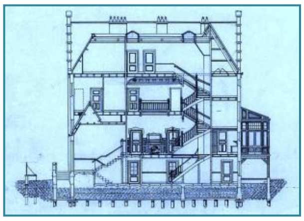
VOETSTUK VAN DE PABO



Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo

Eindversie, 3 juli 2009

Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo
Inhoudsopgave

Leeswijzer Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo

Opdracht
De HBO-Raad is in september 2008 met de staatssecretaris van onderwijs, mw. Marja van Bijsterveldt, overeengekomen dat de sector gedurende het studiejaar 2008-2009 kennisbases voor de vakken taal en rekenen-wiskunde ontwikkelt ten behoeve van de lerarenopleidingen voor het primair onderwijs. Voor de opleidingen gericht op het voortgezet en middelbaar beroepsonderwijs betreft het zeventien vooral theoretische vakken waarvoor een tweedegraads bevoegdheid kan worden gehaald. Overige vakken die een rol spelen in beide soorten lerarenopleidingen komen pas in een volgende fase (2009-2010) aan bod.
De HBO-Raad heeft destijds de uitdaging opgepakt onder de titel “Werken aan Kwaliteit” en daarbinnen zijn twee deelprojecten onderscheiden. De ontwikkeling van kennisbases voor de vakken Nederlandse taal en rekenen-wiskunde voor de lerarenopleidingen primair onderwijs valt onder het deelproject dat bekend staat als “Voetstuk van de Pabo”. Het expertisecentrum voor rekenen en wiskunde Elwier is aangezocht om de kennisbasis voor rekenen-wiskunde te ontwikkelen, daarin bijgestaan door deskundigen uit de wereld van de pabo’s, universiteiten en onderwijsondersteunende instellingen. Dank zij hun medewerking kan een gelegitimeerde kennisbasis worden aangeboden.
De bemensing van het ontwikkelteam bij Elwier heeft uit experts bestaan die zelf lesgeven in het vak rekenen-wiskunde op de pabo. Daardoor staat het eindproduct dicht bij de doelstellingen van de opleidingen. Dit is overeenkomstig de adviezen van de commissies Dijsselbloem over de onderwijsvernieuwingen en Meijerink over de doorlopende leerlijnen voor taal en rekenen. Daarin klinkt indringend de aanbeveling door om direct betrokkenen tot trekkers te maken van belangrijke onderwijsontwikkelingen. Het gaat dan juist om de professionals uit de onderwijsinstellingen en minder om politici, ambtenaren en externe experts.

Leeswijzer
Deze leeswijzer ondersteunt in kort bestek de lezer die op korte of lange afstand staat van de lerarenopleidingen. De leeswijzer plaatst de erin opgenomen kennisbases in het perspectief van de opleiding waarvoor hij werd opgesteld. Tevens verklaart de leeswijzer welke bijdrage de kennisbasis levert aan het palet van kennis en kunde waarover de vakbekwame leraar bij de start van de beroepsuitoefening moet beschikken. Ook de toetsing van de kennisbasis komt ter sprake in relatie tot het afstudeerprogramma waarmee iedere student te maken heeft. Ten slotte volgt een toelichting op de inhoud van het rapport.

Kennisbasis en bekwaamheid
De Wet op de Beroepen in het Onderwijs (Wet BIO, 1 augustus 2006) bindt de lerarenopleidingen aan de bekwaamheidseisen die gesteld mogen worden aan de startende leraar. De wet legt daarmee een verband met de competenties waarover een startbekwame leraar moet beschikken. Competenties omvatten kennis, vaardigheden en attitudes.
De lerarenopleidingen hebben in het project “Werken aan Kwaliteit” landelijk geldende kennisbasisbeschrijvingen gemaakt die de drie componenten omvatten: kennis, vaardigheden en attitudes. Deze kennisbases hebben betrekking op het schoolvak en de bijbehorende vakdidactiek in een competentiegerichte opleidingsstructuur.
Het beheersen van de kennisbasis geeft aan dat een student voldoende feitelijke en theoretische kennis van het vak en de vakdidactiek paraat heeft en de vaardigheden bezit om deze kennis in de diversiteit van de beroepspraktijk te hanteren. Boven deze voor alle studenten geldende kennisbasis verwerven studenten in lokale differentiaties en specialisaties een surplus aan vakkennis.

De plaats van het vak in de opleiding

De Onderwijsraad adviseert dat vakkennis vijftig procent van de studietijd in beslag moet nemen. Dat getal wordt in alle opleidingen ruimschoots gehaald. In de dynamiek van het geïntegreerd opleiden kan men een voor alle opleidingen geldende onderverdeling niet anders dan globaal aangeven.
De lerarenopleidingen voor het primair onderwijs moeten de bovengenoemde vakgerichte opleidingstijd verdelen over een twaalftal, al dan niet geclusterde vakken. De helft hiervan is op zijn beurt weer gereserveerd voor de vakken Nederlandse taal en rekenen-wiskunde. Nadrukkelijk moet hierbij worden aangetekend dat de kennisbasis van de schoolvakken niet het enige terrein vormt waarop feitelijke en theoretische kennis, vaardigheden en beroepshoudingen moeten worden verworven. Het competentiemodel voor de startbekwame leraar waaraan in de Wet BIO wordt gerefereerd omvat zeven domeinen die ieder hun eigen kenniscomponenten kennen. De student zal zich die kennis ook eigen moeten maken.

Kennisbasis en afstuderen

Landelijk is van belang dat lerarenopleidingen afgerekend kunnen worden op een duidelijke, gelegitimeerde, bestuurlijk vastgestelde, en voor ieder verifieerbare kennisbasis van alle schoolvakken. Dat vereist een geobjectiveerd controleerbaar systeem van landelijke kennistoetsen dat de lerarenopleidingen gezamenlijk in stand houden en dat in de periodieke accreditatieprocedures voor de opleidingen kan worden geijkt. Op 25 mei 2009 bracht de Onderwijsraad een advies uit met betrekking tot landelijke toetsing van de kennisbasis dat goeddeels in deze lijn ligt. Een robuuste digitale toetsinfrastructuur maakt het straks voor iedere opleider mogelijk zijn student(en) de maat te nemen op het moment dat de opleiding daarvoor in de Onderwijs- en Examenregeling (OER) heeft aangewezen. Vakkennis alleen maakt nog geen goede leraar. De kennistoetsen vormen geen eindtoets en kunnen bijvoorbeeld al in het tweede of derde jaar van de opleiding worden afgesloten. Een eindassessment, gestoeld op solide dossiervorming, bepaalt of de kandidaat naast kennis alle overige leraarcompetenties in huis heeft. Het halen van een voldoend resultaat bij de kennistoets zal een voorwaarde zijn voor het afsluiten van de opleiding door middel van het eindassessment. De kennistoets wordt toegevoegd aan het dossier dat aan het eindassessment ten grondslag ligt. Dit dossier omvat de bewijslast voor alle kenniscomponenten, vaardigheden en competenties waarover de startbekwame leraar moet beschikken.

Studeerbaarheid en vervolgtrajecten

De kennisbasis vastleggen en legitimeren in de wereld van de opleidingen zelf, de wetenschap en uiteraard werkveld en beroepsgroep is een eerste stap. Deze stap is in Voetstuk van de Pabo voor de vakken rekenen-wiskunde en Nederlandse taal in 2008-2009 gezet. Vervolgstappen zijn te verdelen over drie terreinen. Allereerst gaat het om de implementatie van deze kennisbases, hetgeen betekent dat in ieder van de pabo's de positie van de kennisbasis in het curriculum moet worden verankerd en gelegaliseerd, via OER, studiegids en door middel van een algemeen toegankelijke digitale versie. Daarbij moet het punt van de studeerbaarheid zorgvuldig verdisconteerd worden. Dat heeft betrekking op zowel de inhoudelijke omvang als ook op de samenhang met de andere vakken. Landelijk kan dit proces door middel van onderzoek, studiedagen en feedbackrondes gefaciliteerd worden. Looptijd is hierbij 2009-2011. In de implementatiefase kan verder gewerkt worden aan de harmonisatie van structuur en beschrijving van de kennisbasis overeenkomstig het genoemde advies van de Onderwijsraad van 25 mei 2009 (p.22).
Ten tweede moet, zoals hierboven vermeld is, de landelijke toetsing van deze kennisbasis geregeld worden. Dat betekent de opbouw van een digitale toetsinfrastructuur en parallel daaraan de ontwikkeling van een toetsitembank. Proeftoetsen zijn voorzien voor het jaar 2010-2011.
Ten slotte is er een vervolgproject nodig om in 2009-2010 ook voor de overige vakken die op de pabo's gegeven worden een kennisbasis te ontwikkelen.

Het gaat om drie majeure bewegingen die in 2009-2010 gelijktijdig worden ingezet.

Verder lezen
In het projectverloop hebben enkele bronnen aan de discussie rondom inhoud en raamwerk van de kennisbasis richting gegeven. Dit zijn een studie van de open universiteit, Carla van Cauwenberghe (ed), “Kennis in de steigers”, en een artikel “De vakkennis van de leraar; kennisvereisten op het gebied van de onderwijsinhoud” van Frank Jansma, Gerard van den Hoven, Marko Otten en Dirk van der Veen. Daarin hebben zij de plaats van de kennisbasis in de opleiding en de beroepspraktijk nader uitgewerkt. Het artikel legt ook het verband met het kwaliteitsvergelijkende instrumenten zoals het Europese Kwalificatiekader (EKK) en de Dublin Descriptoren voor het HBO. Het artikel is als bijlage 3 toegevoegd aan de kennisbasis. Bij de kennisbasis hoort ook een legitimatierapport waarin is vastgelegd op welke wijze vakgenoten en andere deskundigen binnen en buiten de wereld van de pabo over de kennisbasis hebben geoordeeld.

Inhoud
De kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo bestaat uit vier hoofdstukken. Voor wie in kort bestek kennis wil nemen van de kern van de kennisbasis, de domeinen en kernconcepten (de laatst genoemde worden ook wel aangeduid met het begrip kenniselementen):

1. Kennisbasis rekenen-wiskunde kort: de domeinen en kernconcepten.

Er is een hoofdstuk voor wie geïnteresseerd is in de reikwijdte van de kennisbasis op het terrein van de vaardigheden. In dat gedeelte worden vensters geopend op de kennisbasis vanuit de referentieniveaus voor rekenen in de rapportage van de Expertgroep van de Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen, (Commissie Meijerink), verschenen februari 2008, en in de bijstelling hiervan die dezelfde commissie heeft aangebracht onder de titel “Een nader beschouwing; over de drempels met taal en rekenen”, juni 2009:

2. Kennisbasis en de referentieniveaus rekenen van de Commissie Meijerink.

De beide volgende hoofdstukken zijn echt gericht op het volledige kenniscorpus voor het vak rekenen-wiskunde op de pabo:

3. een toelichting en verantwoording van de opstellers met vakspecifieke opmerkingen over totstandkoming, gekozen opbouw en bronnen.
4. de kennisbasis; uitwerkingen voor vak en vakdidactiek waarin opgenomen definities en beschrijvingen, (wetenschappelijke) bronnen, praktijkvoorbeelden.

Ten slotte sluiten een drietal bijlagen het document af waaronder aanwijzingen voor gebruik, aanbevelingen voor het vervolg, schema van de kennisbasis en een artikel over verbanden tussen vakkennis, competenties en kwalificatiekaders.

3 juli 2009

Marko Otten
projectleider Voetstuk van de Pabo; kennisbases taal en rekenen-wiskunde voor de pabo

Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo
Colofon

Stuurgroep Voetstuk van de Pabo:
Dominique Hoozemans, voorzitter (Hogeschool Leiden, vz. LOBO)
Maarten Denters (Hogeschool Ipabo Amsterdam-Alkmaar)
Jozef Kok (extern adviseur, oud-lector Fontys Hogescholen)
Margreet Verbunt (Pabo Fontys Hogescholen te Den Bosch)

Ambtelijk secretaris Stuurgroep Voetstuk van de Pabo:
Henk Verheijde

Elwier Ontwikkelteam kennisbasis:
Marc van Zanten, voorzitter (Elwier, pabo Hogeschool Edith Stein)
Frits Barth (Elwier, pabo Hogeschool Stenden)
José Faarts (Elwier, pabo Hogeschool Zuyd)
Anneke van Gool (Elwier, vh. pabo Fontys Hogescholen)
Ronald Keijzer (Elwier, Hogeschool Ipabo)

Legitimatie:

A. Interne consultatie
Lobo, regulier directeurenoverleg van de lerarenopleidingen voor het basisonderwijs
Resonansgroep van vakexperts uit verschillende pabo's
Vakgroepleiders van de vakgroepen Nederlandse taal uit de pabo's

B. Consultatie externe vakgenoten
Gert Gelderblom (voorzitter Expertisecentrum rekenen, PO-Raad)
Drs. Kees Hoogland (APS)
Prof. Dr. Joost Klep (Justus Liebig Universität, Giessen D)
Prof. Dr. Anne van Streun (Rijksuniversiteit Groningen),
Dr. Jaap Vedder (vh inspecteur, pabodirecteur, PO-bestuurder, vz. Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs)
Prof. Dr. Lieven Verschaffel (Katholieke Universiteit Leuven B)
Prof. Dr. Bert Zwaneveld (Ruud de Moor Centrum/OU)

C: Consultatie experts algemeen
Drs. Carla van Cauwenberghe, Jos Kusters Msm, Prof. Dr. Rob Martens (Ruud de Moor Centrum/OU)
Dr. Cor Sluijter, Drs. Jeanine Treep en Drs. Jan Wiegers (CITO)
Prof. Dr. Jos Letschert (Universiteit Twente, SLO)
Dr. Kees Vreugdenhil (Vreugdenhil Onderwijsontwikkeling, lid van accreditatiepanels vbi's)
Frank Jansma, Edith van Montfort (SBL).

Projectleider Voetstuk van de Pabo:
Marko Otten (Marko Otten Advies & Ad Interim)

De kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo
Overzicht van domeinen en kernconcepten

I. Globale theorie

1. Globale theorie rekenen-wiskunde en didactiek
1.1. Doelen van het vakgebied rekenen-wiskunde op de basisschool
- 1.1.1. Gecijferdheid
- 1.1.2. Kerndoelen, tussendoelen en referentieniveaus

1.2. Leerprocessen bij rekenen-wiskunde
- 1.2.1. Mathematiseren en formaliseren
- 1.2.2. Automatiseren en memoriseren
- 1.2.3. Taal en betekenisverlening

1.3. Vakdidactiek rekenen-wiskunde
- 1.3.1. Vakdidactische noties van realistisch reken-wiskundeonderwijs
- 1.3.2. Nuanceringen en kanttekeningen bij realistisch reken-wiskundeonderwijs
- 1.3.3. Omgaan met verschillen bij rekenen-wiskunde
- 1.3.4. Oefenen en onderhouden
- 1.3.5. Historisch perspectief

II. Domeinbeschrijvingen

2. Hele getallen
2.1. Maatschappelijke relevantie van hele getallen
2.2. Kennis van hele getallen
- 2.2.1. Betekenis van hele getallen
- 2.2.2. Kenmerken van het getalsysteem
- 2.2.3. Redeneren en rekenen met hele getallen
- 2.2.3A. Eigenschappen van bewerkingen
- 2.2.3B. Schattend rekenen
- 2.2.3C. Cijferend rekenen
- 2.2.3D. Gebruik van de rekenmachine
- 2.2.4. Wiskundetaal bij (hele) getallen

2.3. Kennis voor onderwijzen van hele getallen: getallen en getalrelaties
- 2.3.1. Contextgebonden handelen en redeneren bij getallen en getalrelaties
- 2.3.2. Objectgebonden handelen en redeneren bij getallen en getalrelaties
- 2.3.3. Niveauverhoging bij getallen en getalrelaties

2.4. Kennis voor onderwijzen van hele getallen: (elementair) hoofdrekenen
- 2.4.1. Contexten en toepassingssituaties bij (elementair) hoofdrekenen
- 2.4.2. Modellen en schema’s bij (elementair) hoofdrekenen
- 2.4.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij (elementair) hoofdrekenen

2.5. Kennis voor onderwijzen van hele getallen: standaardprocedures waaronder cijferen
- 2.5.1. Contexten en toepassingssituaties bij standaardprocedures waaronder cijferen
- 2.5.2. Modellen en schema’s bij standaardprocedures waaronder cijferen
- 2.5.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij standaardprocedures waaronder cijferen

2.6. Kennis voor onderwijzen van hele getallen: schattend rekenen

2.6.1. Contexten en toepassingssituaties bij schattend rekenen
2.6.2. Modellen en schema’s bij schattend rekenen
2.6.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij schattend rekenen
2.7. Kennis voor onderwijzen van (hele) getallen: gebruik van de rekenmachine
2.8. Verstrengeling en samenhang bij hele getallen
2.8.1. Verstrengeling van hele getallen met andere reken-wiskundedomeinen
2.8.2. Gebruik van hele getallen bij andere vak- en vormingsgebieden

3. Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen
3.1. Maatschappelijke relevantie van verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen
3.2. Verstrengeling en samenhang verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen
3.2.1. Standaardisering
3.2.2. Relatieve en absolute gegevens
3.2.3. (Getals)relaties tussen verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen

3A. Verhoudingen
3A.1. Maatschappelijke relevantie van verhoudingen
3A.2. Kennis van verhoudingen
3A.2.1. Betekenis van verhoudingen
3A.2.2. Redeneren en rekenen met verhoudingen
3A.2.3. Wiskundetaal bij verhoudingen
3A.3. Kennis voor onderwijzen van verhoudingen
3A.3.1. Contexten en toepassingssituaties bij verhoudingen
3A.3.2. Modellen en schema’s bij verhoudingen
3A.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij verhoudingen
3A.4. Verstrengeling en samenhang bij verhoudingen
3A.4.1. Verstrengeling van verhoudingen met andere reken-wiskundedomeinen
3A.4.2. Gebruik van verhoudingen bij andere vak- en vormingsgebieden

3B. Procenten
3B.1. Maatschappelijke relevantie van procenten
3B.2. Kennis van procenten
3B.2.1. Betekenis van procenten
3B.2.2. Redeneren en rekenen met procenten
3B.2.3. Wiskundetaal bij procenten
3B.3. Kennis voor onderwijzen van procenten
3B.3.1. Contexten en toepassingssituaties bij procenten
3B.3.2. Modellen en schema’s bij procenten
3B.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij procenten
3B.4. Verstrengeling en samenhang bij procenten
3B.4.1. Verstrengeling van procenten met andere reken-wiskundedomeinen
3B.4.2. Gebruik van procenten bij andere vak- en vormingsgebieden

3C. Breuken
3C.1. Maatschappelijke relevantie van breuken
3C.2. Kennis van breuken
3C.2.1. Betekenis van breuken
3C.2.2. Gelijkwaardigheid van breuken

3C.2.3. Redeneren en rekenen met breuken
3C.2.4. Wiskundetaal bij breuken
3C.3. Kennis voor onderwijzen van breuken
3C.3.1. Contexten en toepassingssituaties bij breuken
3C.3.2. Modellen en schema's bij breuken
3C.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij breuken
3C.4. Verstrengeling en samenhang bij breuken
3C.4.1. Verstrengeling van breuken met andere reken-wiskundedomeinen
3C.4.2. Gebruik van breuken bij andere vak- en vormingsgebieden

3D. Kommagetallen
3D.1. Maatschappelijke relevantie van kommagetallen
3D.2. Kennis van kommagetallen
3D.2.1. Betekenis van kommagetallen
3D.2.2. Gelijkwaardigheid van kommagetallen
3D.2.3. Redeneren en rekenen met kommagetallen
3D.2.4. Wiskundetaal bij kommagetallen
3D.3. Kennis voor onderwijzen van kommagetallen
3D.3.1. Contexten en toepassingssituaties bij kommagetallen
3D.3.2. Modellen en schema's bij kommagetallen
3D.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kommagetallen
3D.4. Verstrengeling en samenhang bij kommagetallen
3D.4.1. Verstrengeling van kommagetallen met andere reken-wiskundedomeinen
3D.4.2. Gebruik van kommagetallen bij andere vak- en vormingsgebieden

4. Meten
4.1. Maatschappelijke relevantie van meten
4.2. Kennis van meten
4.2.1. Meethandelingen
4.2.2. Meetinstrumenten
4.2.3. Het metriek stelsel
4.2.4. Meet(on)nauwkeurigheid
4.2.5. Grootheden en maten
4.2.6. Wiskundetaal bij meten
4.3. Kennis voor onderwijzen van meten
4.3.1. Ordenen en vergelijken bij meten
4.3.2. Meten met een natuurlijke maat
4.3.3. Standaardmaten en referenties
4.3.4. Voorvoegsels en relaties tussen maten
4.3.5. Metriek stelsel en begrip
4.4. Verstrengeling en samenhang bij meten
4.4.1. Verstrengeling van meten met andere reken-wiskundedomeinen
4.4.2. Gebruik van meten bij andere vak- en vormingsgebieden

5. Meetkunde
5.1. Maatschappelijke relevantie van meetkunde
5.2. Kennis van meetkunde
5.2.1. Ervaren bij meetkunde
5.2.2. Verklaren bij meetkunde
5.2.3. Verbinden bij meetkunde

De kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo
De kennisbasis en de referentieniveaus

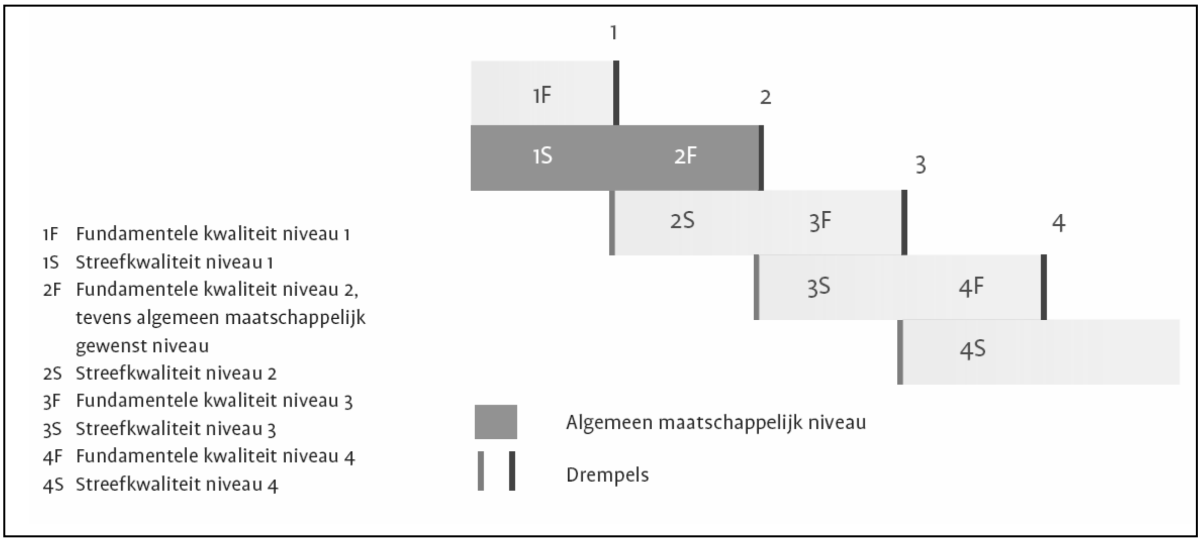
Inleiding
Het verwerven van kennis uit de kennisbasis rekenen-wiskunde is geen doel op zich. Het gaat er om wat een startbekwame leerkracht kán met deze kennis, namelijk deze kennis inzetten bij het realiseren van reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Het geheel aan reken-wiskundige kennis, vaardigheden en inzichten van een (startbekwame) leerkracht wordt aangeduid met het begrip *professionele gecijferdheid*. Het gaat hierbij om (zie ook de *Toelichting en verantwoording*):

- Het zelf beschikken over voldoende rekenvaardigheid en gecijferdheid.
- Rekenen-wiskunde betekenis kunnen geven voor kinderen.
- Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kinderen kunnen realiseren.
- Wiskundig denken van kinderen kunnen bevorderen.

Over rekenen in het funderend onderwijs en de lerarenopleidingen heeft de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008a; 2008b; 2009) referentieniveaus geformuleerd. In dit hoofdstuk wordt gedetailleerd aangegeven hoe de door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen onderscheiden referentieniveaus rekenen in de kennisbasis zijn verwerkt.

De kennisbasis en de referentieniveaus rekenen
De Expertgroep Doorlopende Leerlijnen onderscheidt vier referentieniveaus voor taal en rekenen in de schoolloopbaan; einde basisonderwijs (niveau 1), eind vmbo bb/kb / mbo 1/2 (niveau 2), eind havo / mbo 4 (niveau 3) en eind VWO (niveau 4). Bij elk niveau wordt een fundamenteel niveau (F) en een streefniveau (S) onderscheiden. Niveau 2F duidt het algemeen maatschappelijk gewenst niveau aan. Niveau 3S is voor rekenen slechts ten dele geoperationaliseerd, vanwege de differentiële doelen die op dit niveau gelden, bijvoorbeeld voor technische opleidingen en pabo (2008b, pg. 25). Niveau 4 is voor rekenen-wiskunde – in tegenstelling tot voor taal - in het geheel niet gespecificeerd, omdat “rekenen op dat niveau helemaal in meer geavanceerde wiskunde is opgegaan” (2008b, pg. 23).

De Expertgroep Doorlopende Leerlijnen beveelt aan de referentieniveaus op te nemen in de bekwaamheidseisen voor de lerarenopleidingen (2008a, pg. 65). Anders dan bij taal, kan daarbij dus niet worden verwezen naar referentieniveau 4. Dit levert voor de kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo geen probleem op, want voor het kunnen realiseren van rekenen-wiskunde in het basisonderwijs, gaat het niet om beheersing van geavanceerde wiskunde – wat iets wezenlijk anders is dan rekenen-wiskunde op de basisschool – maar om geavanceerde beheersing van de reken-wiskundeinhouden van de basisschool (vergelijk National Mathematics Advisory Panel, 2008). Voor het kunnen verzorgen van reken-wiskundeonderwijs in het basisonderwijs gaat het bijvoorbeeld om “making mathematical sense of student work and choosing powerful ways of representing the subject so that it is understandable to students” (Ball e.a., 2008, pg. 404). De Expertgroep Doorlopende Leerlijnen formuleert het als volgt: “Om als leraar leerlingen in hun leerproces op weg te helpen, is het noodzakelijk dat hij/zij diepgaande kennis heeft van de vakinhoud, maar ook van manieren om die vakinhoud op verschillende manieren te presenteren aan leerlingen.” (2008a, pg. 64). In internationale literatuur worden in dit verband de begrippen *mathematical content knowledge* en *pedagogical content knowledge* gebruikt (vergelijk Shulman, 1986; Hill e.a., 2007; Silverman & Thompson, 2008; Ball e.a., 2008). Deze begrippen worden wel onderscheiden, maar zijn niet los van elkaar te zien. In de kennisbasis rekenen-wiskunde zijn ze vrij vertaald als: *kennis van rekenen-wiskunde* en *kennis voor onderwijzen van rekenen-wiskunde*.



Bron: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2008a, pg. 19

De door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen geformuleerde referentieniveaus zijn op twee manieren in de kennisbasis terug te vinden. Ten eerste waar het gaat om rekenen-wiskunde als vakgebied in het basisonderwijs en (dus) object van studie op de pabo. Hierbij gaat het om referentieniveau 1 en, in verband met de doorlopende lijn van basis- naar voortgezet onderwijs, referentieniveau 2. Ten tweede waar het gaat om het eigen beheersingsniveau. Voortbouwend op het door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen voor de pabo aanbevolen instroomniveau 3F bereikt de startbekwame leerkracht een beroepspecifieke invulling van referentieniveau 3S. Daarbij gaat het zowel om *kennis van rekenen-wiskunde* als *kennis voor onderwijzen van rekenen-wiskunde*.

Leeswijzer

Om aan te geven hoe de door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen onderscheiden referentieniveaus rekenen in de kennisbasis terug zijn te vinden, is een matrix gemaakt en ingevuld (zie volgende pagina). Deze heeft vier kolommen. De twee linker kolommen zijn overgenomen uit de rapporten van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen. Hiervoor is gebruik gemaakt van het rapport *Over de drempels met rekenen* (2008b) en de onlangs verschenen *Nadere beschouwing* (2009). De informatie in de twee rechter kolommen verwijst steeds naar de kennisbasis rekenen-wiskunde.

De kolommen bevatten, van links naar rechts bezien:

1. De voor rekenen onderscheiden A, B, C-kolom. A staat voor *Notatie, taal en betekenis*, B voor *Met elkaar in verband brengen* en C voor *Gebruiken*.
2. De beschrijving van het hoogst geoperationaliseerde referentieniveau.
3. De vindplaats van de betreffende inhoud in de kennisbasis rekenen-wiskunde.
4. De vindplaats van beroepspecifieke invullingen voor de leerkracht basisonderwijs in de kennisbasis rekenen-wiskunde.

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
Deze kolom is overgenomen uit de rapporten van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen. A staat voor *Notatie, taal en betekenis*, B voor *Met elkaar in verband brengen* en C voor *Gebruiken*.	Deze kolom is overgenomen uit de rapporten van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen. Het hoogste geoperationaliseerde referentieniveau wordt hier genoemd. In de meeste gevallen is dat niveau 3S. Als dat niveau niet is geoperationaliseerd, wordt het meest nabijgelegen niveau genoemd.	Deze kolom verwijst naar de kennisbasis rekenen-wiskunde. In deze kolom wordt in de meeste gevallen verwezen naar paragrafen over *Kennis van…* De betreffende paragraaf wordt vermeld, en er wordt een korte typering of voorbeeld uit die paragraaf gegeven.	Deze kolom verwijst naar de kennisbasis rekenen-wiskunde. Hier worden invullingen aangegeven die specifiek zijn voor het beroep van leerkracht basisonderwijs. Meestal wordt in deze kolom verwezen naar paragrafen over *Kennis voor onderwijzen van…* De betreffende paragraaf wordt vermeld, en er wordt een korte typering of voorbeeld uit die paragraaf gegeven.

De structuur en inhoud van de beschrijving van de referentieniveaus door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen zijn als uitgangspunt genomen. Daarbij is uitgegaan van het hoogste niveau dat door de Expertgroep is geoperationaliseerd. In de meeste gevallen is dat niveau 3S. Als referentieniveau 3S niet door de Expertgroep is geoperationaliseerd, is het meest nabijgelegen niveau gebruikt. In een enkel geval is de inhoud van referentieniveau niet in de kennisbasis opgenomen. Dit staat dan tussen haakjes aangegeven in de derde kolom. Het gaat daarbij om inhouden die voor het beroep van leerkracht basisonderwijs niet relevant zijn, bijvoorbeeld goniometrische verhoudingen.

De referentieniveaus van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen omvatten elkaar; niveau 3S omvat de inhouden van niveau 2S en zo verder. Om die reden zijn in de matrix niet apart de niveaus 1 of 2 opgenomen. Omdat deze niveaus wel object van studie zijn op de pabo, betekent dat dus dat in de kennisbasis zelf meer kenniselementen zijn opgenomen dan in deze matrix is terug te vinden. Zo worden bijvoorbeeld *automatiseren* en *verstandig gebruik van de rekenmachine* bij referentieniveau 1 van *Getallen* door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen apart genoemd, maar bij referentieniveau 3 niet meer. In de matrix zijn dergelijke inhouden daarom niet apart vermeld, maar deze zijn uiteraard wel opgenomen in de kennisbasis.
Het is hierdoor niet mogelijk met deze matrix een volledig beeld van de kennisbasis te krijgen, de matrix dient enkel om aan te geven hoe de referentieniveaus in de kennisbasis terug zijn te vinden.

Getallen

Inhouden van het door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen onderscheiden domein *Getallen* komen in de kennisbasis rekenen-wiskunde terug in de (sub)domeinbeschrijvingen *Hele getallen*, *Breuken*, *Kommagetallen* en *Verbanden*.

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
A Notatie, taal en betekenis – Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken	**Paraat hebben**		
	- schrijfwijze negatieve getallen: -3˚C, -150 m - symbolen zoals < en > gebruiken - gebruik van wortelteken, machten - negatieve getallen (ook breuken en decimale getallen) - verschillende schrijfwijzen van getallen met elkaar vergelijken	- 2.2.1. Betekenis van hele getallen; Verschijningsvormen en betekenissen. - 2.2.2. Kenmerken van het getalsysteem; Decimaal positioneel getalsysteem, andere getalsystemen en talstelsels. - 2.2.3A. Eigenschappen van bewerkingen; Het redeneren en rekenen met negatieve hele getallen. - 2.2.4. Wiskundetaal bij hele getallen; Het beheersen van de formele rekentaal en symbolen waarmee getallen en bewerkingen worden beschreven. - 3C.2.4. Wiskundetaal bij breuken; Informeel taalgebruik en formele rekentaal en notaties. - 3D.2.4. Wiskundetaal bij kommagetallen; Uitspraak, positiewaarden. - (Wortelteken is niet opgenomen in de kennisbasis.)	- 2.2.4. Wiskundetaal bij hele getallen; De leerkracht gebruikt de juiste taal die aanduidingen voor de getallen, de telwoorden uit de telrij en de systematiek van het decimaal positioneel getalsysteem omvat. - 2.3.1. Contextgebonden handelen en redeneren bij getallen en getalrelaties; De leerkracht zorgt ervoor dat kinderen grip krijgen op betekenissen, functies, structuren en eigenschappen van getallen. Bij het verkennen van getallen en getalrelaties gebruikt de leerkracht verschijningsvormen en functies van getallen die kinderen tegen kunnen komen in het dagelijks leven.
	Functioneel gebruiken		
	- getalnotaties met miljoen, miljard: er zijn 60 miljard euromunten geslagen - schrijfwijze grote getallen met behulp van machten, $2 \bullet 10^9$ - wetenschappelijke notatie rekenmachine gebruiken, ook met negatieve exponenten	- 2.2.4. Wiskundetaal bij hele getallen; Het beheersen van de juiste taal die gebruikt wordt bij hele getallen, de telwoorden uit de telrij en de systematiek van het decimaal positioneel getalsysteem. - 2.7. Kennis van onderwijzen voor (hele) getallen: Het juist gebruiken van de rekenmachine en van de nulregel. - (Wetenschappelijke notatie met nega-	- 2.4.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij (elementair) hoofdrekenen; De leerkracht begeleidt kinderen met de uitbreiding van het getalgebied tot en met 100 en bij het essentiële inzicht dat de getallen tot 100 zijn opgebouwd uit tientallen en eenheden en dat de cijfers binnen elk getal hun eigen positiewaarde hebben. - 2.3.3. Niveauverhoging bij getallen en

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
		tieve exponenten is niet opgenomen in de kennisbasis.)	getalrelaties; De leerkracht gebruikt de getallenlijn om de positionering van getallen duidelijk te maken waarmee de orde van grootte van de te plaatsen getallen wordt ontwikkeld.
	Weten waarom		
	- getallen relateren aan situaties; Ik loop ongeveer 4 km/u, Nederland heeft ongeveer 16 miljoen inwoners 3576 AP is een postcode Hectometerpaaltje 78,1 0,543 op bonnetje is gewicht 300 Mb vrij geheugen nodig - in complexere situaties rekenprocedures toepassen en daarbij weten waarom het nodig kan zijn haakjes te zetten en weten hoe dit werkt. Bijvoorbeeld bij gebruik van een rekenmachine of spreadsheet - adequate (wiskunde)taal en notaties lezen en gebruiken als communicatiemiddel - inzicht in wiskundige notaties en daarmee kwalitatief redeneren	- 2.2.2. Kenmerken van het getalsysteem; Het verklaren van eigenschappen van getallen zoals bijvoorbeeld de kenmerken van deelbaarheid. Getallen die zijn weergegeven in een ander talstelsel omzetten in het decimale talstelsel en omgekeerd. - 2.2.4. Wiskundetaal bij hele getallen; Het beheersen van de formele rekentaal en symbolen waarmee getallen en bewerkingen worden beschreven. - 2.3.3. Niveauverhoging bij getallen en getalrelaties; Betekenissen, structuren en onderlinge relaties van getallen bij het redeneren en rekenen met getallen. - 2.3.3. Niveauverhoging bij getallen en getalrelaties; Juist gebruik van de positionering van de getallen, waarmee de orde van grootte van de te plaatsen getallen wordt ontwikkeld.	- 2.3.3. Niveauverhoging bij getallen en getalrelaties; De leerkracht kan flexibel wisselen tussen de niveaus van contextgebonden tellen en rekenen, objectgebonden tellen en rekenen en formeel tellen en rekenen om kinderen te ondersteunen in hun denken en hen te brengen tot niveauverhoging. - 2.4.2. Modellen en schema's bij (elementair) hoofdrekenen; De leerkracht laat zien dat de rekenformule (pijlentaal of formele rekentaal) op diverse contexten van toepassing is en laat regelmatig bij rekenformules verhalen door de kinderen bedenken.
B Met elkaar in verband brengen – Getallen en getalrelaties – Structuur en samenhang	**Paraat hebben**		
	- negatieve getallen plaatsen in getalsysteem - aantallen en maten (weergegeven met gehele of decimale getallen) vergelijken en ordenen en weergeven bijvoorbeeld op een schaal van een meetinstrument of een tijdlijn - soorten getallen, zoals priemgetallen, wortels als irrationale getallen	- 2.2.1. Betekenis van hele getallen; Priemgetallen, figurale getallen, volmaakte getallen. - 2.3.3. Niveauverhoging bij getallen en getalrelaties; Het gebruiken van betekenissen, structuren en onderlinge relaties van getallen bij het redeneren en rekenen met getallen. - 3.2.2. Relatieve en absolute gege-	- 2.3.3. Niveauverhoging bij getallen en getalrelaties; De leerkracht gebruikt betekenissen, structuren en onderlinge relaties van getallen bij het redeneren en rekenen met getallen om de gecijferdheid van de kinderen (verder) te ontwikkelen. - 2.3.3. Niveauverhoging bij getallen en getalrelaties; Het juist gebruik van de

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
	enz. - complexere situaties vertalen naar een bewerking - uitbreiding naar reële getallen - relatie leggen tussen breuken, decimale notatie en afronden	vens; Een breuk is onder andere een rationaal getal waarmee gerekend kan worden. - 3.2.3. (Getals)relaties tussen verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen; Het omrekenen van breuken in kommagetallen en kommagetallen in breuken. - 3D.2.3. Redeneren en rekenen met kommagetallen; Afronden. - (Reële getallen zijn niet opgenomen in de kennisbasis.)	positionering van de getallen waarmee de orde van grootte van de te plaatsen getallen wordt ontwikkeld. - 2.7. Kennis van onderwijzen voor (hele) getallen; Gebruik van de rekenmachine; De leerkracht geeft sturing aan het organiseren van de berekeningen en het daadwerkelijke oplossen van het probleem. - 6.3.4. Niveauverhoging bij verbanden; De leerkracht kent, herkent en stimuleert processen van mathematiseren bij het bewerken van informatie.
	Functioneel gebruiken		
	- getallen met elkaar vergelijken, bijvoorbeeld met een getallenlijn: historische tijdlijn, 400 v. Chr-2000 na Chr. - situaties vertalen naar een bewerking: 350 blikjes nodig, ze zijn verpakt per 6 - afronden op ‘mooie’ getallen: 4862 m³ gas is ongeveer 5000 m³ afrondregels gebruiken - kiezen van een oplossingsstrategie, deze correct toepassen en de gevonden oplossing controleren op juistheid	- 2.2. Kennis van hele getallen; Het beheersen van de standaardprocedures en het vlot hoofdrekenen en schattend rekenen. - 2.2.3A. Eigenschappen van bewerkingen; Het afleiden van de basisbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen uit allerlei situaties. - 2.8.1. Verstrengeling van hele getallen met andere reken-wiskundedomeinen; Bepalen welke vorm van rekenen het meest voor de hand ligt, effectief of snel is.	- 2.4.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij (elementair) hoofdrekenen; De leerkracht beschikt over de kennis over het hoofdrekenen en beheerst daarnaast en in relatie daarmee de opbouw van de betreffende leerlijnen.
	Weten waarom		
	- verband tussen breuken met getallen en met variabelen - decimale getallen als tiendelige breuken - kennis getalsystemen en hun onderlinge relatie - patronen in getallen herkennen en	- 2.2. Kennis van hele getallen; het beheersen van de standaardprocedures en het vlot hoofdrekenen en schattend rekenen. 2.2.1. Betekenis van hele getallen; Het beheersen van de verschillende (bijzondere) eigenschappen van getallen.	- 2.5.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij standaardprocedures waaronder cijferen; De leerkracht beschikt over de kennis die nodig is voor het onderwijzen van de standaardprocedures en beheerst daarnaast en in relatie daarmee de op-

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
	beschrijven - eigen repertoire opbouwen van een getallennetwerk gerelateerd aan situaties	- 2.2.2. Kenmerken van het getalsysteem; Het verklaren van eigenschappen van getallen zoals bijvoorbeeld de kenmerken van deelbaarheid. Getallen die zijn weergegeven in een ander talstelsel omzetten in het decimale talstelsel en omgekeerd. - 3.2.3. (Getals)relaties tussen verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen; Het omzetten van breuken in kommagetallen en kommagetallen in breuken. - (Variabelen zijn niet opgenomen in de kennisbasis.)	bouw van de verschillende leerlijnen, inclusief mogelijke variaties. - 3C.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij breuken; De leerkracht wisselt flexibel tussen niveaus, hanteert passende modellen. - 3D.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kommagetallen; De leerkracht wisselt flexibel tussen niveaus, hanteert benoemde notatie als ondersteuning.
C Gebruiken	**Paraat hebben**		
– Berekeningen uitvoeren met gehele getallen, breuken en decimale getallen	- negatieve getallen in berekeningen gebruiken: 3 – 5 = 3 + -5 = -5 + 3 - haakjes gebruiken - in bekende situaties vaardig rekenen met de daarin voorkomende gehele en decimale getallen en (eenvoudige) breuken (schattend, uit het hoofd, op papier of met de rekenmachine) - rekenen met breuken - beheersen van de regels van de rekenkunde, zonder ICT-middelen - berekeningen uitvoeren waarbij gebruik gemaakt moet worden van verschillende rekenregels, inclusief die van machten en wortels	- 2.2. Kennis van hele getallen; Het beheersen van de standaardprocedures en het vlot hoofdrekenen en schattend rekenen. - 2.2.3A. Eigenschappen van bewerkingen; het redeneren en rekenen met (negatieve) hele getallen. - 2.2.3B. Schattend rekenen; Het maken van een beredeneerde keuze tussen schattend rekenen en precies rekenen bij het oplossen van een situatie of opgave. - 2.2.3C. Cijferend rekenen; Standaardalgoritmes voor cijferend optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. - 2.2.3D. Gebruik van de rekenmachine; Het uitvoeren van de meer geavanceerde bewerkingen met de rekenmachine met behulp van de procentenknop, gebruik van het geheugen en de notatie van getallen die te groot zijn voor het venster van de rekenmachi-	- 2.7. Kennis van onderwijzen voor (hele) getallen: gebruik van de rekenmachine; De leerkracht geeft sturing aan het organiseren van de berekeningen en het daadwerkelijke oplossen van het probleem. - 2.4.2. Modellen en schema’s bij (elementair) hoofdrekenen; De leerkracht gebruikt modellen en schema’s bij de overgang van contextgebonden naar formeel redeneren en rekenen. - 3C.2.3. Redeneren en rekenen met breuken; De leerkracht gebruikt de uitbreidingen van betekenissen bij bewerkingen met breuken.

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
		ne. - 2.2.4. Wiskundetaal bij hele getallen; Het beheersen van de formele rekentaal en symbolen waarmee getallen en bewerkingen worden beschreven. - 3C.2.3. Redeneren en rekenen met breuken; Bewerkingen met breuken uitvoeren. - 3D.2.3. Redeneren en rekenen met kommagetallen; Hoofdrekenen en cijferend rekenen met kommagetallen. - (Rekenen met wortels en machten is niet opgenomen in de kennisbasis.)	
	Functioneel gebruiken		
	- schatten van een uitkomst - resultaat van een berekening afronden in overeenstemming met de gegeven situatie - resultaten van een berekening interpreteren - rekenen in de wetenschappelijke notatie - beheersen van de regels van de rekenkunde, zonder ICT-middelen - berekeningen uitvoeren waarbij gebruik gemaakt moet worden van verschillende rekenregels, inclusief die van machten en wortels	- 2.2.3B. Schattend rekenen; Globaal rekenen en afronden van getallen. - 2.2.3C. Cijferend rekenen; Standaardalgoritmes voor cijferend optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. - 3D.2.3. Redeneren en rekenen met kommagetallen; Schattend rekenen met en bij kommagetallen. - 6.2.2. Discrete en continue situaties; Het maken van grafieken. - (Wetenschappelijke notatie en wortels zijn niet opgenomen in de kennisbasis.)	- 2.6.2. Modellen en schema's bij schattend rekenen; De leerkracht maakt gebruik van het noteren van aannames, het maken van een schetsje, het maken van (afge)ronde getallen en het noteren van tussenstappen. - 2.6.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij schattend rekenen; De leerkracht kan flexibel wisselen tussen de niveaus van het informeel, regelgeleid en flexibel afronden en schattend rekenen om kinderen te ondersteunen in hun denken en hen te brengen tot niveauverhoging.
	Weten waarom		
	- bij berekeningen een passend rekenmodel of de rekenmachine kiezen - berekeningen en redeneringen verifiëren - eigenschappen van bewerkingen - correctheid van rekenkundige redeneringen verifiëren	- 2.2. Kennis van hele getallen; Het beheersen van de standaardprocedures en het vlot hoofdrekenen en schattend rekenen. - 2.2.3A. Eigenschappen van bewerkingen; Het gebruiken van de eigenschappen van de basisbewerkingen die gebruikt worden bij het opereren	- 2.5.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij standaardprocedures waaronder cijferen; De leerkracht beschikt over de kennis die nodig is voor het onderwijzen van de standaardprocedures en beheerst daarnaast en in relatie daarmee de opbouw van de verschillende leerlijnen.

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
		met getallen. - 2.2.3D. Gebruik van de rekenmachine; Het beheersen van de 'rekenmachinetaal'. - 2.2.3D. Gebruik van de rekenmachine; Het uitvoeren van de meer geavanceerde bewerkingen met de rekenmachine met behulp van de procentenknop, gebruik van het geheugen en de notatie van getallen die te groot zijn voor het venster van de rekenmachine. - 2.8.1. Verstrengeling van hele getallen met andere reken-wiskundedomeinen; Bepalen welke vorm van rekenen het meest voor de hand ligt, effectief of snel is.	- 2.4.2. Modellen en schema's bij (elementair) hoofdrekenen; De leerkracht gebruikt modellen en schema's bij de overgang van contextgebonden naar formeel redeneren en rekenen. - 3C.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij breuken; De leerkracht hanteert betekenissen en modellen bij het redeneren en rekenen met breuken. - 3D.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kommagetallen; De leerkracht hanteert schattend rekenen en het rekenen met meetgetallen bij het redeneren en rekenen met kommagetallen.

Verhoudingen

Inhouden van het door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen onderscheiden domein *Verhoudingen* komen in de kennisbasis rekenen-wiskunde terug in de domeinbeschrijvingen *Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen* en *Meetkunde*.

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
A Notatie, taal en betekenis – Uitspraak, schrijfwijze en betekenis van getallen, symbolen en relaties – Wiskundetaal gebruiken	**Paraat hebben**		
	- de schrijfwijze van procenten, breuken en de taal van verhoudingen paraat hebben - omgekeerd evenredig	- 3.2.1 Standaardisering; De notatie van procenten, breuken en kommagetallen verschilt, maar worden situatieafhankelijk naast elkaar gebruikt. - 3.2.3 (Getals)relaties tussen verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen; De (getals)relaties tussen de subdomeinen onderling. - 3A.2.3. Wiskundetaal bij verhoudingen. - 3B.2.3. Wiskundetaal bij procenten. - 3C.2.4. Wiskundetaal bij breuken. - 3D.2.4. Wiskundetaal bij kommagetallen. - (Omgekeerd evenredig is niet opgenomen in de kennisbasis.)	- 3A.3.2. Modellen en schema's bij verhoudingen; De leerkracht gebruikt modellen als schaallijn, dubbele getallenlijn en verhoudingstabel bij het rekenen en redeneren met verhoudingen. - 3A.3.2. Modellen en schema's bij verhoudingen; De verhoudingstabel wordt door de leerkracht gebruikt als denkmodel om redeneringen overzichtelijk schematisch weer te geven. - 3B.3.2. Modellen en schema's bij procenten; De leerkracht gebruikt als ondersteunende modellen en schema's bij procenten als cirkelmodel, strook en verhoudingstabel.
	Functioneel gebruiken		
	- adequate (wiskunde)taal en notaties lezen en gebruiken. Ook de notatie 3 : 5 voor '3 van de vijf leerlingen' - verhouding relateren aan lineair verband	- 3A.2.3 Wiskundetaal bij verhoudingen; De verhoudingsnotatie, de breuknotatie, de notatie als kommagetal en het procentteken (%). - 3A.2.3 Wiskundetaal bij verhoudingen; Interne en externe verhouding, evenredigheid en evenredig verband, lineair verband, absoluut en relatief, samengestelde grootheid en niet-evenredig verband.	- 3A.3.1. Contexten en toepassingssituaties bij verhoudingen; Contexten leiden vaak tot specifieke notatievormen. - 6.3.1 Modelmatige representaties; Leerkrachten bespreken verbanden met leerlingen aan de hand van representaties, schema's en grafieken.
	Weten waarom		
	- gebruik maken van de begrippen *absoluut* en *relatief* bij het rekenen met procenten	- 3.2.2 Relatieve en absolute gegevens; Absolute gegevens zijn gegevens waarbij de getallen verwijzen naar daadwerkelijke hoeveelheden of aantallen. Relatieve gegevens zijn verhoudingsgegevens waarbij de getallen verwijzen naar iets ten opzichte van een ander geheel of totaal. - 3B.2.1. Betekenis van procenten.	- 3B.3.2. Modellen en schema's bij procenten; Een leerkracht gebruikt contexten en modellen zodanig dat zowel het absolute als het relatieve karakter van breuken, kommagetallen en procenten aan de orde wordt gesteld.

