamma+\delta}} \quad \text{and} \quad \ln 2 \leq \delta \frac{2\gamma+\delta}{\gamma+\delta} \left(\frac{\gamma}{\gamma+\delta} \right)^2. \quad (101)$$

In particular (100) requires

$$N > \frac{4\gamma}{\delta} + 4 + \frac{\delta}{\gamma} \geq 8, \quad (102)$$

the minimum 8 being realised by

$$\delta = 2\gamma. \quad (103)$$

The further choice of parameters depends on the constants which are as indicated in (78), at the end of Section 12.6 and in (97):

$$C = K_{km}C_{ml}; \quad \bar{C} = K_{\bar{k}\bar{m}}C_{ml}; \quad A = K^{k\bar{m}}A_{\bar{m}\bar{k}}; \quad \bar{A} = K_{\bar{k}\bar{m}}A_{\bar{m}\bar{k}}; \quad (104)$$

$$\mu_1 + \mu_2 = C(M_1A + \frac{1}{2}M_2); \quad \mu_3 = \bar{A}. \quad (105)$$

We collect these constants in one single constant Θ as

$$\Theta = \frac{3}{4} \max(\ln C + \ln(M_1A + \frac{1}{2}M_2), \ln(1 + 3\bar{A})) \quad (106)$$

and, depending on N , the remaining parameters γ, b have to be chosen to control these constants via

$$\Theta \leq \frac{2\gamma}{3} - b \quad (107)$$

and

$$\frac{14\gamma}{3} \leq (N-1)b < \frac{2\gamma}{3}(N-1), \quad e^{\frac{8}{9}} + 1 \leq e^{\frac{4\gamma}{3}}, \quad \ln 2 \leq \frac{8\gamma}{27}, \quad (108)$$

which is (100,101) with $\delta = 2\gamma$. The last inequality now implies the one preceding it.

For the initial condition q_0 we arrive via (99) at

$$Cq_0 \leq e^{-\gamma \frac{2\gamma+\delta}{\gamma+\delta}} e^{-b} \quad \text{and} \quad \bar{C}q_0 \leq (e^{\delta \frac{2\gamma+\delta}{\gamma+\delta}} - 1)e^{-(\bar{k}-m)\beta} = \\ (e^{\delta \frac{2\gamma+\delta}{\gamma+\delta}} - 1)e^{-(\bar{k}-\bar{m})\beta} e^{-(\bar{m}-m)\beta} = (e^{\delta \frac{2\gamma+\delta}{\gamma+\delta}} - 1)e^{-(N+1)b},$$

so that with $\delta = 2\gamma$ the conditions on q_0 reduce to

$$Cq_0 \leq e^{-\frac{4\gamma}{3}} e^{-b} \quad \text{and} \quad \bar{C}q_0 \leq (e^{\frac{8\gamma}{3}} - 1)e^{-(N+1)b}. \quad (109)$$

Setting

$$\rho = \frac{2\gamma}{3}$$

we arrive at

$$\Theta \leq \rho - b, \quad 7\rho \leq (N-1)b, \quad \rho \geq \frac{9}{4} \ln 2,$$

$$\ln C + \ln q_0 \leq -2\rho - b, \quad \ln \bar{C} + \ln q_0 \leq \ln 80 - (N+1)b,$$

as sufficient conditions. Note that we have used the lower bound for ρ to relax the bound on $\bar{C}q_0$.

Choosing

$$N > 8 \quad \text{and} \quad \rho = \frac{N-1}{7}b$$

and using the last lower bound for ρ we arrive at

$$b \geq \max\left(\frac{63}{4} \frac{\ln 2}{N-1}, \frac{7\Theta}{N-8}\right) \quad \text{and} \quad q_0 \leq \min\left(\frac{1}{C}e^{-\frac{2N+5}{7N}b}, \frac{80}{\bar{C}}e^{-(N-1)b}\right) \quad (110)$$

as sufficient conditions, to be used as: given Θ choose $N > 8$ and $b = (k-m)\beta$ sufficiently large to make the condition on q_0 follow and thereby obtain a solution of $f(u) = 0$ with $\|u\|_k < 1$.

12.9 Continuity

Given the constants related to f and the smoothing operators we constructed a solution in the open unit k -ball, that is, with $\|u\|_k < 1$. We did not prove or state that the solution is unique, but it is well defined as the limit of an explicitly constructed sequence shown to be convergent if $\|f(0)\|_k$ is sufficiently small. The following issue relates to the continuity of the inverse function of f , if it were to exist, since we should naturally also ask for a condition $\|f(0)\|_k$ guaranteeing the constructed solution to have $\|u\|_k \leq \varepsilon$. This only changes the condition on the sum of the increments and leads to

$$\gamma\lambda(2-\lambda) \leq \ln\left(e^{\gamma\lambda} - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

leading to

$$\Theta \leq \frac{2\gamma}{3} - b, \quad \frac{14\gamma}{3} \leq (N-1)b < \frac{2\gamma}{3}(N-1), \quad e^{\frac{8}{9}} + \frac{1}{\varepsilon} \leq e^{\frac{4\gamma}{3}}, \quad \ln 2 \leq \frac{8\gamma}{27},$$

in stead of (107,108). The conditions on γ rewrite as

$$\gamma \geq \max\left(\frac{3}{4} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon} + e^{\frac{8}{9}}\right), 2^{\frac{27}{8}}\right) \sim \varepsilon^{-\frac{3}{4}}$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$. This forces a larger choice of b and thereby via (109) a smaller (exponentially small in terms of ε in fact) bound on q_0 for the Nash scheme

to converge within the ball of k -radius ε , as was to be expected of course. The fact that the limit u is a solution of $f(u) = 0$ is immediate from (74).

Note that for the standard Newton method the constructed solution of $f(u) = 0$ will have $\|u\| < \varepsilon$ if we take equalities in (59) and replace the -1 by $-\frac{1}{\varepsilon}$. The upper bound $\bar{P}$ than has to be replaced by $\bar{P}_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{1+\mu\varepsilon}$ and the condition on q_0 becomes $q_0 \leq C\bar{P}_\varepsilon$.