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
B Met elkaar in verband brengen – Verhouding, procent, breuk, decimaal getal, deling, 'deel van' met elkaar in verband brengen	**Paraat hebben**		
	- breuken, decimale getallen, percentages en verhoudingen in elkaar omzetten - omgekeerd evenredig	- 3.2.3 (Getals)relaties tussen verhoudingen, breuken, procenten en kommagetallen; (Getals)relaties (weetjes) tussen de subdomeinen onderling. - (Omgekeerd evenredig is niet opgenomen in de kennisbasis.)	- 3A.3.2. Modellen en schema's bij verhoudingen; De leerkracht gebruikt modellen als de schaallijn, de dubbele getallenlijn en de verhoudingstabel bij het rekenen en redeneren met verhoudingen op de basisschool. - 3C.3.2. Modellen en schema's bij breuken; De leerkracht gebruikt modellen als het strookmodel, de dubbele getallenlijn en de verhoudingstabel als model bij het omzetten van breuken, decimale getallen, percentages en verhoudingen.
	Functioneel gebruiken		
	- verhoudingen, breuken, decimale getallen en procenten met elkaar in verband brengen in andere domeinen	- 3.2.1 Standaardisering; De notatie van procenten, breuken en kommagetallen verschilt, maar worden situatieafhankelijk naast elkaar gebruikt. - 3.2.3 (Getals)relaties tussen verhoudingen, breuken, procenten en kommagetallen; (Getals)relaties tussen de subdomeinen onderling. Wisselen tussen deze domeinen, omrekenen. - 3A.4.1. Verstrengeling van verhoudingen met andere reken-wiskundedomeinen.	- 3B.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij procenten; De leerkracht kan flexibel wisselen tussen verschillende concretiseringen en oplossingswijzen om kinderen te ondersteunen in hun denken en hen te brengen tot niveauverhoging
	Weten waarom		
	- kennis van getalsystemen	- 3.2.3 (Getals)relaties tussen verhoudingen, breuken, procenten en kommagetallen; Breuken en kommagetallen in elkaar omrekenen. Sommige breuken leveren omgezet in kommagetallen repeterende breuken op.	- 3D.3.1 Contexten en toepassingssituaties bij kommagetallen; De leerkracht maakt gebruik van meetsituaties met meetgetallen om betekenis te geven aan kommagetallen. - 3D.3.2. Modellen en schema's bij kommagetallen; De leerkracht gebruikt de getallenlijn als ondersteuning bij het ordenen, vergelijken, positioneren en het visualiseren van decimale verfijning van kommagetallen.
C Gebruiken – In de context van verhoudingen berekeningen uitvoeren, ook	**Paraat hebben**		
	- formele rekenregels hanteren - bepalen op welke schaal iets getekend is	- 3.2.3 (Getals)relaties tussen verhoudingen, breuken, procenten en kommagetallen; Het beheersen van (getal)relaties en flexibel wisselen tussen de subdomeinen	- 3A.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij verhoudingen; De leerkracht kan handelen en redeneren met kwalitatieve en kwantitatieve verhoudin-

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
met procenten en verhoudingen		verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen bij het rekenen en redeneren. - 3A.4.1 Verstrengeling van verhoudingen met andere reken-wiskundedomeinen; Verhoudingen en schaal, meten en het metriek stelsel. - 3B.2.2 Redeneren en rekenen met procenten; Varianten van het rekenen met procenten, onderliggende wiskundige structuren. - 3C.2.3 Redeneren en rekenen met breuken; Bewerkingen met breuken uitvoeren	gen. - 3B.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij procenten; De leerkracht hanteert de verhoudingstabel als rekenmodel.
	Functioneel gebruiken		
	- rekenen met percentages boven de 100 - vierde evenredige berekenen - verhoudingen toepassen bij het oplossen van problemen - berekeningen met een groeifactor / vermenigvuldigingsfactor of percentage uitvoeren - verhoudingen in de meetkunde gebruiken	- 3.2.2. Relatieve en absolute gegevens; Verhoudingsgetallen kunnen als operator fungeren, afhankelijk van het absolute uitgangsgegeven dat bekend is. - 3.2.2. Relatieve en absolute gegevens; Een percentage biedt relatieve informatie en fungeert altijd als operator. - 3A.2.2. Redeneren en rekenen met verhoudingen; Rekenen in de verhoudingstabel, waaronder kruiselings vermenigvuldigen binnen een verhoudingstabel. - 3A.4.1. Verstrengeling van verhoudingen met andere reken-wiskundedomeinen. - 3B.4.1. Verstrengeling van procenten met andere reken-wiskundedomeinen. - 5.4.1. Verstrengeling van meetkunde met andere reken-wiskundedomeinen.	- 3A.3.1. Contexten en toepassingssituaties bij verhoudingen; De leerkracht kan bij het rekenen en redeneren met getalsmatige en meetkundige verhoudingen verwijzen naar concrete situaties of benoemde getallen bedenken die naar concrete situaties (kunnen) verwijzen. - 3A.3.2. Modellen en schema's bij verhoudingen; De leerkracht gebruikt modellen als de schaallijn, de dubbele getallenlijn en de verhoudingstabel bij het rekenen en redeneren met verhoudingen op de basisschool. - 3B.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij procenten; De leerkracht kan op verschillende manieren rekenen met procenten en percentages berekenen.
	Weten waarom		
	- relatie leggen met verhoudingen binnen algebra en meetkunde - (wiskundig) redeneren in situaties waarin percentages of verhoudingen voorkomen	- 3.2.3 (Getals)relaties tussen verhoudingen, breuken, procenten en kommagetallen; Het beheersen van (getal)relaties en flexibel wisselen tussen de subdomeinen verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen bij het rekenen en redeneren. - 3B.2.2 Redeneren en rekenen met procenten; Varianten van het rekenen met	- 3A.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij verhoudingen; Relatie en het abstractieverschil tussen de dubbele getallenlijn en de verhoudingstabel. - 3A.4.1. Verstrengeling van verhoudingen met andere reken-wiskundedomeinen; Bij samengestelde grootheden weet de leerkracht wanneer het om externe of interne verhoudingen gaat. Bij het werken met

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
		procenten, onderliggende wiskundige structuren.	schaal is behalve het kunnen omrekenen, ook inzicht in niet-evenredige verbanden van belang.

Meten en meetkunde

Inhouden van het door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen onderscheiden domein *Meten en meetkunde* komen in de kennisbasis rekenen-wiskunde terug in de domeinbeschrijvingen *Hele getallen*, *Meten* en *Meetkunde*.

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
A Notatie, taal en betekenis – Maten voor lengte, oppervlakte, inhoud en gewicht, temperatuur – Tijd en geld – Meetinstrumenten – Schrijfwijze en betekenis van meetkundige symbolen en relaties	**Paraat hebben**		
	– voorvoegsels bij maten – gebruik van symbolen zoals ≈, Δ, // – parallel – namen van vlakke en ruimtelijke figuren	– 4.2.3. Het metriek stelsel; Systematiek van het metriek stelsel. – 4.2.5. Grootheden en maten; Metrische maten voor de grootheden gewicht, lengte oppervlakte, inhoud en de maten die horen bij temperatuur, geld en tijd. – 4.2.6. Wiskundetaal bij meten; Voorvoegsels. – 5.2.4. Wiskundetaal bij meetkunde; Benamingen van figuren en objecten en hun eigenschappen. – 2.2.4. Wiskundetaal bij hele getalllen; Het symbool ≈. – (De symbolen Δ en // zijn niet opgenomen in de kennisbasis.)	– 4.3.3 Standaardmaten en referenties; De leerkracht gebruikt kennis en ervaringen met natuurlijke maten aan om leerlingen te helpen metrische maten te ontwikkelen en relaties tussen deze maten uit het metrieke stelsel. – 4.3.5. Metriek stelsel en begrip; De leerkracht gebruikt relaties tussen maten om de systematiek van het metriek stelsel te laten doorzien.
	Functioneel gebruiken		
	– lezen en interpreteren van tekeningen – allerlei schalen (ook in beroepsituaties) aflezen en interpreteren zoals kilometerteller, weegschaal, duimstok – situaties beschrijven met woorden, door middel van meetkundige figuren, met coördinaten, via (wind)richting, hoeken en afstanden; routebeschrijving geven, locatie in magazijn opgeven, vorm gebouw beschrijven	– 4.2.2. Meetinstrumenten; Werking van meetinstrumenten. Meetgetallen genereren. – 4.2.6. Wiskundetaal bij meten; Woorden om grootheden te vergelijken, woorden die refereren aan natuurlijke maten en voorvoegsels. – 5.2.2. Verklaren bij meetkunde; Coördinaten die in het platte vlak figuren of locaties beschrijven. Beschrijven van richting of hoek en afstand in het platte vlak.	– 4.3. Kennis voor onderwijzen van meten; De leerkracht plaatst kinderen in meetsituaties waarin zij leren te meten en te werken met meetgetallen, maten en grootheden. – 5.3.1. Oriëntatie in de ruimte;.Een leerkracht kan gebruik maken van allerlei beschrijvingsmiddelen van de ruimte.

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
	– eenvoudige werktekeningen interpreteren; montagetekening kast plattegrond eigen huis	– 5.2.3. Verbinden bij meetkunde; Het interpreteren en bewerken van vlakke tekeningen van ruimtelijke situaties, zoals foto's, plattegronden, patroontekeningen, landkaarten, bouwtekeningen.	
	Weten waarom		
	– gegevens nodig voor het construeren van tekeningen – redeneren over gelijkvormige figuren	– 5.2.1. Ervaren bij meetkunde; Het tekenen van vierhoeken en driehoeken volgens een constructievoorschrift. – 5.2.3. Verbinden bij meetkunde; Het herkennen van gelijkvormige en niet gelijkvormige figuren aan de hand van de eigenschappen.	– 4.3.1. Ordenen en vergelijken bij meten; Kinderen leren objecten ten aanzien van een bepaalde grootheid te vergelijken en te ordenen, de leerkracht kan hierbij geschikte voorbeelden, materialen en modellen inzetten. – 5.3. Kennis voor onderwijzen van meetkunde; De leerkracht kan (nieuwe) technologieën inzetten om kinderen uit te dagen meetkundig te redeneren.
B Met elkaar in verband brengen – Meetinstrumenten gebruiken – Structuur en samenhang tussen maateenheden – Verschillende representaties, 2D en 3D	**Paraat hebben**		
	– verschillende soorten symmetrie herkennen en gebruiken – structuur en samenhang van belangrijke maten uit metriek stelsel – interpreteren en bewerken van 2D representaties van 3D objecten en andersom (aanzichten, uitslagen, doorsneden, kijklijnen)	– 4.2. Kennis van meten; De systematiek bij het meten doorzien en verklaren. – 4.2.3. Het metriek stelsel; Maten, voorvoegsels en relaties tussen maten. – 4.2.5. Grootheden en maten; Grootheden en bijbehorende (metrische) maten. – 4.2.6. Wiskundetaal bij meten; Aanduidingen voor kwadratische en kubische relaties die niet letterlijk overeen hoeven te komen met de realiteit. – 5.2.1. Ervaren bij meetkunde; Kenmerken driedimensionale blokkenconstructie in verband brengen met een tweedimensionale tekening of een plattegrond met hoogtegetallen.	– 4.2.3. Het metriek stelsel; De leerkracht weet dat de opbouw van het metrieke stelsel nauw aansluit bij de opbouw van het tientallig getalsysteem. – 4.3.5. Metriek stelsel en begrip; De leerkracht bevordert inzicht in het systeem, ook om te voorkomen dat het metriek stelsel als een verzameling losse, onbegrepen rekenregels moet worden gememoriseerd. – 4.3.5. Metriek stelsel en begrip; De leerkracht laat leerlingen zelf meetactiviteiten uitvoeren. – 5.3. Kennis voor onderwijzen van meetkunde; De leerkracht kan bij elk van de vijf onderscheiden deelgebieden activiteiten realiseren om leerlin-

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
		– 5.2.3. Verbinden bij meetkunde; Het omstructureren van veelhoeken naar rechthoeken en driehoeken enerzijds en veelvlakken naar kubussen, balken, piramides en prisma's en dergelijke. Interpreteren en bewerken van vlakke tekeningen van ruimtelijke situaties, zoals foto's, plattegronden, patroontekeningen, landkaarten, bouwtekeningen. – 5.3.4. Construeren; Het maken van doorsneden van ruimtelijke figuren als piramide, bol, prisma, kubus en het tekenen en beschrijven van de aldus ontstane tweedimensionale vormen.	gen te laten ervaren, ze meetkundige verschijnselen te laten verklaren en die te verbinden met andere verschijnselen.
	Functioneel gebruiken		
	– uitspraken doen over orde van grootte en nauwkeurigheid van meetresultaten – aflezen van maten uit een (werk)tekening, plattegrond werktekening eigen tuin – samenhang tussen omtrek, oppervlakte en inhoud hoe verandert de inhoud van een doos als alleen de lengte wordt gewijzigd, als alle maten evenveel vergroot worden? – tekenen van figuren en maken van (werk)tekeningen en daarbij passer, liniaal en geodriehoek gebruiken	– 4.2.2. Meetinstrumenten; Op juiste wijze de alledaagse meetinstrumenten hanteren. – 4.2.3. Het metriek stelsel; Het metriek stelsel gebruiken. – 4.2.4. Meet(on)nauwkeurigheid; Het vaststellen van het interval waarbinnen meetresultaten mogen vallen. – 5.2.1. Ervaren bij meetkunde;. Het tekenen van vierhoeken en driehoeken volgens een constructievoorschrift, met behulp van liniaal, gradenboog en passer. – 5.3.4 Construeren; Het construeren van eenvoudige ruimtelijke en vlakke meetkundige figuren.	– 4.3.3. Standaardmaten en referenties; De leerkracht kent de referenties waarover kinderen beschikken en gebruikt die om betekenis te geven aan standaardmaten. Het gaat daarbij aanvankelijk om ervaren van alledaagse maten als meter, centimeter, uur en minuut. – 5.3: Kennis voor het onderwijzen van meetkunde; De leerkracht laat leerlingen hun meetkundige activiteiten onder woorden brengen en laat leerlingen redeneren, verklaren en reflecteren.
	Weten waarom		
	– structuur en samenhang metrieke stelsel (uitgebreid) – oppervlakte en inhoud van gelijkvor-	– 4.2. Kennis van meten; De systematiek bij het meten doorzien en verklaren, ook minder gangbare maten.	– 4.3.5. Metriek stelsel en begrip; De leerkracht kan activiteiten bedenken zoals het zelf samenstellen van een

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
	mige figuren – uit voorstellingen en beschrijvingen conclusies trekken over objecten en hun plaats in de ruimte hoe ziet een gebouw eruit? – samenhang tussen straal *r* en diameter *d* van een cirkel (in sommige beroepen wordt vooral met diameter (doorsnede) gewerkt)	– 4.3.5. Metriek stelsel en begrip; Relaties en verschillen tussen lengte-, oppervlakte- en inhoudsmaten, en de (niet-)relaties tussen inhoud en gewicht. – 5.3.1. Oriëntatie in de ruimte; Het lokaliseren van objecten in de bekende omgeving met behulp van ruimtelijke begrippen. – 5.3.3. Transformeren; Puntspiegelen en controleren gelijkvormigheid.	poster van het metriek stelsel. – 5.3.1. Oriëntatie in de ruimte; De leerkracht kan gebruik maken van verschillende meetkundige beschrijvingsmiddelen.
C Gebruiken – Meten – Rekenen in de meetkunde	**Paraat hebben**		
	– grootte van hoeken en afstanden berekenen in 2D en 3D figuren – stelling van Pythagoras – goniometrische verhoudingen sin, cos en tan – schattingen en metingen doen van hoeken, lengten en oppervlakten van objecten in de ruimte – oppervlakte en omtrek van enkele 2D figuren berekenen, eventueel met gegeven formule – inhoud berekenen	– 4.2.3. Het metriek stelsel; Omtrek-, oppervlakte- en inhoudsformules. – 5.2.3. Verbinden bij meetkunde; Aan de hand van meetkundige beschrijvingen conclusies trekken over objecten en hun plaats in de ruimte. Herkennen, benoemen en onderzoeken van gelijkvormige en niet gelijkvormige figuren aan de hand van de eigenschappen. Stelling van Pythagoras. – (Meten van hoeken en goniometrische verhoudingen zijn niet opgenomen in de kennisbasis.)	– 4.3.4. Voorvoegsels en relaties tussen maten; De leerkracht helpt leerlingen verbanden te construeren tussen maten en daarmee om zo verbanden te leggen tussen getallen en getalsmatige informatie. – 5.3.4. Construeren; De leerkracht bepreekt en beredeneert wat verschillen en overeenkomsten tussen de figuren en vormen zijn en aldus specifieke kenmerken van de meetkundige figuren bepalen.
	Functioneel gebruiken		
	– kennis van figuren en hun eigenschappen gebruiken bij het oplossen van problemen – formules gebruiken bij berekenen van oppervlakte en inhoud van eenvoudige figuren – juiste maat kiezen in gegeven context Zand koop je per ‘kuub’ (m^3), melk per liter.	– 5.3.4. Construeren; Het uitzoeken en beredeneren welke informatie noodzakelijk is om een bouwsel goed te bouwen. Complementeren en omstructureren. Verschillen en overeenkomsten tussen figuren en vormen, specifieke kenmerken van meetkundige figuren. – 4.3.3. Standaardmaten en referenties; referentiematen en meetreferenties.	– 4.3.3. Standaardmaten en referenties; De leerkracht gebruikt meetreferenties van kinderen. – 5.3.4. Construeren; De leerkracht beredeneert welke informatie noodzakelijk is om een bouwsel goed te bouwen.

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
	Weten waarom		
	– regelmaat in meetkundige patronen herkennen en beschrijven – redeneren op basis van symmetrie (regelmatige patronen), randen, versieringen – eigenschappen van 2D figuren – formules voor het berekenen van oppervlakte en inhoud verklaren – beredeneren welke vergrotingsfactor nodig is om de ene (eenvoudige) figuur uit de andere te vormen – verschillende omtrek mogelijk bij gelijkblijvende oppervlakte	– 5.2.4. Wiskundetaal bij meetkunde; Eigenschappen/kenmerken en vlakbenamingen van de verschillende veelhoeken en veelvlakken. – 5.3.1. Oriëntatie in de ruimte; Het herkennen van en werken met patronen. – 5.3.3. Transformeren; Verschuiven, draaien en spiegelen van (eenvoudige) figuren, het verkleinen en vergroten van figuren en het omstructureren van figuren onder behoud van oppervlakte. Spiegelbeelden en symmetrie. – 5.3.4. Construeren; In eenvoudige gevallen verklaren en toepassen van de effecten van vergroting en verkleining op omtrek, oppervlakte en inhoud.	– 4.2.3. Het metriek stelsel; De leerkracht kan de formules van oppervlakte en inhoud verklaren vanuit handig tellen van hokjes (of blokjes). Ze wijzen hun leerlingen op de opbouw van het stelsel in relatie tot het tientallig stelsel en hoe dat zich manifesteert bij oppervlaktematen en inhoudsmaten.

Verbanden

Inhouden van het door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen onderscheiden domein *Verbanden* komen in de kennisbasis rekenen-wiskunde terug in de domeinbeschrijving *Verbanden*.

A, B, C- kolom	Referentieniveau	Vindplaats in de kennisbasis	Beroepspecifieke invullingen
A Notatie, taal en betekenis – Analyseren en interpreteren van informatie uit tabellen, grafische voorstellingen en beschrijvingen. – Veel voorkomende diagrammen en tabellen	**Paraat hebben**		
	– kwalitatief redeneren en daarbij wiskundige notaties en formules gebruiken.	– 6.2. Kennis van verbanden; Grafieken lezen en vergelijken. – 6.2.3.Wiskundetaal bij verbanden; De namen van grafieken en begrippen die daarbij gebruikt worden en overige begrippen die worden gebruikt bij het ordenen en representeren van informatie .	– 6.3.1. Modelmatige representaties; De leerkracht vertaalt informatie naar modelmatige representaties waarbij gelet wordt op een heldere beschrijvingswijze.
	Functioneel gebruiken		
	– kwalitatief redeneren en daarbij wiskundige notaties en formules gebruiken.	– 6.2. Kennis van verbanden; Informatie uit grafieken op hun waarde schatten. – 6.2.3. Wiskundetaal bij verbanden; Begrippen gebruiken die nodig zijn bij het ordenen en representeren van informatie, zoals gemiddelde, sectoren, graden.	– 6.2.3. Wiskundetaal bij verbanden; De leerkracht gebruikt begrippen bij het ordenen van gegevens zoals het juist invullen en interpreteren van toetsgegevens in het leerlingvolgsysteem – 6.3.2. Grafieken als representaties van de werkelijkheid; De leerkracht helpt kinderen om een bij een situatie passende grafiek te maken.
	Weten waarom		
	– verdubbelingstijd, halveringstijd – conclusies trekken op basis van de structuur van een grafiek of formule.	– 6.2. Kennis van verbanden; Informatie vergelijken en op waarde schatten. – 6.2.2. Discrete en continue situaties; Bij het maken van grafieken keuzen maken om data zo effectief mogelijk weer te geven op een bij de situatie passende wijze. – 6.4.1. Verstrengeling van verbanden; Het kan in grafieken om verschillende soorten gegevens gaan, getalsmatig (absoluut of relatief), meetgetallen of	– 6.3.4. Niveauverhoging bij verbanden; De leerkracht legt verband tussen verandering in een situatie en de weergave in de grafiek, en de relatie tussen de notie gemiddelde en de grafiek. – 6.4. Verstrengeling en samenhang; De leerkracht laat zien dat rekenen-wiskunde de andere vak- en vormingsgebieden raakt bij het verwerken van informatie.

		informatie in termen van ruimte of tijd.	
B Met elkaar in verband brengen – Verschillende voorstellingsvormen met elkaar in verband brengen – Gegevens verzamelen, ordenen en weergeven – Patronen beschrijven	**Paraat hebben**		
	– bij een lineair verband (beschrijving of grafiek) een formule opstellen. – exponentiële processen herkennen, met formules beschrijven en in grafieken tekenen. – evenredige en omgekeerd evenredige verbanden herkennen en gebruiken met hun specifieke eigenschappen.	– 6.2.2. Discrete en continue situaties; De lijngrafiek die bij discrete situaties onterecht gebruikt wordt i.p.v. een staafdiagram of beelddiagram. – (Bij een lineair verband een formule opstellen, exponentiële processen en [omgekeerd] evenredige verbanden zijn niet opgenomen in de kennisbasis.)	– 6.2.3. Wiskundetaal bij verbanden; De leerkracht kan betekenis aan en voorbeelden geven bij begrippen die een rol spelen bij het ordenen en duiden van gegevens zoals mediaan, modus en gemiddelde.
	Functioneel gebruiken		
	– uit het verloop, de vorm en de plaats van punten in een grafiek conclusies trekken over de bijbehorende formule. – kennis van grafieken en (standaard)verbanden gebruiken om problemen op te lossen.	– 6.2.1. Verschillende typen grafieken; In verschillende situaties passen verschillende representaties en grafieken. – 6.3.4. Niveauverhoging bij verbanden; Verband leggen tussen verandering in een situatie en de weergave in de grafiek, herkennen van misleidend weergegeven informatie.	– 6.2.3. Wiskundetaal bij verbanden; De leerkracht kan de leerlingvorderingen volgen die grafisch zijn weergegeven uit leerlingvolgsystemen. – 6.3.4. Niveauverhoging bij verbanden; De leerkracht leert de leerling om kritisch te kijken naar weergegeven informatie.
	Weten waarom		
	– snijpunten van grafieken interpreteren binnen een context. – uitspraken doen over de rol of betekenis van variabelen of constanten in een formule. – met verschillende formules hetzelfde verband beschrijven. – vorm van formule, tabel en grafiek bij enkele verbanden met elkaar in verband brengen.	– 6.3.4. Niveauverhoging bij verbanden; Tijdsafstandrelaties weergeven in lijngrafieken en verhoudingen in cirkeldiagrammen. Interpreteren van gegevens op de assen en doorzien van misleidende informatie. – 6.3.4. Niveauverhoging bij verbanden; Verband leggen tussen notie 'gemiddelde' in relatie tot de grafiek en een verandering in een situatie relateren aan de weergave daarvan in de grafiek.	– 6.3. Kennis voor onderwijzen van verbanden; De leerkracht beheerst de opbouw van de deelgebieden en betreffende leerlijnen en de didactische kennis die het leren omgaan met verbanden op gang brengt, ondersteunt en stimuleert. – 6.3.4. Niveauverhoging bij verbanden; De leerkracht leert leerlingen dat op de assen verschillende variabelen kunnen worden weergegeven. Informatie aangrijpen om er wiskunde van te maken (mathematiseren).
C Gebruiken	**Paraat hebben**		
	– berekeningen uitvoeren op basis van	– 6.2.1. Verschillende typen grafieken;	– 6.3.4. Niveauverhoging bij verban-

– Tabellen, diagrammen en grafieken gebruiken bij het oplossen van problemen – Rekenvaardigheden gebruiken	informatie uit tabellen, grafieken en diagrammen – ook met complexer formules in standaardnotaties.	Representaties en grafieken bij verschillende situaties. – 6.2.3. Wiskundetaal bij verbanden; Begrippen die een rol spelen bij het ordenen en duiden van gegevens zoals mediaan, modus en gemiddelde. – (Complexe formules zijn niet opgenomen in de kennisbasis.)	den; De leerkracht leert de leerlingen betekenis te geven aan 'gemiddelde' in relatie tot grafieken.
	Functioneel gebruiken		
	– berekeningen uitvoeren aan processen die op verschillende manieren beschreven kunnen zijn. – kennis van grafieken en formules gebruiken om problemen op te lossen.	– 6.3. Kennis voor onderwijzen van verbanden; Het passend omgaan met informatie zoals het ordenen en schematiseren van informatie.	– 6.3.4. Niveauverhoging bij verbanden; De leerkracht laat leerlingen verbanden leggen tussen situatieveranderingen en weergaves daarvan in grafieken.
	Weten waarom		
	– grafieken en hun kenmerken als onderdeel van hun verdere studie	– 6.2.3. Wiskundetaal bij verbanden; Betekenis geven aan begrippen waarmee informatie kan worden geduid of geordend zoals mediaan, modus en modaal.	– 6.3.3. Schema's als gestructureerde kladjes; De leerkracht gebruikt grafieken en schema's om leerlingen greep te laten krijgen op informatie. – 6.3.4. Niveauverhoging bij verbanden; De leerkracht herkent en stimuleert de processen van progressief mathematiseren bij leerlingen.

Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo
Toelichting en verantwoording

Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo
Toelichting en verantwoording

1. Opdracht

Onderdeel van het projectplan van de HBO-raad 'Werken aan kwaliteit' voor de lerarenopleidingen is het formuleren van een (concept) kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo. De kennisbasis beschrijft de expliciete / geboekstaafde kennis van het vak en de vakdidactiek van rekenen-wiskunde, waarvan alle startbekwame leerkrachten kennis moeten hebben, ongeacht de instelling waaraan ze hebben gestudeerd en los van het surplus aan kennis dat wordt verworven in differentiaties en specialisaties (Werken aan kwaliteit, 2008, pg. 4 & 16). De opdracht deze kennisbasis rekenen-wiskunde te formuleren is verleend aan het landelijk Expertisecentrum Lerarenopleidingen Wiskunde en Rekenen (Elwier). Elwier heeft hiervoor in samenwerking met Panama (PAbo NAscholing Mathematische Activiteiten) een ontwikkelgroep ingesteld:

- Marc van Zanten, Elwier, hogeschooldocent rekenen-wiskunde Hogeschool Edith Stein / Twente School of Education, projectleider Panama, voorzitter ontwikkelgroep kennisbasis;
- Ronald Keijzer, Elwier, docent rekenen-wiskunde IPABO Amsterdam/Alkmaar, ass. projectleider Elwier, Panama;
- Anneke van Gool, Elwier, Panama, vh. pabo Tilburg Fontys Hogescholen;
- José Faarts, Elwier, hogeschooldocent rekenen-wiskunde Hogeschool Zuyd, pabo Maastricht;
- Frits Barth, Elwier, hogeschooldocent rekenen-wiskunde Stenden Hogeschool, Christelijke Pabo Leeuwarden.

2. Context van de opdracht

2.1. Kwaliteit (aanstaande) leerkrachten op het gebied van rekenen-wiskunde
Er is momenteel veel aandacht voor de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs. De door de bewindslieden van OC&W ingestelde Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (ook wel aangeduid als de 'commissie Meijerink') wijst er in navolging van de Commissie Leraren (de 'commissie Rinnooy Kan') op, dat er geen duidelijk zicht is op het niveau in (taal en) rekenen-wiskunde van startbekwame basisschoolleerkrachten en geeft als een van haar aanbevelingen dat een gemeenschappelijk eindniveau voor (taal en) rekenen-wiskunde moet worden ontwikkeld (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2008a; 2008b; 2009) Commissie Leraren, 2007). In de 'Kwaliteitsagenda voor het opleiden van leraren 2008-2011' heeft de staatssecretaris van Onderwijs deze aanbeveling vertaald in haar inzet om (onder meer) de vereiste kennis voor rekenen-wiskunde aan het eind van de pabo vast te leggen in een kennisbasis (OC&W, 2008). Een en ander past ook binnen internationale ontwikkelingen op het gebied van vakspecifieke standaarden voor leerkrachten (zie bijvoorbeeld NCTM, 2000; NCETM, 2008; DMV/GDM/MNU, 2008) en de onder opleiders ervaren behoefte aan meer focus op rekenen-wiskunde in de opleidingen tot leerkracht basisonderwijs (Panama Kerngroep Opleiders, 2007).

2.2. Niveau rekenen-wiskunde in het basisonderwijs
Onderzoeken naar de prestaties bij rekenen-wiskunde, laten een gedifferentieerd en genuanceerd beeld zien. Zo tonen de Periodieke Peilingen voor het Onderwijs (PPON) aan dat op sommige domeinen bij rekenen-wiskunde de prestaties afnemen, terwijl de prestaties op andere domeinen ongeveer gelijk blijven of toenemen (vergelijk Kraemer e.a., 2005; Janssen e.a., 2005; Van der Schoot, 2008). De Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008a) heeft onderzoeksgegevens geanalyseerd en stelt dat "op grond van 20 jaar onderzoek onder aller-

lei leeftijdsgroepen tot 15 jaar blijkt dat er geen reden is om aan te nemen dat de kwaliteit van het onderwijs in rekenen & wiskunde ter discussie moet staan omdat het beneden de maat is" (2008a, pg. 7). Wel wijst de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen er op dat resultaten op onderdelen afnemen en dat (dus) op onderdelen maatregelen nodig zijn (vergelijk ook Van Putten, 2008). Het recente TIMSS-onderzoek (Meelissen & Drent, 2008) bevestigt dat er sprake is van een licht dalende tendens, maar toont ook dat Nederland wereldwijd nog steeds in de top tien staat. Verder laat dit onderzoek bijvoorbeeld zien dat er tussen groepen leerlingen in Nederland grote verschillen optreden; met name allochtone meisjes presteren opvallend lager dan autochtone meisjes en dan (allochtone en autochtone) jongens (Meelissen & Drent, 2008). Eerder liet PPON-onderzoek ook al duidelijke verschillen in rekenprestaties zien tussen autochtone en allochtone leerlingen en tussen meisjes en jongens (Kraemer e.a., 2005; Janssen e.a., 2005).

2.3. Kritiek op realistisch reken-wiskundeonderwijs
De actuele aandacht voor reken-wiskundeonderwijs vertaalt zich onder andere in kritische geluiden ten opzichte van de zogenoemde realistische reken-wiskundedidactiek, zoals deze in de afgelopen decennia is ontwikkeld. Het gaat hierbij met name om bepaalde deelaspecten (Van de Craats, 2007; vergelijk Uittenbogaard, 2007; 2008b; Andeweg, 2008) of bepaalde uitwerkingen (Opmeer, 2005; vergelijk Gravemeijer, 2006). Vanwege de controverse die hieromtrent is ontstaan stelt de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen (KNAW) een onderzoek in naar de relatie tussen didactische aanpakken en resultaten binnen het reken-wiskundeonderwijs. Op het moment van dit schrijven is dit onderzoek nog niet afgerond.
Overigens lijkt nuancering hierbij op zijn plaats. Kritiekpunten komen soms – met name, maar niet uitsluitend, in de media – uitvergroot en contraproductief in beeld (vergelijk Siersma, 2008; Ros 2009). Hoogland (2008b) wijst er op dat in de discussie vervor-mingen optreden, die leiden tot karikaturen die het reken-wiskundeonderwijs niet verder helpen.

2.4. Implicaties voor de kennisbasis rekenen-wiskunde
Een kennisbasis rekenen-wiskunde zou ons inziens moeten bijdragen aan een zodanige toerusting van startbekwame leerkrachten dat zij – binnen de hierboven geschetste context – in hun praktijk verantwoorde inhoudelijke en didactische keuzes kunnen maken. Dit impliceert eveneens het kunnen innemen van een door kennis onderbouwd standpunt.
Dit betekent bijvoorbeeld dat startbekwame leerkrachten op de hoogte zijn van verschillende didactische aanpakken met de mogelijke voor- en nadelen daarbij. Het betekent ook dat zij de actuele discussies kunnen duiden vanuit ontwikkeling en geschiedenis van reken-wiskundedidactiek. Dergelijke zaken zijn dan ook verwerkt in de kennisbasis rekenen-wiskunde. Daarbij moet overigens worden opgemerkt dat in deze zin de kennisbasis nooit 'af' kan zijn en dus zal moeten worden onderhouden.

3. Wat moeten (startbekwame) leerkrachten kennen en kunnen?

Het verwerven van de kennis uit deze kennisbasis is geen doel op zich. Het gaat er om wat een startbekwame leerkracht kán met deze kennis, namelijk deze kennis inzetten bij het realiseren van reken-wiskundeonderwijs op de basisschool.

3.1. Professionele gecijferdheid
Het geheel aan reken-wiskundige kennis, vaardigheden en inzichten van een (startbekwame) leerkracht wordt aangeduid met het begrip *professionele gecijferdheid*. Dit begrip heeft in de loop der jaren verschillende uitwerkingen gekregen (vergelijk Goffree, 1992a; Goffree & Dolk, 1995; VSLPC, 1997; Blom & Smits, 2000; 2001; Den Hertog, 2006; Oonk, 2009). Op basis van een recent historisch en internationaal overzichtsartikel over professionele gecijferdheid (Oonk e.a. 2007) vallen een viertal competenties te onderscheiden waarover een startbekwame leerkracht moet beschikken om adequaat reken-wiskundeonderwijs te kunnen realiseren:

- Het zelf beschikken over voldoende rekenvaardigheid en gecijferdheid.
- Rekenen-wiskunde betekenis kunnen geven voor kinderen.
- Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kinderen kunnen realiseren.
- Wiskundig denken van kinderen kunnen bevorderen.

Het gaat bij professionele gecijferdheid, kortom, om de reken-wiskundige kennis die de (startbekwame) leerkracht nodig heeft om in staat te zijn het leren van rekenen-wiskunde door basisschoolleerlingen op gang te brengen, te ondersteunen en te bevorderen. De eigen vaardigheid die een startbekwame leerkracht moet hebben gaat daarmee verder dan beheersing van de leerstof rekenen-wiskunde op de basisschool en wordt bovendien verrijkt met vakdidactische kennis, vaardigheden en inzichten (vergelijk Ball & Bass, 2000; Grossman & Schoenfeld, 2005; Hill e.a., 2007; NCETM, 2008; DMV/GDM/MNU, 2008; Ball e.a., 2008).

Bij het formuleren van de kennisbasis rekenen-wiskunde is uitgegaan van deze vakspecifieke competenties. Hieronder worden ze eerst beknopt toegelicht. Vervolgens staat aangegeven hoe onderliggende kennis voor deze competenties in de kennisbasis is verwerkt.

Het zelf beschikken over voldoende rekenvaardigheid en gecijferdheid
Ten eerste beschikt de leerkracht zelf over voldoende rekenvaardigheid en gecijferdheid. De leerkracht beheerst de leerstof voor rekenen-wiskunde van de basisschool op een geavanceerd niveau; hij/zij kan de reken-wiskundeopgaven van de basisschool niet alleen instrumenteel, maar ook inzichtelijk oplossen. In verband met doorgaande leerlijnen geldt dat ook voor de rekeninhouden van de onderbouw van het voortgezet onderwijs.
In termen van de door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen taal en rekenen (2008a; 2008b, 2009) geformuleerde referentieniveaus gaat het om niveau 3S (zie ook paragraaf *3.2. Doorlopende leerlijnen rekenen*).

Rekenen-wiskunde betekenis kunnen geven voor kinderen.
Ten tweede is de professioneel gecijferde leerkracht in staat om reken-wiskundige kennis, begrippen en vaardigheden voor kinderen betekenis te geven. De leerkracht herkent reken-wiskundige zaken (getallen, getalsmatige en meetkundige aspecten, verbanden) in de eigen omgeving en in die van de kinderen (Oonk e.a., 2007), weegt deze en maakt ze toegankelijk voor de leerlingen (VSLPC, 1997). De leerkracht betrekt de actualiteit in het reken-wiskundeonderwijs (Goffree & Dolk, 1995) en houdt daarbij rekening met wat de leerlingen interesseert en motiveert (VSLPC 1997; Greven, 2005; Ball e.a., 2008). Hij/zij maakt gebruik van de realiteit en de actualiteit voor betekenisverlening en kan deze gebruiken voor het geven van voorbeelden, vraagstukken en toepassingen (vergelijk Kool, 2009). Daarbij kan de leerkracht zelf de uit de realiteit gedestilleerde wiskunde met wiskundige middelen aanpakken. Hieronder valt bijvoorbeeld ook het kunnen interpreteren van statistische gegevens en deze te verwerken in passende grafieken en het ontmaskeren van fouten in de media (Oonk, 2009).

Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kinderen kunnen realiseren.
De derde vakspecifieke competentie van de professioneel gecijferde leerkracht is het kunnen realiseren van oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kinderen. Hierbij gaat het bijvoorbeeld om het begrijpen en doorgronden van rekenfouten, het uitvoeren van een foutenanalyse en het opmerken en corrigeren van foutief of (nog) niet formeel gebruik van wiskundetaal. Ook het doorgronden van wiskundige redeneringen van leerlingen en bij niet-standaard aanpakken kunnen bepalen of deze algemeen geldig zijn, valt hieronder (Ball e.a., 2008). De professioneel gecijferde leerkracht kan bij opgaven meerdere alternatieve oplossingswijzen hanteren en volgen, accepteren en begrijpen; bij veel voorkomende oplossingsstrategieën zowel denkstappen toevoegen als verkortingen aangeven; en kan van oplossingswijzen beoordelen in hoeverre deze perspectief bieden in het licht van langlopende leerprocessen rekenen-wiskunde (Van Zanten, 2007). Hetzelfde geldt voor oplossingswijzen

op verschillende abstractieniveaus – contextgebonden, met modellen of materialen en formeel-abstract (Kool, 2009, vergelijk Shulman, 1986). De leerkracht kan eigen en andere aanpakken ver(ant)woorden, aan elkaar relateren en daarbij wiskundig-reflectieve vragen stellen (Oonk, 2004; 2009). Bij het oplossen van vraagstukken en het uitleggen van oplossingswijzen kan de leerkracht passende strategieën en (referentie)maten hanteren en passend(e) modellen, schema's en materialen inzetten (Oonk, 2009), geschikte voorbeelden geven en passende (oefen)vraagstukken kiezen. De professioneel gecijferde leerkracht doorziet de reikwijdte en gebruiksmogelijkheden van verschillende representaties en kan adequaat reageren op waarom-vragen van leerlingen (Ball e.a., 2008).

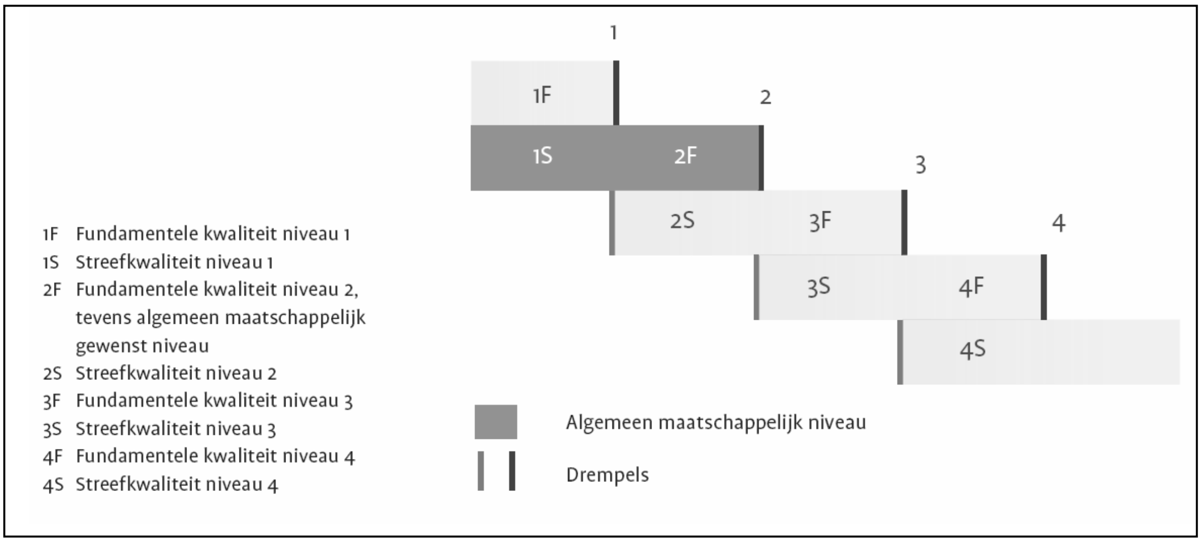
Wiskundig denken van kinderen kunnen bevorderen.
Ten slotte is de leerkracht in staat het wiskundig denken van kinderen te bevorderen. De professioneel gecijferde leerkracht maakt in zijn/haar reken-wiskundeonderwijs effectief en efficiënt gebruik van zijn/haar wiskundig en didactisch repertoire. In dit aspect van professionele gecijferdheid wordt het mathematiseren als het ware verstrengeld met het didactiseren (Oonk e.a., 2007). Het gaat er daarbij om dat inhoud en activiteiten reken-wiskundig en didactisch aansluiten bij de methode en passen binnen de leerlijn van de methode, en binnen methodeoverstijgende leerlijnen als TAL of TULE. Ook leerjaaroverstijgend, in verband met de doorlopende ontwikkeling van leerlingen (vergelijk ook Ball e.a., 2008). De leerkracht stimuleert de wiskundige activiteit bij de verschillende specifieke leerprocessen, zoals problemen oplossen, verwoorden, notaties ontwikkelen, wiskundig redeneren, oefenen, toepassen, memoriseren en automatiseren (Greven, 2005; Oonk e.a., 2007). Daarbij bevordert de leerkracht een positieve attitude en zelfvertrouwen bij de leerlingen ten aanzien van rekenen-wiskunde.
Verder ontwerpt en realiseert de leerkracht adaptief reken-wiskundeonderwijs doordat hij/zij bijvoorbeeld de inhoud van de reken-wiskundemethode verrijkt en aanpast, opgaven makkelijker dan wel moeilijker maakt, productieve wiskundige vragen stelt en uiteenlopende representaties hanteert (Ball e.a., 2008). Keuzes hiertoe worden gemaakt op grond van niveau, kennis en vaardigheden van de leerlingen, zoals die blijken uit diagnosticerend onderwijzen, interactief lesgeven, taalgebruik van de leerlingen, observaties, en toetsen, testen, peilen, analyseren en evalueren van vorderingen (Van Eerde, 1996; Van Eerde & Hajer, 2005).

Bij dit alles maakt de leerkracht gebruik van zijn/haar kennis van kerninzichten, specifieke moeilijkheden en veel voorkomende misconcepties en gebruikelijke fouten bij de verschillende domeinen (vergelijk Shulman, 1986; Hill e.a., 2008).

Verwerking in de kennisbasis
Onderliggende kennis voor de hier onderscheiden vakdidactische competenties is als volgt in de kennisbasis verwerkt.
Het zelf beschikken over voldoende rekenvaardigheid en gecijferdheid komt met name terug in de terugkerende paragrafen *Kennis van rekenen-wiskunde* (zie ook de hierna volgende paragraaf *3.2. Doorlopende leerlijnen*).
Onderliggende kennis voor het *rekenen-wiskunde betekenis kunnen geven voor kinderen* is vooral verwerkt in de terugkerende (sub)paragrafen *Maatschappelijke relevantie*, *Contexten en toepassingssituaties* en *Verstrengeling en samenhang*.
Benodigde kennis voor het *oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kinderen kunnen realiseren* komt vooral terug in de subparagrafen *Modellen en schema's* en *Oplossingsprocessen en niveauverhoging*.
Voor *het wiskundig denken van kinderen kunnen bevorderen* tenslotte, zijn kenniselementen uit alle paragrafen van de kennisbasis van belang. Bij deze competentie gaat het immers om mathematiseren en didactiseren in samenhang.

3.2. Doorlopende leerlijnen rekenen
De Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008a; 2008b; 2009) onderscheidt vier referentieniveaus voor taal en rekenen in de schoolloopbaan; einde basisonderwijs (niveau 1), eind vmbo bb/kb / mbo 1/2 (niveau 2), eind havo / mbo 4 (niveau 3) en eind VWO (niveau 4). Bij elk

niveau wordt een fundamenteel niveau (F) en een streefniveau (S) onderscheiden. Niveau 2F duidt het algemeen maatschappelijk gewenst niveau aan. Niveau 3S is voor rekenen slechts ten dele geoperationaliseerd, vanwege de differentiële doelen die op dit niveau gelden, bijvoorbeeld voor technische opleidingen en pabo (2008b, pg. 25). Niveau 4 is voor rekenen-wiskunde – in tegenstelling tot voor taal - in het geheel niet gespecificeerd, omdat “rekenen op dat niveau helemaal in meer geavanceerde wiskunde is opgegaan” (2008b, pg. 23).



Bron: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2008a, pg. 19

De Expertgroep Doorlopende Leerlijnen beveelt aan de referentieniveaus op te nemen in de bekwaamheidseisen voor de lerarenopleidingen (2008a, pg. 65). Anders dan bij taal, kan daarbij dus niet worden verwezen naar referentieniveau 4. Dit levert voor de kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo geen probleem op, want voor het kunnen realiseren van rekenen-wiskunde in het basisonderwijs, gaat het niet om beheersing van geavanceerde wiskunde – wat iets wezenlijk anders is dan rekenen-wiskunde op de basisschool – maar om geavanceerde beheersing van de reken-wiskundeinhouden van de basisschool (vergelijk National Mathematics Advisory Panel, 2008). Voor het kunnen verzorgen van reken-wiskundeonderwijs in het basisonderwijs gaat het bijvoorbeeld om “making mathematical sense of student work and choosing powerful ways of representing the subject so that it is understandable to students” (Ball e.a., 2008, pg. 404).

De Expertgroep Doorlopende Leerlijnen formuleert het als volgt: “Om als leraar leerlingen in hun leerproces op weg te helpen, is het noodzakelijk dat hij/zij diepgaande kennis heeft van de vakinhoud, maar ook van manieren om die vakinhoud op verschillende manieren te presenteren aan leerlingen.” (2008a, pg. 64). In internationale literatuur worden in dit verband de begrippen *mathematical content knowledge* en *pedagogical content knowledge* gebruikt (vergelijk Shulman, 1986; Hill e.a., 2007; Silverman & Thompson, 2008; Ball e.a., 2008). Deze begrippen worden wel onderscheiden, maar zijn niet los van elkaar te zien. In de kennisbasis rekenen-wiskunde zijn ze vrij vertaald als: *kennis van rekenen-wiskunde* en *kennis voor onderwijzen van rekenen-wiskunde*.

Verwerking in de kennisbasis
De door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen geformuleerde referentieniveaus zijn op twee manieren in de kennisbasis terug te vinden. Ten eerste waar het gaat om rekenen-wiskunde als vakgebied in het basisonderwijs en (dus) object van studie op de pabo. Hierbij gaat het om referentieniveau 1 en, in verband met de doorlopende lijn van basis- naar voort-

gezet onderwijs, referentieniveau 2. Onderliggende kennis is verwerkt in de paragrafen *Kennis van rekenen-wiskunde* en *Kennis voor onderwijzen van rekenen-wiskunde*.
Ten tweede waar het gaat om het eigen beheersingsniveau. Voortbouwend op het door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen voor de pabo aanbevolen instroomniveau 3F bereikt de startbekwame leerkracht een beroepspecifieke invulling van referentieniveau 3S. In het hoofdstuk *De kennisbasis en de referentieniveaus rekenen* wordt gedetailleerd aangegeven hoe dit referentieniveau in de kennisbasis is verwerkt.

4. Opbouw

De kennisbasis rekenen-wiskunde is opgebouwd in twee delen: *Globale theorie rekenen-wiskunde en didactiek*, en *Domeinbeschrijvingen*. Daarnaast is een hoofdstuk *De kennisbasis en de referentieniveaus rekenen* toegevoegd, waarin gedetailleerd wordt aangegeven hoe de door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen onderscheiden referentieniveaus rekenen in de kennisbasis zijn verwerkt.
Zie bijlage 2 voor de kennisbasis in schema.

4.1. Globale theorie rekenen-wiskunde en didactiek

Globale theorieën zijn overkoepelende didactische noties. In dit eerste hoofdstuk wordt kort ingegaan op doelen, leerprocessen en vakdidactiek bij rekenen-wiskunde op de basisschool. Dit hoofdstuk biedt een globaal kader voor de informatie uit de domeinbeschrijvingen.

4.2. Domeinbeschrijvingen

Aansluitend op de kerndoelen voor het basisonderwijs (OC&W, 2006) en de indeling van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008a; 2008b; 2009) worden de volgende domeinen onderscheiden: *Hele getallen* (hoofdstuk 2), *Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen* (hoofdstuk 3), *Meten* (hoofdstuk 4), *Meetkunde* (hoofdstuk 5) en *Verbanden* (hoofdstuk 6).
Elke domeinbeschrijving omvat: een duiding van de maatschappelijke relevantie, kennis van rekenen-wiskunde en kennis voor onderwijzen van rekenen-wiskunde van het betreffende domein, en de samenhang met andere domeinen en met andere vakgebieden.

Bewerkingen, vormen van rekenen (hoofdrekenen, rekenen volgens standaardprocedures en cijferen, schattend rekenen en gebruik van de rekenmachine) en wiskundetaal zijn allereerst uitgewerkt in de domeinbeschrijving *Hele getallen*. Een en ander wordt in de overige domeinbeschrijvingen niet herhaald; daar worden alleen steeds die zaken toegevoegd die specifiek voor het betreffende domein gelden.

Vanwege de sterke onderlinge verwevenheid start de domeinbeschrijving *Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen* met een gezamenlijk deel over de maatschappelijke relevantie van dit domein en de onderlinge verstrengeling en samenhang. Daarna volgt de beschrijving van de vier afzonderlijke subdomeinen.

De opbouw van de paragrafen *Kennis van rekenen-wiskunde* en *Kennis voor onderwijzen van rekenen-wiskunde* is bij alle domeinen zoveel mogelijk hetzelfde gehouden. Echter, vanwege specifieke kenmerken van de domeinen *Meten*, *Meetkunde* en *Verbanden*, wijkt de indeling bij deze domeinbeschrijvingen af.

5. Beperking

Kennis van leerkrachten is veelomvattend en bestaat bovendien uit een grote variëteit van soorten kennis, uiteenlopend van praktijk- en ervaringskennis tot kennis van de leerstof en kennis van onderwijsleertheorieën (Verloop & Lowyck, 2003). Het begrip ‘kennisbasis’ kent verschillende invullingen, variërend van een verzameling kennis van vakinhouden ‘die te weten valt’ tot het geheel van competenties van de leraar. Daarbij moet worden opgemerkt dat

de begrippen ‘data’, ‘informatie’, ‘kennis’ en ‘competenties’ vaak door elkaar worden gebruikt, elkaar soms overlappen en, afhankelijk van het ingenomen kentheoretisch standpunt, verschillende invullingen hebben (Cauwenberghe, 2008).
In de opdracht voor het vaststellen van de kennisbasis rekenen-wiskunde is uitgegaan van de invulling van het begrip ‘kennisbasis’ als: de expliciete / geboekstaafde kennis van het vak en de vakdidactiek van rekenen-wiskunde, waarvan alle startbekwame leerkrachten kennis moeten hebben. Kennis van de leerling, van leren en van onderwijzen, valt buiten het bereik van de opdracht (Werken aan kwaliteit, 2008, pg. 4). Dit houdt een beperking in; hiermee is nog niet het geheel van (vakspecifieke) kennis en competenties die van belang zijn voor het adequaat verzorgen van reken-wiskundeonderwijs vastgelegd. Vanwege deze beperkte invulling van de opdracht, wordt in deze kennisbasis bijvoorbeeld niet ingegaan op pedagogische of organisatorische aspecten die evenzeer van belang zijn voor het realiseren van reken-wiskundeonderwijs. Zo worden voor rekenen-wiskunde relevante leertheorieën enkel genoemd en niet uitgewerkt. Dergelijke kennis over het leren van rekenen-wiskunde ligt wel ten grondslag aan het onderwijzen van rekenen-wiskunde en behoort dus evenzeer onderdeel van de opleiding tot leerkracht te zijn.
De volgende zaken zijn niet opgenomen in de kennisbasis, of worden enkel aangestipt:

- Ambachtelijke en organisatorische kennis voor het verzorgen van reken-wiskundeonderwijs.
- Kennis van specifieke reken-wiskundemethodes en additionele materialen.
- Toetsen, testen en observeren bij rekenen-wiskunde.
- Rekenen-wiskunde binnen de één-zorgroute en specifieke orthodidactiek rekenen-wiskunde.
- Rekenen-wiskunde voor kinderen met ernstige reken-wiskundeproblemen en dyscalculie (ERWD).
- Rekenen-wiskunde voor meerbegaafde en hoogbegaafde rekenaars.
- Rekenen-wiskunde binnen traditioneel vernieuwingsonderwijs en moderne vernieuwingsscholen.
- Voor rekenen-wiskunde potentieel relevante neuropsychologische theorieën.

6. Verwijzingen

In de kennisbasis zijn verwijzingen op twee niveaus opgenomen. In de eerste plaats zijn daar verwijzingen die dienst doen als (wetenschappelijke) verantwoording van de inhoud van de kennisbasis. Dit zijn verwijzingen naar zo origineel mogelijke bronnen. Daarnaast zijn verwijzingen opgenomen naar literatuur die geschikt is als bron voor studenten. Dit zijn steeds zo recent mogelijke bronnen.
De volledige lijst met bronnen is opgenomen achterin de kennisbasis. In die lijst is literatuur die geschikt is als bron voor studenten aangegeven met een *.

Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo
Uitwerkingen

Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo
Uitwerkingen

I. Globale theorie

1. Globale theorie rekenen-wiskunde en didactiek
Globale theorie van rekenen-wiskunde betreft theorieën over het leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde in algemene zin, bijvoorbeeld over het gebruik van modellen als tussenstap van concreet naar abstract denken. Lokale theorieën, ook wel domeinspecifieke theorieën genoemd, gaan over het leren en onderwijzen van specifieke onderdelen van rekenen-wiskunde (Treffers, 1978; Goffree & Dolk, 1995). Hierbij gaat het bijvoorbeeld over het gebruik van specifieke modellen binnen bepaalde domeinen. Deze lokale theorieën zijn in de volgende hoofdstukken vastgelegd in de vorm van domeinbeschrijvingen.
Globale theorie en lokale theorieën zijn wel te onderscheiden, maar niet te scheiden. Bijvoorbeeld: het (globale) idee van het gebruik van modellen als middel om kinderen te laten komen tot abstrahering en formalisering vindt in de lokale theorie van het vermenigvuldigen een uitwerking in het gebruik van enkele specifieke modellen als het groepjesmodel, rechthoekmodel en de getallenlijn.
Globale theorie en lokale theorieën spelen gezamenlijk een rol in de specifieke invulling bij rekenen-wiskunde van (algemene) onderwijskundige en pedagogische concepten als diagnosticerend onderwijzen (zie bijvoorbeeld Van Eerde, 1996), adaptief onderwijs (Stevens, 1997; 2002) en het creëren van een rijke leeromgeving (zie bijvoorbeeld Klabbers, 2009a; 2009b; Steenbeek & Uittenbogaard, 2009). Hetzelfde geldt voor meer vakspecifieke concepten als het leerlandschap (Fosnot & Dolk, 2003), kleuterwiskunde (Baltussen e.a., 1997; Goffree, 2005) en de ijsbergmetafoor (Boswinkel & Moerlands, 2001; 2003; Boswinkel & Nelissen, 2007).
Kennis die mede voortvloeit uit globale theorie van rekenen-wiskunde, betreft bijvoorbeeld kennis van waarden en doelen van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, waaronder kerndoelen, tussendoelen en referentieniveaus.

1.1. Doelen van het vakgebied rekenen-wiskunde op de basisschool

Rekenen-wiskunde op de basisschool is een veelomvattend vakgebied. De leerstof loopt uiteen van het verwerven van formele rekenvaardigheid tot het ontwikkelen van een brede begripsbasis op het gebied van getallen, getalsmatige gegevens, bewerkingen, wiskundig inzicht, meten en meetkunde en verschijningsvormen en toepassingen van een en ander. Rekenen-wiskunde helpt mensen greep te krijgen op de wereld om hen heen – denk aan het omgaan met kosten, prijzen en geld, meten en maten, groei, leeftijd, tijdsbesef, afstanden, reizen en schaal, verhoudingen en procenten, weergaven van getalsmatige gegevens in grafieken en nog meer. Rekenwiskundige kennis, inzicht en vaardigheden die kinderen opdoen op de basisschool zijn daarmee van belang voor het maatschappelijk functioneren en het vervolgonderwijs. In dit kader wordt wel de term gecijferdheid (vergelijk Treffers, 1989) gehanteerd, zie hieronder.
Naast deze maatschappelijke en voorbereidende waarde van rekenen-wiskunde, heeft rekenen-wiskunde een intrinsiek vormende waarde. Hieronder valt het doorgronden van wiskundige noties, probleemoplossen, en het ontwikkelen van een onderzoekende houding. Hierbij valt bijvoorbeeld te denken aan het doorgronden van ons tientallig positionele getalsysteem en het aflezen en begrijpen van grafieken en andere vormen van grafische datarepresentatie. Een en ander komt tot uitdrukking in de voor het basisonderwijs gehanteerde kerndoelen (en de karakteristiek die daarin wordt gegeven), waarin naast aandacht voor getallen, bewerkingen, meten en meetkunde ook nadrukkelijk wiskundig inzicht en gecijferdheid zijn opgenomen (OC&W, 2006).

Karakteristiek rekenen-wiskunde
In de loop van het primair onderwijs verwerven kinderen zich – in de context van voor hen betekenisvolle situaties – geleidelijk vertrouwdheid met getallen, maten, vormen, structuren en de daarbij passende relaties en bewerkingen. Ze leren 'wiskundetaal' gebruiken en worden 'wiskundig geletterd' en gecijferd.
De wiskundetaal betreft onder andere rekenwiskundige en meetkundige zegswijzen, formele en informele notaties, schematische voorstellingen, tabellen en grafieken en opdrachten voor de rekenmachine.
'Wiskundig geletterd' en gecijferd betreft onder andere samenhangend inzicht in getallen, maatinzicht en ruimtelijk inzicht, een repertoire van parate kennis, belangrijke referentiegetallen en -maten, karakteristieke voorbeelden en toepassingen en routine in rekenen, meten en meetkunde. Meetkunde betreft ruimtelijke oriëntatie, het beschrijven van verschijnselen in de werkelijkheid en het redeneren op basis van ruimtelijk voorstellingsvermogen in twee en drie dimensies.
De onderwerpen waaraan kinderen hun 'wiskundige geletterdheid' ontwikkelen, zijn van verschillende herkomst: het leven van alledag, andere vormingsgebieden en de wiskunde zelf. Bij de selectie en aanbieding van de onderwerpen wordt rekening gehouden met wat kinderen al weten en kunnen, met hun verdere vorming, hun belangstelling en de actualiteit, zodat kinderen zich uitgedaagd voelen tot wiskundige activiteit en zodat ze op eigen niveau, met plezier en voldoening, zelfstandig en in de groep uit eigen vermogen wiskunde doen: wiskundige vragen stellen en problemen formuleren en oplossen.
In de rekenwiskundeles leren kinderen een probleem wiskundig op te lossen en een oplossing in wiskundetaal aan anderen uit te leggen. Ze leren met respect voor ieders denkwijze wiskundige kritiek te geven en te krijgen. Het uitleggen, formuleren en noteren en het elkaar kritiseren leren kinderen als specifiek wiskundige werkwijze te gebruiken om alleen en samen met anderen het denken te ordenen, te onderbouwen en fouten te voorkomen.

Bron: OC&W, 2006, pg. 37-38.

1.1.1. Gecijferdheid

Gecijferdheid verwijst naar het vermogen om adequaat te kunnen handelen en redeneren in (alledaagse) situaties waarin getallen, getalsmatige en meetkundige aspecten naar voren komen (Paulos, 1988; 1991; McIntosh e.a., 1992). Gecijferdheid is daarom een kernbegrip in het kader van het maatschappelijk functioneren (Hoogland & Meeder, 2007). Onder gecijferdheid in de context van het adequaat kunnen functioneren in de maatschappij wordt verstaan het zodanig beheersen van een aantal basisvaardigheden dat je je kunt redden in het dagelijkse leven en kunt participeren in de samenleving (Van Groenestijn, 2002; Hoogland, 2005; 2008a). Onderwijs dient daarop voor te bereiden (vergelijk Cockcroft, 1982). Het gaat daarbij bijvoorbeeld om het leren inschatten van de grootte van getallen, het gebruiken van referentiegetallen en het kunnen inschatten hoe bewerkingen uitpakken (NCTM, 2000). Een en ander komt ook tot uitdrukking in de (hierboven opgenomen) omschrijving uit de kerndoelen van de karakteristiek van rekenen-wiskunde. Gecijferdheid omvat uiteenlopende zaken, zoals:

- In het dagelijks leven kunnen schattend rekenen, hoofdrekenen, cijferen, het gebruiken van de rekenmachine en het al naar gelang van de situatie, een keuze kunnen maken voor een van deze rekenvormen (VSLPC, 1997; vergelijk Treffers, 1989; Goffree, 1995).
- Het correct en adequaat kunnen gebruiken van wiskundetaal (Goffree & Dolk, 1995).
- Het betekenis kunnen geven aan getallen, bewerkingen, maten en het metriek stelsel (Van Zanten, 2007).
- Redeneren en rekenen met kansen, grote (en zeer kleine) getallen, en beschikken over referentiematen en -getallen voor het doen van schattingen (Oonk e.a., 2007).
- Kunnen ontmaskeren van pseudo-wetenschappelijk gemanipuleer met getalsmatige informatie en statistisch denken met gevoel voor realiteit (Paulos, 1988).

De startbekwame leerkracht bevordert de ontwikkeling van gecijferdheid van zijn/haar leerlingen. In de domeinbeschrijvingen zijn de daartoe benodigde kenniselementen opgenomen, bijvoorbeeld de betekenis van getallen en bewerkingen in de paragrafen *Kennis van …* en contexten en toepassingssituaties bij *Kennis voor onderwijzen van …*. Vanwege het belang van gecijferdheid voor het maatschappelijk functioneren, wordt de maatschappelijke relevantie van de verschillende (sub)domeinen geduid.
In deel III van deze kennisbasis wordt ingegaan op de professionele gecijferdheid van de leerkracht; de gecijferdheid die het maatschappelijk functioneren ontstijgt en specifiek is voor het beroep van basisschoolleerkracht.

1.1.2. Kerndoelen, tussendoelen en referentieniveaus

Kerndoelen geven richting aan het onderwijs. Het zijn streefdoelen (OC&W, 2006), die ruim geformuleerd zijn, bijvoorbeeld:

> **Kerndoel 29**
> De leerlingen leren handig optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
>
> **Kerndoel 30**
> De leerlingen leren schriftelijk optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen volgens meer of minder verkorte standaardprocedures.

Bron: OC&W, 2006, pg. 43

Een onderwijsleertraject dat kan worden doorlopen om de kerndoelen voor rekenen-wiskunde te bereiken, is vastgelegd in TAL (Treffers e.a., 1999; Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001; 2004; Van Galen e.a., 2005; Gravemeijer e.a., 2007). TAL staat voor Tussendoelen Annex Leerlijnen. In TAL wordt een onderwijskader gegeven en zijn tussendoelen per leerjaar omschreven, bijvoorbeeld:

> **Hele getallen bovenbouw basisschool, tussendoel 4**
> Eind groep 6 kunnen de leerlingen delingen van meercijferige getallen door een ééncijferig getal oplossen via een herhaald proces van afschattend vermenigvuldigen en aftrekken, zowel kaal als in toepassingssituaties.
> Eind groep 7 kunnen ze elementaire delingen met meercijferige deeltallen en delers oplossen zowel met kale getallen als in toepassingssituaties waarin sprake is van verdelen, opdelen en afschattend vermenigvuldigen. Het gaat daarbij met name om contextopgaven waarin een rest verschijnt.

Bron: Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001, pg. 79.

De kerndoelen rekenen-wiskunde zijn uitgewerkt in inhouden en voorbeeldactiviteiten in TULE (Buijs e.a., 2008). TULE staat voor Tussendoelen en Leerlijnen. TULE omschrijft voorbeeldmatige uitwerkingen van leerlijnen in de vorm van activiteiten voor de lerende en activiteiten voor de leerkracht, bijvoorbeeld:

> **Groep 5 en 6**
>
> ***Wat doen de kinderen?***
> Op een zeker moment, als de verschillende procedures voor optellen en aftrekken voldoende zijn ingeoefend, reflecteren de kinderen op het voor deze bewerkingen doorlopen leerproces dat hen van hoofdrekenstrategieën via kolomsgewijze procedures naar cijferprocedures bracht. Zij worden zich bewust dat hiermee een repertoire aan oplossingswijzen is gecreëerd waaruit al naar gelang de situatie geput kan worden.
>
> ***Wat doet de leraar?***
> De leraar zorgt ervoor dat er reflectiemomenten in het leerproces zijn opgenomen waarin wordt teruggeblikt op de verschillende leerstappen die tijdens het leerproces zijn doorlopen, en maakt de kinderen bewust van het proces van verkorting en steeds efficiënter noteren van handelingen dat daarbij is doorgemaakt.

Bron: Buijs e.a., 2008, pg 134-135.

Voor basiskennis en basisvaardigheden (taal en) rekenen-wiskunde zijn door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008a; 2008b; 2009) referentieniveaus vastgesteld. Deze referentieniveaus geven gedetailleerde informatie over te bereiken doelen op verschillende momenten in de onderwijsloopbaan. Bij elk referentieniveau wordt aangegeven wat leerlingen moeten beheersen: paraat hebben, functioneel kunnen gebruiken en begrijpen (weten waarom).

Voor het basisonderwijs gaat het om een fundamenteel niveau 1 en streefniveau 1. Hieronder staat een voorbeeld uit het domein verbanden:

12 jaar	**1-fundament**	**1-streef**
Met elkaar in verband brengen - Verschillende voorstellingsvormen met elkaar in verband brengen - Gegevens verzamelen, ordenen en weergeven - Patronen beschrijven	Paraat hebben	Paraat hebben
	- Eenvoudige tabel gebruiken om informatie uit een situatiebeschrijving te ordenen	- Eenvoudige tabellen en diagrammen opstellen op basis van een beschrijving in woorden - Globale grafiek tekenen op basis van een beschrijving in woorden, bijvoorbeeld: tijd-afstand grafiek - Eenvoudige patronen in rijen getallen en figuren herkennen en voortzetten: 1 – 3 – 5 – 7 - … 100 – 93 – 86 – 79 - … - Stippatronen
	Functioneel gebruiken	Functioneel gebruiken
	- Eenvoudige patronen (vanuit situatie) beschrijven in woorden, bijvoorbeeld: Vogels vliegen in V-vorm. “Er komen er steeds 2 bij.”	- Conclusies trekken door gegevens uit verschillende informatiebronnen met elkaar in verband te brengen (alleen in eenvoudige gevallen)
	Weten waarom	Weten waarom
	- Informatie op veel verschillende manieren kan worden geordend en weergegeven	- Keuze om informatie te ordenen door middel van tabel, grafiek, diagram

Bron: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2009, pg. 41

.

Het fundamentele niveau 1 is het niveau dat door 85% van de leerlingen aan het einde van de basisschool moet zijn behaald, het streefniveau 1 moet door 65% van de leerlingen zijn behaald. Momenteel liggen deze percentages op 75% respectievelijk 50%, wat betekent dat een grotere inspanning nodig is (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen 2008a; 2008b, Noteboom, 2008; 2009). In dit verband zijn recent door PO-raad / Projectbureau Kwaliteit inhoudelijke en didactische aandachtspunten per groep op een rij gezet in een brochure voor het basisonderwijs, met expliciete aandacht voor zwakkere rekenaars en het voorkomen van uitval (Gelderblom, 2009).

1.2. Leerprocessen bij rekenen-wiskunde

Bij rekenen-wiskunde op de basisschool gaat het om uiteenlopende leerprocessen, zoals betekenisconstructie en begripsvorming, problemen oplossen, verwoorden, notaties ontwikkelen, wiskundig redeneren, oefenen, toepassen, memoriseren en automatiseren. Het gaat daarbij om langlopende wiskundige leerprocessen en leeractiviteiten als abstraheren, classificeren, schematiseren en structureren (vergelijk Skemp, 1971). Het geheel aan optredende leerprocessen bij rekenen-wiskunde kan worden gekarakteriseerd als een constructief, cumulatief, zelfgereguleerd, intentioneel, contextgebonden en interactief proces van kennisverwerving, betekenisgeving en vaardigheidsontwikkeling (De Corte, 1995; vergelijk Fosnot & Dolk, 2003).
Onderliggende algemene theorieën over leren (en onderwijzen) die van belang zijn voor het leren (en onderwijzen) van (onder andere) rekenen-wiskunde (vergelijk Van Parreren & Nelissen, 1977; Freudenthal, 1984; Van Luit, 1994; Ruijssenaars e.a., 2004; Van Eerde, 2005) zijn bijvoorbeeld de cognitieve ontwikkelingspsychologie (zie bijvoorbeeld Piaget, 1952; 1969), de handelings(leer)psychologie (zie bijvoorbeeld Gal'perin, 1972; 1978, Van Parreren, 1971/1990), de cognitieve (leer)psychologie (zie bijvoorbeeld Mayer, 1987; Beishuizen, 1993; 1997) en het sociaal-constructivisme (zie bijvoorbeeld Cobb, 1987; Cobb e.a., 1991; De Corte e.a., 1996). Deze theorieën vallen op zich buiten het bereik van (de opdracht van) deze kennisbasis, maar er wordt een enkele keer wel naar verwezen.

1.2.1. Mathematiseren en formaliseren

Leren van rekenen-wiskunde kan worden beschouwd als een actief proces van mathematiseren. Mathematiseren omvat het zodanig modelleren van problemen dat ze met wiskundige middelen kunnen worden opgelost (horizontaal mathematiseren) en het oplossen van wiskundige problemen met wiskundige middelen, waarbij wiskundige kennis en vaardigheden zich uitbreiden en op een steeds hoger niveau komen (verticaal mathematiseren) (Treffers, 1987; Treffers e.a., 1989). Formaliseren kan worden beschouwd als het (leer)proces waarbij reken-wiskundige problemen op steeds abstracter niveau worden opgelost (vergelijk horizontaal mathematiseren); van concreet betekenisvol, via modelondersteund, naar ten slotte formeel, abstract. Binnen deze wiskundige activiteiten zijn deelprocessen als decontextualiseren, modelleren, probleemoplossen, het ontwikkelen van wiskundetaal en het formaliseren van oplosprocedures sterk met elkaar verweven (Gravemeijer, 1994b).

1.2.2. Automatiseren en memoriseren

Automatiseren is het leren (vrijwel) routinematig uitvoeren van rekenhandelingen. Bij het toepassen van geautomatiseerde vaardigheden is het inzicht van de werkwijze vaak naar de achtergrond verschoven. Over het geautomatiseerd uitvoeren van rekenvaardigheden hoeft als het ware niet meer te worden nagedacht. Memoriseren is het uit het hoofd leren kennen van rekenfeiten (Treffers e.a., 1999; Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001). In termen van leerdoelen, dus als resultante van leerprocessen, kan een onderscheid worden gemaakt tussen (bijvoorbeeld) parate kennis en inzicht. Bijvoorbeeld het onderscheid paraat hebben, functioneel kunnen gebruiken en begrijpen (weten waarom), dat de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen hanteert (2008a; 2008b; vergelijk Van Streun, 2001). In termen van leerprocessen is echter geen sprake van een strikte scheiding; betekenisverlening (begripsvorming en inzicht) enerzijds en vaardigheidsontwikkeling (oefenen en automatiseren) anderzijds zijn verschillende aspecten van het leren van rekenen-wiskunde. Deze leerprocessen beïnvloeden elkaar via voortgaande schematisering en modellering. Dat neemt overigens niet weg dat het onderscheid in didactische zin wel nuttig is (vergelijk Treffers e.a, 1989; Nelissen & Van Oers, 2000; Nelissen, 2008a; 2008b).

1.2.3. Taal en betekenisverlening

(Leren van) taal en rekenen-wiskunde zijn onlosmakelijk met elkaar verbonden. Taal speelt een rol als object van het leren, met name waar het gaat om wiskundetaal, zoals wiskundige begrippen. Daarnaast speelt taal een rol bij het leren zelf; bij het onder eigen woorden brengen van reken-wiskundige vraagstukken en problemen, bij het verwoorden van eigen denk- en oplossingsprocessen, en bij het interpreteren en begrijpen van uitleg en deelnemen aan interactie. Betekenisverlening en het leren van wiskundige begrippen, symbolen en procedures wordt beïnvloed door taalontwikkeling en taalvaardigheid. De rol van taal bij het leren van rekenen-wiskunde is een belangrijk aandachtspunt, met name bij taalzwakke (allochtone) leerlingen (Nelissen, 1998; 2002; Biemond, 1998; Van Eerde e.a, 2002; Vedder, 2002; Damhuis & Litjens, 2002; Van Eerde & Hajer, 2005; Prenger, 2005; Van den Boer, 2007).

1.3. Vakdidactiek rekenen-wiskunde

Vakdidactiek rekenen-wiskunde valt te karakteriseren aan de hand van een aantal vakdidactische noties, die sterk samenhangen met de in de vorige paragraaf geschetste kenmerken van het leren van rekenen-wiskunde. Een aantal van deze noties zijn geformuleerd in het kader van realistisch reken-wiskundeonderwijs en hebben in de huidige reken-wiskundemethodes hun uitwerkingen gevonden. In de actuele aandacht voor reken-wiskundeonderwijs worden bij deelaspecten ook nuanceringen aangebracht en kritische kanttekeningen geplaatst.
De startbekwame leerkracht kan in de eigen praktijk inhoudelijke en didactische keuzes maken en deze verantwoorden. Daarvoor moet hij/zij op de hoogte zijn van verschillende gangbare vakdidactische noties en variaties daarop, inclusief nuanceringen en kanttekeningen. Dit biedt de startbekwame leerkracht handvatten en gereedschappen om goed reken-wis-

kundeonderwijs te verzorgen; dat wil zeggen adaptief en diagnosticerend reken-wiskundeonderwijs waarin leerlingen met uiteenlopende mogelijkheden optimaal worden ondersteund in hun reken-wiskundige ontwikkeling.

1.3.1. Vakdidactische noties van realistisch reken-wiskundeonderwijs

Realistisch reken-wiskundeonderwijs kan worden gekenmerkt aan de hand van vijf samenhangende onderwijsleerprincipes. Deze onderwijsleerprincipes worden hieronder geduid (vergelijk Treffers, 1987; Treffers e.a., 1989; Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001). In reken-wiskundemethodes worden deze verschillend uitgewerkt en ook in basisscholen worden verschillende keuzes gemaakt en kunnen verschillende accenten worden gelegd. De ordening hieronder is niet de enig mogelijke (vergelijk bijvoorbeeld het ijsbergmodel van Boswinkel & Moerlands, 2001; 2003).

- Mathematiseren vanuit betekenisvolle realiteit:
  Om te zorgen dat leerlingen bij het redeneren en rekenen met getallen zich kunnen realiseren waar getallen en rekenhandelingen naar verwijzen, worden betekenisvolle problemen uit de leefwereld van kinderen ingezet. ‘Betekenisvol’ is relatief; wat betekenisvol is voor de één, hoeft dat niet te zijn voor een ander. ‘Realiteit’ wordt ruim opgevat; het gaat om datgene wat kinderen zich (kunnen) realiseren. In de loop van het basisonderwijs hoort ook de formele rekenwereld daar steeds meer bij. Passend gekozen contexten lokken mathematiseren uit en ondersteunen strategieontwikkeling. Mathematiseren werkt in twee richtingen; het gaat zowel om het begrijpen van de werkelijkheid met wiskundige middelen, als om het begrijpen van de wiskunde door de werkelijkheid erbij te betrekken (vergelijk Van den Brink, 1987; Van Oers, 1990; Gravemeijer, 2003).
- Modelleren en formaliseren:
  Om de afstand tussen het actuele informele handelen en het beoogde formele handelen te overbruggen worden hulpmiddelen als modellen, schema’s, betekenisondersteunende situaties en (structuur-)materialen aangeboden. De drieslag die daarbij wordt doorlopen gaat van informeel, contextgebonden redeneren en rekenen; via semi-formeel, modelondersteund redeneren en rekenen; tot formeel, vakmatig redeneren en rekenen. Naast modellen en schema’s zijn hulpnotaties, het opschrijven van deelstappen en tussenantwoorden, van belang (vergelijk Streefland, 1985; Van Dijk, 2002; 2003; Buijs, 2009a; Poland, 2007; 2009).
- Ruimte voor eigen inbreng van leerlingen:
  Vanuit de gedachte dat bij het leren van rekenen-wiskunde kinderen actief kennis en inzicht opbouwen, worden leerlingen uitgedaagd tot zelf wiskundig denken. Zij hebben een actieve en productieve inbreng in het leerproces. Dit krijgt zijn beslag in de vorm van eigen producties, productief oefenen en het aansluiten op de (informele) denkwijzen en aanpakken van kinderen. Dit wordt wel geleide heruitvinding en reconstructie genoemd. De leerkracht heeft hierbij een actief ondersteunende en pro-actieve rol, omdat hij/zij zicht heeft op het lange-termijn perspectief van verschillende aanpakken (vergelijk Freudenthal 1991; Simon, 1995).
- Interactie, reflectie en niveauverhoging:
  Reflecteren op doorlopen oplossingswijzen van jezelf en van anderen wordt gebruikt als hulpmiddel om te komen tot verkorting, abstrahering en het doorzien van wiskundige relaties tussen verschillende aanpakken. Het verwoorden van oplossingswijzen ondersteunt het verinnerlijken van handelingen. Door middel van interactief reken-wiskundeonderwijs kunnen aanpakken en ideeën worden uitgewisseld. Waar mogelijk gaat het ook om het adequaat kunnen kiezen van passende en efficiënte oplosprocedures (vergelijk Nelissen, 1987; 1988; 2002; Borghouts e.a., 2007; Van Eerde, 2008).
- Verstrengeling van leerlijnen:
  Rekenen-wiskunde bestaat uit een georganiseerd en gestructureerd geheel van samenhangende domeinen. Leerlijnen worden ten behoeve van begripsvorming en toepasbaarheid met elkaar verbonden, en verbonden met de realiteit als bron en toepassingsgebied van wiskundige begrippen en structuren. Elementen uit de ene leerlijn helpen bij het leren binnen een andere leerlijn en het leren van verschillende domeinen van rekenen-wiskunde gaat samen op.

1.3.2. Nuanceringen en kanttekeningen bij realistisch reken-wiskundeonderwijs

Momenteel worden nuanceringen en kritische kanttekeningen bij realistisch reken-wiskundeonderwijs geplaatst (bijvoorbeeld Opmeer, 2005; vergelijk Gravemeijer, 2006). Hoogland (2008b) wijst er op dat als de uitwerking van bepaalde uitgangspunten doorschiet, er vervormingen optreden. Hij noemt bijvoorbeeld dat de gedachte dat inzicht belangrijk is voor het beklijven van kennis en vaardigheden kan leiden tot de vervorming dat veelvuldig oefenen niet meer nodig zou zijn, en dat het benutten van de eigen, informele aanpakken van leerlingen kan doorschieten in het aanbieden van allerlei verschillende strategieën, in plaats van te streven naar de meest effectieve strategie.

Ruijssenaars e.a. (2004) geven aan dat de realistische reken-wiskundedidactiek op een aantal punten goed aansluit op de behoefte van zwakkere rekenaars, bijvoorbeeld het gebruik van contexten, modellen en schema's, maar op andere punten soms aanpassing behoeft, bijvoorbeeld bij interactie en reflectie, omdat zwakke rekenaars vaak moeite hebben hun denken en werkwijze onder woorden te brengen (vergelijk bijvoorbeeld Vedder, 2002; Milo, 2003).

Van de Craats (2007) wijst er op dat kolomsgewijs rekenen niet geschikt is voor berekeningen met grote getallen. Hij pleit voor afschaffen van kolomsgewijs rekenen en handig rekenen en stelt voor de nadruk te leggen op receptmatig, cijferend rekenen.

Van den Heuvel-Panhuizen (2009) stelt dat de balans in realistisch rekenen-wiskunde moet worden hersteld, waarbij zij pleit voor meer aandacht voor bijvoorbeeld wiskundige inhoud en het leren maken en gebruiken van hulpnotaties bij het rekenen. Het pleidooi voor een nieuwe (of hernieuwde) balans komt ook terug bij bijvoorbeeld Gelderblom (2007) die pleit voor evenwicht tussen inzicht en oefenen (vergelijk Nelissen, 2008a).

1.3.3. Omgaan met verschillen bij rekenen-wiskunde

Bovenstaande onderwijsleerprincipes bieden handvatten en gereedschappen voor het omgaan met verschillen bij rekenen-wiskunde, maar voor het omgaan met verschillen tussen kinderen is meer van belang. Zo zijn juist zwakkere rekenaars geholpen met betekenisverlenende contexten en het gebruik van modellen en schema's, maar zij hebben anderzijds meer ondersteuning nodig in het verwoorden van hun handelen en andere vormen van interactie en reflectie (zie ook 1.3.2.).

De ijsbergmetafoor maakt bijvoorbeeld zichtbaar hoeveel (en welke) onderliggende kennis en inzichten ten grondslag liggen aan formele rekenvaardigheid; het zogenoemde drijfvermogen. Voor zowel sterkere als zwakkere leerlingen kunnen en moeten keuzes worden gemaakt uit het reguliere aanbod van rekenmethodes, waarbij rekening wordt gehouden met cruciale leermomenten. Verder kunnen andere accenten worden gelegd en verschillende didactische keuzes worden gemaakt, bijvoorbeeld bij de wijze waarop en de mate waarin wordt omgegaan met verschillende oplossingsstrategieën en het gebruik en de keuze van modellen en schema's. Tot slot zijn variaties in uitleg en instructie mogelijk, zoals de keuze voor een meer sturende dan wel banende instructie. Ten aanzien van deze en andere punten voor het omgaan met zwakkere rekenaars zijn er overigens onder deskundigen uiteenlopende opvattingen (vergelijk Boswinkel & Moerlands, 2001; 2003; Vedder, 2002; Ruijssenaars e.a., 2004; Milo & Ruijssenaars, 2004; Gravemeijer & Van Eerde, 2004; Janson & Noteboom, 2004; Boswinkel & Nelissen, 2007; Gelderblom, 2007; 2008; Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2008; Van Zanten, 2008a; 2009a).

1.3.4. Oefenen en onderhouden

Voor het automatiseren van rekenprocedures, het memoriseren van rekenfeiten en het consolideren van een en ander, is regelmatig oefenen onontbeerlijk. Bij het oefenen hangen structurering, automatisering en memorisering sterk samen. Door structuur aan te brengen, kan memorisering ontstaan, en met bepaalde gememoriseerde basiskennis en geautomatiseerde basisvaardigheden kunnen weer grotere structuren ontstaan. Ten behoeve van het inoefenen, consolideren en toepassen van basale rekenvaardigheden en rekenfeiten kunnen verschillende oefenvarianten worden gebruikt; zoals gericht oefenen, speels oefenen en productief oefenen (Treffers & De Moor, 1990; Nelissen, 1990; Treffers e.a., 1989; 1999; Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001; Menne & Veenman, 1997; Menne, 2001; Gelderblom, 2009).

1.3.5. Historisch perspectief

Vakdidactiek is geen statisch geheel, maar is onder invloed van onderzoek, maatschappelijke ontwikkelingen en noties rond reken-wiskundeonderwijs, voortdurend in beweging. (Het overdenken en bespreken van) historische ontwikkelingen en achtergronden van reken-wiskundeonderwijs kunnen helpen bij het duiden van actuele ontwikkelingen.

II. Domeinbeschrijvingen

2. Hele getallen

In deze domeinbeschrijving wordt zowel kennis van hele getallen als kennis van bewerkingen omschreven. De bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) en de onderscheiden vormen van rekenen (hoofdrekenen, rekenen volgens standaardprocedures en cijferen, schattend rekenen en gebruik van de rekenmachine) worden niet alleen gebruikt binnen het domein hele getallen, maar zijn ook relevant voor de overige domeinen. In de domeinbeschrijving *Hele getallen* zijn de bewerkingen en de vormen van rekenen nader uitgewerkt. Een en ander wordt in de overige domeinbeschrijvingen niet herhaald; daar worden alleen die zaken toegevoegd die specifiek voor het betreffende domein gelden. Hetzelfde geldt voor de in dit hoofdstuk omschreven wiskundetaal. De paragraaf *Kennis voor onderwijzen van hele getallen* is opgesplitst in meerdere subparagrafen, analoog aan de onderscheiden vormen van rekenen.

2.1. Maatschappelijke relevantie van hele getallen

Hele getallen komen in het dagelijks leven in veel situaties en in verschillende betekenissen voor. We doen regelmatig een beroep op ons begrip van en bewerkingen met hele getallen, bijvoorbeeld wanneer we de folders van de supermarkt bekijken, boodschappen doen, klussen, sporten, de krant lezen of, TV kijken. We komen getallen tegen als het bijvoorbeeld gaat om lengte, gewicht, oppervlakte, inhoud, tijd, voedsel, bladzijdenummers, temperatuur, geld, (huis)nummers, nummers op trein en bus, leeftijd, burgerservicenummer, en samengestelde grootheden.
Getalbegrip, kunnen redeneren en rekenen met getallen, en daarbij getalrelaties kunnen toepassen, geeft een beter begrip van de numerieke wereld om ons heen. Het helpt ons de wereld te ordenen, te structureren en te organiseren. Het speelt een belangrijke rol in de ontwikkeling van gecijferdheid.

In Zimbabwe heb je niets aan 68 quadriljoen

Zware taak voor nieuwe regering

Een zakenbankier in Zimbabwe verdient vele miljarden per maand in lokale valuta. Daarom klust hij bij als autowasser.

Harare, 13 febr. Als zakenbankier verdient Fidelis 68 quadriljoen per maand (68 met 24 nullen), dus probeert de 28-jarige Zimbabweaan in zijn vrije tijd bij te verdienen als autowasser. “Als ik mijn salaris wil opnemen, krijg ik biljetten van 500 triljoen Zimbabweaanse dollar”, zegt Fidelis, terwijl hij een natte spons over een groene Nissan veegt.

In een eetcafé verderop in Harare trekt Evidence Manyeruke even later 170 triljoen tevoorschijn. “Alsjeblieft”, zegt de 43-jarige ambtenaar van het Zimbabweaanse ministerie voor Hoger Onderwijs. “Die mag je hebben als souvenir.” Het is half vijf ’s middags, dadelijk gaat de graatmagere ambtenaar naar huis om met zijn vrouw en drie kinderen van twaalf en zes jaar en acht maanden de eerste en enige maaltijd van de dag te gebruiken: kool uit de eigen achtertuin. Met niets erbij.

Bron: De Volkskrant, 13-02-2009.

De context waarin getallen voorkomen, is medebepalend voor de betekenis ervan. In het krantenbericht hierboven wordt een boekje opengedaan over de extreme inflatie in Zimbabwe. 68 Quadriljoen euro is een vermogen, maar in Zimbabwaanse dollars is het een schijntje. Betekenissen van getallen zijn ook deels persoonlijk, zowel rationeel (schoenmaat, huisnummer) als emotioneel (geluksgetal).

2.2. Kennis van hele getallen

De startbekwame leerkracht beschikt over kennis van en inzicht in het domein hele getallen. Daarbij gaat het om getallen, getalrelaties en redeneren en rekenen met hele getallen. De startbekwame leerkracht kan vlot hoofdrekenen en schattend rekenen. Hij/zij kan standaardprocedures, waaronder de meest verkorte cijferalgoritmes, voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen uitvoeren. Hij/zij doorziet relaties tussen deze rekenwijzen en bewerkingen en kan deze verklaren. Hij/zij kan bij verschillende situaties en opgaven een beredeneerde keuze maken tussen verschillende rekenwijzen, waaronder ook schattend rekenen en het gebruik van de rekenmachine.

2.2.1. Betekenis van hele getallen

Door de verschillende verschijningsvormen van een getal, bijvoorbeeld klank, maataanduiding of hoeveelheid, zijn verschillende functies van getallen te onderscheiden: telgetal (de plaats in de telrij), hoeveelheidsgetal (5 knikkers), meetgetal (30 cm), naamgetal (lijn 7) en rekengetal (5 + 2 =) (Goffree, 1994a; 2005; Treffers e.a., 1999).
Het gaat bij de betekenis van getallen en getalrelaties niet alleen om getallen in contextsituaties maar ook (in formele zin) om de positie in de telrij en specifieke structuurkenmerken van getallen.
Hele getallen hebben verschillende (bijzondere) eigenschappen, bijvoorbeeld:

- Kenmerken van deelbaarheid (bijvoorbeeld: een getal is deelbaar door 2 als het eindigt op 2, 4, 6, 8 of 0).
- Priemgetallen (getallen die precies twee verschillende delers – 1 en zichzelf – hebben, bijvoorbeeld de getallen 2 en 47).
- Figurale getallen, waaronder driehoeks-, rechthoeks- en vierkantsgetallen (bijvoorbeeld: het getal drie als hoeveelheid neergelegd in de vorm van een driehoek, het getal 16 als hoeveelheid neergelegd in de vorm van een vierkant).
- Volmaakte getallen (een positief getal dat gelijk is aan de som van zijn delers, behalve zichzelf, maar inclusief de deler 1, bijvoorbeeld getallen 6 en 28).

2.2.2. Kenmerken van het getalsysteem

Het Arabisch getalsysteem dat nagenoeg wereldwijd gebruikt wordt is een decimaal positioneel stelsel. Met behulp van slechts tien cijfersymbolen (1 tot en met 9 en 0) worden alle hele getallen geschreven. Het getal nul neemt een bijzondere positie in omdat het op zich niets representeert, maar tegelijk een essentieel onderdeel is van het decimale positionele getalsysteem (vergelijk Kaplan, 1999). Verder gebruikt men de tien als bundeling en basis voor maatwisseling, waarbij we de positionele notatie hanteren: elk cijfer in een getal heeft zijn eigen plaatswaarde. Men gaat er van uit dat de keuze voor dit talsysteem is ingegeven door het gegeven dat de mens over tien vingers beschikt (Struik, 1990).
Naast het decimale systeem zijn er nog andere getalsystemen en talstelsels bekend. Bijvoorbeeld het Romeins getalsysteem, waarvan nu nog sporen te vinden zijn. Pas vanaf de 14^{e} eeuw komt het Arabisch getalsysteem langzaam in zwang (Keestra, 2006). Ook invloeden van het Babylonische zestigtallig stelsel zijn nog prominent aanwezig, bijvoorbeeld bij tijd- en hoekmeting.
Een belangrijk verschil tussen het decimale stelsel en oudere getalsystemen als de Romeinse cijfers en het zestigtallige (sexagesimale) Babylonische systeem is dat bij deze laatste systemen de nul ontbreekt. De tientallige bundeling is in de Romeinse cijfers wel aanwezig, maar de positionele ordening ontbreekt gedeeltelijk; het is een additief systeem (Harn, 2005).
Verder speelt het binair (tweetallig) talstelsel een belangrijke rol. Dit systeem, waarin alle getallen kunnen worden geschreven met enkel de cijfers 0 en 1, is belangrijk bij bijvoorbeeld informatieopslag in computers.

De startbekwame leerkracht beschikt over kennis van de verschillende betekenissen van getallen en van getalrelaties. Hij/zij is op de hoogte van de overeenkomsten en verschillen tussen de verschillende getalsystemen. Hij/zij overziet de specifieke eigenschappen van een systeem en heeft inzicht in het decimaal positioneel getalsysteem.

Kennis die niet geheel tot de leerstof van de basisschool behoort, maar waar de startbekwame leerkracht wel over beschikt, onder meer met het oog op de doorlopende leerlijn van PO naar VO, betreft het kunnen verklaren van eigenschappen van getallen zoals bijvoorbeeld de kenmerken van deelbaarheid. Verder is een startbekwame leerkracht in staat om getallen die zijn weergegeven in een ander talstelsel om te zetten in het decimale talstelsel en omgekeerd.

2.2.3. Redeneren en rekenen met hele getallen

2.2.3A. Eigenschappen van bewerkingen

De basisbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen kunnen uit allerlei situaties worden afgeleid. Alledaagse situaties kunnen vertaald worden naar kwantitatieve uitspraken waar vervolgens mee gerekend kan worden.
Optellen kan betekenissen hebben als samen nemen, aanvullen of toevoegen. Aftrekken kan onder meer betekenen: eraf halen, aanvullen of het verschil bepalen.
Vermenigvuldigen kan betekenissen hebben als herhaald optellen, combineren, gelijke sprongen maken en op schaal vergroten. Delen kan onder meer herhaald aftrekken, opdelen of uitdelen (groepjes maken) en verdelen (een verdeling aanbrengen) betekenen. Onderliggende wiskundige structuren zijn bijvoorbeeld de lijnstructuur, groepsstructuur en rechthoekstructuur (Freudenthal, 1983; Treffers e.a., 1999).

Eigenschappen van de basisbewerkingen die kunnen worden gebruikt bij het opereren met getallen zijn bijvoorbeeld:

- De commutatieve of verwisseleigenschap bij optellen.
- De associatieve eigenschap bij optellen: bij optellen van drie of meer getallen kun je kiezen welke getallen je eerst optelt.
- De commutatieve of verwisseleigenschap bij vermenigvuldigen: je mag de volgorde van de factoren verwisselen.
- De associatieve eigenschap bij vermenigvuldigen: bij vermenigvuldigen van drie of meer getallen kun je kiezen welke getallen je eerst vermenigvuldigt.
- De distributieve of verdeeleigenschap voor vermenigvuldigen en optellen.
- De distributieve of verdeeleigenschap voor delen.
- De inverse-relatie tussen optellen en aftrekken en tussen vermenigvuldigen en delen.

Kennis die niet geheel tot de leerstof van de basisschool behoort, maar waar de startbekwame leerkracht wel over beschikt, onder meer met het oog op de doorlopende leerlijn van PO naar VO, betreft bijvoorbeeld het kunnen redeneren en rekenen met negatieve hele getallen.

2.2.3B. Schattend rekenen

Schattend rekenen is het globaal bepalen van de uitkomst van een berekening met afgeronde getallen (Turkstra & Timmer, 1953; Sweers, 1996). Precies rekenen hoeft niet in elke situatie, soms is een globaal antwoord voldoende. Precies rekenen kan ook niet altijd, soms zijn de precieze gegevens niet of niet voldoende beschikbaar. Schattend rekenen is dus niet alleen het rekenen met afrondingen van precies gegeven getallen met de bedoeling een globaal antwoord te vinden, het moet ook gebruikt worden als de benodigde gegevens niet of niet volledig beschikbaar zijn (Gribling e.a., 1994).

Afronden van getallen vormt de basis van het schattend rekenen. Afronden van getallen vereist zicht op de grootte van getallen. Welk rond getal ligt er bij een getal in de buurt?

Niet elke afronding is in elke situatie even zinvol. Dat is afhankelijk van de grootte van de getallen en de mate van nauwkeurigheid die de situatie vereist. Bij een berekening met afgeronde getallen kan worden aangegeven in welke orde van grootte de uitkomst kan afwijken van de uitkomst van de precieze berekening. Door een precieze berekening in te klemmen tussen twee berekeningen met afgeronde getallen is een schatting van het mogelijke antwoord te geven.

De startbekwame leerkracht kan naar gelang situaties en opgaven een beredeneerde keuze maken tussen schattend rekenen en precies rekenen. Bij schattend rekenen kiest hij/zij voor passende afrondingen.

2.2.3C. Cijferend rekenen

Cijferend rekenen is schriftelijk rekenen volgens de meest verkorte standaardalgoritmes. Er is een standaardalgoritme voor (onder andere) cijferend optellen, cijferend aftrekken, cijferend vermenigvuldigen en cijferend delen (de zogenoemde staartdeling). Cijferen kan worden gebruikt bij het opereren met getallen waarmee niet vlot uit het hoofd gerekend kan worden. Bij cijferend optellen, aftrekken en vermenigvuldigen worden de getallen op schrift onder elkaar gezet en er wordt dan van rechts naar links per cijferkolom met positiecijfers gerekend: eerst de eenheden, dan de tientallen en zo verder. Bij cijferend delen wordt van links naar rechts gerekend. Bij cijferend rekenen kan de positiewaarde van de cijfers in een bepaald opzicht buiten beschouwing worden gelaten (Freudenthal, 1983; Treffers & De Moor, 1990; Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001).

Een algoritme is een min of meer vaste, stapsgewijze procedure om bewerkingen routinematig uit te voeren. Algoritmes dienen ertoe een ingewikkelde reeks handelingen te vereenvoudigen waarbij een inzichtelijke, bewuste aanpak wordt vervangen door een automatisme. Mits de stappen in de juiste volgorde op de juiste manier worden uitgevoerd, leidt het altijd tot hetzelfde (goede) resultaat.
In het dagelijks leven bestaan voor allerlei handelingen algoritmes, zoals veters strikken, koffiezetten en sommige handelingen bij het autorijden. Binnen rekenen-wiskunde zijn er meer algoritmes dan die hier zijn genoemd. Er zijn al voorbeelden uit de Egyptische oudheid bekend die standaardprocedures laten zien voor het vermenigvuldigen waarbij een vorm van herhaald optellen werd gehanteerd (Struik, 1990).

De startbekwame leerkracht beheerst zelf de standaardprocedures en algoritmes voor de vier hoofdbewerkingen. Hij/zij doorziet de onderlinge relatie en samenhang tussen meer en minder verkorte procedures en tussen standaardprocedures en andere vormen van rekenen.

2.2.3D. Gebruik van de rekenmachine

Om het rekenen zo efficiënt mogelijk te doen verlopen heeft de mens gezocht naar nieuwe rekenmanieren en hulpmiddelen. Dat heeft naast algoritmes ook hulpmiddelen als de rekenmachine opgeleverd (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001).
Om de rekenmachine te kunnen gebruiken, moeten de ‘taal’ ervan worden verstaan. Die taal verschilt soms nogal per machine (Van den Brink e.a., 1988; Vermeulen 2006), bijvoorbeeld: bij de ene machine geeft het intoetsen van het sommetje 6 + 2 x 3 = als uitkomst 12 en op de andere 24. Dit maakt een doordenking van de afspraken over rekenregels nodig.
De rekenmachine kan worden gebruikt om:
- Snel berekeningen te kunnen uitvoeren.
- Lastige berekeningen, bijvoorbeeld met grote getallen uit te kunnen voeren.
- Uit het hoofd of op papier gemaakte berekeningen te controleren.

Kennis die niet geheel tot de leerstof van de basisschool behoort, maar die de startbekwame leerkracht wel doorziet, onder meer met het oog op de doorlopende leerlijn van PO naar VO, betreft bijvoorbeeld het uitvoeren van de meer geavanceerde bewerkingen met de rekenmachine met behulp van de procentenknop, gebruik van het geheugen en de notatie van getallen die te groot zijn voor het venster van de rekenmachine.

2.2.4. Wiskundetaal bij (hele) getallen

De taal die gebruikt wordt bij (hele) getallen omvat aanduidingen voor de getallen, de telwoorden uit de telrij, en de systematiek van het decimaal positioneel getalsysteem. Daarbij gelden formele regels die niet altijd onderling consistent zijn. Na twintig komt eenentwintig, na honderd komt honderdeen, na zeventig komt tachtig en geen achtig, na negentig komt geen tientig. We schrijven 23 maar we zeggen eerst de drie en dan de twintig, we schrijven 283, we zeggen tweehonderd drieëntachtig. Uitzondering is de uitspraak van bijvoorbeeld jaartallen; 1950 met de uitspraak negentienhonderd vijftig of negentien vijftig (vergelijk Uittenbogaard, 2008a).
Begrippen waarmee relaties tussen getallen en hoeveelheden worden aangegeven zijn bijvoorbeeld: meer, minder, evenveel, bijna, ruim, afgerond, ongeveer en gemiddeld.
De formele rekentaal op de basisschool omvat begrippen waarmee getallen en bewerkingen worden beschreven, bijvoorbeeld: eenheid, tiental, honderdtal, plaatswaarde, deler, deeltal, vermenigvuldiger, vermenigvuldigtal, product en quotiënt.
Verder worden bijvoorbeeld gebruikt: erbij, samen, plus, eraf, verschil, min, keer, maal, verdelen en gedeeld door. De formele rekentaal omvat symbolen als +, -, x, :, =, ≈, <, >, (,), H, T, E, ^{2}, ^{3}.
Bij het aanduiden van bewerkingen met hele getallen loopt de betekenis binnen de meer formele taal bij rekenen-wiskunde niet altijd geheel parallel met de betekenis die er in de spreektaal aan gegeven wordt. Denk bijvoorbeeld aan ‘splitsen van getallen’ en ‘tellen met sprongen’. De term hoofdrekenen heeft op de basisschool een bredere betekenis dan alleen maar ‘uit’ het hoofd rekenen.

Formele begrippen die op zich niet tot de leerstof van de basisschool worden gerekend, maar waar de startbekwame leerkracht wel betekenis aan kan geven, onder meer in verband met het ordenen van leerstof, zijn bijvoorbeeld positioneel systeem, decimaal systeem, positiewaarde, ordinaal en kardinaal.

2.3. Kennis voor onderwijzen van hele getallen: getallen en getalrelaties

2.3.1. Contextgebonden handelen en redeneren bij getallen en getalrelaties

Kinderen beginnen al op zeer jonge leeftijd met het verkennen van getallen en getalrelaties. In dit verband wordt wel de term ontluikende gecijferdheid gehanteerd. Daarbij gaat het in eerste instantie om begrippen als voor, achter, groot, klein, het leren van de telrij, het begrijpen van de verschillende betekenissen van getallen, het kunnen tellen van hoeveelheden en het verwerven van inzicht in de opbouw van getallen. Andere elementen van ontluikende gecijferdheid die hierbij een rol spelen zijn het begrip van conservatie, corresponderen, classificeren en kunnen seriëren (Piaget, 1969; vergelijk Baltussen e.a., 1997; Nelissen 1999). Bij deze elementen van getalbegrip maakt het abstractieniveau uit; jonge kinderen beheersen ze eerder op concreet-betekenisvol niveau dan op objectgebonden en formeel niveau.
De wiskundige oriëntatie vindt, zeker in het begin, niet geïsoleerd plaats, maar in een rijke omgeving. Activiteiten vinden plaats in voor kinderen betekenisvolle situaties waaruit een wiskundig probleem min of meer vanzelfsprekend voortkomt, zoals: we gaan eten in de poppenhoek, we dekken de tafel, hoeveel bordjes hebben we nodig? (vergelijk Freudenthal, 1984; Janssen-Vos e.a., 1991; Nelissen, 1999; Van Zanten e.a., 2007; Janssen-Vos, 2008; Frijlink & Wouda, 2008).
De ontwikkeling van elementair getalbegrip en ontluikende gecijferdheid, waarin het tellen een belangrijke rol speelt, omvat het grip krijgen op allerlei betekenissen, functies, structuren en eigenschappen van getallen. Bij het verkennen van getallen en getalrelaties wordt dan ook gebruik gemaakt van allerlei verschijningsvormen en functies van getallen, die kinderen tegen kunnen komen in het dagelijks leven. Dit zijn voornamelijk benoemde getallen en

meetgetallen, bijvoorbeeld (leef)tijd, afstand, benoemde hoeveelheden, geld, prijzen en paginanummers. Kinderen moeten zoveel begrip van getallen ontwikkelen dat ze in allerlei situaties de betekenis van de getallen op de juiste wijze kunnen hanteren en het opereren met getallen soepel kan verlopen. Vanuit de betekenis die getallen hebben voor kinderen gaan zij bijvoorbeeld referentiepunten ontwikkelen, die ze bij het opereren met getallen kunnen benutten (Treffers e.a., 1999; Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001).

De startbekwame leerkracht kan rijke leeromgevingen creëren waarin de ontluikende gecijferdheid van kinderen optimale kansen krijgt om tot ontwikkeling te komen. Hij/zij kan bijvoorbeeld spontane telactiviteiten van kinderen stimuleren en deze momenten aangrijpen voor het verder leren van individuele kinderen en de hele groep. Tevens kan hij/zij vooropgezette, doelgerichte tel- en rekenactiviteiten organiseren in de groep.

2.3.2. Objectgebonden handelen en redeneren bij getallen en getalrelaties

Vanuit betekenisvolle contextsituaties zijn, in een later stadium, problemen op een objectniveau te genereren. Vanuit bijvoorbeeld situaties waarin benoemde getallen en meetgetallen zijn ingebed worden nieuwe vragen gesteld. De context zelf is daarbij nu slechts op de achtergrond aanwezig. Het gevoel voor getallen wordt nu verder ontwikkeld. Daarbij zijn onder meer de volgende punten van belang (Buijs, 1991; Baltussen e.a., 1997; Treffers e.a., 1999; Fosnot & Dolk, 2001a; Goffree, 2005; Noteboom & Klep, 2005):

- De kinderen leren de telrij in de juiste volgorde heen en terug opzeggen, in ieder geval tot tien, maar veel kinderen tellen al verder. Ook de telrij tot 100 wordt in oriënterende zin al verkend.
- Daarnaast worden er ankergetallen in de telrij verkend. Zo worden de 5 en de 10 ankergetallen in de telrij: 5, 10, 15, 20 en verder.
- Het kunnen ordenen, structureren en vergelijken van aantallen en hoeveelheden.
- Aantallen tellen en hoeveelheden bepalen; synchroon kunnen tellen, zich realiseren dat bij het tellen van een hoeveelheid het laatst gebruikte getal de hoeveelheid aangeeft (kardinaalgetal), resultatief tellen, tellen met sprongen, verkort tellen.

2.3.3. Niveauverhoging bij getallen en getalrelaties

De startbekwame leerkracht kan flexibel wisselen tussen de niveaus van contextgebonden tellen en rekenen, objectgebonden tellen en rekenen en formeel tellen en rekenen om kinderen te ondersteunen in hun denken en hen te brengen tot niveauverhoging. In elke jaargroep grijpt hij/zij actuele gebeurtenissen aan voor getalsmatige beschouwingen.

Het kennen van de telrij, inzicht in getallen en getalrelaties wordt in de opeenvolgende jaargroepen telkens verder uitgebreid. Kinderen gaan steeds grotere getallen verkennen; duizend, miljoen, miljard en zo verder. De getallen worden telkens eerst verkend in reële contextsituaties waarmee het getalbegrip verder wordt ontwikkeld. Daarop voortbouwend komen vervolgens structuren en dergelijke aan de orde. Onder meer de volgende punten zijn daarbij van belang (Treffers e.a., 1999; Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001):

- De structuur van de getallen. In groep 3 speelt de vijf- en de tienstructuur een belangrijke rol. Kinderen kunnen steeds verder verkort tellen met structuren als de vijf- en tienstructuur. Kinderen leren hun telhandelingen te organiseren, en ontwikkelen manieren om structurerend en verkort te tellen.
  In de hogere groepen gaat het bijvoorbeeld om het tientallig splitsen en positieschema's (H, T, E, later uitgebreid naar duizend en verder). Uiteindelijk is er sprake van een adequaat inzicht in het positiesysteem waarop de decimale schrijfwijze van de getallen berust.
- Positionering van de getallen, bijvoorbeeld het plaatsen van getallen op een getallenlijn, waarmee het idee voor de orde van grootte van de te plaatsen getallen wordt ontwikkeld, ook met hele grote getallen als miljoen.

- In de bovenbouw is ook aandacht voor zaken als andere talstelsels, priemgetallen en de ontbinding van getallen in factoren.
- Bij het redeneren en rekenen met getallen blijven betekenissen, structuren en onderlinge relaties van getallen de hele basisschool door van belang, om de gecijferdheid van de kinderen (verder) te ontwikkelen.

2.4. Kennis voor onderwijzen van hele getallen: (elementair) hoofdrekenen

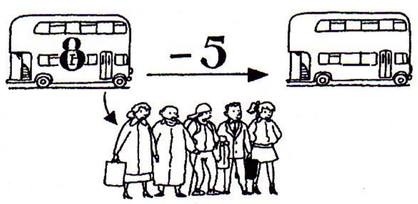
Kinderen leren de betekenis van de vier basisbewerkingen die met hele getallen worden uitgevoerd; optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Ze leren hoe zij deze bewerkingen uit kunnen voeren, aanvankelijk in contexten en uiteindelijk op formeel niveau, maar ook in nieuwe toepassingssituaties. Zij leren hoe zij daarbij gebruik kunnen maken van de eigenschappen van de afzonderlijke bewerkingen en getallen.

Hoofdrekenen is inzichtelijk rekenen met getallen waarbij de waarde van de getallen in beeld blijft bij de berekening en handig gebruik wordt gemaakt van parate kennis, eigenschappen van getallen en bewerkingen en de onderlinge relaties. Vrijwel al het rekenen tot en met groep 5 valt onder elementair hoofdrekenen (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001).
Er worden globaal beschouwd twee varianten van hoofdrekenen onderscheiden; het zogenoemde mét het hoofd rekenen en het úit het hoofd rekenen. Uit het hoofd rekenen vindt plaats zonder hulpmiddelen, maar bij met het hoofd rekenen is het toegestaan aantekeningen, bijvoorbeeld tussenantwoorden, op papier te noteren (vergelijk Buijs, 2009a). Dit laatste is belangrijk om het werkgeheugen te ontlasten en vergroot zodoende de kans om berekeningen correct uit te voeren (vergelijk Van Putten & Hickendorff, 2006).
Het onderscheid tussen hoofdrekenen en schriftelijk rekenen hoeft in het onderwijsleerproces niet zo strikt te worden gemaakt; zo onderscheidt men in Duitsland naast het ‘Kopfrechnen’ en het ‘schriftliches Rechnen’ ook het zogenoemde ‘halbschriftliches Rechnen’ (Krauthausen, 1993). In Nederland wordt recent op de voordelen van deze tussenvorm gewezen (Buijs, 2008; Van den Heuvel-Panhuizen, 2009).

Er zijn drie grondvormen van hoofdrekenen:
- Het rijgend hoofdrekenen, bijvoorbeeld: 36 + 12 → 36 + 10 → 46 + 2 = 48.
- Het splitsend hoofdrekenen, bijvoorbeeld: 36 + 12 → 30 + 10 = 40 → 6 + 2 = 8 → 40 + 8 = 48.
- Het gevarieerd of handig hoofdrekenen, bijvoorbeeld compenseren: 73 – 29 → 74 – 30.

De eerste twee vormen kunnen altijd worden toegepast en zijn niet afhankelijk van de getallen die gekozen zijn. De derde vorm is afhankelijk van de getallen in de op te lossen opgave.

2.4.1. Contexten en toepassingssituaties bij (elementair) hoofdrekenen
Contexten geven betekenis aan redeneren en rekenen met hele getallen en geven aanleiding tot rekenen in toepassingsituaties. De volgende punten zijn daarbij van belang:
- Bij het optellen en aftrekken komen gevarieerde contextsituaties aan bod zoals in groep 3 het in- en uitstappen bij de bus (Van den Brink, 1989) het samennemen, aanvullen en het verschil bepalen bij hoeveelheden telbare objecten waarmee het begrip van de bewerking wordt ondersteund.



In een bus zitten 8 mensen. Bij de halte stappen er 5 uit.

Bron: Treffers e.a., 1999, pg. 31

- Voor de splitsingen tot tien kan gebruik worden gemaakt van contexten als de buscontext en de dubbeldekker.
- De beschikbare referentiegetallen worden bij het rekenen tot 100 uitgebreid via contexten en toepassingssituaties waarin zaken voorkomen als lengte, gewicht, snelheid, afstand, geld, prijzen, tijdmaten, kalendergetallen, temperatuur.
- Bij het rekenen tot 100 worden allerlei contexten en toepassingssituaties gebruikt bij de bewerkingen optellen en aftrekken, bijvoorbeeld: Je hebt bij de slager nummer 51 getrokken en nummer 43 is nu aan de beurt. En: Je hebt 63 euro gespaard en je koopt iets van 9 euro.
- De strategieën die gebruikt kunnen worden bij het hoofdrekenen kunnen worden ondersteund met behulp van passende contexten. Dit geldt voor alle drie de grondvormen.
- Een voor kinderen complicerende factor bij het gebruik van de strategie compenseren is dat deze bij de bewerking optellen anders werkt dan bij aftrekken (145+98 = 143+100 en 145-98 = 147-100). Betekenisverlenende contexten als een tribunecontext of een leeftijdcontext kunnen hierbij ondersteunen (De Goeij, 2005).
- Een brede begripsmatige verkenning van het vermenigvuldigen start met elementaire contextopgaven met een keer-structuur (Terlouw & Schoeman, 2006; Dolk, 2007). In de gebruikte situaties zijn al latere modellen als het lijnmodel, groepjesmodel en het rechthoekmodel te herkennen. Daardoor ervaren kinderen al iets van de structuren van vermenigvuldigingen (Ter Heege, 1980). Er wordt gebruik gemaakt van veel alledaagse, overeenkomstige keer-problemen die contextueel en qua structuur verschillen, bijvoorbeeld (Oonk, 2007): 3 stukken draad van 4 meter, hoeveel meter is dat? 3 broeken en 4 shirts, hoeveel combinaties zijn dat?, we zijn met zijn drieën: ieder krijgt vier vellen papier, hoeveel vellen papier zijn er nodig?
- De bewerking delen kan worden opgevat als herhaald aftrekken, maar na de brede verkenning van het vermenigvuldigen manifesteert delen zich bij het uitrekenen in verkorte vorm als omgekeerd vermenigvuldigen of opvermenigvuldigen (Dolk, 2007). In toepassingsituaties verschijnt delen als opdelen (48 sterren worden verpakt in dozen met ieder 8 sterren. Hoeveel dozen zijn er nodig?) en verdelen (48 sterren worden eerlijk verdeeld onder 8 kinderen. Hoeveel sterren krijgt ieder kind?) (Treffers e.a., 1999).

2.4.2. Modellen en schema's bij (elementair) hoofdrekenen

Modellen en schema's spelen een rol bij de overgang van contextgebonden naar formeel redeneren en rekenen; het horizontaal mathematiseren (Fosnot & Dolk, 2001a). Onder meer de volgende punten zijn daarbij van belang:

- De getallen tot twintig kunnen worden voorgesteld met behulp van drie structuurmodellen: het lijnmodel, bijvoorbeeld de twintigketting of de getallenlijn, het groepjesmodel, bijvoorbeeld turven, en het combinatiemodel, bijvoorbeeld het rekenrek.
- De pijlentaal (schematisering) halverwege groep 3 symboliseert de dynamiek van de bewerking en wordt gebruikt als overgang naar de formele sommentaal. De leerkracht laat zien dat de rekenformule (pijlentaal of formele rekentaal) op diverse contexten van toepassing is en ze laat regelmatig bij rekenformules door de kinderen verhalen bedenken (Van den Brink, 1991; Buijs, 2008).
- De getallen tot honderd worden gestructureerd met behulp van het lijnmodel, bijvoorbeeld de (lege) getallenlijn als schematisering van de kralenketting, en het groepjesmodel, bijvoorbeeld bundelen, turven of geld (Menne, 2008a). Het lijnmodel kan op verschillende niveaus worden gebruikt: 'vol' (met eenheden), 'halfvol' (met tientallen) en 'leeg' (zonder getallen) (Gilissen & Klep, 1980; Treffers e.a., 1999). Met behulp van het lijnmodel leren de kinderen zich steeds beter te oriënteren op de getallenlijn. Het lijnmodel past goed bij lineaire situaties als afstanden. Een alternatief voor de (kaartjes)getallenlijn is het zogenoemde boek met 130 bladzijden (Menne, 2006). Met behulp van het groepjesmodel leren de kinderen grote hoeveelheden te schatten en handig te tellen via het ma-

ken van bijvoorbeeld groepjes van tien. Deze modellen worden ook gebruikt bij het optellen en aftrekken.
- Bij het vermenigvuldigen wordt gebruik gemaakt van dezelfde modellen als bij het optellen en aftrekken, namelijk: het lijnmodel (3 stroken van 4 meter), het groepjesmodel (3 dozen met elk 4 ballen) en een combinatie van de eerste twee, het rechthoekmodel (3 rijen met elk 4 tegels) (Ter Heege, 1995; Oonk, 2007).
- Bij het delen worden eveneens het lijnmodel, groepjesmodel en combinatiemodel (rechthoekmodel) gebruikt.
- Daarnaast kan geld worden gebruikt bij het vermenigvuldigen met grote getallen en bij het aanbieden van splitsende rekenstrategieën (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001; Buijs, 2008).
- De overgang van het tellend naar het structurerend vermenigvuldigen wordt gestimuleerd door (model)contexten die sterk uitnodigen tot structureren (vooral het rechthoekmodel) in combinatie met kale opgaven, via welke steeds meer steunpunten worden geleerd. Ook vanuit informele, eigen symboliseringen kunnen leerlingen via een proces van progressief mathematiseren, bij conventionele symboliseringen uitkomen.

2.4.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij (elementair) hoofdrekenen

De startbekwame leerkracht kan flexibel wisselen tussen verschillende concretiseringen en oplossingswijzen om kinderen te ondersteunen in hun denken en hen te brengen tot niveauverhoging, bijvoorbeeld bij het aanvankelijk rekenen tussen de niveaus van het tellend rekenen, het structurerend rekenen en het formeel rekenen.

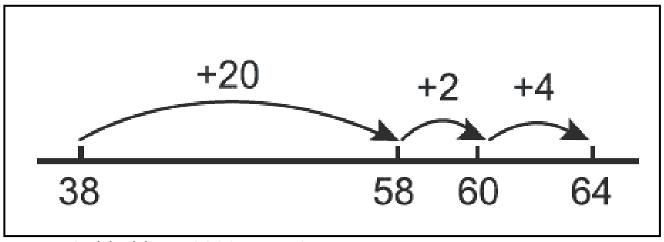
Tot groep 5 is alle rekenen hoofdrekenen, in de zin van rekenen mét het hoofd. De vier basisbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen worden in de groepen 3, 4 en 5 verkend en ingeoefend (Gelderblom, 2009). Daarna worden kinderen gestimuleerd om voor specifieke getalgebieden bewerkingen ook uit het hoofd te gaan uitvoeren. Alle optellingen en aftrekkingen tot 20 worden geautomatiseerd en gememoriseerd, evenals de tafels van vermenigvuldiging. Deze basale rekenfeiten worden voortdurend onderhouden.
Eind groep 5 kunnen leerlingen optellingen en aftrekkingen tot 100 vlot en met inzicht uitrekenen, al dan niet gebruikmakend van tussennotaties. Eind groep 6 kunnen de leerlingen uit het hoofd optellen en aftrekken met getallen tot en met 100. Ze hebben dan ook alle tafelvermenigvuldigingen gememoriseerd (Nelissen, 1990). Het hoofdrekenen wordt vanaf groep 6 uitgebreid en verdiept door het repertoire toe te passen op grotere getallen waarbij indien nodig weer tussenantwoorden genoteerd mogen worden.

Daarnaast worden de basale rekenfeiten uit de voorgaande jaren vanaf groep 6 blijvend onderhouden met gevarieerde oefenactiviteiten. Deze feitenkennis wordt zodanig geautomatiseerd en gememoriseerd dat de kennis flexibel kan worden ingezet bij het rekenen. Er vinden in de hogere jaargroepen dus oefenactiviteiten plaats waarbij het gaat om hoofdrekenen uit het hoofd en waarbij het gaat om hoofdrekenen met het hoofd. Feitenkennis wordt geconsolideerd en uitgebreid tot kinderen in groep 8 uiteindelijk vlot en flexibel kunnen hoofdrekenen tot duizend met gepaste getalcombinaties (Treffers e.a., 1999; Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001).
Onder meer de volgende punten zijn daarbij van belang (Treffers e.a., 1999; Bouwers & Van Goor, 2003):

Optellen en aftrekken
- De kern van het optellen en aftrekken tot twintig is het automatiseren en memoriseren van het optellen en aftrekken met overschrijding van de tien. Hierbij zijn verschillende niveaus te onderscheiden; het tellend rekenen, het structurerend rekenen en het formeel rekenen (Nelissen & Van Oers, 2000). Het komen van tellen tot structureren wordt bevorderd met behulp van modellen, lijnmodel (kralenketting), groepjesmodel en combinatiemodel (rekenrek) (Treffers e.a., 1999). De overgang van structurerend naar formeel rekenen wordt bevorderd door met behulp van getalbeelden (bijvoorbeeld op basis van

het rekenrek, zie voor een alternatief Feys, 1995a) en splitsingen opgaven verkort uit te rekenen (vergelijk Menne, 2008b).

- Het verwoorden van de diverse rekenhandelingen door de kinderen bevordert niveau-verhoging. Het gebruiken van de pijlentaal halverwege groep 3 helpt de kinderen in de richting van het handig rekenen met formele getallen. Daarbij en bij het automatiseren spelen strategieën als rekenen via de tien, aanvullen tot tien, rekenen met dubbelen en gebruik maken van de vijfstructuur een rol.
- In groep 4 en 5 wordt het getalgebied uitgebreid tot en met 100. Bij het rekenen tot 100 gaat het om het essentiële inzicht dat de getallen tot 100 zijn opgebouwd uit tientallen en eenheden en dat de cijfers binnen elk getal hun eigen positiewaarde hebben.
- De telrij wordt actief verkend, eerst tot 100, later verder. De kinderen leren de getallen op de getallenlijn (globaal) te positioneren. Ankergetallen spelen een belangrijke rol bij het leren uitvoeren van de bewerkingen. De kinderen oefenen het tellen en terugtellen eerst met sprongen van tien in de telrij tot 100 als voorbereiding op het optellen en aftrekken. Later wordt dit uitgebreid met het tellen met bijvoorbeeld sprongen van 100 en 1000.
- De tientallige getalstructuur wordt eveneens uitgebreid verkend, bijvoorbeeld met gebruik van eierdozen en zelf clusteren in groepen van tien (Fosnot & Dolk, 2001a). Bij gestructureerd rekenen tot 100 vindt verkorting plaats via het gebruik van de sprong via het tiental en de tiensprong. Daarbij wordt de lege getallenlijn gebruikt, waarop minder of meer verkortingen kunnen worden gebruikt (vergelijk Menne 2001), bijvoorbeeld:

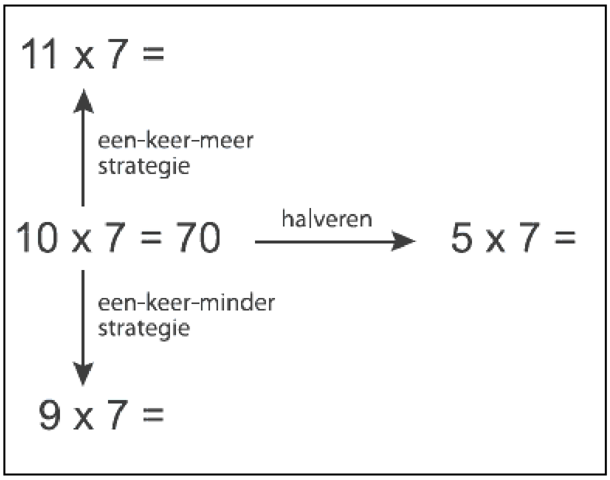


Bron: Gelderblom, 2009, pg. 13

- Op het formele niveau gebruiken de kinderen de getallenlijn niet meer, maar rekenen ze met behulp van de rijgmethode, de splitsmethode of hanteren ze varia aanpakken zoals compenseren, analogieën, en aanvullen.

Vermenigvuldigen en delen

- De rekenhandelingen bij vermenigvuldigen en delen noteren de kinderen aanvankelijk als herhaald optellen en herhaald aftrekken. In de loop van groep 4 worden deze vervangen door de verkorte notaties x en :.
- De overgang van het structurerend vermenigvuldigen naar het formeel vermenigvuldigen wordt bevorderd door het steeds beter leren redeneren over getalrelaties, rekeneigenschappen en reeds gekende tafelproducten en deze redeneringen bewust te laten maken en verwoorden en noteren (Verbruggen e.a., 2008).
- In groep 5 worden de bewerkingen vermenigvuldigen en delen verder verkend en is er aandacht voor het gebruik van strategieën, zoals bijvoorbeeld een keer meer of minder, verdubbelen en halveren (zie afbeelding op de volgende pagina).



Bron: Gelderblom, 2009, pg. 16

- Kinderen (re)construeren de tafels van vermenigvuldiging. Daarbij wordt gebruik gemaakt van steunpunten en strategieën. Twee-keer, tien-keer en vijf-keer zijn steunpunten en van daaruit kunnen andere sommen worden berekend (Ter Heege, 1980; 1995; Gelderblom, 2009).
- Als de kinderen alle antwoorden van een tafel kunnen berekenen met behulp van steunpunten en strategieën wordt deze tafel verder geoefend tot deze is geautomatiseerd via regelmatig terugkerende korte en gevarieerde oefenmomenten. Ten slotte worden alle tafelproducten gememoriseerd, uitgebreid tot boven de tien en worden de toepassingen van de basisoperaties vermenigvuldigen en delen verbreed.
- Bij het vermenigvuldigen met grotere getallen speelt de nulregel een belangrijke rol. De kinderen moeten zich er van bewust worden dat een opgave als 5 x 30 handig kan worden uitgerekend door 5 keer 3 te doen en daar een nul achter te zetten. Via de geldcontext kan dit goed onderbouwd worden (Buijs, 2008).
- Gaandeweg groep 5 krijgt ook het delen, mede in relatie tot de tafels van vermenigvuldiging, meer aandacht. Delen wordt eerst aangezet vanuit opdeelsituaties en verdeelsituaties. Opvermenigvuldigen wordt tegenover omslachtiger aanpakken als herhaald optellen en aftrekken gesteld. Bijzondere aandacht wordt besteed aan de rest bij een deling en de betekenis die dat in verschillende contexten kan hebben. Bijvoorbeeld: er zijn 25 koeken nodig, ze zijn verpakt in pakjes van 4. Dat betekent 7 pakjes nodig, of 6 pakjes vol en 1 losse koek (Treffers, 1990; Treffers e.a., 1999).

De startbekwame leerkracht beschikt over de kennis over het hoofdrekenen en beheerst daarnaast en in relatie daarmee de opbouw van de betreffende leerlijnen. Verder beheerst hij/zij didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zoals relevante betekenisverlenende contexten en toepassingssituaties, modellen en schema's. Deze kennis past hij/zij toe om adaptief en diagnosticerend reken-wiskunde onderwijs te kunnen realiseren. De startbekwame leerkracht beschikt over een uitgebreid repertoire aan oefenvormen. Hij/zij is in staat om in alle jaargroepen de hoofdrekenkennis uit eerdere jaren te onderhouden door middel van regelmatig terugkerende gevarieerde oefeningen die passen bij het niveau van de kinderen.

2.5. Kennis voor onderwijzen van hele getallen: standaardprocedures waaronder cijferen

Standaardprocedures zijn er in verschillende vormen. De kerndoelen (OC&W, 2006) geven aan dat leerlingen de vier basisbewerkingen (onder andere) leren oplossen door 'meer of minder verkorte' standaardprocedures. Dat kan cijferen – het meest verkorte standaardalgoritme - zijn, maar dat kan ook een minder verkorte vorm zijn. Er zijn globaal drie verschillende aanpakken binnen dit subdomein te onderscheiden: kolomsgewijs leren rekenen, leren cijferen via progressief schematiseren en regelgeleid leren cijferen. Daarbinnen zijn variaties mogelijk. De verschillende aanpakken hangen samen, ook voor wat betreft de te bereiken doelen.

- Kolomsgewijs rekenen:
  Het kolomsgewijs rekenen wordt opgebouwd vanuit het hoofdrekenen. Er wordt aangesloten op en gebruik gemaakt van de aanwezige voorkennis in de vorm van splitsend (hoofd)rekenen. Er wordt gerekend met de getallen en getalwaarden (en niet met de losse cijfers) (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001). Kolomsgewijs rekenen kan worden benut als opstap naar cijferend rekenen.
  Een variant hierop is het voortbouwen op informele kennis en strategieën van kinderen en via vormen van gestileerd hoofdrekenen komen tot standaardprocedures (Buijs, 2008). De afstand tussen hoofdrekenen en cijferen kan hierbij worden overbrugd met de standaardprocedures van het kolomsgewijs rekenen. Er kan ook direct worden aangesloten bij het hoofdrekenen (Van Biervliet, 1994).
- Cijferen via progressief schematiseren:
  Bij het aanleren van het cijferen is sprake van progressief schematiseren als de procedure in een uitvoerige vorm wordt geïntroduceerd. Er worden situaties aangeboden waarin met vrij grote getallen wordt gewerkt die zich duidelijk niet meer lenen voor een hoofdrekenende aanpak. Deze probleemsituaties vragen om een geschematiseerde weergave die gaandeweg het leerproces verkort wordt tot er uiteindelijk een procedure overblijft die efficiënt en automatisch kan worden uitgevoerd (Goffree, 1992b).
- Regelgeleid cijferen:
  De leerlingen krijgen bij elke bewerking direct het meest verkorte standaardalgoritme voor cijferen aangeboden en gaan deze manier vervolgens systematisch inoefenen. Bij deze aanpak wordt meestal gekozen voor een vorm van progressief compliceren; de opgaven worden gaandeweg moeilijker doordat de getallen groter worden (vergelijk Van de Craats & Bosch, 2007).

Bij de genoemde aanpakken worden ook verschillende voor- en nadelen onderscheiden (vergelijk Van Biervliet, 1994; Feys, 1995b):

- Al lange tijd worden vraagtekens gezet bij het (maatschappelijk) nut van cijferend rekenen, vooral als het gaat om grote getallen (Zijlstra, 1890; Turkstra & Timmer, 1953; Van Gelder, 1969; Uittenbogaard, 2007). Met de komst van de rekenmachine is het maatschappelijk nut van cijferen verder afgenomen (Gravemeijer, 2001).
- Indien algoritmes niet-inzichtelijk worden aangeleerd, worden ze makkelijk vergeten, of treden er gemakkelijk onopgemerkte fouten op in de uitwerking (Erlwanger, 1973)
- Procedures die zonder inzicht worden uitgevoerd zijn gevoelig voor fouten, bijvoorbeeld bij het optreden van nullen in de getallen bij het cijferend delen (Hoogland, 2008b). Inzichtelijk aangeleerde algoritmes kunnen met behulp van de inzichtelijke basis weer gereconstrueerd worden (vergelijk Vermeulen, 2005).
- Regelgeleid cijferen aanleren beperkt zich tot procedurele aanwijzingen, die bij verschillende getallen, feitelijk steeds anders moeten zijn (vanwege bijvoorbeeld lenen en inwisselen). Procedurele aanwijzingen zijn daardoor maar beperkt generaliseerbaar en maken bovendien niet zichtbaar waarom de procedure werkt (Ball e.a., 2008)
- Alternatieve aanpakken als kolomsgewijs rekenen, zijn gebaseerd op inzichtelijk handelen; de waarde van getallen blijft zichtbaar en de procedure sluit aan op beschikbare voorkennis van het splitsend hoofdrekenen. Echter, als leerlingen niet tot verkorting komen, moeten er veel deelstappen worden gezet. Met name zwakkere rekenaars komen minder snel tot verkorting en juist zij hebben bij veel deelstappen meer kans op fouten in het uitvoeren van de procedure. Sommigen wijzen er op dat juist zwakkere leerlingen gebaat kunnen zijn bij standaardprocedures (Huitema, 2009) terwijl anderen juist stellen dat deze leerlingen in staat zijn verschillende strategieën te ontwikkelen en te gebruiken (Boswinkel & Moerlands, 2001). Ook wordt er op gewezen dat kolomsgewijs rekenen alleen geschikt is voor relatief kleine getallen (Van de Craats, 2007).
- Verkorting bij progressief schematiseren en kolomsgewijs vermenigvuldigen en delen is noodzakelijk. Kinderen zullen niet altijd uit zichzelf de meest efficiënte strategie ontdek-

ken. Kinderen die bijvoorbeeld dreigen te volharden in uitgebreide en lange procedures moeten gestimuleerd worden tot verkortingen (Uittenbogaard, 2009).

- Welke standaardprocedure het meest efficiënt is en kan worden beschouwd als einddoel, kan verschillen per kind. De meningen hierover zijn in Nederland overigens erg verdeeld (vergelijk Van Zanten, 2009b). De verschillen in effectiviteit (de kans om tot een goed antwoord te komen) tussen cijferen en kolomsgewijs rekenen zijn voor de meeste leerlingen beperkt, voor zwakkere leerlingen lijkt het dat cijferprocedures effectiever zijn (Van Putten & Hickendorff 2009).

2.5.1. Contexten en toepassingssituaties bij standaardprocedures waaronder cijferen

Bij het kolomsgewijs rekenen wordt geld als modelcontext gebruikt. Het splitsen in honderdjes, tientjes en euro's geeft voor de kinderen betekenis aan de getallen binnen het formele rekenen. Allerlei contexten worden gebruikt om standaardprocedures toe te passen. Deze procedures zijn immers niet afhankelijk van de aard en de grootte van de getallen. Bij het cijferen via progressieve schematisering wordt meestal gestart met voorstelbare probleemsituaties waarbij gerekend moet worden met grote getallen. Het regelgeleid cijferen wordt veelal zonder steun van contexten aangeleerd. Hierbij staat de procedure op zich centraal.

2.5.2. Modellen en schema's bij standaardprocedures waaronder cijferen

Bij het aanleren van het kolomsgewijs rekenen en cijferprocedures via progressief schematiseren gaat het om vaste rekenprocedures, die uiteindelijk in sterk verkorte vorm worden genoteerd. De verkorte vormen van noteren die bij het cijferen worden gebruikt steunen sterk op (inzicht in) het decimale positiesysteem. Cijfers moeten steeds op de positie die overeenkomt met hun waarde worden genoteerd.
Aanvankelijk kunnen hierbij schema's worden gebruikt gebaseerd op de positiewaarde van de cijfers, bijvoorbeeld het positieschema H T E (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001). De onderliggende positiewaarden kunnen worden geconcretiseerd met geld of eventueel additief materiaal als M.A.B.-materiaal. Dit materiaal kan worden ingezet om de positiewaarde van de cijfers te visualiseren, niet om daadwerkelijk mee te tellen.
Bij specifieke aanpakken, zoals het bepalen van deeluitkomsten bij vermenigvuldigen, wordt bijvoorbeeld het rechthoekmodel gebruikt (vergelijk Fosnot & Dolk, 2001b).
Bij het regelgeleide cijferen wordt direct de meest verkorte notatievorm gebruikt, zonder hulp van schema's en modellen.

2.5.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij standaardprocedures waaronder cijferen

Het onderscheid tussen kolomsgewijs rekenen en cijferen biedt aanknopingspunten tot differentiatie, bijvoorbeeld in de mate van verkorting die van verschillende leerlingen wordt verwacht. Aandachtspunten bij het (aan)leren van standaardprocedures zijn onder meer (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001; Koersen & Uittenbogaard, 2006; Buijs, 2008):

- Voor het rekenen met standaardprocedures moeten kinderen optellingen en aftrekkingen tot twintig en de tafels van vermenigvuldiging hebben geautomatiseerd of gememoriseerd. Verder moeten ze voor het cijferen de positiewaarden van de cijfers binnen een getal kunnen benoemen.
- Het honoreren van informele aanpakken in het begin van het leerproces heeft (alleen) zin wanneer deze perspectief bieden voor verdere schematisering en verkorting. Uitwisselen van verschillende aanpakken van de leerlingen kan bijdragen aan het proces van verkorting, als in de aan de orde gestelde aanpakken bijvoorbeeld grotere deelstappen worden gezet (Van Zanten, 2009a).
- Het cijferend optellen kan worden afgeleid en opgebouwd vanuit het kolomsgewijs optellen. Het cijferend aftrekken kan echter niet rechtsreeks uit het kolomsgewijs aftrekken worden afgeleid.

- Vermenigvuldigen met standaardprocedures wordt geleerd, aansluitend op hoofdreken-strategieën en informele aanpakken die kinderen al hanteren. Cijferend vermenigvuldigen kan worden afgeleid en opgebouwd vanuit kolomsgewijs vermenigvuldigen. (Buijs, 2008; 2009b; Treffers, 2009).
- Bij het delen kan veelal worden volstaan met een vorm van kolomsgewijs delen waarin zo verkort mogelijk wordt gerekend, honderdtallen, tientallen en eenheden worden per ronde maximaal verdeeld, maar de quotiënten worden volledig uitgeschreven als eindvorm. Deze vorm is verder te verkorten tot het meest verkorte standaardalgoritme cijferend delen (Treffers & De Moor, 1990; Van Putten & Hickendorff, 2006).
- Lettersommen kunnen bijdragen aan inzicht in de manier waarop algoritmes werken bijvoorbeeld (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001):

```
  EEN
TWEE
-------- +
 DRIE
```

De startbekwame leerkracht beschikt over de kennis die nodig is voor het onderwijzen van de standaardprocedures uit deze paragraaf en beheerst daarnaast en in relatie daarmee de opbouw van de verschillende leerlijnen, inclusief mogelijke variaties. Hij /zij kent de respectievelijke voor- en nadelen van de verschillende standaardprocedures. Hij/zij beheerst didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zoals relevante betekenisverlenende contexten en toepassingssituaties, modellen en schema's en verkortingen. Deze kennis past hij/zij toe om adaptief en diagnosticerend reken-wiskunde onderwijs te kunnen realiseren. Hij/zij stimuleert kinderen om na te denken over de onderlinge relaties tussen verschillende aanpakken.

2.6. Kennis voor onderwijzen van hele getallen: schattend rekenen

Schattend rekenen kan worden beschouwd als de afsluiting van hoofdrekenen (Sweers, 1996). De twee belangrijkste vormen van schattend rekenen zijn: het rekenen met afrondingen van precies gegeven getallen met de bedoeling een globaal antwoord te vinden; en het schattend rekenen waarbij de benodigde gegevens niet of niet volledig beschikbaar zijn. Leerlingen leren schattend rekenen, maar leren ook te bepalen wanneer schattend rekenen de voorkeur heeft of zinvol is en wanneer precies rekenen de voorkeur heeft of zinvol is. Dit is afhankelijk van de context of de situatie. Verder leren kinderen te beredeneren 'hoe ver je er naast komt te zitten' bij schattingen of het rekenen met afgeronde getallen, en of de bepaalde afwijking (binnen de context) acceptabel is (Gribling e.a., 1994; Treffers & De Moor, 1990). Hierbij is onder meer van belang:
- Het schattend tellen komt in alle groepen voor. In groep 1 en 2 bijvoorbeeld bij het schatten van grotere hoeveelheden via orde-van-grootte-vergelijkingen op basis van 'argumenten'. In groep 5 en 6 bijvoorbeeld door systematisch in te schatten, bijvoorbeeld het aantal mensen op een plein te laten schatten door het aantal mensen per vierkante meter te tellen en de oppervlakte van het plein te schatten.
- Het schattend rekenen start al in de onderbouw met het rekenen via ronde getallen bij verschillende bewerkingen.
- Schattend rekenen heeft daarnaast ook een didactische functie bij het precies leren rekenen, zoals bij het vooraf inschatten van het antwoord van een opgave, of bij het achteraf schattend controleren van een precies berekende opgave.

2.6.1. Contexten en toepassingssituaties bij schattend rekenen

Gecijferdheid komt sterk tot uiting bij, en wordt gestimuleerd door schattend rekenen. Door schattend rekenen is het mogelijk relatief snel greep te krijgen op de getalsmatige werkelijkheid. In het dagelijks leven is schatten een belangrijke vaardigheid; precies rekenen hoeft

niet altijd (heb ik genoeg aan tien euro, als ik vijf broden van €1,89 wil kopen?), kan niet altijd (Hoeveel Amsterdammers zijn er vandaag ongeveer jarig?) en mag niet altijd (tijdens de vakantie hebben we 2178 km gereden. In totaal hebben we 195 liter benzine getankt. Volgens de fabriek rijdt onze auto 1 op 15. Klopt dit wel?)
Bij zowel schattend tellen als bij schattend rekenen gaat het er om dat moeilijk te bepalen hoeveelheden of lastige getallen overzichtelijk en hanteerbaar worden gemaakt. Dat kan door hoeveelheden te vergelijken met bekende aantallen, ze handig te structureren, of door getallen af te ronden. Wat hanteerbaar is, hangt af van de telstrategieën, de (bij de context passende) referentieaantallen, getallen en maten en de rekenfeiten, basisbewerkingen en referentiegetallen en –maten waarover de leerling beschikt.
De context bepaalt mede waarop getallen worden afgerond, als 192.912 het inwonertal van een stad betreft is 200.000 een passende afronding, gaat het om de prijs van een woning dan is 190.000 beter.

2.6.2. Modellen en schema's bij schattend rekenen

Bij schattend rekenen en redeneren zijn het noteren van aannames, het maken van een schetsje, het maken van (afge)ronde getallen en het noteren van tussenstappen belangrijke activiteiten (Buijs, 2009a).

2.6.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij schattend rekenen

Bij het schattend rekenen worden de volgende onderdelen onderscheiden: afronden van getallen, schattend rekenen met de basisbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, en schattend rekenen met onvolledige gegevens. Er zijn drie fasen te onderscheiden (Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001):

- De informele fase: er wordt gestart vanuit informele aanpakken van de leerling. Bijvoorbeeld bij het afronden van getallen: 997 wordt als ongeveer duizend benoemd, 289 wordt bijna driehonderd. In beide gevallen worden er nog geen afrondingsregels gebruikt.
- De regelgeleide fase, waarin de leerlingen tot een standaardaanpak komen, bijvoorbeeld bij het afronden van getallen met afrondingsregels.
- De flexibele fase: in deze fase kunnen de leerlingen goede keuzes maken voor het afronden of het schatten en deze genuanceerd hanteren.

De startbekwame leerkracht kan flexibel wisselen tussen de niveaus van het informeel, regelgeleid en flexibel afronden en schattend rekenen om kinderen te ondersteunen in hun denken en hen te brengen tot niveauverhoging. Onder meer de volgende punten zijn hierbij van belang:

- Bij schattend rekenen met onvolledige gegevens moeten leerlingen naast het afronden en rekenen met ronde getallen ook zelf bij de situatie passende getallen kiezen, waarbij of de grootte van de getallen al min of meer afgebakend is dan wel dat er een appèl wordt gedaan op hun maatkennis. Bijvoorbeeld: Er staat een file van 3 km. Hoeveel auto's staan er ongeveer in die file? Om hiervan een schatting te kunnen maken, moet je weten dat een auto ongeveer 5 m lang is en moet je daarnaast aannamen doen over: de tussenruimte tussen de auto's, één of twee rijbanen, wel of geen vrachtauto's, en zo verder.
- De voor het schattend rekenen benodigde basiskennis betreft getal- en maatkennis. Bij getalkennis gaat het om het paraat hebben van basale getalrelaties, zoals de splitsingen van 10 en 20, verdubbelingen en halveringen, relatienetwerken van bijzondere getallen als 25 (zit vier keer in 100, …). De maatkennis betreft vooral kennis van referentiematen, zoals 'in een uur loop je ongeveer 5 kilometer'.
- De complexiteit van het schattend rekenen wordt vooral bepaald door de hoeveelheid aspecten die er mee verbonden is in het onderwijs, zoals het getalaspect (bijvoorbeeld getallen rond maken), het taalaspect (informele en formele taal), het meetaspect (maatkennis, referentiegegevens), het rekenaspect (opereren met ronde getallen), het rede-

neeraspect (zicht hebben op de situatie en op de effecten van de bewerkingen) en het attitudeaspect (wanneer moet / kun je schatten?, durven schatten, kritisch zijn).

2.7. Kennis van onderwijzen voor (hele) getallen: gebruik van de rekenmachine

De rekenmachine doet, ondanks het gegeven dat de meeste kinderen het apparaatje dan al kennen, zijn intrede pas in de bovenbouw. Om de rekenmachine goed te kunnen gebruiken, moeten de kinderen inzicht hebben in de structuur van het getallen- en rekensysteem.
De rekenmachine kan als hulpmiddel dienen bij het probleemoplossen met grote of lastige getallen. De aandacht bij het probleemoplossen kan dan gericht worden op het organiseren van de berekeningen en het daadwerkelijke oplossen van het probleem.
Een andere manier om de rekenmachine in te zetten is het gebruik bij spelletjes die het schattend rekenen ondersteunen. Dit kan ook via het rekenen met getallen die te groot zijn voor de rekenmachine (Vermeulen, 2006).

De startbekwame leerkracht kan de leerlingen begeleiden in het leren werken met de rekenmachine. Er worden drie fasen onderscheiden in het leren gebruiken van de rekenmachine, die overigens niet geheel te scheiden zijn: verkenning, verrijking, en integratie.
In de didactiek voor gebruik van de rekenmachine worden drie functies onderscheiden:
- De onderzoeksfunctie (het onderzoeken van de (on)mogelijkheden van de rekenmachine).
- De didactische functie (het gebruiken van de rekenmachine om op een andere manier het inzicht in de structuren van ons getalsysteem en de operaties te verdiepen).
- Het gebruik van de rekenmachine als rekenhulpmiddel.

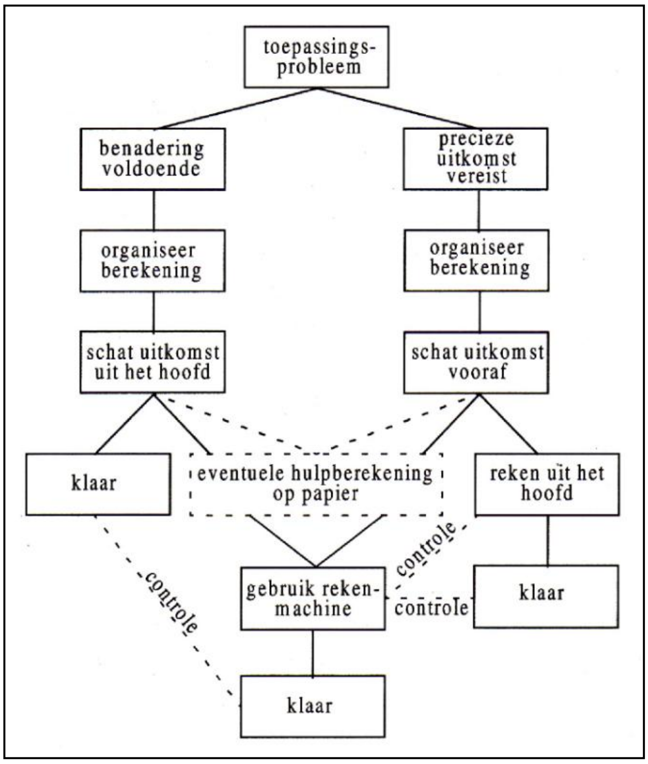
Het accent dat aan de verschillende functies wordt gegeven verschilt per fase. Bij deze fasen zijn onder meer de volgende punten van belang (Ter Heege, 1999; Vermeulen 2006):
- Verkenning: eerst wordt de rekenmachine door de kinderen verkend als object van onderzoek. Het gaat om aspecten als: de functie van de knoppen, punten moeten gelezen worden als komma's, en de rekeneigenschappen van de machine. Sommige rekenmachines houden de voorkeursregels voor de volgorde van bewerkingen aan andere machines niet. Het intoetsen van bijvoorbeeld 4 x 5 – 4 x 5 geeft soms het antwoord 80.
- Verrijking: de rekenmachine wordt als didactische verrijkingsmogelijkheid gebruikt bij het hoofdrekenen, schattend rekenen en cijferen. Bijvoorbeeld: bij een hoofdrekendictee gaan de kinderen na bij welke opgaven het met de rekenmachine sneller gaat en bij welke opgaven het berekenen uit het hoofd sneller gaat.
  Bij het schattend rekenen controleren de kinderen met de rekenmachine hun schatting van opgaven als 39 x 62. Omgekeerd gaan zij met een schatting na of een uitkomst verkregen met een rekenmachine kan kloppen.
  Bij het cijferen kunnen vermenigvuldigingen met grote getallen worden uitgerekend met behulp van de rekenmachine. Als de uitkomst uit zoveel cijfers bestaat dat het getal niet meer op het scherm past, kunnen kinderen toch met behulp van een rekenmachine het antwoord bepalen.
  De constante factor wordt aan de orde gesteld (bijvoorbeeld 3 x = geeft 9 als uitkomst, 3 x = = geeft 27 als uitkomst, etc.) en het gebruik van de nulregel: het kunnen rekenen met machten van 10.
- Integratie: de leerlingen gaan het werken met de rekenmachine integreren in hun rekenrepertoire en ontwikkelen daarbij een houding waarbij zij het antwoord verkregen met de rekenmachine altijd controleren met een schatting.

De startbekwame leerkracht beschikt over kennis van de voor- en nadelen van de rekenmachine. Hij/zij kan beoordelen in welke gevallen de rekenmachine nodig is en waar dat van afhangt (bijvoorbeeld het netwerk van beheerste hoofdrekenstrategieën en kennis van rekenfeiten).

2.8. Verstrengeling en samenhang bij hele getallen

2.8.1. Verstrengeling van hele getallen met andere reken-wiskundedomeinen

- Bij toepassingen is het zinvol om te bepalen welke vorm van rekenen het meest voor de hand ligt, effectief of snel is; hoofdrekenen, schattend rekenen, schriftelijk rekenen of gebruik maken van de rekenmachine. Het volgende schema laat zien welke overwegingen daarbij spelen.



Bron: Van den Heuvel-Panhuizen e.a., 2001, pg. 138

- Veel meetgetallen kunnen hele getallen zijn, afhankelijk van de eenheid of maat die wordt gehanteerd. Zo kan in de ene situatie een afstand worden uitgedrukt in een kommagetal als 1,25 meter, terwijl een andere keer 125 centimeter wordt gebruikt.
- Het redeneren en rekenen met kommagetallen wordt vereenvoudigd door de analogie met hele getallen, mits de decimale structuur wordt doorzien. Dit geldt zowel voor hoofdrekenen als cijferen met kommagetallen, bijvoorbeeld door het wegdenken van komma's gedurende het uitvoeren van de berekening en nadien met behulp van een beredeneerde schatting de komma op de juiste plek te plaatsen (Buijs, 2005b).

2.8.2. Gebruik van hele getallen bij andere vak- en vormingsgebieden
Bij mens & maatschappij worden de verschillende soorten officiële nummers (naamgetallen) besproken, bijvoorbeeld postcode, pincode en kentekens. Er worden ook getallen gebruikt waarmee wel geredeneerd en gerekend kan worden, zoals jaartallen.

3. Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen

Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen zijn nauw met elkaar verweven. Wiskundig gezien zijn er grote overeenkomsten tussen verhoudingen, gebroken getallen en procenten. Zo valt aan allemaal een relatief aspect onderscheiden. Kommagetallen en breuken zijn beide notatiewijzen van rationale getallen. Het overkoepelende begrip bij dit domein is het begrip verhouding.
Vanwege de sterke onderlinge verwevenheid start deze domeinbeschrijving met een gezamenlijk deel over de maatschappelijke relevantie van het domein en de onderlinge verstrengeling en samenhang. Daarna volgt de beschrijving van de vier afzonderlijke subdomeinen. Hoewel breuken en kommagetallen wiskundig gezien grotendeels overeenkomen, zijn er in het leren ervan op de basisschool grote verschillen. Daarom worden ze hier, aansluitend op literatuur en onderwijspraktijk, als subdomeinen onderscheiden.

3.1. Maatschappelijke relevantie van verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen

In het dagelijks leven komt men veelvuldig in aanraking met verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen. Bij het verwerken van getalsmatige informatie worden verhoudingen en breuken vaak gebruikt om een relatief deel ten opzichte van een totaal aan te geven. Breuken worden meestal gebruikt voor eenvoudige verhoudingssituaties als de helft, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$. In andere situaties wordt vaak overgestapt op het gebruik van procenten. Bijvoorbeeld in het krantenbericht hieronder, waar breuken en percentages worden gebruikt om het relatieve deel van het totale aantal ouders aan te geven.

> **Een derde ouders heeft zorgen over opvoeding**
>
> **DEN HAAG (ANP) - Ruim een derde van alle ouders met thuiswonende kinderen heeft zorgen over de opvoeding. Van alle ouders heeft 11 procent zelfs het gevoel de opvoeding niet goed aan te kunnen.**
>
> Deze onderzoeksresultaten presenteerde het CBS woensdag in het Jaarrapport 2008 van de Landelijke Jeugdmonitor van het CBS. Minister André Rouvoet (Jeugd en Gezin) heeft het rapport in ontvangst genomen.
>
> Ouders maken zich vooral zorgen over emotionele problemen, gedragsproblemen en ongehoorzaamheid. Alleenstaande ouders zijn doorgaans minder tevreden over de opvoeding dan tweeoudergezinnen. Meer dan de helft van de ondervraagde eenoudergezinnen gaf aan zich in het afgelopen jaar zorgen te hebben gemaakt over de opvoeding. Bij tweeoudergezinnen ging het om ongeveer een derde.

Bron: Metro, 3-12-2008.

Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen hebben zo elk hun eigen verschijningsvormen en toepassingen in de realiteit. De notatie van kommagetallen bijvoorbeeld, komt overeen met die van geld. De notatie van kommagetallen en breuken verschilt dusdanig dat kommagetallen in de praktijk zelfs niet altijd als breuk worden ervaren.
Breuken komen vooral voor bij verdeelsituaties en kommagetallen komen vooral voor in meetsituaties. Procenten worden gebruikt bij het aangeven van een deel van een totaal, bij korting en rente, terwijl korting weer niet of nauwelijks wordt uitgedrukt met breuken of kom-

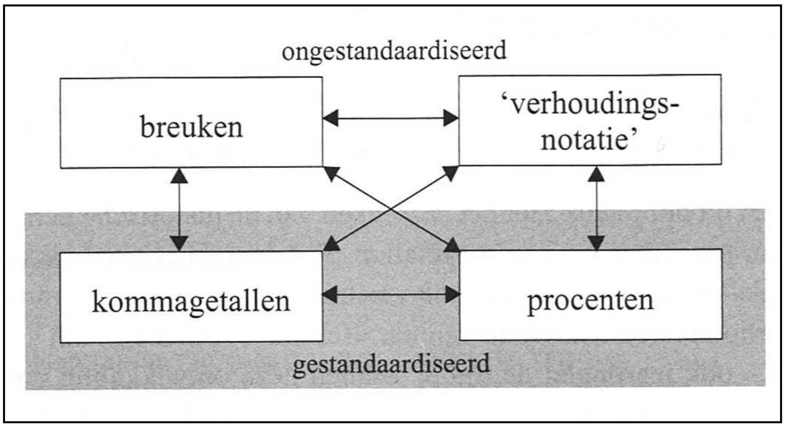
magetallen. Een en ander is mede terug te voeren op het historisch ontstaansproces van procenten, breuken en kommagetallen.

3.2. Verstrengeling en samenhang verhoudingen, procenten, breuken, kommagetallen

Het overkoepelende begrip bij dit domein is het begrip verhouding. Ook breuken, procenten en kommagetallen beschrijven in zekere zin verhoudingen. Breuken geven de verhouding aan tussen een deel en het geheel, bijvoorbeeld 1 op de 3 als $\frac{1}{3}$ deel. Een percentage geeft de verhouding aan van een deel tot een geheel dat op honderd wordt gesteld, bijvoorbeeld $\frac{1}{4}$ deel is hetzelfde als $\frac{25}{100}$ deel, oftewel 25%. Kommagetallen zijn vaak meetgetallen die de verhouding aangeven ten opzichte van een bepaalde maat, bijvoorbeeld 0,4 meter (Freudenthal, 1983; Treffers e.a., 1994; 1996; Torn e.a., 1999; Keijzer & Gravemeijer, 2005; Van Galen e.a., 2005).

3.2.1. Standaardisering

De notatie van procenten, breuken en kommagetallen verschilt, maar ze worden, afhankelijk van de situatie, naast elkaar gebruikt. Niet willekeurig, maar afhankelijk van wat het beste uitkomt; eenvoudige delen kunnen vaak met breuken worden aangeduid, maar doordat kommagetallen en procenten gestandaardiseerd zijn, kan daarmee eenvoudiger worden vergeleken.



Bron: Van Galen e.a., 2005, pg. 33.

3.2.2. Relatieve en absolute gegevens

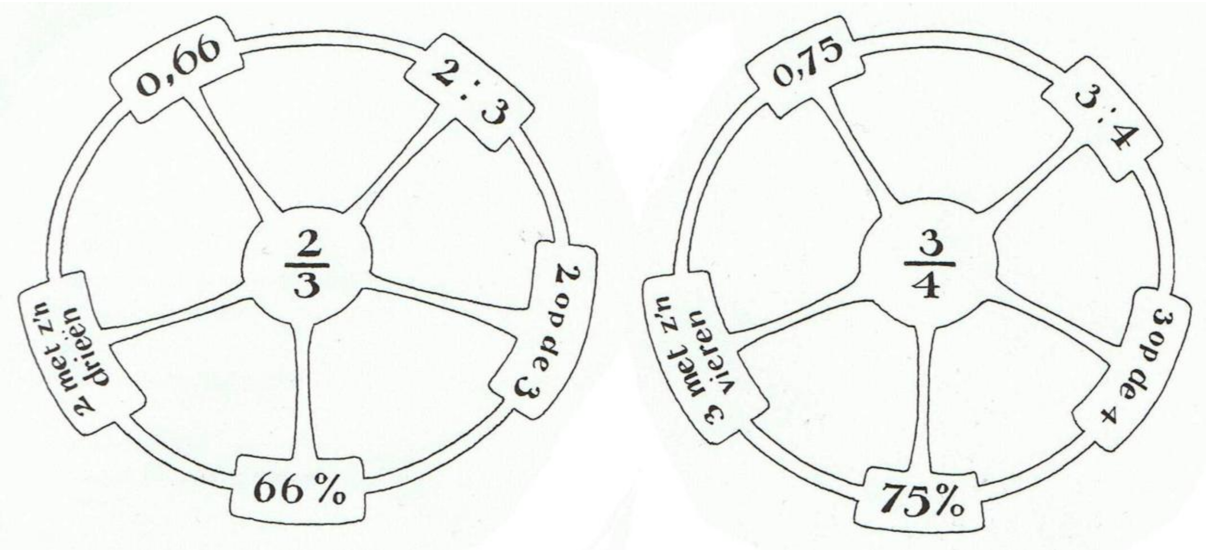
Absolute gegevens zijn gegevens waarbij de getallen verwijzen naar daadwerkelijke hoeveelheden of aantallen. Relatieve gegevens zijn verhoudingsgegevens waarbij de getallen verwijzen naar iets ten opzichte van een ander geheel of totaal. Voor het inzicht van kinderen is dit een cruciaal en lastig onderscheid (Van Galen, 2002; 2003). De startbekwame leerkracht doorziet deze moeilijkheden en ondersteunt het leren van kinderen (Scheltens, 2006). Onder meer de volgende punten zijn hierbij van belang (Keijzer & Gravemeijer, 2005; Van Galen e.a., 2005; Brom-Snijders e.a., 2006, Van Zanten e.a., 2008):

- Getalsmatige verhoudingen bieden relatieve gegevens, ze hebben betrekking op elkaar en op een totaal. Bijvoorbeeld: benzineverbruik van 1 op 18 betekent dat het rijden van 18 kilometer, 1 liter benzine kost. Om te weten hoeveel benzine je nodig hebt voor een bepaalde reis, moet je het aantal af te leggen kilometers weten. En omgekeerd; om te weten hoever je nog kunt rijden, moet je weten hoeveel liter benzine nog in je tank zit. Verhoudingsgetallen kunnen dus elk als operator fungeren, afhankelijk van het absolute uitgangsgegeven dat bekend is.

- Percentages zijn verhoudingsgetallen; de reële grootte is afhankelijk van de grootte van het getal of het geheel waar zij betrekking op hebben. Een percentage biedt dus relatieve informatie en fungeert altijd als operator.
- Breuken hebben zowel een relatief als een absoluut karakter. Het relatieve karakter komt tot uitdrukking als breuken verwijzen naar iets anders (een geheel, een aantal, een meetresultaat). Dit is bijvoorbeeld het geval in het nieuwsbericht over de zorgen die ouders hebben over de opvoeding. $\frac{1}{3}$ is hier geen getal op zich, maar verwijst naar een totaal; $\frac{1}{3}$ deel van de ouders. Als het totaal bekend is fungeert de breuk als operator (bijvoorbeeld $\frac{1}{3}$ deel van 6 miljoen ouders geeft 2 miljoen ouders die zich wel eens zorgen maken). Het absolute karakter komt tot uitdrukking als de breuk wordt beschouwd als een rationaal getal; een punt op de getallenlijn of een formeel getal waarmee kan worden gerekend.
- Kommagetallen in hun verschijningsvorm van meetgetal geven de verhouding aan tussen datgene wat beschreven wordt en de eenheid waaraan wordt gerefereerd. Bijvoorbeeld een lengtemeting van 0,40 kan enkel worden geduid als de gehanteerde eenheid (bijvoorbeeld meter) bekend is. Er is dan sprake van een benoemd getal. Het absolute karakter komt, evenals bij breuken, tot uitdrukking als het kommagetal wordt beschouwd als rationaal getal.

3.2.3. (Getals)relaties tussen verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen

De (getals)relaties tussen de subdomeinen onderling (zoals $\frac{4}{10}$ = 0,4 en 0,4 keer iets komt overeen met 40% van datgene) komen in het leerproces van kinderen van pas bij het rekenen en redeneren, en behoren daarom zelf ook tot de leerstof. Daarbij ligt de nadruk op inzichtelijk (hoofd)rekenen (Sweers, 1996; Buijs, 2002; Dolk, 2005; Steinvoorte, 2005).



Bron: Buys e.a., 1996, pg. 11.

Onder meer de volgende punten zijn hierbij van belang:
- De beste manier waarop kinderen zulke (getals)relaties leren is via het begrijpen van die relaties. Als verbanden kunnen worden beredeneerd, beperkt zich namelijk het aantal rekenfeitjes dat als afzonderlijke feiten moet worden geleerd (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2008a).
- Breuken en kommagetallen kunnen als punt op de getallenlijn worden geplaatst. Percentages strikt genomen echter niet, omdat dit geen absolute getallen zijn. Een percentage is een operator en kan dus alleen in verband worden gebracht met een breuk of kommagetal als operator, bijvoorbeeld $\frac{1}{5}$ deel van … komt overeen met 20% van … Op een

strook of dubbele getallenlijn kunnen percentages wel worden gevisualiseerd in relatie tot breuken of kommagetallen (Van Galen e.a., 2005).

- Breuken en kommagetallen kunnen in elkaar worden omgerekend. Breuken kunnen worden omgerekend in kommagetallen door ze om te zetten in tienden, of honderdsten enzovoort. Bijvoorbeeld $\frac{2}{4}$ is gelijk aan $\frac{5}{10}$, dus $\frac{2}{4}$ = 0,5. Sommige breuken leveren omgezet in kommagetallen repeterende breuken op, zoals $\frac{1}{3}$. Kommagetallen omzetten in breuken komt neer op het anders noteren van kommagetallen, bijvoorbeeld 0,4 = $\frac{4}{10}$, en 0,35 = $\frac{35}{100}$. Vaak kan de breuk vervolgens worden vereenvoudigd.

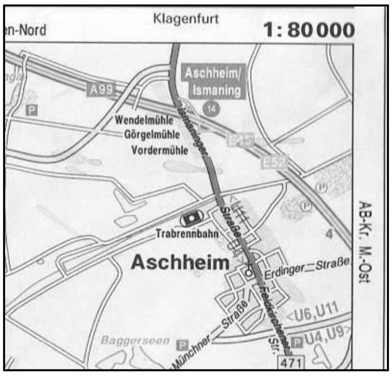
De startbekwame leerkracht beschikt over kennis van en inzicht in de verstrengeling en samenhang tussen verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen. Hij/zij kent veel voorkomende (getals)relaties en kan bij het rekenen en redeneren met verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen flexibel wisselen tussen deze subdomeinen.

Kennis die niet geheel tot de leerstof van de basisschool behoort, maar waar de startbekwame leerkracht wel over beschikt, onder meer met het oog op de doorlopende leerlijn van PO naar VO, betreft het kunnen omrekenen van (minder gebruikelijke) breuken in kommagetallen en omgekeerd en de notatie van repeterende breuken.

3A. Verhoudingen

3A.1. Maatschappelijke relevantie van verhoudingen

In het dagelijks leven spelen verhoudingen een zeer grote rol, al is men zich dat misschien niet altijd bewust. Dat varieert van de dagelijkse boodschappen, waarbij men zich bij verschillende merken en verpakkingen kan afvragen wat naar verhouding het meest voordelig is, tot het gebruik maken van landkaarten en andere afbeeldingen op schaal. Meetkundige verhoudingen spelen van jongs af aan een rol bij het interpreteren van de wereld.



Ook bij veel (getalsmatige) informatie gaat het om verhoudingen, zoals hoe vaak een bepaalde beroepsziekte voorkomt, of wat het benzineverbruik van een auto is. Verhoudingen helpen om zaken te kunnen vergelijken, en dragen ook in deze zin bij aan het interpreteren van de wereld, zoals in het volgende voorbeeld:

1 op de 6 Nederlandse kleuters is te zwaar 1 op de 3 kleuters in Afrika en Azië is ondervoed

Bron: First8.

3A.2. Kennis van verhoudingen

De startbekwame leerkracht beschikt over kennis van en heeft inzicht in verhoudingen, waaronder de verstrengeling en samenhang van verhoudingen met procenten, breuken en kommagetallen.

3A.2.1. Betekenis van verhoudingen

Een verhouding is een evenredig verband tussen twee of meer getalsmatige of meetkundige beschrijvingen. Bijvoorbeeld: schaal (plattegronden, landkaarten en maquetes), benzineverbruik (de auto verbruikt 1 op 18) en samengestelde grootheden als prijs per eenheid (1 kilo gehakt kost €…) of snelheid (80 kilometer per uur). Er zijn interne verhoudingen (binnen grootheden of getallen die op hetzelfde betrekking hebben, bijvoorbeeld 3 van de 4 kinderen heeft een huisdier) en externe verhoudingen (tussen grootheden, bijvoorbeeld kilometer per uur) (Freudenthal, 1983).
Verhoudingen mogen niet worden verward met niet-evenredige verbanden, zoals het verband tussen lengte en oppervlakte bij vergroting of verkleining van een object.
Er zijn bepaalde (meetkundige) bijzondere verhoudingen als de gulden snede (Φ) en de verhouding tussen de omtrek en diameter van een cirkel (π).

3A.2.2. Redeneren en rekenen met verhoudingen

Verhoudingen kunnen met hele getallen worden genoteerd in de zogenoemde verhoudingsnotatie, bijvoorbeeld 2 : 3. Bij het redeneren en rekenen met zulke verhoudingsgetallen, moet de onderlinge verhouding intact blijven. Als het ene verhoudingsgetal wordt vergroot of verkleind, moet het andere verhoudingsgetal met dezelfde factor worden vergroot of verkleind. Aldus kan van de basisbewerkingen delen en vermenigvuldigen gebruik worden gemaakt. De basisbewerkingen optellen en aftrekken kunnen alleen worden uitgevoerd binnen grootheden (of verhoudingsgetallen die op hetzelfde betrekking hebben).

Kennis van rekenen met verhoudingen die niet tot de leerstof van de basisschool behoort, maar die de startbekwame leerkracht wel doorziet met het oog op de doorlopende leerlijn van PO naar VO, is bijvoorbeeld het kruiselings vermenigvuldigen binnen een verhoudingstabel, waaronder het inzicht in deze werkwijze (Wijers, 2009).

3A.2.3. Wiskundetaal bij verhoudingen

Verhoudingen kunnen beschreven worden:

- In verhoudingentaal, zoals bij '1 op de 10 Nederlanders' of ' het aantal fietsers is twee keer zo groot als het aantal automobilisten'.
- In breukentaal, bijvoorbeeld 'driekwart van de inwoners is ouder dan 25 jaar'.
- Met procenten, zoals '70 procent van de mensen is voor de aanleg van een randweg'.

Er zijn dus ook verschillende notatievormen; naast de eerder genoemde verhoudingsnotatie 1 : 4 (1 staat tot 4, of 1 op 4), de breuknotatie, notatie als kommagetal en het procentteken (%).
In spreektaal verwijzen uitdrukkingen naar (de betekenis van) verhoudingen, zoals: naar verhouding, in verhouding en een verhouding aangaan. De startbekwame leerkracht kan dergelijk informeel taalgebruik gebruiken ten behoeve van de ontwikkeling van formele wiskundetaal.

Formele begrippen die niet allemaal tot de leerstof van de basisschool worden gerekend, maar die de startbekwame leerkracht wel beheerst in verband met het ordenen van leerstof, zijn bijvoorbeeld: interne en externe verhouding, evenredigheid en evenredig verband, lineair verband, absoluut en relatief, samengestelde grootheid en niet-evenredig verband.

3A.3. Kennis voor onderwijzen van verhoudingen

De startbekwame leerkracht beschikt over de kennis van wiskunde uit de voorgaande paragraaf en beheerst daarnaast en in relatie daarmee de opbouw van de betreffende leerlijnen. Verder beheerst hij/zij didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zoals relevante betekenisverlenende contexten en toepassingssituaties, modellen en schema's. Deze kennis past hij/zij toe om adaptief en diagnosticerend reken-wiskunde onderwijs te kunnen realiseren.

3A.3.1. Contexten en toepassingssituaties bij verhoudingen

Bij verhoudingen op de basisschool, gaat het veelal om het rekenen en redeneren met getalsmatige en meetkundige verhoudingen binnen concrete situaties of met benoemde getallen die daarnaar (kunnen) verwijzen.

In de onderbouw gaat het daarbij om kwalitatieve verhoudingen die jonge kinderen ervaren, bijvoorbeeld: wat verder weg is lijkt kleiner, of het sorteren van kleren van grote, kleine, dikke en dunne mensen. In eerste instantie gaat het daarbij nog niet om getalsmatig bezig zijn met verhoudingen. Kleuters beleven als het ware eerst verhoudingen. (Freudenthal, 1984). Daarbij wordt gebruik gemaakt van onder andere:

- Conflictsituaties, zoals het niet gelijk opgaan van schoenmaten en leeftijd (Brock, 1991).
- Onderzoeksvragen, bijvoorbeeld kan de schaduw van iets groter zijn dan dat ding zelf?
- verhalen, zoals 'de groeten van de reus' (Veltman & Lek, 1994).

In de loop van de basisschool komen steeds vaker verhoudingen aan de orde. Allerlei reële situaties waarin verhoudingen voorkomen zijn bron voor contexten en toepassingssituaties, bijvoorbeeld: sterkte van oploslimonade of koffie, fietsversnellingen, benzineverbruik, schaal, snelheid, prijs per eenheid en andere samengestelde grootheden. Deze brede invulling van contexten draagt bij aan een goede betekenisverlening en begripsbasis van verhoudingen en verhoudingsgewijs redeneren.

3A.3.2. Modellen en schema's bij verhoudingen

Ondersteunende modellen en schema's bij verhoudingen zijn met name: schaallijn, dubbele getallenlijn en verhoudingstabel. Vooral de verhoudingstabel speelt een belangrijke rol bij het rekenen en redeneren met verhoudingen op de basisschool. Onder meer de volgende punten zijn daarbij van belang (Van Galen e.a., 2005):

- De verhoudingstabel kan zowel de functie van denkmodel hebben als van kladblaadje.
- De verhoudingstabel doet dienst als denkmodel doordat zichtbaar blijft waar de getallen voor staan. Als zodoende zichtbaar is dat er sprake is van bijvoorbeeld verschillende grootheden, kan inzichtelijk worden gemaakt hoe welke bewerkingen kunnen worden uitgevoerd in de verhoudingstabel. Bijvoorbeeld hieronder; beide getallen met hetzelfde vermenigvuldigen kan, want dat is een vergroting. Bij beide getallen hetzelfde optellen kan niet, want het gaat om verschillende grootheden.

gewicht	100 gr	200 gr	50 gr	150 gr
prijs	€ 2,00	€ 4,00	€ 1,00	€ 3,00

Bron: Van Galen e.a., 2005, pg. 49.

- Interne verhoudingen – verhoudingen binnen eenzelfde grootheid – worden niet gevisualiseerd met de verhoudingstabel, maar met de dubbele getallenlijn, waarop immers de onderlinge afstanden zichtbaar zijn (wat niet het geval is bij de verhoudingstabel). Deze stukken lijn zijn bij de verhoudingstabel als het ware weggelaten en enkel de bij elkaar horende getallenkoppels (de externe verhoudingen) worden 'opgeslagen' (Streefland, 1991).

3A.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij verhoudingen

De startbekwame leerkracht kan flexibel wisselen tussen concreet-betekenisvol, modelondersteund en formeel niveau om kinderen te ondersteunen in hun denken en oplossingsprocessen en hen te brengen tot niveauverhoging (Van Galen & Oosterwaal, 2007). Bijvoorbeeld: het vergelijken van prijzen van eenzelfde product in een kleine en in een grote (voordeel)verpakking door de gegevens benoemd te ordenen in een verhoudingstabel. Onder meer de volgende punten zijn daarbij van belang (Van Galen e.a., 2005; Van Zanten e.a., 2008):

- Het onderscheid tussen kwalitatieve en kwantitatieve verhoudingen. In de onderbouw gaat het nog om informeel handelen en redeneren met kwalitatieve verhoudingen. Vanaf de middenbouw komen daar kwantitatieve verhoudingen bij, waarmee modelondersteund en langzamerhand ook formeel wordt gerekend en geredeneerd (bijvoorbeeld binnen de verhoudingstabel).
- De betekenis van schaal, waaronder verschillen in schaal, bijvoorbeeld hoe kleiner de schaal, des te meer details kunnen worden afgebeeld.
- De relatie en het abstractieverschil tussen de dubbele getallenlijn en de verhoudingstabel.
- In de verhoudingstabel kunnen bij wijze van kladblaadje tussenstappen en tussenoplossingen worden genoteerd. Dat kan met verschillende tussenstappen, van uitgebreid tot verkort. Dit gegeven biedt ruime mogelijkheden voor gedifferentieerd en adaptief werken.
- In relatie tot en in contrast met verhoudingen worden niet-evenredige verbanden aan de orde gesteld, bijvoorbeeld dat als de lengte en de breedte van een object twee keer zo groot wordt, de oppervlakte vier keer zo groot wordt.

3A.4. Verstrengeling en samenhang bij verhoudingen

3A.4.1. Verstrengeling van verhoudingen met andere reken-wiskundedomeinen

- De onderlinge verstrengeling en samenhang van verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen staat beschreven onder paragraaf 2 van deze domeinbeschrijving.
- Bij het rekenen en redeneren met verhoudingen (al dan niet in de verhoudingstabel) wordt gebruik gemaakt van alle basisbewerkingen (zowel met hele getallen als met breuken en kommagetallen).
- Bij samengestelde grootheden (externe verhoudingen), zoals snelheid (km/uur) en overige externe verhoudingen, zoals afstand/tijd is er verstrengeling met het domein meten.
- Met name bij het werken met schaal is er sprake van sterke samenhang met meten en het metriek stelsel. Daarbij gaat het zowel om inzicht in het metriek stelsel als om het kennen van onderlinge lengte-, oppervlakte- en inhoudsmaten en deze in elkaar kunnen omrekenen. Hierbij is ook inzicht in niet-evenredige verbanden van belang.
- Binnen de meetkunde is vaak sprake van verhoudingsgewijs redeneren, bijvoorbeeld bij viseren en werken met schaduwen.

3A.4.2. Gebruik van verhoudingen bij andere vak- en vormingsgebieden

- Met name bij schaal is er een verstrengeling met het vakgebied aardrijkskunde.
- Bij bewegingsonderwijs spelen verhoudingen een rol bij bijvoorbeeld snelheid in relatie tot afgelegde afstand.
- Verder komen verhoudingen aan de orde bij de beeldende vakken. Bij kunst en geschiedenis is aandacht voor de gulden snede.

3B. Procenten

3B.1. Maatschappelijke relevantie van procenten

Percentages zijn gestandaardiseerde verhoudingen, waarbij het totaal op honderd is bepaald. Procenten worden onder andere gebruikt om verdelingen aan te geven, korting, BTW, rente, inflatie en hellingspercentages.

> **Steeds vaker intakegesprek voor eerstejaars**
>
> **Amsterdam – Het intakegesprek voor aankomende eerstejaars studenten is met een snelle opmars bezig. De Radbouduniversiteit Nijmegen gaat daarin heel ver. De universiteit wil verkeerde studiekeuze voorkomen.**
>
> Het kiezen van een verkeerde studie is een groot probleem. In het eerste jaar valt gemiddeld 10 procent van de studenten uit, en 25 procent stapt over op een andere studie. Maar volgens Carla van Wely, die bij de Radboud Universiteit verantwoordelijk is voor de studentenbegeleiding, zijn er grote verschillen.
>
> Van de eerstejaars die zich op de Universiteit laten voorlichten voor hun studiekeuze, valt 7,8 procent uit. Van de groep die dat niet doet, valt 13 procent uit. Oftewel: hun kans om uit te vallen ligt 65 procent hoger.

Bron: De Volkskrant, 6-02-2009.

3B.2. Kennis van procenten

De startbekwame leerkracht beschikt over kennis van en heeft inzicht in procenten, en de verstrengeling en samenhang van procenten met verhoudingen, breuken en kommagetallen.

3B.2.1. Betekenis van procenten

Procenten worden veel gebruikt in relatie tot geld, bij toenames (rente, BTW) en afnames (korting, inflatie), maar ook bij verdelingen (0% vet, 15% van de dagelijks aanbevolen hoeveelheid, 50% katoen). Verder worden percentages gebruikt om kansen aan te geven, bijvoorbeeld 25% kans op regen of 50% kans om ‘kop’ te gooien bij het opgooien van een munt. Dat 100% een geheel aangeeft, betekent niet dat 100% een maximum aangeeft. Het is het totaal waarvan wordt uitgegaan. Grofweg zijn de verschijningsvormen van procenten in twee typen te onderscheiden: die waarbij het gaat om een deel van een totaal en die waarbij het gaat om een toe- of afname.

3B.2.2. Redeneren en rekenen met procenten

Met percentages kan op verschillende manieren worden gerekend, bijvoorbeeld:

- Rekenen met procenten door procenten om te zetten in breuken en handig te delen (25% uitrekenen door het geheel te delen door 4).
- Rekenen met procenten via de zogenoemde 1% - regel.
- Rekenen met een percentage als vermenigvuldigfactor (bijvoorbeeld 15% van iets nemen door te vermenigvuldigen met 0,15). Hierbij speelt de zogenoemde procenten-asymmetrie, zie hieronder.

Overeenkomstig met de onderscheiden verschijningsvormen zijn er twee soorten vraagstukken met procenten: vragen naar het deel van een totaal (bijvoorbeeld 15% van 240 = …) en vraagstukken waarbij het gaat om een toename of afname (bijvoorbeeld 10% korting op een shirt van €15. Nieuwe prijs…) (De Moor e.a., 1991). Het gaat dus zowel om het berekenen van en rekenen met percentages kleiner dan 100, als percentages boven de 100.

De startbekwame leerkracht beheerst de varianten van het rekenen met procenten, en heeft inzicht in de specifieke wiskundige structuren, zoals:

- de procenten-asymmetrie; als ergens een bepaald percentage bij komt, moet er een ander percentage van af om weer op het uitgangsgetal uit te komen. Bijvoorbeeld: 5 halen, 4 betalen betekent 20% korting (1 van de 5 gratis), maar ook 25% extra ($\frac{1}{4}$ deel extra).
- percentages kunnen alleen bij elkaar worden opgeteld als het percentages van hetzelfde geheel zijn, niet als het percentages van verschillende totalen zijn. Dit laatste komt in media nog wel eens voor, of bij de situatie rente op rente (Streefland, 1991). De startbekwame leerkracht kan dit soort fouten ontmaskeren.

> De weerman voorspelde 50 procent kans op regen voor zaterdag en 50 procent kans op regen voor zondag. Voor het hele weekeinde, zo vertelde hij, was de kans op regen dus 100 procent.

Bron: Paulos, 2004.

Niet alle situaties waarin procenten voorkomen nodigen uit tot rekenen; dat is bijvoorbeeld niet het geval bij: 0% vet, 50% katoen of 100% veilig.

3B.2.3. Wiskundetaal bij procenten

In spreektaal verwijzen uitdrukkingen naar (de betekenis van) procenten, zoals: honderd procent inzet, ik voel me niet honderd procent, iets tweehonderd procent zeker weten.
De formele rekentaal op de basisschool wordt bij procenten uitgebreid met begrippen als procent, percentage, rente en korting en het symbool %. De letterlijke betekenis van procent is ‘per honderd’ en heeft een historische achtergrond vanaf de vijfde eeuw voor Christus (Streefland, 1991; Parker & Leinhardt, 1995).

Formele begrippen die niet allemaal tot de leerstof van de basisschool wordt gerekend, maar die de startbekwame leerkracht wel beheerst, zijn bijvoorbeeld: BTW, inflatie en promille.

3B.3. Kennis voor onderwijzen van procenten

De startbekwame leerkracht beschikt over de kennis van wiskunde uit de voorgaande paragraaf en beheerst daarnaast en in relatie daarmee de opbouw van de betreffende leerlijnen. Verder beheerst hij/zij didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zoals relevante betekenisverlenende contexten en toepassingssituaties, modellen en schema’s. Deze kennis past hij/zij toe om adaptief en diagnosticerend reken-wiskunde onderwijs te kunnen realiseren.

Het domein procenten is een domein specifiek voor de bovenbouw; het staat alleen in groep 7 en 8 op het programma. Vaak hebben kinderen dan al vanuit procenten in het dagelijks leven allerlei informele noties over procenten (De Moor e.a., 1991; Streefland e.a., 1991; Dolk & Uittenbogaard, 1993).

3B.3.1. Contexten en toepassingssituaties bij procenten

Contexten en toepassingssituaties zijn gebaseerd op verschijningsvormen van procenten in de realiteit, zoals korting, deel van een geheel of verdeling. Bij de introductie van procenten kan gebruik worden gemaakt van zulke betekenisverlenende contexten voor het leggen van een begripsbasis. Het gaat er dan bijvoorbeeld om dat kinderen onderzoeken of bepaalde situaties wel of niet kunnen voorkomen en hoe dat dan precies zit, bijvoorbeeld: 15% gratis of 100% korting.

Bij contexten en toepassingssituaties met procenten gaat het er niet alleen om dat kinderen grip krijgen op een andere notatiewijze (als 40% in plaats van $\frac{4}{10}$ deel), maar dat ze bovendien leren dat, als situaties niet (eenvoudig) kunnen worden vergeleken met breuken, dat wel kan met procenten.

Omdat procenten op zich een verschijnsel uit de realiteit zijn, heeft een belangrijk deel van de leerstof op de basisschool de vorm van toepassingsopgaven. Het gaat daarbij bijvoorbeeld om het (formeel) berekenen van rente of korting.

3B.3.2. Modellen en schema's bij procenten

Ondersteunende modellen en schema's bij procenten zijn met name: cirkelmodel, strook en verhoudingstabel. De reikwijdte en het gebruik van modellen loopt uiteen. Onder meer de volgende punten zijn daarbij van belang (Van den Heuvel-Panhuizen & Streefland, 1993; Faes, 1999; Keijzer & Gravemeijer, 2005; Van Galen e.a., 2005; Van Zanten e.a., 2008):

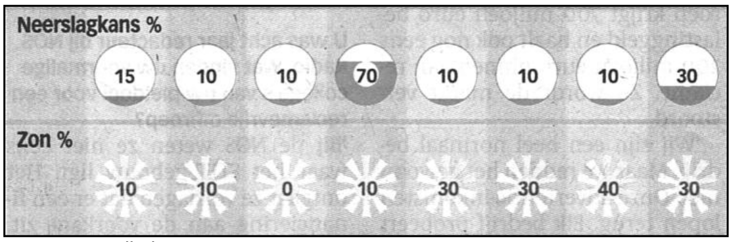
- Met name het cirkelmodel (ook in de vorm van sectordiagram) en het strookmodel ondersteunen de begripsvorming. Ze zijn beide te relateren aan de verschijningsvorm deel van een totaal. Met het cirkelmodel kunnen gegevens van groepen van verschillende grootte goed worden vergeleken (Van Galen, 2002).
- Het strookmodel kan worden gerelateerd aan de verschijningsvorm toename en afname.
- Te memoriseren rekenfeitjes, zoals de relatie tussen bijvoorbeeld de breuk $\frac{1}{4}$ en 25%, kunnen met behulp van het cirkelmodel worden gevisualiseerd.
- Op de strook kunnen tegelijk zowel de absolute gegevens als de relatieve percentages worden weergegeven, in relatie tot elkaar. De hele strook representeert het geheel, oftewel 100%. Met meerdere stroken kunnen ook percentages hoger dan 100 worden weergegeven (Streefland, 1998).
- Het strookmodel kan worden verbonden met passende betekenisverlenende contexten bij procenten, zoals het balkje op de computer dat geleidelijk gevuld raakt bij het downloaden van een bestand of programma.
- De verhoudingstabel kan bij procenten met name worden gebruikt als rekenmodel, waarbinnen gedifferentieerd deelstappen kunnen worden gezet.

3B.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij procenten

De startbekwame leerkracht kan flexibel wisselen tussen verschillende concretiseringen en oplossingswijzen om kinderen te ondersteunen in hun denken en hen te brengen tot niveauverhoging. Bijvoorbeeld: het berekenen van 20% korting door het bepalen van het vijfde deel, te rekenen met de 1% regel, te rekenen via de 10%, te rekenen met een kommagetal (0,20 x 1500) en dit te visualiseren met een strook, of verschillende uitrekenstappen te noteren in de verhoudingstabel. Het verwoorden door leerkracht en leerlingen zelf is daarbij essentieel (Erich, 1994; Buijs, 2004). Onder meer de volgende punten zijn daarbij van belang:

- Bij het gebruik van percentages als informatievoorziening, bijvoorbeeld in het sectordiagram, gaat het om aflezen en weergeven, maar ook om interpreteren.
- Vraagstukken waarbij het gaat om een toe- of afname zijn, doordat ze meer deelstappen omvatten, complexer dan vraagstukken waar het enkel gaat om het bepalen van een deel van een totaal.

- De betekenis van percentages blijft centraal staan, onder meer door aandacht te besteden aan verschillende verschijningsvormen, met verschillende betekenis. Bijvoorbeeld: een kans op neerslag van 20% of een verwachte hoeveelheid zon van 20% (Jonker, 2007).



Bron: De Volkskrant.

- Bij vraagstukken waar het gaat om toe- of afname, moet goed worden onderscheiden wat de uitgangssituatie is (oftewel wat als 100% moet worden beschouwd). In dit verband doorziet de startbekwame leerkracht de procenten-asymmetrie en kan deze voor kinderen visualiseren.
- Bij het rekenen met procenten gaat het om verschillende varianten: precies rekenen op papier, flexibel hoofdrekenen (al dan niet met papier) en rekenen met de rekenmachine.

3B.4. Verstrengeling en samenhang bij procenten

3B.4.1. Verstrengeling van procenten met andere reken-wiskundedomeinen

- De onderlinge verstrengeling en samenhang van verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen staat beschreven onder paragraaf 2 van deze domeinbeschrijving.
- Bij het rekenen en redeneren met procenten wordt gebruik gemaakt van alle basisbewerkingen (zowel met hele als met gebroken getallen).
- Doordat procenten in de realiteit worden gebruikt om allerlei informatie in relatie tot andere gegevens weer te geven, is er ook een verstrengeling met het domein informatieverwerking en verbanden. Vooral bij grafieken komen vaak percentages voor.

3B.4.2. Gebruik van procenten bij andere vak- en vormingsgebieden

Procenten worden bij gebruikt bij vakken als aardrijkskunde, economie, natuur- en scheikunde, in het voortgezet onderwijs meer dan (al) in het primair onderwijs.

3C. Breuken

3C.1. Maatschappelijke relevantie van breuken

In het alledaagse gebruik worden voornamelijk eenvoudige breuken als de helft, een derde en een kwart gebruikt. In andere gevallen worden andere vormen gebruikt, bijvoorbeeld procenten, zoals te zien is in het krantenartikel ‘Een derde (van de) ouders heeft zorgen over opvoeding’ in paragraaf 3.1.

3C.2. Kennis van breuken

De startbekwame leerkracht beschikt over kennis van en heeft inzicht in breuken, en de verstrengeling en samenhang van breuken met verhoudingen, procenten en kommagetallen.

3C.2.1. Betekenis van breuken

Breuken kunnen verschillende betekenissen hebben. Grofweg gaat het daarbij om weergave van verhoudingen en van resultaten van metingen en verdelingen; in de realiteit komen breuken vooral voor in meetsituaties en verdeelsituaties. Bij rekenen-wiskunde op de basisschool worden meer precies zes verschijningsvormen onderscheiden: een deel van een geheel, een deel van een hoeveelheid, een meetgetal, de uitkomst van een (eerlijke) verdeling, een verhouding en een rationaal getal (formeel rekengetal) (Streefland, 1983; 1988; Buijs e.a., 1996; Treffers e.a., 1994; Keijzer 2003).
Sommige van deze verschijningsvormen komen overeen met die van gehele getallen (zoals meetgetal), terwijl andere specifiek bij breuken voorkomen (bijvoorbeeld deel van een geheel). Uit de verschijningsvorm verhouding blijkt de samenhang tussen de subdomeinen verhoudingen en breuken. De verschijningsvormen sluiten elkaar overigens niet uit; zo kan de uitkomst van een verdeling (3 pizza's verdelen met 4 kinderen) een deel van een geheel ($\frac{3}{4}$ pizza) opleveren.

3C.2.2. Gelijkwaardigheid van breuken

Elke breuk heeft een oneindig aantal equivalente breuken. Kernbegrippen in dit verband zijn gelijkwaardigheid, gelijknamigheid en vereenvoudigen.
Voor elke breuk kunnen gelijkwaardige breuken worden gevonden. Bijvoorbeeld $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{4}$ zijn gelijkwaardig. Dat houdt in dat ze als rationaal getal even groot zijn en in toepassingssituaties (op concreet niveau) zaken aangeven die evenveel waard zijn, even lang zijn, even zwaar zijn, even veel zijn, enzovoort. Elke breuk kan zo op verschillende manieren worden genoteerd.
Op dit gegeven is ook het gelijknamig maken gebaseerd. Gelijknamige breuken hebben dezelfde noemer (naam). Bijvoorbeeld de ongelijknamige breuken $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{3}$ kunnen gelijknamig worden gemaakt als zesden ($\frac{3}{6}$ en $\frac{4}{6}$). Elk paar ongelijknamige breuken kan gelijknamig worden gemaakt. Dit wordt toegepast bij optellen en aftrekken van breuken.
Ook het zogenoemde vereenvoudigen van breuken is gebaseerd op het equivalentieprincipe.

Een en ander ligt ten grondslag aan het (verdere) rekenen met breuken (Treffers e.a., 1994; Fosnot & Dolk, 2002; Keijzer, 2003; Dolk, 2005; Brom-Snijders e.a., 2006).

3C.2.3. Redeneren en rekenen met breuken

$\frac{1}{3}$ is het resultaat van 1 : 3 en $\frac{2}{5}$ is het resultaat van 2 : 5. Formeel gesteld; $\frac{1}{3}$ = 1 : 3 en $\frac{2}{5}$ = 2 : 5. Een breuk kan in die zin worden beschouwd als getal en bewerking ineen (Freudenhal, 1983).

De betekenissen van de basisbewerkingen worden uitgebreid bij breuken. Daarbij zijn onder meer de volgende punten van belang:

- De betekenissen van de bewerkingen optellen en aftrekken kunnen overeen komen met die bij hele getallen, bijvoorbeeld samenvoegen of verschil bepalen.
- De betekenissen van de basisbewerkingen vermenigvuldigen en delen worden, ten aanzien van de betekenissen van de bewerkingen met hele getallen, uitgebreid of juist ingeperkt.
  De betekenissen kunnen overeen komen als de breuk fungeert als vermenigvuldigtal (4 x $\frac{2}{3}$), respectievelijk deler (4 : $\frac{2}{3}$). Bijvoorbeeld herhaald optellen bij vermenigvuldigen (4 x $\frac{2}{3}$ als $\frac{2}{3}$ + $\frac{2}{3}$ + $\frac{2}{3}$ + $\frac{2}{3}$) en opdelen of inpassen bij delen (4 : $\frac{2}{3}$ als kijken hoe vaak $\frac{2}{3}$ in 4 past).

De betekenissen worden uitgebreid als de breuk fungeert als vermenigvuldiger ($\frac{2}{3}$ x 4), bijvoorbeeld een deel nemen van ($\frac{2}{3}$ x 4 als het $\frac{2}{3}$ deel nemen van 4).
De betekenissen worden ingeperkt als de breuk fungeert als deeltal ($\frac{2}{3}$: 4), waarbij delen op concreet niveau niet kan worden opgevat als opdelen.

- Onderliggende wiskundige structuren van de bewerkingen met breuken komen overeen met die bij hele getallen, bijvoorbeeld de lijnstructuur, groepstructuur en rechthoekstructuur.
- Afhankelijk van de getallen in (formele) rekenopgaven, speelt de eerder genoemde equivalentie van breuken een rol. Bij optellen en aftrekken van en met breuken kan het voorkomen dat breuken eerst gelijknamig moeten worden gemaakt. Uitkomsten van rekenopgaven kunnen soms worden vereenvoudigd.

De eigenschappen van de basisbewerkingen die kunnen worden gebruikt bij het opereren met hele getallen (zie paragraaf 2.3.1. Eigenschappen van bewerkingen) kunnen uiteraard ook worden gebruikt bij het opereren met breuken.

Kennis van breuken die niet (geheel) tot de leerstof van de basisschool behoort, maar die de startbekwame leerkracht wel beheerst met het oog op de doorlopende leerlijn van PO naar VO, betreft bijvoorbeeld de formele notatie van repeterende breuken. Verder beheerst de startbekwame leerkracht het formele rekenen met breuken.

3C.2.4. Wiskundetaal bij breuken

Breuken komen in dagelijkse situaties veel voor in (informeel) taalgebruik: de helft, een kwart, driekwart, een kwartier, een half uur.
De formele rekentaal op de basisschool wordt bij breuken uitgebreid met specifieke termen als teller, noemer, breukstreep, gelijkwaardig, gelijknamig en vereenvoudigen. Verder worden formele breuknotaties gebruikt met rechte, horizontale of schuine breukstreep (Buijs & Noteboom, 1995).
Formele begrippen die niet allemaal tot de leerstof van de basisschool worden gerekend, maar die de startbekwame leerkracht wel beheerst, bijvoorbeeld in verband met het ordenen van leerstof, zijn bijvoorbeeld: rationaal getal, decimaal getal en decimale breuk, gemengd getal (bijvoorbeeld $2\frac{1}{4}$), echte breuk (bijvoorbeeld $\frac{2}{3}$ of $\frac{1}{4}$) en stambreuk (bijvoorbeeld $\frac{1}{3}$ of $\frac{1}{4}$), GGD (grootste gemene deler) en KGV (kleinste gemene veelvoud) (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2008a; 2008b).

3C.3. Kennis voor onderwijzen van breuken

De startbekwame leerkracht beschikt over kennis van wiskunde uit de voorgaande paragraaf en beheerst daarnaast en in relatie daarmee de opbouw van de betreffende leerlijnen. Verder beheerst hij/zij didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zoals relevante betekenisverlenende contexten en toepassingssituaties, modellen en schema's. Deze kennis past hij/zij toe om adaptief en diagnosticerend reken-wiskunde onderwijs te kunnen realiseren.

3C.3.1. Contexten en toepassingssituaties bij breuken

Contexten en toepassingssituaties zijn gebaseerd op verschijningsvormen van breuken in de realiteit en het (laten) ontstaan van breuken als resultaat van meet- en verdeelsituaties. Bijvoorbeeld: het eerlijk delen van een pizza waardoor de breuk als deel van een geheel ontstaat. Op concreet (handelend) niveau gaat het ook om het herkennen, benoemen, vouwen, tekenen en aflezen van breuken, bijvoorbeeld het maken van vierden door een strook in vieren te vouwen of het aflezen van een kwart liter op een maatbeker (Koren, 2002; Brom-Snijders e.a., 2006).

3C.3.2. Modellen en schema's bij breuken

Ondersteunende modellen en schema's bij breuken zijn met name: cirkel, rechthoek (plak), (dubbele) getallenlijn, strook en verhoudingstabel. De reikwijdte en bruikbaarheid van modellen verschilt en loopt uiteen van denkmodel tot rekenhulp (Fosnot & Dolk, 2002). Zo kan de strook fungeren als denkmodel voor het onderverdelen in breuken en het verder onderverdelen in nog kleinere breuken. De verhoudingstabel kan fungeren als uitrekenhulp voor het bepalen van gelijkwaardige breuken.
Onder meer de volgende punten zijn van belang bij modellen en schema's bij breuken:

- Sommige modellen zijn nauw verbonden met bepaalde verschijningsvormen en betekenissen van breuken, bijvoorbeeld: het cirkelmodel kan goed een deel van een geheel visualiseren.
- Tussen modellen of modelmatige representaties en contexten is ook vaak een nauwe relatie, bijvoorbeeld: een plak chocolade verdeeld in stukjes die je makkelijk kunt afbreken en het rechthoekmodel of de strook; en een pizza die wordt verdeeld onder een aantal kinderen en het cirkelmodel.
- De getallenlijn vervult een cruciale rol bij het ordenen, vergelijken en positioneren van breuken. Ook wordt de getallenlijn gebruikt bij het (leren) bepalen van gelijkwaardige breuken (zie bijvoorbeeld Buijs e.a., 1996; Lek & Noteboom, 1996). Verder kunnen alle basisbewerkingen met breuken op de getallenlijn worden gevisualiseerd.
- Modellen werken ondersteunend om kinderen te laten komen tot breukbegrip, bijvoorbeeld: op een strook die een hoeveelheid representeert kan zowel het relatieve deel (de breuk) als het absolute deel en totaal (de hoeveelheid en het deel van die hoeveelheid) worden aangegeven.
- Ook modellen onderling zijn in sommige gevallen gerelateerd, zoals de dubbele getallenlijn en de strook. Beiden kunnen bijvoorbeeld worden gebruikt om breuken, in de betekenis van deel van een hoeveelheid, te relateren aan de hoeveelheid waarop de breuk betrekking heeft. De modellen verschillen ook in reikwijdte; de strook staat bijvoorbeeld duidelijk voor een bepaald geheel of totaal, en op de dubbele getallenlijn kunnen breuken groter dan 1 worden gevisualiseerd.

3C.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij breuken

De startbekwame leerkracht kan flexibel wisselen tussen concreet-betekenisvol, modelondersteund en formeel niveau om kinderen te ondersteunen in hun denken en oplossingsprocessen en hen te brengen tot niveauverhoging. Bijvoorbeeld: de vermenigvuldiging $2 \times 3\frac{1}{4}$ oplossen:

- als herhaalde optelling, visueel ondersteund met het cirkel- of strokenmodel,
- als herhaalde optelling, gevisualiseerd met sprongen op de getallenlijn,
- met de rechthoekstructuur, gevisualiseerd met het rechthoekmodel,
- op formeel niveau, door de vermenigvuldiging te verdelen in 2×3 en $2 \times \frac{1}{4}$.

Bij dit wisselen van niveau en bij het uitbreiden naar ingewikkelder getallen zijn onder meer de volgende punten van belang (Treffers e.a., 1994; Van Galen e.a., 2005):

- Bij aanvang van het redeneren en rekenen met breuken op de basisschool gaat het om het ordenen en vergelijken van breuken en het positioneren van breuken op de getallenlijn. Hierbij is voor veel kinderen in eerste instantie lastig dat de volgorde schijnbaar omgekeerd is aan hun voorkennis van hele getallen: $\frac{1}{4}$ is groter dan $\frac{1}{8}$ (terwijl 4 kleiner is dan 8) en op de getallenlijn staat $\frac{1}{8}$ links van $\frac{1}{4}$ (terwijl 8 rechts staat van 4). Ook de verwoording is een punt van aandacht: een vierde en vier, een achtste en acht, klinken enigszins hetzelfde en worden door kinderen in het begin nog weleens door elkaar gehaald.

- Voor het bepalen van gelijkwaardige breuken, kunnen verschillende strategieën en modellen worden gebruikt, waartussen duidelijke verschillen in redenatie en abstractie zitten. Zo kunnen met behulp van breekstokken gelijkwaardige breuken als het ware worden afgelezen, bijvoorbeeld door af te passen hoeveel zesden even lang zijn als een derde stok. Het beredeneren van zo'n relatie, met of denkend aan het strookmodel (een strook in drieën verdeeld levert stukjes van een derde op; verdeel ik die elke verder in tweeën dan krijg ik zesden) is een hoger inzichtelijk niveau.
- Bij formele opgaven met breuken zijn passende ondersteunende modellen en betekenisverlenende contexten te bepalen, ook als de opgaven op formeel niveau niet tot de reguliere stof voor alle leerlingen horen. Bijvoorbeeld: een breuk delen door een breuk concretiseren door te kijken hoeveel glazen van $\frac{1}{8}$ liter uit een wijnfles van $\frac{3}{4}$ liter kunnen worden geschonken.
  Omgekeerd kan de startbekwame leerkracht bij opgaven die zijn weergegeven in een context, een passend model kiezen dat kinderen helpt de bijbehorende formele opgave te bepalen.
- Bewerkingen met breuken kunnen worden uitgevoerd met ondermaten en bemiddelende grootheden, bijvoorbeeld: het verschil tussen twee ongelijknamige breuken in een context kan worden bepaald door gebruik te maken van een ondermaat als het aantal stukjes van een plak chocolade.
- Dat een echte breuk kleiner is dan 1, heeft invloed op hoe de bewerkingen vermenigvuldigen en delen kunnen uitpakken; dit is tegenovergesteld aan hoe deze uitpakken met hele getallen en daarmee tegenovergesteld aan eerdere leerervaringen van kinderen op de basisschool. Als je een getal vermenigvuldigt met een echte breuk is het product kleiner dan de vermenigvuldiger, en bij een deling door een breuk is het quotiënt juist groter dan het deeltal. Anders gezegd; een vermenigvuldiging met een breuk pakt uit als een deling en omgekeerd; delen door een breuk pakt uit als vermenigvuldiging. Bijvoorbeeld: $\frac{1}{3}$ x 4 is hetzelfde als 4 : 3. En de deling 2 : $\frac{1}{5}$ geeft dezelfde uitkomst als 2 x 5. Voor veel leerlingen is dit een moeilijk punt. Een misconceptie als 'vermenigvuldigen maakt altijd groter' moet door kinderen onderzocht worden (Graeber & Tanenhaus, 1993).

De startbekwame leerkracht kan een en ander visualiseren en inzichtelijk onder woorden brengen, gebruik makend van de betekenis van breuken en bewerkingen. Bijvoorbeeld: een breuk vermenigvuldigen met een breuk visualiseren op de getallenlijn of het rechthoekmodel; waarbij $\frac{1}{3}$ x $\frac{1}{4}$ wordt verwoord als het $\frac{1}{3}$ deel nemen van $\frac{1}{4}$.

3C.4. Verstrengeling en samenhang bij breuken

3C.4.1. Verstrengeling van breuken met andere reken-wiskundedomeinen

- De onderlinge verstrengeling en samenhang van verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen staat beschreven onder paragraaf 2 van deze domeinbeschrijving.
- Bij het bepalen van gelijkwaardige en gelijknamige breuken wordt gebruik gemaakt van de basisbewerkingen (met hele getallen), met name de tafels van vermenigvuldiging. Bij het vereenvoudigen van breuken is het kunnen delen van belang. Een breuk is getal en bewerking ineen, bijvoorbeeld $\frac{1}{5}$ komt overeen met 1 : 5.
- Verder is er verstrengeling met meten; een van de verschijningsvormen van breuken is die van meetgetal. Meten met bijvoorbeeld stroken en delen van stroken wordt gebruikt binnen het domein breuken.

3C.4.2. Gebruik van breuken bij andere vak- en vormingsgebieden
Bij muziek worden breuken onder andere gebruikt bij het notenschrift (halve noten, kwartnoten en zo verder).

3D. Kommagetallen

3D.1. Maatschappelijke relevantie van kommagetallen

Kommagetallen komen in de realiteit veelvuldig voor als meetgetallen. Zowel in media en berichtgeving, bijvoorbeeld over sportprestaties, maar ook in voor het dagelijks functioneren relevante zaken als (lengte)meting, inhoudsmaten bij recepten, gewicht van bepaalde producten bij het boodschappen doen, benzine tanken, bepaalde verkeersborden, geld en de meting van de vaste lasten van gas, water en elektra, en zo verder.

3D.2. Kennis van kommagetallen

De startbekwame leerkracht beschikt over kennis van en heeft inzicht in kommagetallen, waaronder de verstrengeling en samenhang van kommagetallen met verhoudingen, procenten en breuken.

3D.2.1. Betekenis van kommagetallen
Kommagetallen komen voor als meetgetallen en als rationaal getal (formeel rekengetal). Andere verschijningsvormen van breuken worden gewoonlijk niet als kommagetal genoteerd. Een belangrijk verschil met breuken is dat kommagetallen door de decimale structuur een continu karakter hebben, waar breuken een discreet karakter hebben. Anders gezegd: met kommagetallen is een steeds verdere systematische verfijning met een factor tien mogelijk; de afstand tussen twee hele getallen kan worden onderverdeeld in tienden, de afstand tussen twee tienden kan worden onderverdeeld in honderdsten, enzovoort (Van Galen e.a., 2005).
Door de decimale structuur van kommagetallen kan er aan elk cijfer, evenals bij hele getallen, een positiewaarde worden toegekend, bijvoorbeeld in het getal 20,45 heeft de ‘2’ de positiewaarde 20, de ‘4’ de positiewaarde $\frac{4}{10}$ (4 tienden) en de 5 de positiewaarde $\frac{5}{100}$ (5 honderdsten) (Freudenthal, 1983).

3D.2.2. Gelijkwaardigheid van kommagetallen
Elk kommagetal heeft een oneindig aantal equivalenten; 2,4 = 2,40 = 2,400 enzovoort. Dit is echter alleen het geval bij formele (reken)getallen. Op het niveau van (concrete) meetgetal-

len kan dit niet worden gesteld, omdat het aantal decimalen de meetnauwkeurigheid aangeeft. Bijvoorbeeld 2,4 meter is een lengte gemeten tot op de decimeter nauwkeurig (dus liggend op het interval tussen 2,35 en 2,45 meter), maar 2,40 meter is een lengte gemeten tot op de centimeter nauwkeurig (dus liggend op het interval 2,395 en 2,405 meter). Daarom geldt bijvoorbeeld 2,4 meter ≠ 2,40 meter (Treffers e.a., 1996).

3D.2.3. Redeneren en rekenen met kommagetallen

De betekenis van de basisbewerkingen met kommagetallen komt overeen met de betekenis van de basisbewerkingen met breuken.
De basisbewerkingen kunnen met kommagetallen op eenzelfde wijze als met hele getallen worden uitgevoerd. Daarbij gelden uiteraard ook de eigenschappen van de basisbewerkingen die kunnen worden gebruikt bij het opereren met hele getallen (zie paragraaf 2.3.1. Eigenschappen van bewerkingen). Evenals bij hele getallen is essentieel dat rekening wordt gehouden met de positiewaarden van de afzonderlijke cijfers in een getal. Afhankelijk van de getallen in (formele) rekenopgaven, kan de hierboven genoemde gelijkwaardigheid bij formele kommagetallen een rol spelen. Bijvoorbeeld: de opgave 2,3 + 4,52 berekenen door 2,30 + 4,52 uit te rekenen.
Met kommagetallen kan, net als bij hele getallen, met het hoofd of cijferend worden gerekend. Bij cijferend rekenen kan gedurende het oplossingsproces de komma worden weggelaten of weggedacht. Door middel van schattend rekenen kan de komma vervolgens correct in het verkregen antwoord worden geplaatst.
Bij schattend rekenen met kommagetallen worden kommagetallen afgerond op hele getallen. Afronden kan ook op positiewaarden achter de komma, bijvoorbeeld afronden op tienden.

De belangrijkste wiskundige structuur bij de basisbewerkingen met kommagetallen is dan ook de decimale positionele structuur. Verder komen de onderliggende structuren van de basisbewerkingen overeen met die bij hele getallen, bijvoorbeeld de lijnstructuur, groepstructuur en rechthoekstructuur.

3D.2.4. Wiskundetaal bij kommagetallen

Afgezien van het optreden van de komma, wordt de formele wiskundetaal niet uitgebreid met kommagetallen.
Kommagetallen kunnen op verschillende manieren worden uitgesproken. Bij bijvoorbeeld 3,14 zijn dat: ‘drie komma één vier’, ‘drie komma veertien’, ‘drie en één tiende en vier honderdsten’ en ‘drie en veertien honderdsten’. Zie in dit verband ook paragraaf 6.3.3.: Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kommagetallen.
De komma duikt ook op bij de uitspraak van getallen in de vorm 2,3 miljoen (twee komma drie miljoen) en dergelijke. Hierbij is geen sprake van een rationaal getal, maar net als bij kommagetallen markeert de komma wel de eenheid (in dit voorbeeld is de benoemde eenheid een miljoen).
Voor wat betreft (begrip van) de notatie is van belang dat niet de komma, maar de eenheid de plek markeert waaromheen de positiewaarden tientallen en tienden, honderdtallen en honderdsten (enzovoort) symmetrisch zijn geplaatst (Padberg, 1989; Treffers e.a., 1996).

3D.3. Kennis voor onderwijzen van kommagetallen

De startbekwame leerkracht beschikt over de kennis van wiskunde uit de voorgaande paragraaf en beheerst daarnaast en in relatie daarmee de opbouw van de betreffende leerlijnen.

Verder beschikt hij/zij over didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zoals relevante betekenisverlenende contexten en toepassingssituaties, modellen en schema's. Deze kennis past hij/zij toe om adaptief en diagnosticerend reken-wiskunde onderwijs te kunnen realiseren.

3D.3.1. Contexten en toepassingssituaties bij kommagetallen

Contexten en toepassingssituaties bij kommagetallen zijn gebaseerd op verschijningsvormen van kommagetallen in de realiteit, dus op meetsituaties. Bijvoorbeeld: 1,5 liter melk, 3,42 meter verspringen, in de supermarkt afwegen van 1,905 kg witlof. Grootheden die worden gebruikt zijn met name: geld, lengte en afstand, inhoud, gewicht en temperatuur.
Onder meer de volgende punten zijn van belang bij contexten en toepassingssituaties bij kommagetallen:

- Een kernmoeilijkheid voor kinderen op de basisschool is dat de notatie van kommagetallen overeenkomt met de notatie van hele getallen, maar de betekenis komt overeen met die van breuken. Gebruik maken van meetgetallen helpt kinderen om betekenis te kunnen geven aan kommagetallen (Padberg, 1989).
- Kommagetallen opvatten als benoemde meetgetallen helpt om tegemoet te komen aan specifieke moeilijkheden als het inschatten van de orde van grootte van getallen, bijvoorbeeld: 1,905 kg is 1 kilo en 905 gram, dus bijna 2 kilo.
- Kommagetallen opvatten als benoemde meetgetallen helpt kinderen eveneens bij het ordenen en vergelijken van kommagetallen met een verschillend aantal cijfers achter de komma (8,10 is kleiner dan 8,9 want 8 meter en 10 centimeter is korter dan 8 meter en 9 decimeter) (Treffers e.a., 1996). Hoewel meetkundig gezien bij meetgetallen niet mag worden gesteld dat (bijvoorbeeld) 8,9 meter even lang is als 8,90 meter (vanwege de meetnauwkeurigheid die wordt aangegeven door het aantal decimalen), gebeurt dit in de didactiek van kommagetallen wel, om kinderen te helpen doorzien wat op formeel niveau het onderscheid is tussen bijvoorbeeld 8,9; 8,90 en 8,09 en waar op de getallenlijn bijvoorbeeld 8,10 en 8,9 ten opzichte van elkaar liggen (Brom-Snijders e.a., 2006).
- De beperkte verfijning achter de komma bij geld kan bij kinderen leiden tot misconcepties als het opvatten van de cijfers achter de komma als losse getallen.

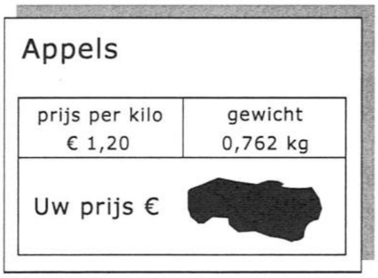
3D.3.2. Modellen en schema's bij kommagetallen

Ondersteunende modellen bij kommagetallen zijn met name het benoemd noteren van kommagetallen en de getallenlijn. Daarnaast zijn er nog enkele modellen en schema's die in minder mate of bij specifieke situaties worden gebruikt. Onder meer de volgende punten zijn daarbij van belang (Treffers e.a, 1996; Van Galen e.a., 2005; Brom-Snijders e.a., 2006):

- Het benoemd noteren van kommagetallen als meetgetallen, vervult op zich de functie van denkmodel. Bijvoorbeeld: door het toevoegen van 'm' aan de getallen in een opgave als 2,3 – 1,50 kan worden gedacht aan meters, en decimeters en centimeters als ondermaten, waardoor de moeilijkheid van een wisselend aantal cijfers achter de komma wordt ondervangen.
- De getallenlijn vervult, evenals bij breuken, een essentiële rol bij het ordenen, vergelijken en positioneren. Ook daarbij kan gebruik worden gemaakt van ondermaten om kommagetallen met specifieke moeilijkheden als nullen of een wisselend aantal cijfers achter de komma te positioneren. Verder wordt de getallenlijn gebruikt om de decimale verfijning te visualiseren, bijvoorbeeld door een stuk van de getallenlijn uit te vergroten en verder onder te verdelen.
- In mindere mate wordt het positieschema uitgebreid voor kommagetallen. In het positieschema worden de cijfers in een kommagetal geordend naar hun positiewaarde. Dit kan als benoemd meetgetal (met bijvoorbeeld hm, dam en m voor de komma en dm, cm en mm na de komma) maar ook als formeel rekengetal (met H, T en E voor de komma en t,

h en d na de komma). Hierbij is van belang dat niet de komma, zoals veel kinderen in eerste instantie denken, maar de eenheid het ‘midden’ van het getal is.

- Voor het specifieke geval van het kunnen inschatten hoe een vermenigvuldiging met kommagetallen uitpakt kan gebruik worden gemaakt van het winkelbonnetje als model-context.



Bron: Van Galen e.a., 2005, pg. 20.

3D.3.3. Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kommagetallen
De startbekwame leerkracht kan flexibel wisselen tussen concreet-betekenisvol, modelondersteund en formeel niveau om kinderen te ondersteunen in hun denken en oplossingsprocessen en hen te brengen tot niveauverhoging. Daarbij zijn onder meer de volgende punten van belang (Treffers e.a., 1996; Buijs 2002; Van Galen e.a., 2005; Brom-Snijders e.a., 2006):

- Bij het rekenen en redeneren met kommagetallen is het globaal schattend rekenen van belang vanwege het inschatten van de orde van grootte van de kommagetallen en hoe de bewerkingen uitpakken. Daarvoor worden ook opgaven gebruikt waarbij de cijfers van het getal van het antwoord zijn gegeven, maar de komma op de correcte plek moet worden geplaatst. Bijvoorbeeld: 715,347 + 589,2 + 4,553 = 13091; waar moet de komma staan? Dit schattend rekenen gaat vooraf aan het precies rekenen met kommagetallen (Treffers, 1995).
- Het gegeven dat een nul achter een kommagetal mag worden geplaatst of weggelaten kan kinderen in verwarring brengen, want dit is in tegenspraak met de voorkennis die ze al hebben. Bovendien mag de nul van 3,50 wel worden weggelaten, maar die van 3,05 weer niet. Door te refereren aan meetgetallen en ondermaten wordt dit soort moeilijkheden ondervangen. (Hoewel bij meetgetallen zelf niet zomaar een nul achteraan kan worden toegevoegd of weggelaten omdat dat een andere meetnauwkeurigheid suggereert.)
- Doordat de notatie van kommagetallen lijkt op die van hele getallen, vatten kinderen in eerste instantie de cijfers achter de komma vaak op als hele getallen, waardoor fouten worden gemaakt als 3,15 + 0,4 = 3,19. Het gebruik van geld als context kan deze misconcepties uitlokken. In dit verband is de uitspraak van belang; 3,15 moet niet worden uitgesproken als ‘drie komma vijftien’, maar (in eerste instantie) als ‘drie komma één vijf’ en (verderop in het leerproces) als ‘drie en één tiende en vijf honderdsten’ (Padberg, 1989; Van Galen, 2004).
- Door de analogie met hele getallen is rekenen met kommagetallen, in vergelijking met rekenen met breuken, niet zo moeilijk mits de decimale structuur wordt doorzien. Dit geldt zowel voor hoofdrekenen als cijferen met kommagetallen. Ondersteuning kan plaatsvinden op concreet-modelondersteund niveau door te refereren aan meetgetallen en ondermaten. Ondersteuning op meer formeel niveau gebeurt door te refereren aan breuken (tienden, honderdsten enzovoort) of door het wegdenken van komma’s gedurende het uitvoeren van de berekening en nadien met behulp van een beredeneerde schatting de komma op de juiste plek te plaatsen (Buijs, 2005b).

3D.4. Verstrengeling en samenhang bij kommagetallen

3D.4.1. Verstrengeling van kommagetallen met andere reken-wiskundedomeinen

- De onderlinge verstrengeling en samenhang van verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen staat beschreven onder paragraaf 2 van deze domeinbeschrijving.
- Er is verstrengeling en samenhang met hele getallen, zowel voor wat betreft de decimale structuur van ons getalsysteem, als bij de bewerkingen, waaronder schattend rekenen en afronden.
- Zoals in deze paragraaf is omschreven, is er een sterke verstrengeling met het domein meten. Deze verstrengeling wordt benut in de didactische aanpak.

3D.4.2. Gebruik van kommagetallen bij andere vak- en vormingsgebieden

Kommagetallen worden als meetgetallen toegepast bij vakken als aardrijkskunde, biologie en techniek, beeldende vorming en bewegingsonderwijs.

4. Meten

4.1. Maatschappelijke relevantie van meten

Het gebruik van rekenen-wiskunde in het dagelijkse leven, komt nadrukkelijk naar voren bij het meten. Vrijwel alle getallen waar we in de realiteit mee te maken hebben zijn meetgetallen. Daaraan ontleent het meten zijn betekenis. Dit komt bijvoorbeeld naar voren als we op de verpakking van het hiernaast afgebeelde pak rijst kijken. De meetgetallen geven hier gewicht, tijd, datum, inhoud, vermogen en voedingswaarde aan. Van de gebruiker wordt verwacht dat deze de getallen vertaalt naar de eigen situatie. Meten doen we dagelijks, al is het vaak onbewust. We verrichten meetactiviteiten bij het omgaan met een weegschaal met geheugen, de instellingen van vrieskist, oven en magnetron, het zetten van koffie, het instellen van een tijdschakelaar of de DVD-recorder, en het maken van een back-up van de computer. Verder zijn we met geld en met tijd doorlopend bezig met meetgetallen en de onderlinge relaties daartussen. Meetgetallen vindt men daarnaast veel in de media. Meten komt bijvoorbeeld naar voren bij berichten over financiën, over (voorgestelde veranderingen in de) infrastructuur, bij beschrijvingen en grafische weergaven van ontwikkelingen in de tijd en bij verslaggeving van sportevenementen.

4.2. Kennis van meten

Bij het meten gaat het zowel om toepasbaarheid, als om de onderliggende wiskundige structuur (Freudenthal, 1983). Het metriek stelsel is een systeem dat in de loop der jaren is ontwikkeld en in de meeste West-Europese landen in de loop van de 19^{e} eeuw is ingevoerd (Van der Waerden, 1961; Van Maanen, 2002; Robinson, 2007). Het metriek stelsel sluit nauw aan bij het tientallig getalsysteem. De startbekwame leerkracht doorziet deze systematiek en kan deze verklaren, ook vanuit historisch perspectief.

4.2.1. Meethandelingen

Bij het meten gaat het in alle gevallen om het afpassen van een standaardmaat of van een natuurlijke maat (Robinson, 2007). Bij het meten van lengte betekent dit bijvoorbeeld dat de centimeter als maat wordt gekozen en dat het meten in centimeters inhoudt dat deze gekozen maat langs een zekere lengte wordt afgepast (door de centimeter netjes aaneen te sluiten) en dat het meetresultaat gegeven wordt door het aantal keren dat dit is gedaan (Stephen & Clements, 2003).
Dat is ook zo in situaties waarin de maateenheid niet daadwerkelijk zichtbaar is in de meethandeling of het aflezen van het meetresultaat (Gravemeijer e.a., 2007), bijvoorbeeld: het bepalen van de snelheid van een auto is het resultaat van afpassen. De snelheidsmeter gaat feitelijk voortdurend na hoe vaak een standaardafstand (kilometer) kan worden afgepast in een tijdseenheid (uur), op grond van een (kleinere) afgelegde afstand gedurende een (kortere) tijdsspanne.

Voor het huidige metriek stelsel in gebruik kwam, had iedere stad of streek zijn eigen maat-systeem (zie bijvoorbeeld Van Maanen, 2002; Markusse, 2008). Standaardisering zorgt er-voor dat in vrijwel alle landen ter wereld met maten uit het metrieke stelsel gewerkt wordt. Standaardisering speelt daarmee een belangrijke rol bij internationaal verkeer en uitwisse-ling.

4.2.2. Meetinstrumenten

De volgende meetinstrumenten worden in het dagelijkse leven met enige regelmaat gebruikt:
- Alle meetinstrumenten ‘voor in de keuken’ om inhoud en gewicht te bepalen.
- Thermometer en personenweegschaal.
- Meetlat, liniaal en rolmaat.
- Snelheidsmeter.
- Klok en stopwatch (digitaal en analoog).
- Klikwiel.
- Balans.

Leerkrachten basisonderwijs kennen de werking van deze meetinstrumenten en kunnen ze gebruiken om betekenisvolle meetgetallen te genereren. Ze zijn bijvoorbeeld in staat met be-hulp van een stopwatch en meetlint de gemiddelde snelheid van een hardloper te bepalen.

4.2.3. Het metriek stelsel

Relaties binnen het metrieke stelsel zijn gebaseerd op betekenissen van voorvoegsels en op de maat waarmee gemeten wordt. Het voorvoegsel ‘hecto’ staat voor ‘100’ en daarom gaat het bij een hectometer om 100 meter en bij een hectogram om 100 gram.

Deze voorvoegsels ma-ken het ook mogelijk nieuwe, min-der gang-bare maten te construe-ren, zoals de decase-conde (10 se-conde) of k€ (kilo-euro, oftewel 1000 euro).
Ook de omtrek-, opper-vlakte- en in-houdsformules horen tot relaties binnen het me-triek stelsel. De onder-liggende structuur van zulke for-mules is die van handig en verkort tellen. Zo kan de opper-vlakte-formule ‘lengte x breedte’ gezien worden als het handig tellen van hokjes van de standaardmaat (bijvoorbeeld cm²) in termen van zo-veel rijen van zoveel hokjes (Battista, 1982).

De opbouw van het metriek stelsel sluit nauw aan bij de opbouw van het tientallig getalsys-teem. Zo verschillen bijvoorbeeld lengtematen (met bovenstaande voorvoegsels) onderling met een factor tien. Bij oppervlaktematen is dat een factor honderd en bij kubieke inhouds-maten is dat een factor duizend. Bij gewone inhoudsmaten is het weer een factor tien.
Een voorbeeld van een specifieke relatie is: een liter is gelijk aan een kubieke decimeter.
Tussen inhoud en gewicht is geen vaste relatie (zo weegt een kubieke decimeter water (bij een temperatuur van 4 graden Celsius) precies een kilo, maar een liter melk weegt net wat meer dan een kilo).
Van leerkrachten wordt verwacht dat ze de systematiek in het metrieke stelsel kennen en kunnen gebruiken (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2008b).

4.2.4. Meet(on)nauwkeurigheid
Bij het meten gaat het om meet(on)nauwkeurigheid, het vaststellen van het interval waarbinnen meetresultaten mogen vallen, maatverfijning en afronden. De meetonnauwkeurigheden hangen af van de meetsituatie en van de gebruikte maat. Bijvoorbeeld: wanneer een kamer wordt gemeten in meters, ontstaat mogelijk een behoorlijke meetfout. Wanneer in centimeters wordt gemeten, zal het meetresultaat waarschijnlijk voldoende nauwkeurig zijn.

4.2.5. Grootheden en maten
De leerkracht kent de grootheden rond gewicht, lengte, oppervlakte en inhoud en bijbehorende metrische maten. Hij/zij kent ook de grootheden temperatuur, geld en tijd en daarbij behorende maten. Verder kent hij/zij samengestelde grootheden, die zijn gebaseerd op genoemde grootheden, zoals snelheid. Samengestelde maten worden geconstrueerd om te normeren of te standaardiseren, om te situaties te vergelijken, bijvoorbeeld kilometer per uur, liter per minuut (bijvoorbeeld de waterdruk op een kraan), kilometer per liter (verbruik van een voertuig) of liter per vierkante meter (op een verfblik).
Grootheden die niet binnen het metriek stelsel passen zijn tijd, geld en temperatuur. De hierbij gebruikte maken zijn anders gestandaardiseerd dan metrische maten. Maten voor tijd hebben (deels) een sexagesimaal karakter. Bij geld liggen de relaties tussen de verschillende maateenheden (valuta's) nog complexer. Verschillende valuta en wisselende wisselkoersen maken dat het om wisselende relaties gaat. Geld wordt niet altijd als grootheid gezien. Temperatuur wordt (bijvoorbeeld) uitgedrukt in graden Celcius. Deze maat is wel decimaal, maar niet metrisch.

4.2.6. Wiskundetaal bij meten
Bij meettaal gaat het om:
- Woorden die gebruikt worden om grootheden te vergelijken, zoals langer, korter, groter en meer.
- Woorden die refereren aan natuurlijke maten, zoals stap, handspan en duim.
- Voorvoegsels, die gebruikt worden om standaardmaten binnen het metrieke stelsel te vormen.
- Aanduidingen voor kwadratische en kubische relaties, bijvoorbeeld vierkante meter of m² en kubieke centimeter of cm³. De aanduiding komt niet letterlijk overeen met de realiteit; een vierkante meter hoeft niet vierkant te zijn en een kubieke centimeter niet kubusvormig.

Meettaal komt ook naar voren bij gebruik van meetgetallen in de media, zoals in onderstaand voorbeeld. Zo blijkt uit de context dat het specifiek genoteerde getal 2.00,13 een tijdsduur aangeeft in minuten, al staat er geen maat bij.

> **Willemsen stuurt bobslee naar derde plaats**
>
> **vr 07/11/08 - Elfje Willemsen heeft op de America Cup in Calgary, Canada, een knappe derde plaats behaald op de eerste dag. Als ze haar starttijd nog kan verbeteren, zit er misschien nog meer in.**
>
> Op de eerste manche van de America Cup heeft Elfje Willemsen haar status van beste Belgische bobsleeër bevestigd. In Calgary eindigde Willemsen samen met haar remster Evi Petro derde na de twee afdalingen van de eerste dag. In de eerste afdaling was ze pas zesde geworden. Het duo Willemsen/Petro deed tijdens de tweede afdaling 2.00,13 over het 1475 meter lange parcours.

Bron: Sporza.be / Wikipedia.

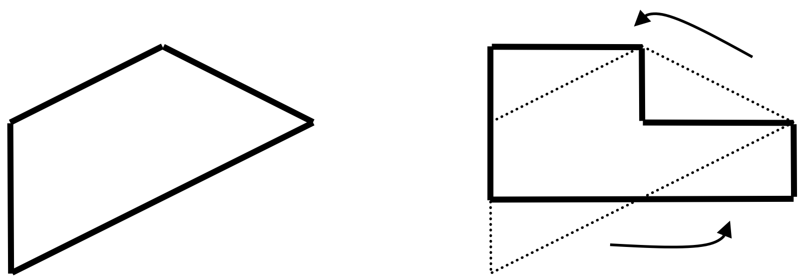
Kennis van meten die niet geheel tot de leerstof van de basisschool hoort, maar waar de startbekwame leerkracht wel over beschikt, onder meer met het oog op de doorlopende leerlijn van PO naar VO, betreft bijvoorbeeld de verschillende betekenissen van 'ton' bij gewicht, geld en inhoud, het bepalen van de oppervlakte van een cirkel en dat temperatuur ook kan worden gemeten in de maat Kelvin.

4.3. Kennis voor onderwijzen van meten

De startbekwame leerkracht beschikt over de kennis van wiskunde uit de voorgaande paragraaf en beheerst daarnaast en in relatie daarmee de opbouw van de betreffende leerlijnen. Verder heeft hij/zij didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert.

Kinderen leren meten en werken met meetgetallen, maten en grootheden door regelmatig in meetsituaties geplaatst te worden. Kinderen maken door meetactiviteiten uit te voeren, kennis met verschillende grootheden, als lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht, tijd en geld. Ook ontwikkelen ze een concept voor het meten, zoals het herhaald afpassen van een eenheid van een zekere maat. Het leren meten in de loop van de basisschool verloopt globaal van ordenen en vergelijken zonder gebruik van maten in de onderbouw, via het gebruik van natuurlijke maten, naar het gebruik van de standaardmaten van het metriek stelsel in de bovenbouw (De Moor & Menne, 2001; Gravemeijer e.a., 2007).
Vanwege het bijzondere karakter van de grootheden tijd en geld wijkt de opbouw hier iets af. Dat geldt overigens niet voor het begin, waar ook bij tijd en geld aanvankelijk natuurlijke maten gebruikt worden (vergelijk Keijzer & Van Tricht, 2008; Keijzer e.a., 2009). Hierbij is ook het verwerven van besef van tijd aan de orde (zie bijvoorbeeld Keijzer & Van Slijpe, 2007). De systematiek rond tijd is daarna aan de orde bij het leren klokkijken. Werken met geld valt vanaf een gegeven moment samen met het leren rekenen met kommagetallen (Van Galen e.a., 2005; Gravemeijer e.a., 2007).

4.3.1. Ordenen en vergelijken bij meten
Wanneer verschillen tussen lengtes, oppervlaktes of inhouden groot zijn, zien kinderen vaak snel wat langer, groter of meer is. Als dat niet voldoet, dan vergelijken kinderen respectievelijk lengte, inhoud en oppervlakte door naast elkaar zetten, door over te gieten of door op elkaar te leggen; eventueel na eerst verknipt te hebben. Dit vormt een eerste manier om greep te krijgen op het meten. Zonder maten te gebruiken, kunnen (jonge) kinderen zo al uitspraken doen over wat er langer / korter / even lang, groter / kleiner / even groot, meer / minder of evenveel is.



Het ordenen en vergelijken als meetstrategieën staan centraal in de onderbouw van de basisschool. Kinderen leren objecten ten aanzien van een bepaalde grootheid te vergelijken en te ordenen, bijvoorbeeld ten aanzien van lengte, oppervlakte, gewicht of inhoud.

4.3.2. Meten met een natuurlijke maat
Het is niet altijd mogelijk rechtstreeks te vergelijken. Als dat zo is moet overgeschakeld worden op het gebruiken van een maat. Dat is aanvankelijk een natuurlijke maat. Kinderen meten lengtes bijvoorbeeld met aantallen stappen of gaan na wat de oppervlakte van een object is door hun handen erop af te passen.
Natuurlijke maten in meetsituaties uit de omgeving en het dagelijks leven van kinderen worden uitgebuit, bijvoorbeeld: groter groeien en zwaarder worden, schoenmaten, dagritme,

sport en leeftijd. Het meten met natuurlijke maten gaat over op het gebruiken van standaardmaten, wanneer:

- Kinderen kennismaken met standaardmaten in meetsituaties, bijvoorbeeld omdat ze thuis iemand met een liniaal of meetlat hebben zien werken en daardoor de centimeter kennen als eenheid.
- Communicatie over maten vraagt om nadere standaardisering, bijvoorbeeld wanneer bij het meten van lengte met een natuurlijke maat als stappen, meetverschillen ontstaan (Peter-Koop, 2001; Nührenbörger, 2001).

Door gerichte activiteiten tegen het einde van de onderbouw wordt het overdenken van deze standaardisering van maten uitgelokt (Van den Heuvel-Panhuizen & Buijs, 2004).

4.3.3. Standaardmaten en referenties

Om informatie over bijvoorbeeld groottes of afstanden en bijvoorbeeld berichten in de media te kunnen interpreteren is het vaak nodig die te koppelen aan eigen (meet)referenties en referentiematen. Dergelijke meetreferenties zijn bijvoorbeeld het weten dat een grote stap (van een kind) iets minder lang is dan een meter en dat je in een uur ongeveer vijf kilometer loopt. Referentiematen zijn bijvoorbeeld: een bordliniaal is een meter en een pak suiker weegt een kilo. Leerkrachten kennen de referenties waarover kinderen beschikken en gebruiken die om betekenis te geven aan standaardmaten en informatie uit bijvoorbeeld berichten in de media (vergelijk Van Zanten, 2008b).
Kinderen leren standaardmaten kennen. Het gaat daarbij aanvankelijk om ervaren van alledaagse maten als meter, centimeter, uur en minuut. Gaandeweg leren kinderen meer (standaard)maten en referentiematen kennen (Munk & Keijzer, 2006).

4.3.4. Voorvoegsels en relaties tussen maten

Kinderen leren aanvankelijk relaties tussen maten die relatief eenvoudig zijn af te lezen van meetinstrumenten, zoals een meetlat of peilschaal. Zo is bijvoorbeeld op een meetlat te zien dat er honderd centimeter in een meter gaan en op een maatglas dat honderd milliliter hetzelfde is als een deciliter.
Speciale aandacht krijgt het klokkijken. Kinderen leren dit meetinstrument kennen en gebruiken dit om de systematiek in het rekenen en omgaan met tijd te leren kennen. De ontwikkeling van tijdsbesef vindt plaats gedurende de hele basisschool (vergelijk Van Galen e.a., 1992; Boswinkel & Slegers, 2005; Van Galen & Peltenburg, 2008).
Bij het leren meten gaat het ook om verbanden construeren tussen maten en daarmee om het verbanden leggen tussen getallen en getalsmatige informatie. Het leren meten draagt in die zin bij aan de (groeiende) gecijferdheid van leerlingen.
Bij het leren van relaties tussen maten wordt in de bovenbouw gaandeweg de aandacht gevestigd op gebruikte voorvoegsels en betekenissen hiervan. Zo komen kinderen ook in aanraking met minder bekende maten en leren bijvoorbeeld dat een decameter hetzelfde is als tien meter, omdat ‘deca’ staat voor ‘tien’ (Keijzer, 2007).

4.3.5. Metriek stelsel en begrip

Het verkennen van relaties tussen maten leidt voor een grote groep leerlingen in de basisschool tot het doorzien van de systematiek van het metriek stelsel. Het zelf uitvoeren van meetactiviteiten draagt bij aan inzicht in het metriek stelsel, bijvoorbeeld het herkennen van de analogie met de systematiek van het positionele tientallige getallenstelsel. Als kinderen inzicht hebben in het systeem, wordt voorkomen dat het metriek stelsel als een verzameling losse, onbegrepen rekenregels moet worden gememoriseerd (vergelijk Torn e.a., 2001). Een activiteit als het zelf samenstellen van een poster van het metriek stelsel kan bijdragen aan de bewustwording en het doorzien van het metriek stelsel (Van Waveren, 2005).
Speciale aandacht krijgen de relaties en de verschillen tussen lengte-, oppervlakte- en inhoudsmaten, en de (niet-)relaties tussen inhoud en gewicht.
Het verkennen van het metriek stelsel vindt vooral plaats in de bovenbouw van de basisschool. Echter, gezien de opbouw in het leren meten mag ook van leerkrachten die zich richten op de onderbouw verwacht worden dat ze kennis hebben van hoe kinderen het metriek stelsel leren kennen. In de onderbouw wordt het fundament gelegd.

4.4. Verstrengeling en samenhang bij meten

4.4.1. Verstrengeling van meten met andere reken-wiskundedomeinen

- Meetcontexten waarin sprake is van lengtemeting ondersteunen kinderen bij het betekenis geven aan de getallenlijn als model. Daardoor ondersteunt het meten het rekenen tot 100 en 1000. Omgekeerd, helpt kennis van het rekenen tot 100 en 1000 bij het rekenen met meetgetallen.
- Meten geeft ook betekenis aan kommagetallen en omgekeerd. Dit geldt met name voor het rekenen met geld. Echter de beperkte verfijning 'achter de komma' maakt dat dit voor kinderen ook tot misconcepties kan leiden (Van Galen e.a., 2005).
- Een van de verschijningsvormen van breuken is die van meetgetal.
- In veel gevallen dat er met verhoudingen gerekend wordt, gaat het om meetgetallen. Verhoudingsgetallen worden vaak gestandaardiseerd tot samengestelde maten. Met name bij het werken met schaal is er een samenhang met het metriek stelsel.
- Benaderen en schattend rekenen: meetgetallen kennen altijd een bepaalde mate van nauwkeurigheid en daarom kan het rekenen met meetgetallen altijd beschouwd worden als het rekenen met afgeronde getallen, ofwel als schattend rekenen.
- Er is nauwe samenhang tussen de domeinen meten en meetkunde. Bij meten gaat het om andere mentale handelingen dan bij de meetkunde. Waar het bij meten gaat om het werken en toekennen van maten of maatgetallen, gaat het bij meetkunde om ruimtelijke relaties en het beredeneren hiervan.

4.4.2. Gebruik van meten bij andere vak- en vormingsgebieden

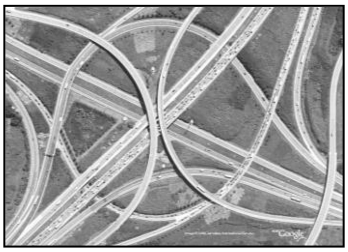
- Meten wordt toegepast bij vakken als natuuronderwijs, aardrijkskunde, geschiedenis en techniek. Deze vakken vormen ook een context voor het leren meten. Bij aardrijkskunde gaat het bijvoorbeeld om redeneren en rekenen met schaal en het interpreteren van plattegronden. Deze raakpunten zijn er ook met geschiedenis waar tijd centraal staat en een tijdlijn gebruikt wordt, waarvan de eigenschappen overeenkomsten vertoont met die van de getallenlijn.
- Geschiedenis laat ook zien wat het belang is van standaardisering van maten en meetsystemen voor bijvoorbeeld natievorming (vergelijk Knippenberg & De Pater, 1988).
- In het voortgezet onderwijs wordt meten ook toegepast bij vakgebieden als scheikunde en economie.
- Bij beeldende vakken is wordt meten regelmatig gebruikt bij bijvoorbeeld het construeren van een beeldend object.

5. Meetkunde

5.1. Maatschappelijke relevantie van meetkunde

Meetkunde komen we overal tegen. Bij deelname aan het verkeer, sport, spel en dans, kunst, inrichting van de woning, bouwen en knutselen, bij het opruimen, bij het begrijpen van telefonie en waterleiding, bij logistiek, of bij het begrijpen van lucht- en ruimtevaart, spelen meetkundige inzichten en activiteiten een rol.
Bij logistiek gaat het om ‘de juiste dingen, op de juiste tijd, op de juiste plaats, in de juiste hoeveelheden tegen optimale kosten’ (wikipedia). Voor het vinden van evenwicht tussen al deze logistieke factoren is meetkunde nodig, bijvoorbeeld kennis van vormen en formaten voor het bepalen van het juiste verpakkingsmateriaal passend in de verscheidenheid van magazijnrekken. Hetzelfde geldt in bijvoorbeeld de wegenbouw, bij het ontwerpen van een klaverblad.

bron: www.nederlandislogistiek.nl


bron: Google Earth.

In het verkeer speelt meetkunde een rol bij bijvoorbeeld routes en routebeschrijvingen. In een routebeschrijving wordt zo eenduidig mogelijk weergegeven welke richtingen gevolgd kunnen worden bijvoorbeeld: 'ga na 500 meter rechts’. Routebeschrijvingen worden in veel situaties gebruikt, bijvoorbeeld om de kortste weg te wijzen naar een evenement, de makkelijkste route naar een vakantiebestemming, of de mooiste route tijdens een recreatieve fietstocht.
Het nadeel van de moderne navigatiesystemen is dat deze routebeschrijvingen al snel onbruikbaar worden als er door een obstakel of anderszins van de voorgeschreven route afgeweken moet worden. Dan komt het toch weer aan op het eigen meetkundig inzicht om een alternatieve route te bepalen.

Navigatiesysteem stuurt taxi het water in

Nov. 2008 DORDRECHT – Een taxichauffeur luisterde in de nacht van zondag op maandag wel erg trouw naar zijn navigatiesysteem. De man reed in Moordrecht op elektronische aanwijzingen zo het water in.

Dat gebeurde bij de aanlegplaats van de pont richting Gouderak, liet de politie maandag weten.
De chauffeur dacht dat hij door een grote plas water reed, aangezien het regende. Zijn auto begon echter te zinken. De bestuurder en zijn klant bleven ongedeerd en konden zwemmend de taxi verlaten.

bron: www.nu.nl

De organisatie en het ordenen van het huishouden vraagt meetkundige inzichten en activiteiten. Denk hierbij aan het inrichten, opruimen, (ver)bouwen en knutselen in huis. Hierbij spelen meetkundige aspecten als oriënteren, lokaliseren, projecteren en redeneren een rol.

Datzelfde geldt in de bouw, techniek en andere beroepen en activiteiten waarbij het gaat om construeren, ontwerpen en opbouwen.
Bij sport, spel en dans worden eigen bewegingsmogelijkheden (snelheid en richting) en die van anderen ingeschat, bijvoorbeeld bij voetbal, handbal, het spelen van verstoppertje en het uitvoeren van de Zwanendans (Meester, 1991). Dit geldt ook in de virtuele werkelijkheden van moderne computerspellen.
Bij kunst en architectuur speelt bovendien het esthetische aspect van meetkunde. Spiegelingen en andere meetkundige transformaties op vlakke en ruimtelijke figuren in allerlei patronen worden daarin uitvoerig gebruikt, bijvoorbeeld bij de vlakvullingen, patronen en 'onmogelijke figuren' van Escher en geometrische figuren in bijvoorbeeld Islamitische kunst.

5.2. Kennis van meetkunde

De startbekwame leerkracht beschikt over kennis van de meetkundige kennisgebieden en activiteiten.

Bij meetkunde gaat het onder meer over de plaats van objecten in de ruimte, richting van kijken en bewegen, routes, netwerken (telefoonnet, wegennet, waterleiding), vertakte vormen, de plaats van objecten ten opzichte van elkaar, zoals 'tegenover elkaar' en (spiegel)symmetrie, vlakke en ruimtelijke figuren, patronen, vormen zoals lijn(stuk), cirkel, vierkant, rechthoek of driehoek en de eigenschappen van vormen, hoe vormen zijn samengesteld uit andere vormen, het afbeelden (projecties) van ruimtelijke vormen in het platte vlak, en het vergroten en verkleinen van vormen en afbeeldingen (zoals even groot, of niet even groot maar dezelfde vorm). De kennisgebieden van meetkunde zijn in te delen naar ervaren, verklaren en verbinden (De Moor e.a., 1997; Van den Heuvel-Panhuizen & Buijs, 2004; Gravemeijer e.a., 2007).

5.2.1. Ervaren bij meetkunde
Ervaren kan worden omschreven met: door ondervinding leren, gewaarworden, voelen en zien. Dit betekent dat meetkunde begint bij het zien en handelen, bijvoorbeeld:
- Het ervaren van de kenmerken van een vlak of ruimtelijk model, al dan niet voorzien van een constructievoorschrift.
- Het ervaren van de kenmerken van een driedimensionale blokkenconstructie met een tweedimensionale tekening of een plattegrond met hoogtegetallen.
- Het oplossen van een puzzel met geometrische figuren, bijvoorbeeld: tangram of een vlakvulling.
- Het tekenen van vierhoeken en driehoeken volgens een constructievoorschrift, met behulp van liniaal, gradenboog en passer. Bijvoorbeeld: teken een ruit met de diagonalen van 5 cm en 4 cm.
- Het toepassen van transformaties, bijvoorbeeld: draaien en verschuiven, met voorwerpen en van tekeningen.
- Het experimenteren met licht en schaduw.

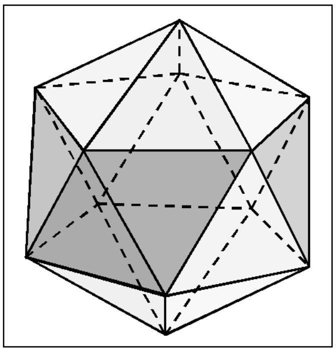
5.2.2. Verklaren bij meetkunde
Verklaren houdt bij meetkunde bijvoorbeeld in: duidelijk maken, interpreteren, toelichten, uitleggen, duiden en verhelderen. Hierbij speelt beschrijven en (be)redeneren een belangrijke rol. Dit kan met taal, getallen, ruimtelijke figuren en situaties. Daarbij valt te denken aan:

- Coördinaten die in het platte vlak figuren of locaties beschrijven waarbij gebruik wordt gemaakt van een letter en een cijfer (bijvoorbeeld bij een stadskaart) of alleen hele getallen.
- Beschrijven van richting of hoek en afstand in het platte vlak, bijvoorbeeld: naar links of tussendoor.
- Gebruiken van plaatsbepalende begrippen, bijvoorbeeld: achterste, middelste en dichtbij.
- Beschrijven en gebruiken van verschillende standpunten, bijvoorbeeld: zijaanzicht en bovenaanzicht.
- Het verwoorden en benoemen van eigenschappen van vlakke en ruimtelijke figuren aan de hand van hun eigenschappen. Bijvoorbeeld: als alle zijden gelijk zijn en de tegenoverliggende hoeken zijn gelijk maar niet noodzakelijk recht, dan is het omschreven figuur een ruit. Dit betekent dan dat de tegenoverliggende zijden evenwijdig lopen en dat de diagonalen elkaar middendoor delen en loodrecht op elkaar staan.

5.2.3. Verbinden bij meetkunde

Verbinden houdt bij meetkunde in: het aaneenschakelen, het aansluiten, het combineren, het samenbundelen en het in verband brengen met elkaar. Dit betekent dat meetkundige ervaringen en verklaringen in verband worden gebracht met andere (meetkundige) begrippen en verschijnselen. Dit leidt tot een verdieping van het meetkundig inzicht. Te denken valt aan:

- Het omstructureren van veelhoeken naar rechthoeken en driehoeken enerzijds en veelvlakken naar kubussen, balken, piramides en prisma's en dergelijke anderzijds door verdeling, aanvulling en compensatie. Bijvoorbeeld: het aantal ribben van nevenstaand figuur (een twintigvlak) kan worden bepaald met behulp van het omstructureren in twintig losse driehoeken.
- Het herkennen, benoemen en onderzoeken van gelijkvormige en niet gelijkvormige figuren aan de hand van de eigenschappen. Bijvoorbeeld: formules voor omtrek, oppervlakte en inhoud van veel voorkomende meetkundige figuren, de stelling van Pythagoras en symmetrie.



bron: wikipedia

- Het interpreteren en bewerken van vlakke tekeningen van ruimtelijke situaties, zoals foto's, plattegronden, patroontekeningen, landkaarten, bouwtekeningen. Daarbij gebruik maken van: uitslagen, doorsneden, projecties en de computer (Boon, 2003).
- Aan de hand van meetkundige beschrijvingen conclusies trekken over objecten en hun plaats in de ruimte, bijvoorbeeld: het bepalen van de verplaatsing van de lichtbron als er een fles op tafel staat en de schaduw wordt 15 centimeter langer.
- Het (hiërarchisch) benoemen van figuren aan de hand van hun gezamenlijke eigenschappen, bijvoorbeeld: een ruit, rechthoek en vierkant zijn bijzondere parallellogrammen. Een parallellogram met vier gelijke zijden is een ruit. Een ruit met vier gelijke hoeken is een vierkant terwijl een parallellogram met vier rechte hoeken in ieder geval een rechthoek is.

5.2.4. Wiskundetaal bij meetkunde

Bij meetkunde wordt de ruimte en omgeving beschreven met termen en begrippen als:

- Benamingen van figuren en objecten: driehoek, vierkant, rechthoek, ruit, parallellogram, cirkel, kubus, balk, prisma, piramide, cilinder, kegel en bol.
- Benamingen en omschrijvingen van eigenschappen van figuren zijn bijvoorbeeld: symmetrie, evenwijdig, loodrecht, hoek en zijden.
- Meetkundige begrippen zoals: voorzetsels, bijvoorbeeld: voor en naast. De benamingen van soorten lijnen en lijnstukken, bijvoorbeeld: snijdende lijn, middellijn en diagonaal. Hoeken, bijvoorbeeld: rechte hoek en hoekbenen.
- Eigenschappen/kenmerken en vlakbenamingen van de verschillende veelhoeken en veelvlakken.

Het meetkundig handelen wordt beschreven door:

- De benamingen van de verschillende transformaties, bijvoorbeeld: rotatie en spiegelen.
- De bijbehorende operaties, bijvoorbeeld: cirkelboog tekenen en plaats beeldpunt bepalen.
- Het gebruik van oriëntatiebegrippen, bijvoorbeeld: herkenningspunten en gelijkvormigheid.
- Het gebruik van materiaalbegrippen, bijvoorbeeld: bouwplaat en uitslag.

5.3. Kennis voor onderwijzen van meetkunde

De startbekwame leerkracht beschikt over de kennis van meetkunde uit de voorgaande paragraaf en beheerst daarnaast en in relatie daarmee de opbouw van de deelgebieden van meetkunde. Verder beschikt hij/zij over de didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert.

Meetkunde is net als het begrip van hoeveelheden en getallen een wezenlijk onderdeel van de vorming van kinderen volgens bijvoorbeeld Pestalozzi en Fröbel (De Moor, 1990; 1999). Kinderen leren hun ruimtelijk voorstellingsvermogen te gebruiken. Ze leren zich een voorstelling van een ruimtelijke situatie te maken, na te denken over hoe dingen in elkaar zitten, over wat ze gaan maken en hoe dit kan. Achteraf reflecteren ze op wat ze gemaakt hebben in verhouding tot wat hun voorstelling was. Kinderen leren daarbij hun meetkundige redeneringen onder woorden te brengen (De Jong, 1995).
Moderne technologie biedt nieuwe ervaringen, bijvoorbeeld Google Earth of computerspellen zoals Wii-sports. Veel computerprogramma's proberen met speelse onderzoeksopdrachten kinderen uit te dagen tot denken, redeneren en verklaren. Voor het juist redeneren en verklaren is de leerkracht onmisbaar, want de computer is niet in staat om redeneringen te beoordelen en daarop door te vragen (Boon, 2003).
Door wiskundige wereldoriëntatie worden kinderen in de gelegenheid gesteld zich een beeld te vormen van de wereld om hen heen (Heijerick, 1995; Noteboom, 2002; Stephen & Clements, 2003).

Meetkunde is op de basisschool onderverdeeld in vijf deelgebieden: oriëntatie in de ruimte, viseren en projecteren, transformeren, construeren en visualiseren en representeren. Bij elk van deze vijf deelgebieden worden activiteiten gerealiseerd op alle drie in de vorige paragraaf onderscheiden kennisgebieden: ervaren, verklaren en verbinden. Tussen de onderscheiden deelgebieden is steeds nauwe samenhang en overlap, evenals met het domein meten.

5.3.1. Oriëntatie in de ruimte

Oriëntatie in de ruimte heeft vooral te maken met bewegen, kijken en beschrijven. Met oriënteren wordt verstaan dat kinderen met behulp van elementaire ruimtelijke oriëntatiebegrippen (bijvoorbeeld richting, hoek, evenwijdigheid, coördinaten) hun eigen positie en die van andere objecten in de ruimte kunnen bepalen. Een leerkracht moet daarbij gebruik kunnen maken van allerlei beschrijvingsmiddelen van de ruimte, bijvoorbeeld: kaarten, plattegronden, schema's, foto's en aanzichten (Van den Heuvel-Panhuizen & Buijs, 2004; Gravemeijer e.a., 2007; Van der Landen & Veltman 2006; Ter Heege, 2006).

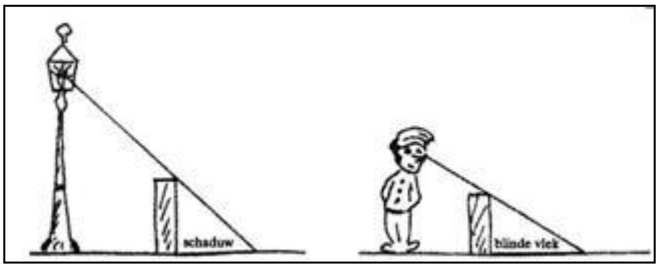
In de onderbouw gaat het bij oriëntatie in de ruimte bijvoorbeeld om:

- Het oriënteren, onderzoeken en beschrijven in en rond de school, bijvoorbeeld door samen te bespreken hoe je van het eigen klaslokaal naar het speellokaal kunt lopen en wat je dan allemaal onderweg ziet (Giezen-Beerlage, 2004).
- Het lokaliseren van objecten in de bekende omgeving met behulp van ruimtelijke begrippen als: voor, achter, dichtbij, naast, links, rechts, enzovoort. Bijvoorbeeld door een spel: de ene leerling beschrijft hoe zijn blokkenbouwsel er uitziet en de andere leerling bouwt het op basis van die beschrijving, zonder het bouwsel te zien, na (De

Neeff-Wisselink, 2007).
- Het herkennen van en werken met patronen, bijvoorbeeld in kralenkettingen of mozaïekfiguren (Lohstro-van Bruggen, 2007).

In de bovenbouw gaat het bij oriëntatie in de ruimte bijvoorbeeld om:
- Het lokaliseren van plaatsen (in brede zin, dus ook rivieren, bergen) en routes op plattegronden en kaarten, bijvoorbeeld in de atlas met behulp van coördinaten (bijvoorbeeld vak B5).
- Het beschrijven van routes en het daarbij gebruiken van begrippen als 1e straat links, na 200 meter rechts, 3e straat links, op de rotonde de derde afslag, en zo verder.
- Het aangeven waar bepaalde gebouwen (kerk, winkel) liggen, of waar kinderen zelf wonen ten opzichte van de school en beschrijven hoe je van de een naar de ander kunt komen. Kinderen zoeken daarbij naar een beschrijvingswijze die de anderen kunnen begrijpen.

5.3.2. Viseren en projecteren
Met viseren en projecteren wordt bedoeld dat we met behulp van rechte lijnen meetkundige verschijnselen uit de realiteit kunnen verklaren. Daarbij valt te denken aan schaduwverschijnselen, maar ook aan (on)zichtbaarheid van objecten vanuit bepaalde standpunten (Feijs, 2005).



bron: www.fi.uu.nl/wiki.

In de onderbouw gaat het bij viseren en projecteren bijvoorbeeld om:
- Het opdoen van ervaringen met licht en schaduw door op het speelplein uit te zoeken hoe groot je schaduw is en hoe je die kan veranderen of doen verdwijnen.

In de bovenbouw gaat het bij viseren en projecteren bijvoorbeeld om:
- Het onderzoeken van licht en schaduw, bijvoorbeeld: verkleinen, vergroten en vervormen. Hierbij gaat het om het redeneren en argumenteren, bijvoorbeeld voorspellen en het controleren van de eigen voorspellingen.
- Ook meetkundige verschijnselen, bijvoorbeeld maans- en zonsverduistering, zijn object van onderzoek.
- Het onderzoeken door voorspellen en uitproberen wat vanaf een bepaald standpunt zichtbaar is en wat niet. Hierbij wordt gebruik gemaakt van echte of getekende viseerlijnen en wordt geredeneerd met behulp van termen als lijn, richting en hoek.

5.3.3. Transformeren
Onder transformeren wordt verstaan het verschuiven, draaien en spiegelen van (eenvoudige) figuren, het verkleinen en vergroten van figuren en het omstructureren of omvormen van figuren onder behoud van oppervlakte (zie ook de domeinbeschrijving meten). Een kernbegrip bij transformeren is symmetrie (Van Galen, 2006).

In de onderbouw gaat het bij transformeren bijvoorbeeld om:
- Werken met spiegelbeelden en symmetrie, tekenen van figuren die een symmetrieas hebben en bespreken waar dan op moet worden gelet. Daarbij spelen zaken als afstand en richting.

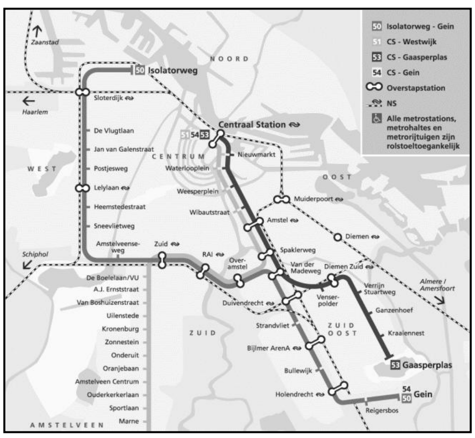
In de bovenbouw gaat het bij transformeren bijvoorbeeld om:
- Experimenteren met roteren van figuren en ervaren dat de afstand tussen het origineel en draaipunt gelijk blijft met de afstand tussen het beeld en draaipunt.
- Puntspiegelen waarbij de gelijkvormigheid wordt gecontroleerd.
- Het onderzoeken en vergelijken van puntspiegelen, lijnspiegelen en draaiingen.

5.3.4. Construeren
Construeren is van oudsher het bekendste meetkundig aspect. Hierbij gaat het om het maken van (eenvoudige) meetkundige figuren, zoals bouwplaten, (ruimtelijke) modellen, schaaltekeningen en grafieken. Kernbegrippen zijn complementeren en omstructureren, die bij oppervlakte- en inhoudsberekeningen een belangrijke rol spelen (zie ook de domeinbeschrijving meten). Ook het (in eenvoudige gevallen) verklaren en toepassen van de effecten van vergroting en verkleining op omtrek, oppervlakte en inhoud vallen onder construeren (Van den Heuvel-Panhuizen & Buijs, 2004; Gravemeijer e.a., 2007).

In de onderbouw gaat het bij construeren bijvoorbeeld om:
- Meetkundige vormen kunnen onderscheiden en benoemen, zoals cirkel, vierkant, rechthoek, driehoek.
- Het kunnen bouwen met blokken en ander constructiemateriaal, bijvoorbeeld ze maken eigen ontwerpen of bouwen na van een voorbeeld (De Goeij, 2004; Ter Heege, 2006).
- Het maken van blokkenbouwsels op basis van voorbeelden, beschrijvingen, aanzichten en plattegronden met hoogtegetallen. Het uitzoeken en beredeneren welke informatie noodzakelijk is om een bouwsel goed na te bouwen (Meulmeester & Prinsen, 2004; Veltman, 2008).

In de bovenbouw gaat het bij construeren bijvoorbeeld om:
- Het oriënteren op en onderzoeken en verklaren van de tijdzones en tijdverschillen op aarde.
- Het maken van doorsneden van ruimtelijke figuren als piramide, bol, prisma, kubus en het tekenen en beschrijven van de aldus ontstane tweedimensionale vormen (Keijzer & Feijs, 2006).
- Het van blokkenbouwsels beschrijven en tekenen van aanzichten en schema's met hoogtegetallen. Evenzo omgekeerd: bouwsels construeren vanuit gegeven aanzichten en schema's met hoogtegetallen (Van der Vlist, 2004).
- Het construeren van eenvoudige ruimtelijke en vlakke meetkundige figuren zoals vierkanten, rechthoeken, driehoeken, cirkels, kubussen, blokken, cilinders en kegels. Het bespreken en beredeneren wat verschillen en overeenkomsten tussen de figuren en vormen zijn en aldus specifieke kenmerken van de meetkundige figuren bepalen (De Goeij, 2004).

5.3.5. Visualiseren en representeren
Een visualisatie of representatie is een schematische weergave van een bepaald deel van de werkelijkheid. Denk aan verschillende soorten visualisaties en representaties zoals zijaanzichten, perspectivische weergaven of schema's van een metronet (Gravemeijer e.a., 2007).



In de onderbouw gaat het bij visualiseren en representeren bijvoorbeeld om:
- Het tekenen van de verschillende routes over bijvoorbeeld een rooster, een plattegrond of een getallenlijn.
- Het tekenen van patronen, figuren en vervolgens de eventuele symmetrie onderzoeken.

In de bovenbouw gaat het bij visualiseren en representeren bijvoorbeeld om:

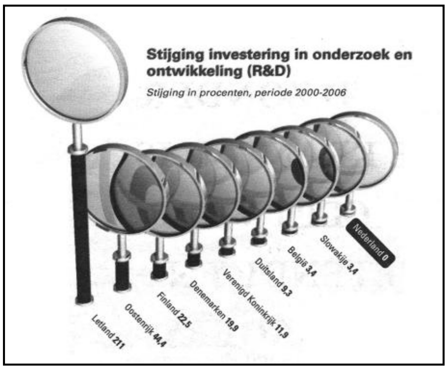
- Het verkennen, onderzoeken, tekenen en lezen van plattegronden en kaarten. Daarbij gaat het onder meer om bewustwording van de noodzaak van het gebruik van een schaal.
- Het tekenen van uitslagen en bouwplaten van objecten, zoals een dobbelsteen (kubus), piramide, huisje, toren (balk) en eenvoudige boot (Van der Vlist, 2004).

5.4. Verstrengeling en samenhang bij meetkunde

5.4.1. Verstrengeling van meetkunde met andere reken-wiskundedomeinen

- Er is nauwe samenhang tussen de domeinen meten en meetkunde. Bij meten gaat het om andere mentale handelingen dan bij de meetkunde. Waar het bij meten gaat om het werken en toekennen van maten of maatgetallen, gaat het bij meetkunde om ruimtelijke relaties en het beredeneren hiervan.
- De verstrengeling met het domein verhoudingen wordt zichtbaar bij meetkundeonderdelen waarbij verhoudingsgewijs redeneren een rol speelt, bijvoorbeeld bij viseren en schaduwen en bij meetkundige verhoudingen. Meetkundige verhoudingen worden aanvankelijk ook op aanschouwelijk niveau waargenomen, bijvoorbeeld op foto's, waarop alles naar verhouding kleiner is dan in werkelijkheid. Als het perspectief in een tekening niet goed is aangebracht, wordt dat zichtbaar doordat verhoudingen niet kloppen. Hetzelfde geldt voor wanverhoudingen, zoals die bijvoorbeeld worden gebruikt in cartoons.

bron: de Gelderlander, nov . 2008.

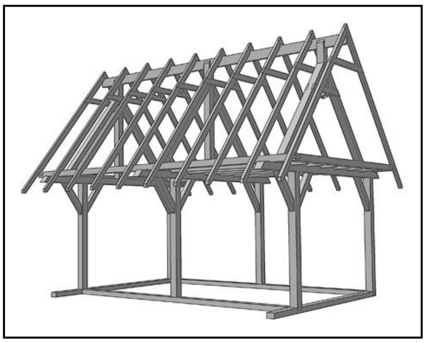


Bron: NRC, 28-02-2009

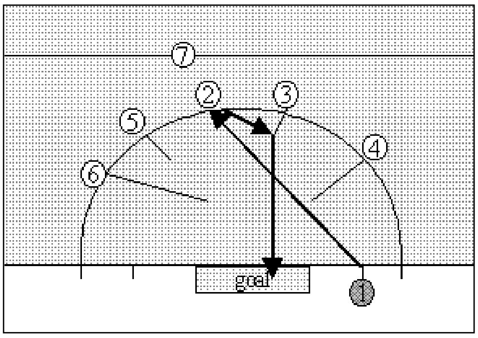
- Informatieverwerking en verbanden: de interpretatie van een visuele voorstelling is hoe dan ook meetkundig, maar gebeurt niet altijd doordacht: het beeld dat je ziet roept associaties op. Bijvoorbeeld: een steilere helling in de lijngrafiek is de keuze van de opsteller van de grafiek. Dergelijke keuzes, zoals de verhouding die wordt gekozen tussen de reële gegevens en de assen van een grafiek, laten toe visuele indrukken te manipuleren.

5.4.2. Gebruik van meetkunde bij andere vak- en vormingsgebieden

- Verschillende vakken kennen raakpunten met meetkunde. Dat geldt met name voor de wereldoriënterende vakgebieden, zowel ruimtelijk als natuurkundig. Ruimtelijk



bron: www.molenaarshuis.nl



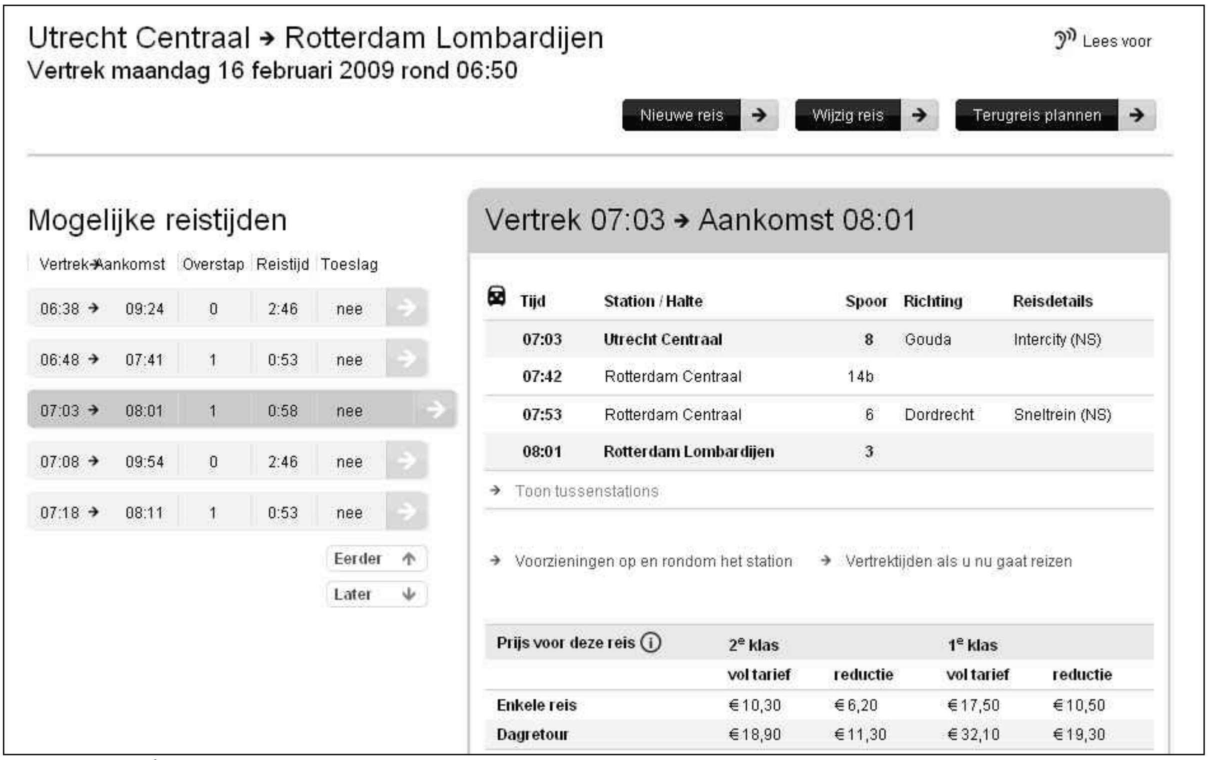
bron: www.knhb.nl

bijvoorbeeld als het gaat om schaal, tijdzones, plattegronden, kaartlezen, ruimtelijke inrichting en het schatten van afstanden. Natuurkundig als het gaat over vormen, en verklaringen geven van natuurkundige verschijnselen als het optreden van dag en nacht.
- Bij beeldende vakken zijn meetkundige inzichten en activiteiten regelmatig nodig bij construeren van een beeldende objecten en versieringen, bijvoorbeeld bij Islamitische kunst, waarin symmetrie en transformaties een belangrijke rol spelen.
- Verder vormt meetkunde de basis voor techniek en technologische inzichten, zoals het interpreteren van bouwplannen en het maken van constructies (zie afbeelding op de vorige pagina).
- Bij bewegingsonderwijs of sport is meetkunde nodig voor het inschatten van ieders eigen bewegingsmogelijkheden. Bijvoorbeeld bij het nemen van een strafcorner bij hockey of de buitenspelregel bij voetbal (zie afbeelding op de vorige pagina).

6. Verbanden

6.1. Maatschappelijke relevantie van verbanden

De 21e eeuwse maatschappij is vooral een informatiemaatschappij. Veel informatie, bijvoorbeeld afkomstig van het internet, is schematisch van aard, zoals het overzicht dat we te zien krijgen, wanneer we op de site van de NS informatie vragen over een bepaalde treinreis. Kenmerkend voor deze schema's is dat de betekenis van getallen mede afhankelijk is van de plaats van het getal in het schema.



Utrecht Centraal → Rotterdam Lombardijen

Vertrek maandag 16 februari 2009 rond 06:50

Lees voor

Nieuwe reis → | Wijzig reis → | Terugreis plannen →

Mogelijke reistijden

Vertrek	Aankomst	Overstap	Reistijd	Toeslag
06:38 →	09:24	0	2:46	nee
06:48 →	07:41	1	0:53	nee
07:03 →	08:01	1	0:58	nee
07:08 →	09:54	0	2:46	nee
07:18 →	08:11	1	0:53	nee

Eerder ↑

Later ↓

Vertrek 07:03 → Aankomst 08:01

Tijd	Station / Halte	Spoor	Richting	Reisdetails
07:03	Utrecht Centraal	8	Gouda	Intercity (NS)
07:42	Rotterdam Centraal	14b		
07:53	Rotterdam Centraal	6	Dordrecht	Sneltrein (NS)
08:01	Rotterdam Lombardijen	3		

→ Toon tussenstations

→ Voorzieningen op en rondom het station → Vertrektijden als u nu gaat reizen

Prijs voor deze reis	2e klas		1e klas	
	vol tarief	reductie	vol tarief	reductie
Enkele reis	€ 10,30	€ 6,20	€ 17,50	€ 10,50
Dagretour	€ 18,90	€ 11,30	€ 32,10	€ 19,30

Bron: www.ns.nl

De nadruk op schematische informatie geldt in mindere mate ook voor informatie in andere media als krant en televisie. Daarin wordt regelmatig gekozen voor weergave in grafieken. Grafieken kunnen - mits goed gekozen - helpen bij het doorzien van verbanden als mechanismen en systemen (zie verschillende voorbeelden in deze domeinbeschrijving).
De informatiemaatschappij kan gekenschetst worden als een 'grey-box society' (Gravemeijer, 2001). Van veel communicatietechnologie is het niet nodig om te weten hoe het werkt om er wel gebruik van te maken. Wel is het hiervoor nodig om nieuwe vormen van grafische representatie te doorzien en te kunnen lezen, zie bijvoorbeeld de mobiele telefoon.

Het maatschappelijk belang van dit domein wordt steeds groter. Het gaat daarbij om het selecteren van representaties om informatie weer te geven, maar vooral ook om het lezen en begrijpen van informatierepresentaties en het selecteren en waarderen van informatie, zoals het doorzien van misleidende representaties.

6.2. Kennis van verbanden

De startbekwame leerkracht kan gangbare grafieken en schema's gebruiken om informatie die zich daarvoor leent te representeren. Hij/zij kan grafieken lezen en vergelijken en informatie uit grafieken op hun waarde schatten.

Niet alle informatie is even belangrijk. Het is soms een kunst om relevante informatie te scheiden van minder relevante (Mols, 2006). Dat is zeker het geval als er (bewust of onbewust) een representatie gekozen is, die onvoldoende of onjuiste informatie geeft (of suggereert). Hierbij gaat het bijvoorbeeld om:

- De keuze van de assen en schaal bij (lijn)grafieken.
- De keuze voor een niet passende soort grafiek.
- Kleurgebruik in de grafiek, door het gebruik van kleuren kunnen bepaalde effecten in het oog springen.
- De suggestie van continuïteit in situaties waarin hiervan geen sprake is.

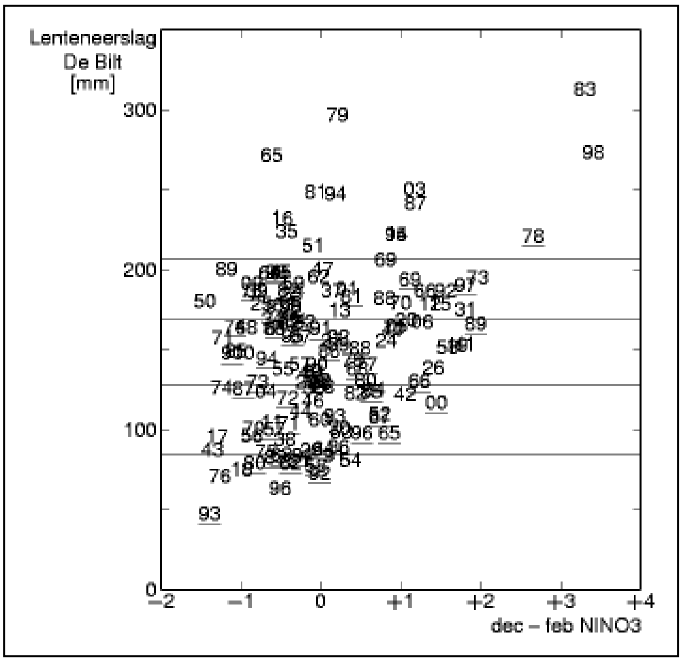
6.2.1. Verschillende typen grafieken

De lijngrafiek is waarschijnlijk de meest gebruikte grafiek. Lijngrafieken zijn (in ieder geval lokaal) continu en zijn daarom alleen bruikbaar om continue processen in beeld te brengen (zie ook paragraaf 6.2.2.). Dit is terug te zien in de ontstaansgeschiedenis van de lijngrafiek. De lijngrafiek kwam pas werkelijk in zwang, toen men bedacht dat een van de assen een tijdas zou kunnen zijn.

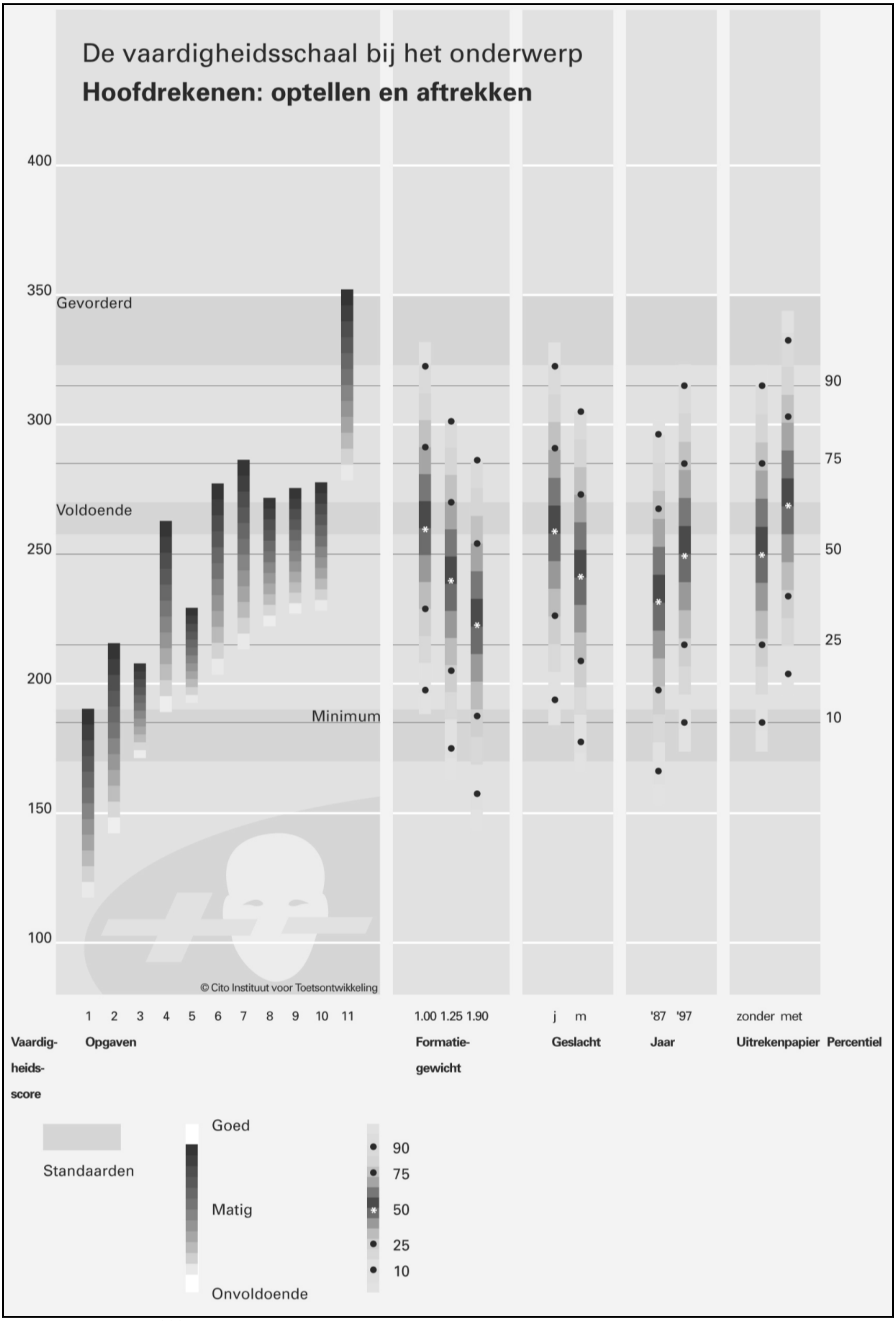
Naast de lijngrafiek, kennen we bijvoorbeeld ook de volgende soorten grafieken:

- cirkeldiagram,
- histogram (zie afbeelding op de volgende pagina),
- staafdiagram,
- stengel- en bladdiagram,
- blokdiagram,
- puntenwolk (zie afbeelding hiernaast),
- stroomdiagram,
- beelddiagram.

Ieder type grafiek is bruikbaar in specifieke situaties. Dit zijn in de regel situaties waaruit het type grafiek zijn historische oorsprong kent (vergelijk Noss, 2001). Leerkrachten basisonderwijs zijn in staat om bij verschillende situaties passende representaties en grafieken te gebruiken.



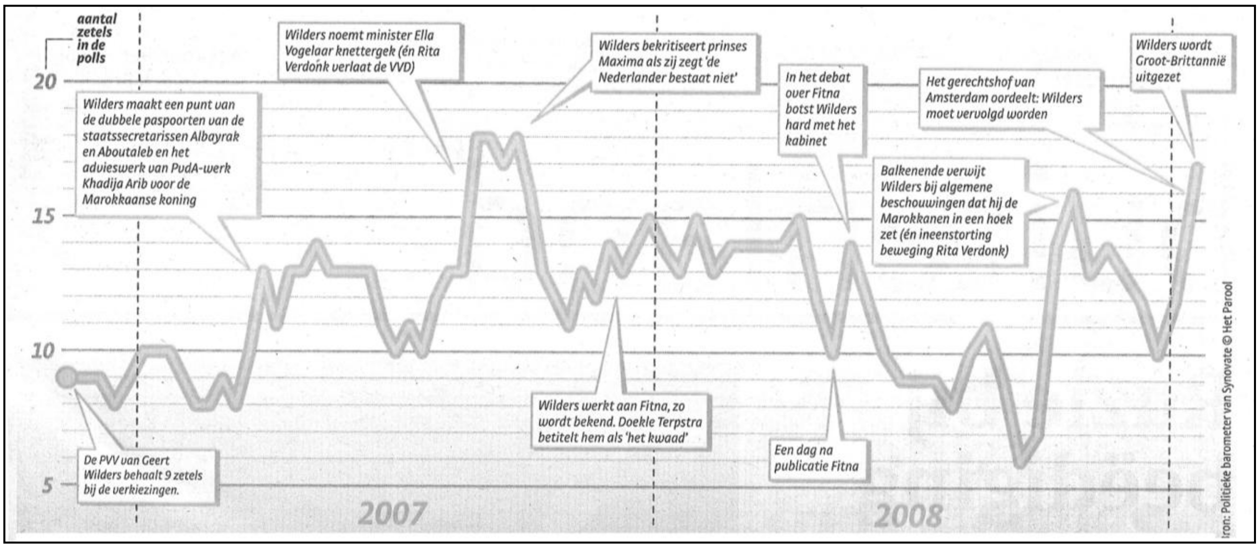
bron: KNMI.



Bron: Janssen, e.a., 1999, pg. 54.

6.2.2. Discrete en continue situaties

Lijngrafieken worden veel gebruikt. Ze worden ook wel gebruikt in situaties waarbij ze feitelijk niet passen. Dat is het geval bij discrete situaties, waarbij meetresultaten onterecht door een (recht) lijnstuk worden verbonden. Dit is onder meer in het volgende voorbeeld aan de orde. Wekelijks wordt de populariteit van de politicus Wilders gemeten. Het Parool laat met een lijngrafiek zien hoe het denkbeeldige zetelaantal zich verhoudt tot media-aandacht voor deze politicus.



Bron: Het Parool, 14-02-2009.

Bij het maken van de lijngrafiek is men als volgt te werk gegaan. De meetresultaten – de uitslagen van de wekelijkse peilingen – zijn door rechte lijnen verbonden. Dit suggereert dat men iets weet over de stemming tussen de peilingen. Maar dat is natuurlijk niet zo. De werkelijkheid is waarschijnlijk nog veel grilliger dan in de grafiek naar voren komt. Een staafdiagram of beelddiagram zou hier beter passen.

Meer algemeen moeten bij het maken van grafieken keuzen gemaakt worden over:
- Welke representatie op een bepaald moment de meest adequate is.
- Hoe deze representatie gebruikt kan worden om de data op zo effectief mogelijke wijze weer te geven.
- Hoe de gekozen representatie past bij de doelgroep.

Juist omdat spreadsheetprogramma's als Excel het mogelijk maken informatie eenvoudig weer te geven in grafieken, is kennis welke grafische representaties bij verschillende situaties passend zijn, noodzakelijk.

6.2.3. Wiskundetaal bij verbanden

Bij het domein informatieverwerking en verbanden speelt taal een grote rol bij het vertalen en lezen van informatie in grafieken (en omgekeerd). Onder de specifieke wiskundetaal valt bijvoorbeeld (vergelijk Van Galen e.a., 2005):
- De namen van grafieken en begrippen die daarbij worden gebruikt zoals assen, legenda en dalen en stijgen.
- Overige begrippen die worden gebruikt bij het ordenen en representeren van informatie, zoals gemiddelde, sectoren, graden en minuten.

Formele begrippen die op zich niet tot de leerstof van de basisschool worden gerekend, maar waar de startbekwame leerkracht wel betekenis aan kan geven in verband met het duiden, ordenen en duiden van informatie zijn bijvoorbeeld mediaan, modus en modaal, causaal en significant verband.

Kennis van informatieverwerking en verbanden die niet tot de leerstof van de basisschool hoort, maar waarover de startbekwame leerkracht wel beschikt met het oog op het volgen van leerling-vorderingen, betreft bijvoorbeeld de grafische weergave van gegevens uit leerlingvolgsystemen.

6.3. Kennis voor onderwijzen van verbanden

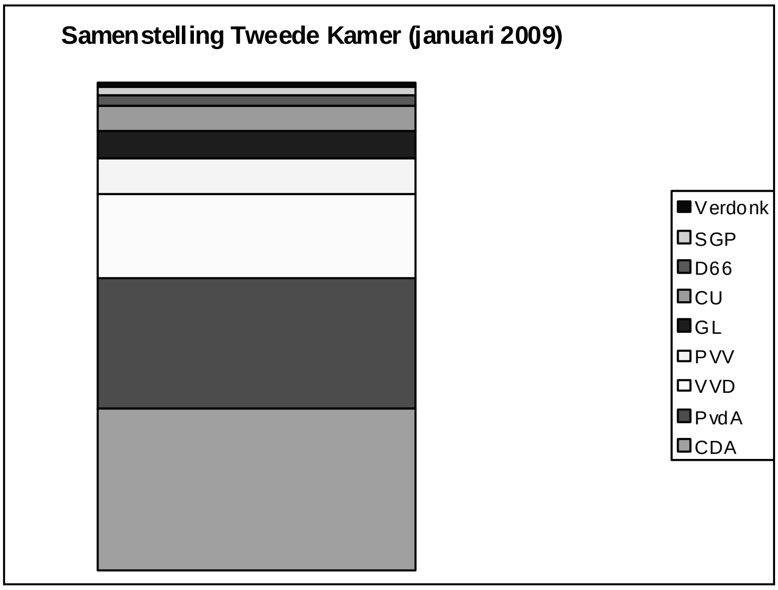
De startbekwame leerkracht beschikt over kennis van informatieverwerking en verbanden uit de voorgaande paragraaf en beheerst daarnaast en in relatie daarmee de opbouw van de deelgebieden en betreffende leerlijnen, voor zover deze al voor dit subdomein zijn ontwikkeld. Verder beheerst hij/zij didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zoals het inzetten van de relatie tussen werkelijkheid en mogelijke wiskundige representaties, en het passend omgaan met informatie, bijvoorbeeld ordenen en schematiseren van informatie.

6.3.1. Modelmatige representaties

Informatie kan vaak kernachtig in een modelmatige represen-tatie worden weergegeven.
Voorbeelden daarvan zijn:

- cirkel (sectordiagram),
- strook (figuur),
- (dubbele) getallenlijn,
- verhoudingstabel.

Leerkrachten basisonderwijs helpen hun leerlingen informa-tie te vertalen naar dergelijke representaties, waar-bij de nadruk ligt op hoe de informatie uit de situatie helder naar voren komt in de compacte beschrijvingswijze.



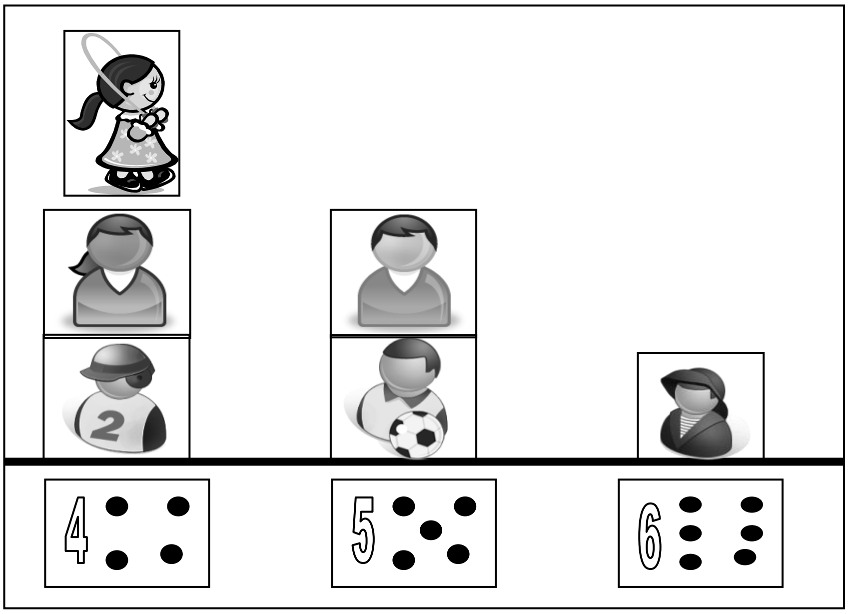
6.3.2. Grafieken als representaties van de werkelijkheid

Het werken met grafische representaties doet een beroep op het onderzoekend leren door leerlingen. Grafieken vormen een abstrahering van de werkelijkheid. In het onderwijs grijpt het ontwikkelen van grafieken daarom aan bij deze werkelijkheid. Kinderen leren zo grafieken kennen door bijvoorbeeld stroken van hun eigen lengte te maken en naast elkaar te hangen of door kaartjes neer te leggen om de stand bij te houden. Geleidelijk worden grafieken op zichzelf staande representaties.
Leerkrachten leren kinderen daarnaast om een bij een situatie passende grafiek te kiezen.

6.3.3. Schema's als gestructureerde kladjes

Greep krijgen op informatie betekent dat deze geordend moet worden. Dat kan gebeuren in de vorm van grafieken of in de vorm van schema's. Schema's ontstaan door getallen (en andere data) enigszins gestructureerd te noteren. Vanuit een dergelijke kladje ontstaat stukje bij beetje een overzichtelijk schema, waar de ruimtelijke positionering bijdraagt aan de betekenis en de getallen of data en het overzicht over het geheel.
Het aldus te werk gaan is een vorm van (horizontaal) mathematiseren; de dagelijkse praktijk wordt weergegeven met wiskundige middelen.

6.3.4. Niveauverhoging bij verbanden



Grafieken zijn door de hele basisschool aan de orde. In de onderbouw ontstaat bijvoorbeeld een grafiek als kinderen een zelfportret bij de eigen leeftijd leggen. Daarbij ontstaat een beeldgrafiek.

In de bovenbouw van de basisschool worden grafie-ken gaandeweg abstracter. Daar gaat het bijvoorbeeld om lijngrafieken om tijd-afstandrelaties in beeld te brengen en cirkelgrafieken om verhoudingen weer te geven. Leerlingen leren dat op de assen verschillende variabelen kunnen worden weergegeven. Daarbij gaat het om het beschouwen van verschillende kwadranten en het interpreteren van assen die niet bij 0 beginnen. Ook het doorzien van misleidend weergegeven informatie in grafieken kan in de bovenbouw aan de orde worden gesteld.
Leerlingen leren ook de (moeilijke) notie 'gemiddelde' betekenis te geven in relatie tot grafieken, namelijk als de gemiddelde hoogte van een grafiek. Verder leren ze verband te leggen tussen verandering in een situatie en de weergave daarvan in een grafiek.
Verder gaat het bij het bewerken van informatie tot grafieken of schema's om een proces van progressieve mathematisering. Dit betekent dat de informatie aangegrepen wordt om er wiskunde van te maken (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 2005). Leerkrachten kennen, herkennen en stimuleren dergelijke processen van mathematiseren.

6.4. Verstrengeling en samenhang bij verbanden

6.4.1. Verstrengeling van verbanden met andere reken-wiskundedomeinen

- Bij het rekenen tot 100 en 1000 is de getallenlijn een prominent model. Dit model is vaak geschikt om getalsmatige informatie te ordenen om hier overzicht over te geven (Gravemeijer, 2000).
- Bij grafieken wordt vaak de getalsmatige informatie weergegeven, maar ook regelmatig de relatieve informatie in percentages (vergelijk Van Galen, 2002).
- Meten en meetkunde: bij getalsmatige informatie gaat het in de regel om meetgetallen en wanneer de informatie niet getalsmatig is, gaat het vaak om informatie in termen van ruimte en tijd (Gravemeijer, 2007).

6.4.2. Gebruik van verbanden bij andere vak- en vormingsgebieden

Het verwerken van informatie is bij uitstek het gebied waar rekenen-wiskunde aan andere vak- en vormingsgebieden raakt. Het gaat dan bijvoorbeeld om de zogenoemde zaakvakken, waar grafieken en tabellen regelmatig gebruikt worden om informatie weer te geven (Mols, 2006). Het typeert anderszins nadrukkelijk het raakgebied tussen wiskunde en taal.

De Kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo
Bronnen

In deze lijst staat alle gebruikte literatuur vermeld, ook uit de bijlagen *Toelichting en verantwoording* en *De kennisbasis en de referentieniveaus rekenen*.
Literatuur die geschikt is als bron voor studenten, is aangegeven met een *.

Andeweg, A. (2008).Rekenen en rekenen is drie;wat kunnen we met de artikelen van Jan van de Craats en Willem Uittenbogaard? *Tijdschrift voor Remedial Teaching 2008*(3), 18-21.*

Ball, D. & H. Bass (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In: J. Boaler (ed.) *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*, 83-104. Westport: Ablex.

Ball, D., M. Thames & G. Phelps (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education 59*(5), 389-407.

Baltussen, M., J. Klep & Y. Leenders (1997). *Wiskundeavonturen met jonge kinderen*. Amersfoort: CPS.*

Battista, M. (1982). Understanding area and area formulas. *The mathematics teacher 75*(5), 362- 368.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and substraction up to 100 in Dutch second grades. *Journal for Research in Mathematics Education 24*, 294-323.

Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In: M. Beishuizen, K. Gravemeijer & E. van Lieshout (ed.) *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures.* Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.

Biemond, H. (1998). Taal leren in de rekenles. In: N. Boswinkel & M. Dolk (red.) *Over rekenen gesproken. Taal in/en rekenen.* Utrecht: Panama / Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.*

Biervliet, P. Van (1994). Cijferen: een kunst? Vier aanpakken voor het cijferrekenen. *Onderwijskrant 84*, 25-38.

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Beschluss vom 15.10.2004. Deutschland: Wolters-Kluwer.

Blom, N. & M. Smits (red.)(2000). *Taal en rekenen in opleidingsdidactische samenhang. TRIOS op weg – een tussenbalans.* Enschede: SLO.

Blom, N. & M. Smits (red.)(2001). *Nederlandse taal en rekenen-wiskunde in samenhang op de Pabo.* Enschede: SLO.

Boer, C. van den (2007). Taalgericht reken/wiskundeonderwijs. *Tijdschrift voor Remedial Teaching 2007*(5), 22-25.*

Boon, P. (2003). Meetkunde op de computer. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 22(1), 17-26.

Borghouts, C., A. Buter, J. Dekker, E. Hoogenberg, D. Kopmels & M. van Oostenbrugge (2007). *Interactie in rekenen. Eenvoudig interactie realiseren in het werken met uw rekenmethode.* Vlissingen: Bazalt.*

Boswinkel, N. & F. Moerlands (2001). Speciaal Rekenen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 19*(3), 3-14.*

Boswinkel, N. & F. Moerlands (2003). Het topje van de ijsberg. In: K. Groenewegen (red.) *Nationale Rekendagen 2002 – een praktische terugblik.* Utrecht: Freudenthal Instituut.*

Boswinkel, N. & P. Slegers (2005). 'Het is vijf over kwart over 1'. *Jeugd in School en Wereld 89*(4), 28-30.*

Boswinkel, N. & J. Nelissen (2007). Leerstoflijnen in methoden: leerstoflijnen uit Speciaal Rekenen nader toegelicht. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 26*(4), 43-50.*

Bouwers, H. & H. van Goor (2003). *Diagnostiek en behandeling van rekenproblemen*. Baarn: HB-uitgevers.*

Brink, J. van den (1987). Zingevende en zinontnemende contexten. *Willem Bartjens 6*(3), 132-134.

Brink, J. van den, H. Ter Heege, W. Struik, W. Sweers & W. Vermeulen (1988). *De taal van de rekenmachine*. Tilburg: Zwijsen.*

Brink, J. van den, (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen*. Utrecht: CD-β Press, Universiteit Utrecht (proefschrift).

Brink, J. van den (1991). Realistic arithmetic education for young children. In: Streefland, L. (ed). *Realistic mathematics education in primary school*. Utrecht: FI, Universiteit Utrecht.

Brink, J. van den (2006). 'Alle rekenmachines rekenen niet goed!' Een onderzoekje in het speciaal onderwijs. *Jeugd in school en wereld 90*(1), 22-24.*

Brock, W. (1991). Wie de schoen past, is zes jaar. Willem Bartjens 11(1), 10-12.*

Brom-Snijders, P. van den, M. van Zanten, J. van den Bergh, R. Meijer & A. Vrolijk (2006). *Reken-wiskundedidactiek. Gebroken getallen.* Utrecht/Zutphen: ThiemeMeulenhoff.*
Buijs, K. (1991). *Telactiviteiten voor kleuters*. Baarn: Bekadidact.*
Buijs, K. & A. Noteboom (1995). Breuken: begrip en taalontwikkeling. In: C. van den Boer en M. Dolk (red.) *Rekenen in de bovenbouw van de basisschool.* Utrecht: Panama/HvU, Freudenthal Instituut.*
Buijs, K., J. Bokhove, R. Keijzer, A. Lek, A. Noteboom & A. Treffers (1996). *De Breukenbode – Een leergang voor de basisschool.* Enschede/Utrecht/Arnhem: SLO/FI/Cito.*
Buijs, K. (2002). Hoofdrekenen in de hoogste leerjaren. Spelenderwijs verder. *Willem Bartjens 22*(2), 28-32.*
Buijs, K. (2004). Wie het kan verwoorden snapt het. *Volgens Bartjens 24*(1), 4-8.*
Buijs, K. (2005a). Van procedure- naar begripsgericht onderwijs. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk* 24 (1) 9-17.*
Buijs, K. (2005b). Kommagetallen, hoe ver gaan we? Leerdoelen en leerlijnen op het gebied van kommagetallen. *Volgens Bartjens 12*(1), 12-16.*
Buijs, K. (2008). *Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen.* Utrecht: Universiteit Utrecht (proefschrift).
Buijs, K., P. Kemmers, F. Moerlands & J. Vedder (2008). *Integratie van rekenen-wiskunde en natuur en techniek.* Enschede: SLO.*
Buijs, K., J. Klep & A. Noteboom (2008). *TULE – Rekenen-wiskunde – Inhouden en activiteiten bij de kerndoelen van 2006.* Enschede: SLO.*
Buijs, K. (2009a). Hoe schrijf je dat nou netjes op? Het gebruik van hulpnotaties in het reken-wiskundeonderwijs. *Volgens Bartjens 28*(3), 30-34.*
Buijs, K. (2009b). Vermenigvuldigen met meercijferige getallen – pleidooi voor een kernleergang gestileerd hoofdrekenen. In: M. van Zanten (red.). *Doorgaande ontwikkelingen rekenen-wiskunde.* Utrecht: Panama/ FIsme, Universiteit Utrecht, pg. 41-56.*
Cathcart, W., Y. Pothier, J. Vance & N. Bezuk (2006). *Learning mathematics in elementary and middle schools.* New Jersey / London: Pearson Education / Prentice-Hall International.
Cauwenberghe, C. van (red.)(2008). *Kennis in de steigers: 'Work in progress'.* Heerlen: Ruud de Moorcentrum, Open Universiteit.
Cobb, P. (1987). Information-processing psychologie and mathematics education. A constructivist perspective. *Journal of mathematical behavior 6*, 4-40.
Cobb, P., T. Wood & E. Yackel (1991). A constructivist approach to second grade mathematics. In: E. von Glaesersfeld (ed.) *Radical Constructivism in Mathematics Education.* Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.
Cockcroft, W. (vz.)(1982). *Mathematics counts*. London: Her Majesty's Stationery Office.
Commissie Leraren (2007). *LeerKracht!* Den Haag: Commissie Leraren.
Corte, E. de (1995). Psychologie en reken/wiskunde-onderwijs. In: L. Verschaffel & E. de Corte (red.) *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel 1: Achtergronden.* Leuven: Acco.*
Corte, E. de, B. Greer & L. Verschaffel (1996). Mathematics teaching and learning. In: D. Berliner & R. Calfee (ed.) *Handbook of educational psychology.* New York: Simon & Schuster Macmillan.
Craats, J. van de (2007). Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. Mythen in de rekendidactiek. *Nieuw Archief voor Wiskunde 5/8*(2), 132-136.*
Craats, J. van de & R. Bosch (2007). *Basisboek rekenen.* Amsterdam: Pearson Education.*
Damhuis, R. & P. Litjens (2002). Taal leren door interactie; geldt dat ook voor rekentaal? In: R. Keijzer & W. Uittenbogaard (red.) *Interactie in het reken-wiskundeonderwijs.* Utrecht: Panama / Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.
Dijk, I. van (2002). *The learner as designer: processes and effects of an experimental programme in modelling in primary mathematics education.* Amsterdam: Vrije Universiteit (proefschrift).
Dijk, I. van (2003). Altijd je rekengereedschap bij de hand. Leerlingen ontwikkelen hun eigen reken-wiskundige modellen. *Willem Bartjens 22(*4), 16-18.*
DMV/GDM/MNU (Deutsche Mathematiker-Vereinigung / Gesellschaft für Didaktik der Mathematik / Deutsche Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts) (2008). *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM, MNU.* Deutschland, 2008.
Dolk, M. & W. Uittenbogaard (red.)(1993). *Procenten – op de grens van basisschool en basisvorming.* Utrecht: Panama, HMN / Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.*
Dolk, M. (2005). Aandacht voor 'big ideas' in de wiskunde. Kinderen discussiëren over hun wiskundige ontdekkingen. *Volgens Bartjens 25*(2), 4-7.*
Dolk, M. (2007). De leraar als archeoloog en begeleider. Rijke problemen oplossen in plaats van procedures aanbieden. *Volgens Bartjens 27*(2), 4-10.*

Eerde, D. van, & A. Vuurmans (1987). *Psychologie in het reken/wiskundeonderwijs.* Groningen: Wolters-Noordhoff.*
Eerde, D. van (1996). *Kwantiwijzer. Diagnostiek in reken-wiskundeonderwijs.* Tilburg: Zwijsen (proefschrift).
Eerde, D. van, M. Hajer, T. Koole & J. Prenger (2002). Betekenisconstructie in de wiskundeles. De samenhang tussen interactief wiskunde- en taalonderwijs. *Pedagogiek 22*(2), 134-147.*
Eerde, D. van (2005). Wiskunde en psychologie – De brug en de kloof tussen Freudenthal en Van Parreren. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 24*(3), 55-63.
Eerde, D. van & M. Hajer (2005). Language sensitive mathematics teaching – students' talking and writing enlighten hidden problems. In: M. Bosch (ed.) *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics education.* Spain, Sant Feliu de Guíxols.
Eerde, D. van (2008). Tussen droom en daad – op zoek naar een repertoire van leraren voor interactief georiënteerd reken-wiskundeonderwijs. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 27*(3/4), 48-58.
Erich, L. (1994). 'Twintig procent is delen door vijf!' Problemen met procentrekenen. *Willem Bartjens 14*(2), 38-41.*
Erlwanger, S. (1973). Benny's conception of Rules and Answers in IPI Mathematics. *Children's Mathematical Behavior 1*(2), 212-231.
Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008a). *Over de drempels met taal en rekenen. Hoofdrapport van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen.* Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen.*
Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008b). *Over de drempels met rekenen. Consolideren, onderhouden, gebruiken en verdiepen.* Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen.*
Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2009). *Over de drempels met taal en rekenen. Een nadere beschouwing.* Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen.*
Faes, W. (1999). De schuifstrook: een dynamisch model. *Willem Bartjens 19*(2), 14-18.*
Feijs, E. (2005). Een meetkundeactiviteit voor de bovenbouw van het basisonderwijs. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 24*(4), 46-52.*
Feys, R. (1995a). Optellen, aftrekken en splitsen tot 20. In: L. Verschaffel & E. de Corte (red.): *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel 2: Het fundament van gecijferdheid gelegd.* Leuven: Acco.
Feys, R. (1995b). Getallenkennis, optellen en aftrekken in het getallengebied 20-100. In: L. Verschaffel & E. de Corte (red.): *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel 2: Het fundament van gecijferdheid gelegd.* Leuven: Acco.
Fosnot, C. & M. Dolk (2001a). *Young mathematicians at work. Constructing number sense, addition and substraction.* Portsmouth: Heinemann, Reed Elsevier.
Fosnot, C. & M. Dolk (2001b). *Young mathematicians at work. Constructing multiplication and division.* Portsmouth: Heinemann, Reed Elsevier.
Fosnot, C. & M. Dolk (2002). *Young mathematicians at work. Constructing fractions, decimals and percents.* Portsmouth: Heinemann, Reed Elsevier.
Fosnot, C. & M. Dolk (2003). Het leerlandschap. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 21*(2), 29-37.
Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel
Freudenthal, H. (1984). *Appels en peren / wiskunde en psychologie.* Apeldoorn: Van Walraven.*
Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Frijlink, J. & H. Wouda (2008). De rekentoren. Realistisch reken-wiskundeonderwijs aan kleuters. *Volgens Bartjens 28*(1), 24-27.*
Galen, F. van, N. Ruesink & E. Wijdeveld (red.)(1992). *10 over 10: lessuggesties rond tijd.* Utrecht: NVORWO*
Galen, F. van (2002). Cirkel- en staafdiagrammen in een leergang procenten. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 20*(4), 21-28.*
Galen, F. van (2003). Absoluut en relatief, een lastig onderscheid. *Willem Bartjens 22*(3), 5-8.*
Galen, F. van (2004). In de voetsporen van Simon Stevin. *Willem Bartjens 23*(5), 16-19.*
Galen, van F. & V. Jonker (red.)(2005). *Tellen, turven, tekenen.* Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.*
Galen, F. van, E. Feijs, N. Figueiredo, K. Gravemeijer, E. van Herpen & R. Keijzer (2005). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen. Tussendoelen Annex Leerlijnen Bovenbouw basisschool.* Groningen: Wolters-Noordhoff.*
Galen van, F. (2006). Taarten en sterren. *Volgens Bartjens 25*(3), 28-30.*
Galen, F. van & L. Oosterwaal (2007). Rekenproblemen open aanbieden. Kinderen leren redeneren in

discussies over open vraagstukken. *Volgens Bartjens 27*(2), 30-34.*
Galen, F. van & M. Peltenburg (2008), Wijzer voor wijzer. Een nieuwe kijk op klokkijken. *Volgens Bartjens 27*(5), 12-15.*
Gal'perin, P. (1972). Het onderzoek naar de cognitieve ontwikkeling van het kind. *Pedagogische Studiën 49*, 441-454.
Gal'perin, P. (1978). De organisatie van de cognitieve activiteit en de optimalisering van het onderwijsleerproces. *Pedagogische Studiën 55*, 218-227.
Gelder, L. van (1969). *Grondslagen van de rekendidactiek.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Gelderblom, G. (2007). *Effectief omgaan met verschillen in het rekenonderwijs.* Amersfoort: CPS.*
Gelderblom, G. (2008). *Effectief omgaan met zwakke rekenaars.* Amersfoort: CPS.*
Gelderblom, G. (2009). *Iedereen kan leren rekenen.* Utrecht: PO-raad / Projectbureau Kwaliteit.*
Giezen-Beerlage, D. van (2004). Een routekaart naar het zwembad. *Volgens Bartjens 23*(4), 38-41.*
Gilissen, L. & J. Klep (1980). *De getallenlijn. Tellen, meten, rekenen en denken.* Tilburg: Zwijsen.
Goeij, E. de (2004). Een hut van kranten. *Volgens Bartjens 23*(5), 37-39.*
Goeij, E. de (2005). Ik doe van de 43 één naar de 39. Variastrategieën: de methode volgen of een eigen koers varen. *Volgens Bartjens 25*(2), 9-12.*
Goffree, F. (1992a). De Pabo-bv in 2002. In: Goffree, F., A. Treffers en J. de Lange (1992). *Rekenen anno 2002. Toekomstverwachtingen van het reken-wiskundeonderwijs.* Utrecht: NVORWO.
Goffree, F. (1992b). *Wiskunde & didactiek, deel 2*. Groningen: Wolters-Noordhoff.*
Goffree, F. (1994a). *Wiskunde & didactiek, deel 1*. Groningen: Wolters-Noordhoff.*
Goffree, F. (1994b). Verhoudingen: je komt ze overal tegen. *Willem Bartjens 14*(1), 7-13.*
Goffree, F. (1995). Gecijferdheid. In: L. Verschaffel & E. de Corte (red.): *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel 1: Achtergronden.* Leuven: Acco.
Goffree, F. & M. Dolk (red.)(1995). *Proeve van een nationaal programma rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo.* Enschede/Utrecht: Instituut voor Leerplanontwikkeling / NVORWO.
Goffree, F. (2005). *Kleuterwiskunde*. Groningen: Wolters-Noordhoff.*
Graeber, A. & E. Tanenhaus (1993). Multiplication and division: from whole numbers to rational numbers. In: D. Owens (ed.) *Research ideas for the classroom – Middle grades mathematics.* New York: Macmillan, 99-117.
Gravemeijer, K. (1994a). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education 25*, 443-471.
Gravemeijer, K. (1994b). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht: CD-β Press, Universiteit Utrecht (proefschrift).
Gravemeijer, K. (2000). Meten als basis voor het rekenen met de lege getallenlijn. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 18*(3). 37-46.
Gravemeijer, K. (2001). *Reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw.* Utrecht: Universiteit Utrecht (oratie).
Gravemeijer, K. (2003). Betekenisvol rekenen. Op zoek naar de wiskunde in een contextopgave. *Willem Bartjens 22*(4), 5-8.*
Gravemeijer, K. & D. van Eerde (2004). Verschil maken. In: R. Keijzer & W. Uittenbogaard (red.) *Een wereld van verschillen. Differentiatie in het reken-wiskundeonderwijs.* Utrecht: Panama / Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.*
Gravemeijer, K. (2005). Revisiting 'Mathematics education revisited'. In: J. ter Heege, T. Goris, R. Keijzer & L. Wesker (red.) *Freudenthal 100.* Utrecht: Freudenthal Instituut. 106-113.
Gravemeijer, K. (2006). Wiskunde leren is complexer dan je denkt. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 25*(1), 33-36.
Gravemeijer, K. (2007). Wiskundeonderwijs voor de kennissamenleving. In: M. Popkema, P. Wilhelm & K. Boersma (red.). *Onderwijs in de kennissamenleving.* Amsterdam: Aksant.
Gravemeijer, K., N. Figueiredo, E. Feijs, F. van Galen, R. Keijzer & F. Munk (2007). *Meten en meetkunde in de bovenbouw. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Bovenbouw basisschool.* Groningen: Wolters-Noordhoff.*
Gravemeijer, K. (2009). *Leren voor later*. Eindhoven: TUe (oratie).
Greven, J. (red.)(2005). *Vakspecifieke competenties voor studenten aan de lerarenopleiding primair onderwijs. Een proeve.* Enschede: SLO.
Gribling, S., R. Keijzer, W. Vermeulen & W. Faes (1994). *De schatkamer*. Apeldoorn: Walraven.*
Groenestijn, M. van (2002). *A Gateway to Numeracy. A study of numeracy in adult basic education.* Utrecht: CD-β Press, Universiteit Utrecht (proefschrift).
Grossman, P. & A. Schoenfeld (2005). Teaching subject matter. In: L. Darling-Hammond & J. Bransford (eds.). *Preparing teachers for a changing world.* San Francisco: Jossey-Bass.
Harn, K. (2005). *Romeinse cijfers*. Amsterdam: De Buitenkant.*
Heege, H. ter (1980). The aquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics*

16, 385-388.
Heege, H. ter (1995). Vermenigvuldigen en delen als elementaire vaardigheden. In: L. Verschaffel & E. de Corte (red.) *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel 2: Het fundament van gecijferdheid gelegd.* Leuven: Acco.*
Heege, H. ter (1999). Rekenmachines horen erbij. Leren rekenen met en door de zakrekenmachine. *Volgens Bartjens 19*(2), 28-31.*
Heege, H. Ter (2006), Een doos in de peuterspeelzaal. *Volgens Bartjens 25*(5), 8.*
Heijerick L. (1995). Leereenheid 17: Meetkunde. *Cursus naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en basiseducatie*. Leuven: Acco.
Hertog, J. den (2006). Rekenvaardigheid en gecijferdheid - enquête onder pabo-docenten rekenen-wiskunde & didactiek. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 25*(4), 30-34.
Heuvel-Panhuizen, M. van den, & L. Streefland (1993). Per Sense – een onderwijsleerpakketje over procenten. In: M. Dolk & W. Uittenbogaard (red.) *Procenten – op de grens van basisschool en basisvorming.* Utrecht: Panama, HMN / Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, 25-48.*
Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buijs & A. Treffers (red.)(2001). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen bovenbouw basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.*
Heuvel-Panhuizen & K. Buijs (red.)(2004). *Jonge kinderen leren meten en meetkunde. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Meten en meetkunde onderbouw basisschool.* Groningen: Wolters-Noordhoff.*
Heuvel-Panhuizen, M. van den, M. Peltenburg & J. Menne (2008). Ontwikkelingsruimte voor zwakke rekenaars. *Tijdschrift voor Remedial Teaching 2008*(5), 18-21.*
Heuvel-Panhuizen, M. van den (2009). *Hoe rekent Nederland?* Utrecht: Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen, Universiteit Utrecht (oratie).
Heyerick L. (1995). Meetkunde. In: L. Verschaffel & E. de Corte (red.). *Naar een nieuwe reken/wiskundedidactiek voor de basisschool en de basiseducatie. Deel 3: Verder bouwen aan gecijferdheid.* Leuven: Acco.*
Hill, H., L. Sleep, J. Lewis & D. Ball (2007). Assessing Teachers' Mathematical Knowledge. What Knowledge Matters and What Evidence Counts? In: F. Lester (ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* VS: National Council of Teachers of Mathematics, 111-155.
Hill, H., D. Ball & S. Schilling (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education 39*(4), 372-400.
Hoogland, K. (2005). Gecijferd. Hoe ga je om met de kwantitatieve aspecten van de wereld om ons heen? *Euclides 2005*(4), 186-189.*
Hoogland, K. & M. Meeder (2007). *Gecijferdheid in beeld.* Utrecht: APS.*
Hoogland, K. (2008a). Van sommen maken naar gecijferdheid. *Beroep Docent 2008*(5), 26-27.*
Hoogland, K. (2008b). Nostalgische terugblik op de staartdeling. *Nieuw Archief voor Wiskunde 5/9*(4), 279-281.*
Huitema, S. (2009). Schets van een leerlijn vermenigvuldigen en delen voor kinderen van niveau 1F. In: M. van Zanten (red.) *Doorgaande ontwikkelingen rekenen-wiskunde.* Utrecht: Panama/FIsme, Universiteit Utrecht.*
Inspectie van het Onderwijs (2008). *Basisvaardigheden rekenen-wiskunde in het basisonderwijs. Een onderzoek naar het niveau van rekenen-wiskunde in het basisonderwijs en naar verschillen tussen scholen met lage, gemiddelde en goede reken-wiskunderesultaten.* Utrecht: Inspectie van het Onderwijs.*
Janson, D. & A. Noteboom (2004) *Compacten en verrijken van de rekenles voorbegaafde en hoogbegaafde leerlingen in het basisonderwijs*. Enschede: SLO.*
Janssen, J., F. van der Schoot, B. Hemker & N. Verhelst (1999). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3. Uitkomsten van de derde peiling in 1997*. Arnhem: Cito.*
Janssen, J., F. van der Schoot en B. Hemker (2005). *Balans [32] van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4. Uitkomsten van de vierde peiling in 2004.* Arnhem: Cito.*
Janssen-Vos, F., B. Pompert & H. Vink (1991). *Naar lezen, schrijven en rekenen.* Assen: Van Gorcum.*
Janssen-Vos, F. (2008). *Basisontwikkeling voor peuters en de onderbouw.* Assen: Van Gorcum.*
Jong, R. de (1995). Modellen, meten en meetkunde. In: C. van den Boer & M. Dolk (red.). *Modellen, meten en meetkunde*. Utrecht: Panama/Freudenthal Instituut, 193-214.*
Jonker, V. (2007). Weermaker. Hoe het weer wordt weergegeven. *Volgens Bartjens 26*(3), 22.*
Kaplan, R. (1999). *The nothing that is. A natural history of zero.* Oxford: Oxford University Press.
Keestra, M. (red.)(2006). *Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde.* Amsterdam: Uitgeverij Nieuwezijds.

Keijzer, R. (2003). *Teaching formal mathematics in primary education.* Utrecht: CD-β Press (proefschrift).
Keijzer, R. & K. Gravemeijer (2005). Breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen in discussie. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 24*(2), 24-29.*
Keijzer, R & E. Feijs (2006). Snijden in een kubus. *Volgens Bartjens 25*(5), 5-7.*
Keijzer, R. (2007). Deca is tien. *Volgens Bartjens… 26*(3). 4-8.*
Keijzer, R. & J.W. van Slijpe (2007). Tijd maken voor tijd. *Volgens Bartjens 27*(2), 14-16.*
Keijzer, R. & R. van Tricht, (2007). *Meetkunde, Patronen en Kunst.* Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.*
Keijzer, R & R. van Tricht (red.) (2008). *Het is tijd.* Utrecht: Freudenthal Instituut.*
Keijzer, R, R. van Tricht & M. van Schaik (2009). *Waar voor je geld.* Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.*
Klabbers, V. (2009a). Een krachtige leeromgeving 1. Rekenen en wiskunde & didactiek. *Praxisbulletin 26* (6), 19-23.*
Klabbers, V. (2009b). Een krachtige leeromgeving 2. Rekenen en wiskunde & didactiek. *Praxisbulletin 26* (7), 10-15.*
Klep, J. en H. Paus (2006). Geen competentie zonder repertoire. *VELON Tijdschrift voor Lerarenopleiders 27*(1), 5-12.
Knippenberg, H. & B. de Pater (1988). *De eenwording van Nederland.* Nijmegen: SUN.*
Koersen, W. & W. Uittenbogaard (2006). Cijferen, hoe nu verder? *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 25*(4), 46-49.*
Kool, M. (2009). De professionele wiskundekennis van de leraar basisonderwijs. In: R. Keijzer & V. Jonker. *Over muurtjes kijken* (54-64). Utrecht: ELWIeR/Freudenthal Instituut
Koren, M. (2002). Een heldere kijk op cake. Een rechthoeksmodel voor het rekenen met breuken. *Willem Bartjens 21*(4), 5-7.*
Kraemer, J.M., J. Janssen, F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *Balans [31] van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 4. Uitkomsten van de vierde peiling in 2003.* Arnhem: Cito.*
Krauthausen, G. (1993). Kopfrechnen, halbschriftliches rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. *Journal für Mathematikdidaktik 14*(3/4), 189-219.
Landen, R. van der, & A. Veltman (2006). Groep 3 op speurtocht. *Volgens Bartjens* 26 (1), 31-34.*
Lek, A. & A. Noteboom (1996). Waar wonen de breuken? *Willem Bartjens 15*(3) 33-39.*
Lohstro-van Bruggen, V.(2007). De grote rekendag 2007. *Volgens Bartjens 27*(1), 32-34.*
Luit, J. van (red.)(1994). *Research on learning and instruction of mathematics in kindergarten and primary school.* Doetinchem: Graviant.
Maanen, H. van (2002). *De schaal van Richter en andere getallen.* Amsterdam: Bert Bakker.*
Maanen, J. van (2007). *De koeiennon. Hoe rekenen en wiskunde te leren, en van wie?* Utrecht: Universiteit Utrecht (oratie).
Markusse, A. (2008). Rekenen met Dikke Idde. *Volgens Bartjens 28*(1), 7-9.*
Mayer, R. (1987). *Educational Psychologie. A cognitive approach.* Santa Barbara: HarperCollins.
McIntosh, A., B. Reys & R. Reys (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics 12*(3), 2-8.
Meelissen, M. & M. Drent (2008). *TIMSS 2007. Trends in leerprestaties in exacte vakken in het basisonderwijs.* Enschede: Universiteit Twente.
Meester, F. (1991) ik hoop dat Roosje gaat voetballen. *Nieuwe wiskrant 10*(3), 27-29.*
Menne, J. & I. Veenman (1997). (Re)productief oefenen in de rekenkring. In: C. van den Boer & M. Dolk (red.) *Naar een balans in de reken-wiskundeles – interactie, oefenen, uitleggen en zelfstandig werken.* Utrecht: Panama / Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.*
Menne, J. (2001). *Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100 – een onderwijsexperiment.* Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht (proefschrift).
Menne, J. (2006). Het boek met 130 bladzijden. Het betere alternatief voor de klassikale kaartjesgetallenlijn in groep 4. *Volgens Bartjens 25*(4), 14-16.*
Menne, J. (2008a). De kralenketting. Hoe kun je de kralenketting inzetten bij het leren rekenen? *Volgens Bartjens 28*(1), 12-15.*
Menne, J. (2008b). Waarom is het niet de bedoeling dat kinderen rekenen op een rekenrek? *Volgens Bartjens 27*(5), 33-34.*
Meulmeester, O. de & L. Prinsen (2004). Mino-meetkunde. *Volgens Bartjens 24*(3), 31-34.*
Milo, B. (2003). *Math instruction for special-needs students. Effects of instructional variants in addition and substraction up to 100.* Leiden: Universiteit Leiden (proefschrift).

Milo, B. & A. Ruijssenaars (2004). Instructie en leerlingkenmerken. In: R. Keijzer & W. Uittenbogaard (red.) *Een wereld van verschillen. Differentiatie in het reken-wiskundeonderwijs.* Utrecht: Panama / Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.*
Moerlands, F. (2003). Het krijtmonster. Standaard-oefenrijtjes worden uitdagende problemen. *Volgens Bartjens 23*(1), 38-39.*
Mols, B. (2006). *Opgelost. Toepassingen van wiskunde en informatica.* Diemen: Veen Magazines.*
Moor, E. de (1990). Vormleer. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs,* 9(1), 34-44.
Moor, E. de, L. Streefland en A. Treffers (1991). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de baisschool (13) – procenten, analyse van het gebied. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 9*(4), 25-42.
Moor, E. de, J. Janssen, J.M. Kraemer, & J. Menne (1997). Betekenis van meetkunde voor de basisschool. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 15(*4), 13-26.
Moor, E. de, (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde.* Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht (proefschrift).
Moor, E. de & J. Menne (2001). Meten naar menselijke maat. In: R. Keijzer & W. Uittenbogaard (red.) *Uit de lengte of uit de breedte – de kwaliteit van het meetonderwijs.* Utrecht: Panama/FI, Universiteit Utrecht.*
Munk, F. & Keijzer, R. (2006). Van groot naar klein. Praten over een poster vol maten, referenties en verbanden. *Volgens Bartjens 26*(1). 14-16.*
National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel.* Washington DC: U.S. Department of Education.
NCETM (2008). *Mathematics Matters.* London: National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics.
NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
Neeff-Wisselink, W. de (2007). Ik woon dichter bij school dan jij. *Volgens Bartjens 26*(5), 30-32.*
Nelissen, J. (1987). *Kinderen leren wiskunde. Een studie over constructie en reflectie in het basisonderwijs.* Gorinchem: De Ruiter.
Nelissen, J. (1988). Reflecteren in systematische samenspraak. *Tijdschrift voor Onderwijsresearch 13*(5), 245-270.
Nelissen, J. (1990). *Automatiseren*. Gorinchem: De Ruiter.*
Nelissen, J. (1998). Taal en betekenis in het realistisch reken-wiskundeonderwijs. In: N. Boswinkel & M. Dolk (red.) *Over rekenen gesproken. Taal in/en rekenen.* Utrecht: Panama / Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.*
Nelissen, J. (1999). De betekenis van Piaget voor het leren rekenen. *De Wereld van het Jonge Kind* 26 (9), 281 – 283.*
Nelissen, J. & B. van Oers (2000). *Reken maar! Reflecties op de praktijk.* Baarn: Bekadidact.*
Nelissen, J. (2002). Interactie: een vakpsychologische analyse. In: Keijzer, R. & W. Uittenbogaard (red.) *Interactie in het reken-wiskundeonderwijs.* Utrecht: Panama / Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.
Nelissen, J. (2008a). Gaat oefenen vooraf aan begrip? In: J. van der Zwaard, S. van Oenen & M. Huisman (red.) *Zonder wrijving geen vooruitgang. Zeventig jaar onderwijsvernieuwing in Nederland.* Antwerpen/Apeldoorn: Garant.*
Nelissen, J. (2008b). De tegenstelling concreet/abstract voorbij. *Pedagogiek in Praktijk (februari 2008)*, 12-14.*
Nes, F. van (2008). Hoeveel bloemen zijn er uit mijn tuin geplukt? Structuurgebruik ter ondersteuning van de ontwikkeling van getalbegrip. *Volgens Bartjens 27*(4), 22-25.*
Noss, R. (2001). For a Learnable Mathematics in the Digital Culture. *Educational Studies in Mathematics 48*, 21-46.
Noteboom, A. (2002). Meetkunde in de reken-wiskundemethoden voor groep 3 en 4. *Panama-Post. Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs,* 21(1), 29-39.
Noteboom, A. & J. Klep (2005). *Als kleuters leren tellen. Peilen en stimuleren van getalbegrip bij jonge kinderen.* Enschede: SLO.*
Noteboom, A. (2008). *Fundamentele doelen rekenen-wiskunde. Uitwerking van het Fundamenteel niveau 1F voor einde basisonderwijs versie 1.1*. Enschede: SLO.*
Noteboom, A. (2009). Minder maar beter. Maak een evenwichtige keuze, zeker ook voor zwakkere leerlingen. *Volgens Bartjens 28*(4), 4-9.*
Nührenbörger, M. (2001). Met stokjes meten, dat heb ik nog niet gehad. In: R. Keijzer & W. Uittenbogaard (red.). *Uit de lengte of de breedte – de kwaliteit van het meetonderwijs.* (pp. 61-70). Utrecht: Panama/Freudenthal Instituut.*
OC&W (2006). *Kerndoelen primair onderwijs.* Den Haag: OC&W.*

OC&W (2008). *Krachtig meesterschap. Kwaliteitsagenda voor het opleiden van leraren.* Den Haag: OC&W.
Oers, B. van (1990). The development of mathematical thinking in school: A comparison of the action-psychological and the information processing approaches. *Journal for educational research 14*, 15-66.
Onderwijsraad (2009). *Kwaliteitsborging van het eindniveau van aanstaande leraren.* Den Haag: Onderwijsraad.
Oonk, W. (2004). *Competenties en indicatoren voor gecijferdheid - onderzoek TIP* (interne publicatie)
Oonk, W. (2007). Kenmerken van vakdidactische theorie – implicaties voor de pabo. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 26*(3), 19-32.
Oonk, W., M. van Zanten & R. Keijzer (2007). Gecijferdheid, vier eeuwen ontwikkeling. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 26*(3), 3-18.
Oonk, W. (2009). Op zoek naar indicatoren van gecijferdheid. In: M. van Zanten (red.) *Doorgaande ontwikkelingen rekenen-wiskunde.* Utrecht: Panama / FIsme, Universiteit Utrecht.
Opmeer, M. (2005). Vraagtekens bij realistisch reken-wiskundeonderwijs. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 24*(4), 25-28.
Padberg, F. (1989). *Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche – Dezimalbrüche.* Mannheim: Lehrbücher und Monographien zur Didactik der Mathematik 11.
Panama Kerngroep Opleiders (2007). *Opleiden in geuren en kleuren – bakens voor rekenen-wiskunde & didactiek op de pabo.* Utrecht/Enschede: Panama/Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht / SLO.
Parker, M. & G. Leinhardt (1995). Percent: a privileged proportion. *Review of educational research 65*(4), 421-481.
Parreren, C. van (1971/1990). *Leren op school.* Groningen: Wolters-Noordhoff.*
Parreren, C. van & J. Nelissen (red.)(1977). *Rekenen. Teksten en analyses Sovjet-psychologie 2.* Groningen: Wolters-Noordhoff.
Paulos, J. (1988). *Innumeracy, Mathematical illiteracy and its consequences.* New York: Hill and Wang.
Paulos, J. (1991). *Beyond Numeracy. Ruminations of a Numbers Man.* New York: Knopf.
Paulos, J.A. (2004). Honderd procent kans op regen. Aangehaald in: C. Koppeschaar. De ontcijfering (23-8-2004). www.kennislink.nl.*
Peter-Koop, A. (2001). Lengtemeting op de basisschool - actuele ontwikkelingen en internationaal onderzoek. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 20*(2). 22-28.
Piaget, J. (1952). *The child's conception of number.* London: Routledge and Kegan Paul.
Piaget, J. (1969). *Zes psychologische studies*. Deventer: Van Loghum / Slaterus.
Poland, M. (2007). *The Treasures of Schematising. The effects of schematising in early childhood on the learning processes and outcomes in later mathematical understanding.* Amsterdam: Vrije Universiteit (proefschrift).
Poland, M. (2009). Van bouwwerk tot bouwtekening. *Volgens Bartjens 28*(4), 11-13.*
Prenger, J. (2005). *Taal telt! Een onderzoek naar de rol van taalvaardigheid en tekstbegrip in het realistisch wiskundeonderwijs.* Groningen: Rijksuniversiteit Groningen (proefschrift).
Putten, C. van, & M. Hickendorff (2006). Strategieën van leerlingen bij het beantwoorden van deelopgaven in de periodieke peilingen aan het eind van de basisschool van 2004 en 1997. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 25*(2), 16-25.
Putten, C. van (2008). De onmiskenbare daling van het prestatiepeil bij de bewerkingen sinds 1987. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 27*(1), 35-40.
Putten, C. van & M. Hickendorff (2009), Peilstokken voor Plasterk: Evaluatie van de rekenvaardigheid in groep 8. *Tijdschrift voor Orthopedagogiek 48*(5), 184-195.
Robinson, A. (2007). *The Story of Measurement*. Londen: Thames & Hudson.
Ros, B. (2009). Staartdelen of happen? Een pittig tweegesprek over rekenen. *Didaktief 2009*(1/2), 4-8.*
Ruijssenaars, A., J. van Luit & E. van Lieshout (2004). *Rekenproblemen en dyscalculie. Theorie, onderzoek, diagnostiek en behandeling.* Rotterdam: Lemniscaat.*
Scheltens, F. (2006). Verhoudingen, breuken en procenten. Hoe (goed) rekenen leerlingen aan het eind van groep 8? *Volgens Bartjens 25*(5), 31-34.*
Schoot, F. van der (2008). *Onderwijs op peil? Een samenvattend overzich van 20 jaar PPON.* Arnhem: Cito.
Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher 15*(2), 4-14.
Siersma, D. (2008). Visie op wiskundeonderwijs. *Nieuw Archief voor Wiskunde 5/9*(4), 282.
Silverman J. & P. Thompson (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of mathematics teacher education 11*(6), 499-511.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in Mathematics Education 26*, 114-145.
Skemp, R. (1971). *The psychology of learning mathematics.* Harmondsworth: Penguin Books.
Steenbeek, H. & W. Uittenbogaard (2009). Bètatalenten van jonge kinderen in kaart. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 28*(1), 89-100.
Steinvoorte, S. (2005). Handig rekenen. Wat is meer, 3/4 of 2/3? *Volgens Bartjens 24*(3), 7.*
Stephen, M. & H. Clements (2003). Linear and Area Measurement in Prekindergarten to Grade 2 (100 – 121). In: H. Douglas Clement, & G. Bright. *Learning and Teaching Measurement*. Reston: NCTM.
Stevens, L. (1997). *Overdenken en doen. Een pedagogische bijdrage aan adaptief onderwijs.* Den Haag: Procesmanagement Primair Onderwijs.*
Stevens, L. (2002). *Zin in leren.* Antwerpen/Apeldoorn: Garant.*
Streefland, L. (1983). *Aanzet tot een nieuwe breukendidactiek volgens Wiskobas.* Utrecht: OW&OC, RUU.
Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron. *Nieuwe Wiskrant 5*(1), 60-67.*
Streefland, L. (1988). *Realistisch breukenonderwijs.* Utrecht: OW&OC, RUU.
Streefland, L. (1998). Zonnige kortingen. *Willem Bartjens 18*(1), 4-10.*
Streefland, L. (1991). *Verhoudingen en procenten.* Tilburg: Zwijsen.*
Streefland, L., E. de Moor en A. Treffers (1991). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (14). Procenten – didactische noties. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 10*(1), 29-38.
Streun, A. van (2001). *Het denken bevorderen.* Groningen: Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen / Universitair Centrum voor de Lerarenopleiding, Rijksuniversiteit Groningen (oratie).
Struik, D. (1990). *Geschiedenis van de wiskunde.* Utrecht: Het Spectrum.
Sweers, W. (1996). *Hoofdrekenen: een hoofdzaak.* Tilburg: Zwijsen.*
Terlouw, B. & G. Schoeman (2006). Werken aan begripsvorming bij keersommen. Juf, had u gedacht dat ik die tafels ooit zou leren? *Volgens Bartjens 25*(5), 9-12.*
Torn, M., C. Bergmans en K. Buijs (1999). Samenhang tussen breuken, procenten en verhoudingen. In: R. Keijzer & W. Uittenbogaard (red.). *Overzicht en samenhang, leerlijnen in/en een uitdagende praktijk.* Utrecht: Panama/FI, Universiteit Utrecht.*
Torn, M., C. Bergmans & K. Buijs (2001). 'Meester, een vierkante millimeter, is dat het omgekeerde van een vierkante kilometer?' In: R. Keijzer & W. Uittenbogaard (red.) *Uit de lengte of uit de breedte – de kwaliteit van het meetonderwijs.* Utrecht: Panama/FI, Universiteit Utrecht.*
Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht.* Utrecht: IOWO (proefschrift).
Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory descriptions in mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.
Treffers, A. (1989). *Het voorkomen van ongecijferdheid op de basisschool.* Utrecht: Rijksuniversiteit Utrecht (oratie).
Treffers, A., E. de Moor & E. Feijs (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1. Overzicht einddoelen.* Tilburg: Zwijsen.*
Treffers, A. & E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool.* Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen. Tilburg: Zwijsen.*
Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1994). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool 3A: Breuken.* Tilburg: Zwijsen.*
Treffers, A. (1995). Kerndoelen cijferen. In: C. van den Boer & M. Dolk (red.) *Rekenen in de bovenbouw van de basisschool.* Utrecht: Panama/FI, HvU/Universiteit Utrecht.*
Treffers, A., L. Streefland & E. de Moor (1996). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool 3B: Kommagetallen.* Tilburg: Zwijsen.*
Treffers, A. (1996). Didactische zeshoek van het breukenonderwijs. *Willem Bartjens 15*(3), 6-9.*
Treffers, A. & A. Noteboom (1999). Kolomsgewijs rekenen en cijferen. *Volgens Bartjens 19*(1), 11-21, 39-41.*
Treffers, A., M. van den Heuvel-Panhuizen & K. Buijs (red.)(1999). *Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen onderbouw basisschool.* Groningen: Wolters-Noordhoff.*
Treffers, A. (2009). Het voorkomen van ongecijferdheid. In: M. van Zanten (red.) *Doorgaande ontwikkelingen rekenen-wiskunde.* Utrecht: Panama/ FIsme, Universiteit Utrecht, pg. 33-40.*
Turkstra H. & J.Timmer (1953). Rekendidactiek. Groningen, Djakarta, J.B. Wolters.
Uittenbogaard, W. (2007). Hoe Juliëtte en Jonas leren rekenen. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 26*(1) 32-36.*
Uittenbogaard, W. (2008a). Op je tellen passen! Akoestisch tellen in de Nederlandse taal is niet eenvoudig. *Volgens Bartjens 27*(4), 31-34.*

Uittenbogaard, W. (2008b). Geen catechismus leren, maar nadenken. *Nieuw Archief voor Wiskunde 5/9*(1), 60-64.*
Uittenbogaard, W. (2009). Vijanden worden vrienden. Een beknopte leergang cijferend vermenigvuldigen. In: M. van Zanten (red.). *Doorgaande ontwikkelingen rekenen-wiskunde*. Utrecht: Panama/ FIsme, Universiteit Utrecht, pg. 63-74.*
Vedder, P. (2002). Realistisch rekenen en rekenzwakke, allochtone kinderen. In: R. Keijzer & W. Uittenbogaard (red.) *Interactie in het reken-wiskundeonderwijs.* Utrecht: Panama / Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.*
Veltman, A. & A. Lek (1994). Vijf kleuters in een reuzenhemd. Verhoudingen in de onderbouw. *Willem Bartjens 14*(1), 20-23.*
Veltman, A. (2008). Dierenpension. Vanuit thematisch spel komen tot meetkundige activiteiten. *Volgens Bartjens 27*(3), 14-16.*
Verbruggen, I., G. Schoeman & N. Figueiredo (2008). Ik weet alleen maar dat keersommen groepjes zijn. Als leren vermenigvuldigen moeizaam gaat. *Volgens Bartjens 28*(2), 22-24.*
Verloop, N. & J. Lowyck (red.)(2003). *Onderwijskunde. Een kennisbasis voor professionals.* Groningen/Houten: Wolters-Noordhoff.*
Vermeulen, W. (2005). Cijferend delen: daar krijg ik een staart van! *Volgens Bartjens 24*(5), 7-8.*
Vermeulen, W. (2006). Jan en de rekenmachine. Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs 25(3), 21-25.
Vlist, J. van der (2004). Van bouwwerk tot tekening en vice versa. *Volgens Bartjens 23*(4), 28-29.*
Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics 26*. 275–298.
VSLPC (1997). *Startbekwaamheden leraar primair onderwijs. Deel 1: Startbekwaamheden en situaties.* Utrecht: Vereniging de Samenwerkende Landelijke Pedagogische Centra.
Waerden, B. L. van der (1961). *Science awakening.* New York: Oxford U.P.
Waveren, C. van, (2005). Kun je in groep 7/8 het metrieke stelsel in de klas laten hangen? *Volgens Bartjens 25*(2). 34.*
Werken aan kwaliteit (2008). Projectplan Kennisbasis fase 1: 2008-2009. www.kennisbasispabo.nl.
Wijers, M. (2009). Verhoudingen: doorlopende leerlijn?!. In: M. van Zanten (red.) *Doorgaande ontwikkelingen rekenen-wiskunde.* Utrecht: Panama/FIsme, Universiteit Utrecht.*
Zanten, M. van (2006). Gecijferdheid op de pabo: leren versus selecteren. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 25*(1), 9-15.
Zanten, M. van (2007). Meer dan rekenen en stage-ervaringen opdoen. Pabostudenten leren rekenen-wiskunde en didactiek. *Tijdschrift voor lerarenopleiders 28*(4), 43-50.
Zanten, M. van & P. van den Brom-Snijders (2007). Beleidsagenda lerarenopleiding leidt tot niveauverlaging - Gehanteerde rekenvaardigheids- en gecijferdheidstoetsen. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 26*(1), 19-23.
Zanten, M. van, P. van den Brom-Snijders, J. van den Bergh, R. Meijer & A. Vrolijk (2007). *Reken-wiskundedidactiek. Hele getallen.* Utrecht/Zutphen: ThiemeMeulenhoff.*
Zanten, M. van (2008a). *Omgaan met verschillen vanuit een leerplankundig perspectief - door de bril van rekenen-wiskunde.* Enschede: SLO.*
Zanten, M. van (2008b). Rekenen op de rand van de krant. 2 ei is een scharrelei, 3 ei komt uit de legbatterij. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk 27*(2), 37-41.*
Zanten, M. van, J. van den Bergh & R. Meijer (2008). *Reken-wiskundedidactiek. Verhoudingen en procenten.* Utrecht/Zutphen: ThiemeMeulenhoff.*
Zanten, M. van (2009a). Verschillende oplossingsstrategieën – variëren of vermijden? *Volgens Bartjens 28*(3), 4-8.*
Zanten, M. van (2009b). Standaardprocedures in het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. In: M. van Zanten (red.) *Doorgaande ontwikkelingen rekenen-wiskunde.* Utrecht: Panama/FIsme, Universiteit Utrecht.
Zijlstra, J. (1890). *Het Rekenonderwijs in de Lagere School. Eene Methodische Schets ten dienste van kweekelingen en jonge onderwijzers*. Arnhem, Stenfert Kroese & Van der Zande.

De kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo
Bijlagen

Bijlage 1: Gebruiksmogelijkheden en aanbevelingen

1. Gebruiksmogelijkheden

- In de eerste plaats kan de kennisbasis dienst doen als referentiepunt voor het deelcurriculum rekenen-wiskunde en didactiek op afzonderlijke pabo's. De kennisbasis kan dienen als bron voor bijstellingen en verdere ontwikkeling van het deelcurriculum rekenen-wiskunde en didactiek. Dit wil nadrukkelijk niet zeggen dat dit deelcurriculum op elke pabo hetzelfde moet zijn. Het is aan de afzonderlijke pabo's om een dergelijk deelcurriculum in te vullen.
- In de tweede plaats kan de kennisbasis rekenen-wiskunde dienen als bron voor een gemeenschappelijke toetsing, zoals aangegeven in het projectplan 'Werken aan kwaliteit'. Over hoe die toetsing eruit gaat zien, over hoe er vanuit de kennisbasis toetsdoelen en toetsprocedures worden vastgesteld, doet de projectgroep met dit document geen uitspraak.

2. Aanbevelingen

- In het recente verleden heeft het instellen van een gezamenlijke toetsing op het gebied van voor de pabo voorwaardelijke rekenvaardigheden, geresulteerd in verenging van hetgeen wordt getoetst (Van Zanten & Van den Brom-Snijders, 2007). Een vergelijkbare verenging bij gemeenschappelijke toetsing naar aanleiding van van de kennisbasis, is een risico om beducht voor te zijn. In dit kader bevelen we aan gebruik te maken van internationaal opgedane ervaringen, bijvoorbeeld met het vaststellen van vakspecifieke toetsitems (vergelijk Bildungsstandards, 2004; Hill e.a., 2007).
- De kennisbasis rekenen-wiskunde is erg omvangrijk en tegelijkertijd niet volledig. Immers, ten behoeve van voorbeelden en toelichtingen in de kennisbasis, zijn steeds keuzes gemaakt (vandaar het veelvuldig gebruik van de woorden *bijvoorbeeld* en *zoals*). Dit betekent dat voor het vaststellen van eindtermen en een gemeenschappelijke toetsing nader moet worden overwogen welke kenniselementen moeten worden beheerst, op welke wijze deze moeten worden beheerst, en hoe daarbij moet worden omgegaan met voorbeelden en toelichtingen. We sluiten ons in dit verband aan bij het onlangs verschenen advies van de Onderwijsraad (2009), waarin wordt gepleit voor een integrale benadering van vakkennis, vakdidactiek, onderwijskunde, pedagogiek en het professioneel handelen in de beroepspraktijk. We bevelen bovendien aan te onderzoeken in hoeverre zaken die buiten het bereik van deze kennisbasis vallen (zie paragraaf *5. Beperking* uit de *Toelichting en verantwoording*) hierbij kunnen en moeten worden betrokken.
- Het concept professionele gecijferdheid is niet uitgekristalliseerd. Met name over de verhouding tussen (meer) wiskundige en (meer) didactische aspecten, zoals over de invulling van *specialized content knowledge* (een nadere toespitsing van *mathematical content knowledge* omtrent voor het beroep van leerkracht specifieke reken-wiskundige kennis, zoals kennis van veel voorkomende rekenfouten en misconcepties), is het laatste woord nog niet gezegd. We bevelen aan dit concept ten behoeve van een gezamenlijk eindniveau voor rekenen-wiskunde nader te verkennen en uit te werken.
- De bedoeling van het vaststellen van de kennisbasis rekenen-wiskunde is bij te dragen aan een kwaliteitsverbetering van opleidingen en startbekwame leerkrachten. In de opleidingen worden sinds enkele jaren lectoraten ingezet als middel om te komen tot kwaliteitsverhoging. Er zijn echter maar weinig lectoraten die zich richten op specifieke vakgebieden (op het gebied van rekenen-wiskunde is dat er één; het lectoraat Gecijferdheid van de HU). We bevelen aan meer lectoraten in te stellen met een onderzoeksopdracht betreffende het vakgebied rekenen-wiskunde.
- Tot slot bevelen we aan bij vervolgactiviteiten op het gebied van toetsing en andere activiteiten in het kader van het projectplan 'Werken aan kwaliteit' de gezamenlijke opleiders rekenen-wiskunde en didactiek van de pabo's te blijven betrekken. Het opleidersnetwerk van Panama en het expertisecentrum ELWIeR kunnen hier een platform voor bieden.

3. Onderhoud

- Conform de aanbevelingen van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008a, pg. 64) zijn bij de totstandkoming van deze kennisbasis zowel extern inhoudsdeskundigen als pabodocenten rekenen-wiskunde van een groot aantal pabo's betrokken en geraadpleegd. Hierdoor is een hoge mate van intersubjectiviteit bereikt en geeft de kennisbasis een goed beeld van wat inhoudsdeskundigen van binnen en buiten de opleidingen momenteel van belang achten. Reken-wiskundeonderwijs is echter volop in beweging en ontwikkeling. We bevelen daarom aan dat de kennisbasis verder wordt aangescherpt, ontwikkeld en periodiek wordt aangevuld en onderhouden.
- In de kennisbasis is een grote hoeveelheid termen en begrippen opgenomen, waarvoor gebruik is gemaakt van bestaande definiëringen. Echter, veel begrippen zijn in literatuur niet eenduidig gedefinieerd. Aan de kennisbasis zou een begrippenlijst kunnen worden toegevoegd, waarin gebruikte begrippen worden gedefinieerd en toegelicht. Daarbij moet worden overwogen hoe het beste kan worden omgegaan met bestaande verschillen in definiëring.
- De kennisbasis rekenen-wiskunde heeft een hoge informatiedichtheid. Voor studenten zou het zinvol zijn als zij de kennisbasis kunnen raadplegen met het oog op hun ontwikkeling naar een startbekwame leerkracht (op het gebied van rekenen-wiskunde). Hiervoor zou een voor studenten toegankelijke versie moeten worden geschreven.
- De kennisbases voor rekenen-wiskunde en Nederlandse taal vertonen een inhoudelijk sterke gelijkenis. Zo komt het in de kennisbasis taal onderscheiden klaverblad *Hoe/waarom, Taaldidactiek en taalbeleid*, overeen met het hoofdstuk *Globale theorie* uit de kennisbasis rekenen-wiskunde. De overeenkomsten zijn echter voor niet-vakdeskundigen niet allemaal even makkelijk zichtbaar. We bevelen aan beide kennisbases in een gedeelde, gelijke structuur vorm te geven.

Bijlage 2: De kennisbasis in schema

	I. Globale theorie rekenen-wiskunde (1)				
	II. Domeinbeschrijvingen				
	Hele getallen (2)	Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen (3)	Meten (4)	Meet-kunde (5)	Verban-den (6)
Maatschappelijke relevantie	Hele getallen (2.1)	Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen (3.1) Verhoudingen (3A.1) Procenten (3B.1) Breuken (3C.1) Kommagetallen (3D.1)	Meten (4.1)	Meet-kunde (5.1)	Verban-den (6.1)
Kennis van reken-en-wiskunde	Hele getallen (2.2) Eigenschappen van bewerkin-gen (2.2.3A) Schattend rekenen (2.2.3B) Cijferend rekenen (2.2.3C) Gebruik van de rekenmachine (2.2.3D)	Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen (3.2) Verhoudingen (3A.2) Procenten (3B.2) Breuken (3C.2) Kommagetallen (3D.2)	Meten (4.2)	Meet-kunde (5.2)	Verban-den (6.2)
Kennis van onder-wijzen van rekenen-wiskunde	Getallen en getalrelaties (2.3) (Elementair) hoofdrekenen (2.4) Standaardprocedures waaron-der cijferen (2.5) Schattend rekenen (2.6) Gebruik van de rekenmachine (2.7)	Verhoudingen (3A.3) Procenten (3B.3) Breuken (3C.3) Kommagetallen (3D.3)	Meten (4.3)	Meet-kunde (5.3)	Verban-den (6.3)
Verstrengeling	Hele getallen (2.8)	Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen (3.2) Verhoudingen (3A.4) Procenten (3B.4) Breuken (3C.4) Kommagetallen (3D.4)	Meten (4.4)	Meet-kunde (5.4)	Verban-den (6.4)

Bijlage 3

Frank Jansma (SBL), **Gerard van den Hoven** (projectleider Werken aan Kwaliteit/K3), **Marko Otten** (projectleider Werken aan Kwaliteit/Voetstuk van de Pabo), **Dirk van der Veen** (ambt. secretaris K3)

De vakkennis van de leraar

Kennisvereisten op het gebied van de onderwijsinhoud

Voorwoord

Wat leraren moeten *weten* (kennisvereisten) en *kunnen* (gedragsvereisten) is wettelijk vastgelegd in de bekwaamheidseisen. Die eisen zijn geordend in zeven competenties[1]. De competenties bieden houvast bij de operationalisering van de bekwaamheidseisen. Zij beschrijven in algemene zin de typen kennis waarover de leraar moet beschikken. Het competentiekader toont wat leraren met die kennis in de beroepsuitoefening behoren te doen en met enkele voorbeeld indicatoren is aangegeven hoe dat is te zien.

In een drietal samenhangende projecten werken de lerarenopleidingen samen aan:

1. de beschrijving van de kennis waarover leraren aan het einde van hun opleidingen tenminste beschikken (kennisbasis)
2. de digitale ontsluiting van die kennis en relevante leerbronnen (kennisbank)
3. een toets- en examineringinstrumentarium waarmee nagegaan kan worden of en in welke mate leraren-in-opleiding de kennisbasis in de vingers hebben.

De typen kennis waarover de leraar op grond van de bekwaamheidseisen moet beschikken worden in het project “Werken aan kwaliteit” door de lerarenopleidingen gezamenlijk nader uitgewerkt in de kennisbasis. Daarbij kunnen zij het competentiekader en de indicatoren gebruiken om te laten zien op welke wijze de leraar die kennis moet beheersen. De kennisbasis laat dus zien wat elke leraar tenminste moet weten op de zeven competentiegebieden en op welke manier hij dat kan laten zien. Bij het opstellen van de kennisbasis zijn begonnen de opleidingen in 2008-2009 met de vakinhoudelijke aspecten van de vakinhoudelijke en didactische competentie, meer specifiek met de vakkennis van de leraar[2]. Ofwel, wat moet de leraar tenminste weten in relatie tot de onderwijsinhoud.
Deze notitie gaat over het gedeelte van de kennisbasis dat betrekking heeft op de vakkennis van de leraar in de pedagogisch-didactische context. Hoewel hierbij het accent ligt op de onderwijsinhoud, zijn er onvermijdelijk ook raakvlakken met aspecten van het onderwijs- en leerproces.

Vakkennis in een dynamisch kennislandschap

Kennis is een lastig begrip. Er zijn nogal wat benaderingswijzen, opvattingen en definities. Die vormen met elkaar op zichzelf al een ingewikkeld kennislandschap. Dat landschap is ten behoeve van de lerarenopleidingen enigszins in kaart gebracht in de publicatie *Kennis in de steigers: ‘Work in Progress’.* Bij die kartering is onder andere in beeld gebracht dat de kennis die de leraar zelf heeft en waarmee hij zijn werk doet, niet onder één hoedje is te vangen, maar met verschillende begrippen en perspectieven benaderd moet worden. We gebruiken voor de kennis die de leraar zelf heeft het begrip ‘beroepskennis’ en dit betreft kennis in de meest brede zin van het woord. Beroepskennis impliceert dus ook allerlei vormen van ‘*praktische kennis’*, ‘*knowhow’*, *‘tacit knowledge’* enzovoorts[3]. De kennis die besloten ligt in de onderwijsinhouden waar de leraar mee werkt kan zowel breed als smal worden opgevat. De vakkennis waar we het in deze notitie over hebben is weliswaar onderdeel van de beroeps-

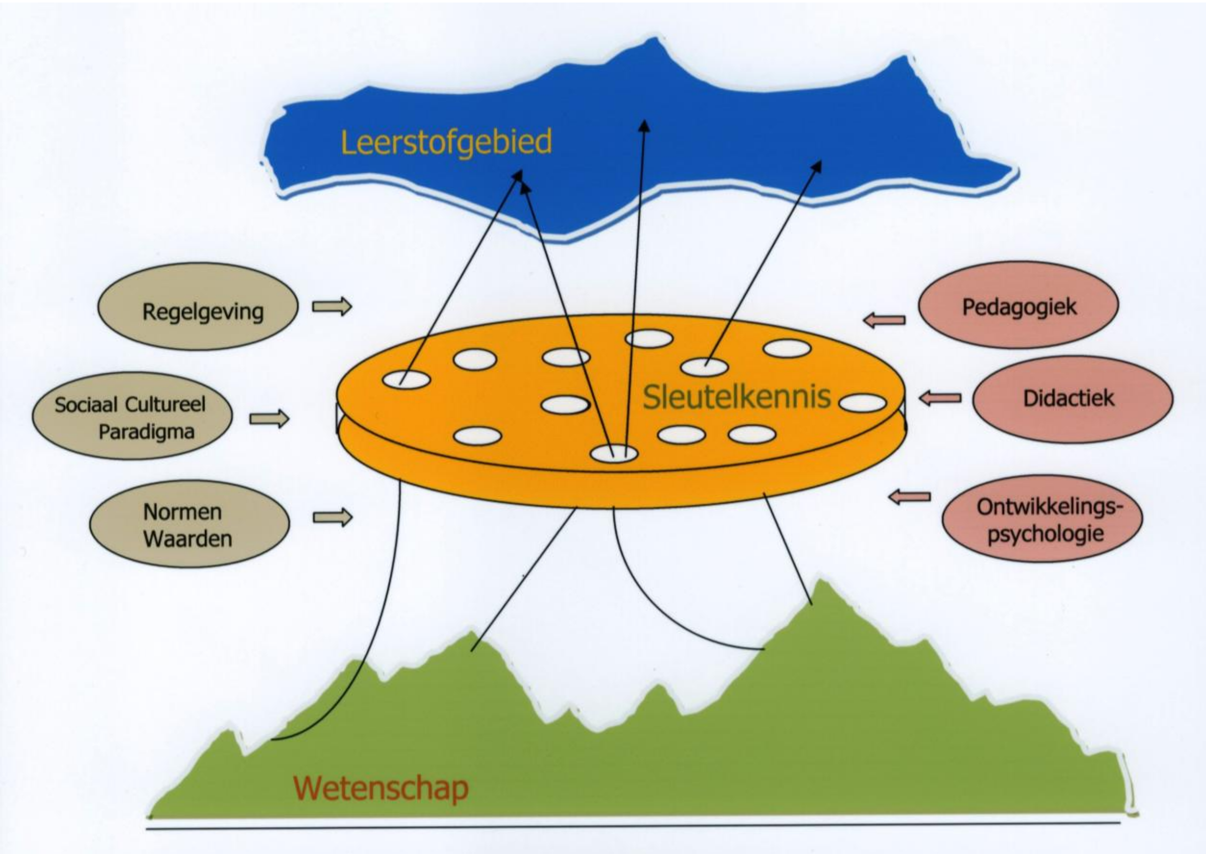
---

[1] Om deze competenties aan te duiden wordt in deze tekst verder gebruik gemaakt van de term ‘onderwijscompetenties’.
[2] De pabo’s zijn begonnen met de beschrijving van de kennisbasis bij Nederlandse taal en rekenen-wiskunde.
[3] Zie voor een definitie van de cursief geschreven begrippen: Carla van Cauwenberghe (red) e.a.: Kennis in de steigers: ‘Work in progress’. Ruud de Moor Centrum 2008.

kennis van de leraar maar wat wij daarvan beschrijven valt onder de minder brede betekenis van *expliciete kennis*[3]. Die is overigens nog breed genoeg en wij onderscheiden daar een drietal lagen in:

- ‘leerstof’ : de onderwijsinhoud waar feitelijk mee gewerkt wordt in het curriculum van de school en die leerlingen zich met hulp van de leraar moeten eigen maken;
- ‘het vak’ (schoolvak, vakgebied of leerdomein): de verzameling expliciete kennis, geordend in domeinen met in en/of over die domeinen heen een bepaald geraamte, een min of meer samenhangend geheel van concepten, basisbegrippen en principes die tezamen conceptuele structuur geven aan de verzameling (de domeinen zijn beschreven in kerndoelen en/of examenprogramma’s);
- ‘wetenschap’: de verzamelingen *gecodificeerde kennis*[3], beschikbaar in de samenleving.

Deze gelaagdheid berust op de aanname dat elk schoolvak wel een bepaald geraamte heeft, een ordening in domeinen en een min of meer samenhangend geheel van concepten, basisbegrippen en principes die tezamen conceptuele structuur meegeven aan het schoolvak. Deze conceptuele structuur is de ‘sleutelkennis’ van het vak[4]. Met behulp van die conceptuele kennis ontwerpt de leraar leerstof voor de leerling, waarbij hij gebruik maakt van kennis uit meerdere andere bronnen: pedagogiek, didactiek, enz..



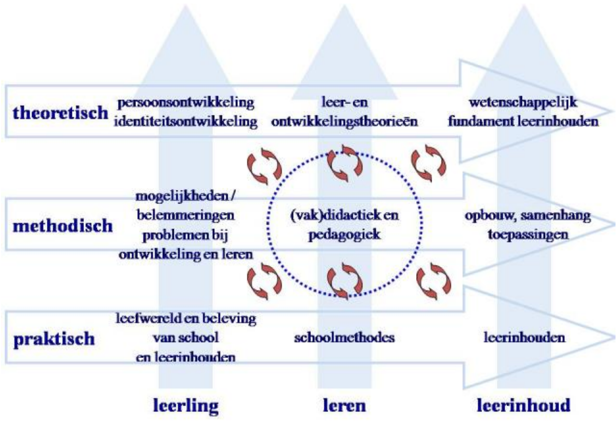
Figuur 1: In het gebied van de sleutelkennis creëren leraren met behulp van de conceptuele structuur de onderwijsarrangementen voor het leerstofgebied van de leerling.

De leerstofbeslissingen die de leraar neemt met behulp van de sleutelkennis, de conceptuele structuur van het schoolvak, worden mede bepaald door de maatschappelijke en onderwijskundige context. Vanuit de maatschappelijke context spelen onder andere mee de regelgeving ten aanzien van inhoud en vormgeving van onderwijs, de sociaal-culturele en sociaal-economische bedding waarin het onderwijs plaatsvindt en, meer specifiek, normen en waar-

[4] Nogmaals, met ‘vak’ bedoelen wij zowel schoolvak als vakgebied, leerdomein of een beroepsgericht vak.

den die daarin mede richting en betekenis geven aan de interacties tussen mensen. Vanuit de onderwijskundige context spelen onder andere (vak)didactische en pedagogische overwegingen een rol die gevoed worden uit wetenschappelijke bronnen van bijvoorbeeld de ontwikkelings- en leerpsychologie. Leerstofkeuzes worden ten slotte in belangrijke mate mede bepaald door ontwikkelingen op het gebied van de (toegepaste) wetenschap en de kennis-relatie die het schoolvak heeft met achterliggende wetenschapsgebieden.

Dialoog en dynamiek in kennisgebruik
Het is belangrijk om de voortdurende dynamiek in en tussen deze lagen in beeld te houden. De leraar moet daarmee uit de voeten kunnen. In figuur 1 is die gedeeltelijk ook in beeld gebracht in de vorm van invloeden waar de leraar mee te maken heeft bij zijn beslissingen over de leerstof. Waar het in wezen om gaat is dat de leraar in staat moet zijn met zijn beroepskennis deel te nemen in verschillende vormen van dialoog[5], zowel binnen als tussen professionele gemeenschappen en in en met de samenleving.
Het principe van 'dynamiek in dialoog' is verwerkt in het 'negen velden model' als organiser voor het geheel van de kennisbasis[6].



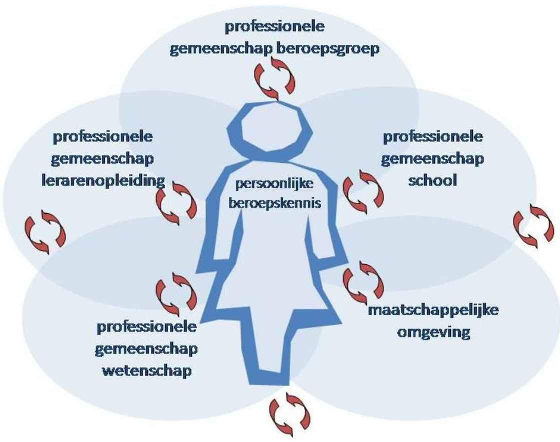
Figuur 2: structurering in de dynamiek van kennisgebruik

De kolommen in het model weerspiegelen het gesprek tussen leraar en leerling over het onderwerp van leren in het onderwijs-leerproces. Wil de leraar dat gesprek op een vruchtbare manier kunnen voeren en (bege)leiden dan moet hij zowel de leerling als het onderwerp van leren en het proces van onderwijzen en leren grondig kennen. Grondige kennis is gefundeerd in wetenschappelijke kennis die door de professionele leraar methodisch bemiddeld kan worden naar een specifieke praktijk. Om dat te kunnen behoort de leraar ook die specifieke, gelokaliseerde praktijk goed te kennen. De gelaagdheid: praktisch, methodisch, theoretisch is gerepresenteerd in de rijen van het model. De pijlen duiden op de dynamiek en het procesmatige karakter van kennisgebruik. Het ontwerpen van onderwijsarrangementen is het overkoepelende proces waarin alle vormen van kennis samenkomen. Bij uitstek in de onderzoeksmatige aanpak van dit ontwerpen toont de leraar het niveau en de diepgang van zijn professionaliteit. Alle vormen van zijn kennis komen hier samen en zij dragen bij aan zijn vakinhoudelijke en pedagogisch-didactische keuzes. Dat ontwerpproces zit in het hart van het model.

[5] Het begrip 'dialoog' wordt hier bewust gebruikt als aanduiding voor het professioneel gevoerde, open en onderzoekende gesprek, waarin gezichtspunten, opvattingen en argumenten worden vergeleken en gewogen. Dit ter onderscheid met andere vormen van uitwisseling zoals het debat, waarin opvattingen tegenover elkaar worden geplaatst en argumenten vooral bedoeld zijn om anderen te overtuigen.
[6] Het negen velden model moet niet worden opgevat als een voorschrift maar als een hulpmiddel bij het doorgaande proces van inrichten en onderhouden van de kennisbasis door de opleiders. De vakkennis van de leraar betreft eerst en vooral de rechterkolom, maar zeker op methodisch niveau is die nauw verweven met de vakdidactiek. Niet voor niets zijn vakinhoud en didactiek tezamen genomen in één competentie. Het lijkt verstandig om ook in de beschrijving van de kennisbasis de vakdidactiek niet los te koppelen van de vakinhoud voor zover dat al mogelijk zou zijn.

Zowel horizontaal als verticaal kunnen in het model deelprocessen worden onderscheiden en die spreken gedeeltelijk voor zich. In verticale zin gaat het steeds om de methodisch bemiddelde verbinding tussen een specifieke praktijk en de algemene theorie. In horizontale zin gaat het steeds om de methodische bemiddeling van de leerling naar de leerstof. Op het praktische niveau is dat heel concreet: met deze groep leerlingen, met dit specifieke arrangement, wordt deze leerstof geleerd. Op het methodische niveau is dat meer algemeen: wat zijn de leer- en ontwikkelingsvragen die spelen, wat zijn de handvatten die (vak)didactiek en pedagogiek te bieden hebben en hoe zijn die verbonden aan de conceptuele mogelijkheden en moeilijkheden van het vak? Op theoretisch niveau gaat het om een samenhangend en productief gebruik van bronnen (inzichten, theorieën en empirie) in verschillende wetenschapsgebieden.

Kijken we met dit beeld van kennisgebruik naar de verschillende vormen van dialoog waar de leraar aan deelneemt, dan zien we dat het gesprek op praktisch niveau vooral plaatsvindt in de interactie tussen leraar, school en samenleving, met name de directe sociale context van de school: buurt, leerlingen, ouders. Het is in deze context dat de professionele leraar zijn inzet afstemt met de direct belanghebbenden en met de andere professionals die met hen werken en zijn handelen ook ten opzichte van hen expliciteert en verantwoordt. Het zwaartepunt van de dialoog op methodisch niveau ligt binnen de professionele gemeenschap van het team van leraren, maar speelt zich ook af tussen leraren en opleiders, tussen hen en leraren-in-opleiding en opleiders onderling. In deze context vindt de optimalisering van het onderwijs plaats waarmee recht wordt gedaan aan de specifieke behoeften van de lerenden. En vooral ook in deze context speelt het doorgaande proces van onderwijsontwikkeling en –verbetering. Het zwaartepunt van de dialoog op theoretisch niveau (tenminste, daar waar leraren daar actief aan deelnemen) speelt zich af in de context van het ontwerp en de onderzoeksmatige ontwikkeling en verbetering van onderwijs. Het is met name in deze context dat de individuele professionaliteit zich in diepgang verder ontwikkeld en parallel daaraan het wetenschappelijke fundament onder de beroepsbekwaamheid van leraren in het algemeen.



Figuur 3: De leraar als deelnemer in verschillende gemeenschappen

De kennisbasis en het eindassessment van de lerarenopleiding

In de kennisbasis beschrijven de lerarenopleidingen gezamenlijk hoe zij de kennisvereisten inhoudelijk concretiseren en normeren. Concretiseren van kennisvereisten houdt in dat de opleidingen beschrijven wat de leraren aan het einde van hun opleiding feitelijk en theoretisch weten ten aanzien van de verschillende typen kennis. Normeren houdt in dat de omvang en diepgang van de verworven kennis wordt benoemd in combinatie met het definiëren waarvoor en hoe leraren die kennis gebruiken. De bekwaamheidseisen op het gebied van beroepsgedrag beschrijven wat de leraar in de beroepspraktijk doet. Bij de normering van kennisvereisten wordt in zekere zin ook een vorm van beroepsgedrag beschreven want de leraar moet laten zien dat hij over die kennis beschikt en die goed gebruikt.

De opleidingen stellen vast of de leraar aan de bekwaamheidseisen voldoet en daarvoor gebruiken zij een verzameling testen en andere observaties die samengevat zijn in de term 'eindassessment'. In de opzet van het eindassessment beschrijven de lerarenopleidingen hoe de leraar laat zien dat hij voldoet aan de bekwaamheidseisen. De lerarenopleidingen kunnen gebruik maken van een gemeenschappelijk referentiekader voor het normeren van bekwaamheid. In eerste instantie zijn daarvoor de 'Dublin descriptoren' opgesteld (zie bijlage 2). Die zijn later opgenomen in het Europees Kwalificatie Kader (zie bijlage 1). De indicatoren die als voorbeelden bij de bekwaamheidseisen zijn gegeven kunnen gecombineerd met de kwalificatieniveaus van het EKK houvast geven bij het ontwerpen van de meesterproeven die de leraar bij het eindassessment moet afleggen.
De omvang en diepgang van de beroepskennis van de leraar wordt slechts gedeeltelijk zichtbaar bij de uitvoering van het onderwijs. Meer nog blijkt die uit de wijze waarop hij onderwijs-leerprocessen onderzoekt en evalueert, uit de onderwijsontwerpen die de leraar maakt en uit de wijze waarop hij onderzoek, evaluatie en ontwerp weet te presenteren en verantwoorden ten overstaan van collega's en andere deskundigen. In de kern van het beroep gaat het dan om twee typen ontwerp: het leerplan waarin de leraar vooral zijn kennisgebruik op vakinhoudelijk en didactisch terrein laat zien en het begeleidingsplan waarin de pedagogische component meer nadrukkelijk aan bod komt. Juist bij ontwerpactiviteiten gebruikt de leraar de diverse (wetenschappelijke) bronnen uit binnen- en buitenland, en laat zien hoe hij die verwerkt en benut in onderwijsarrangementen.
In de kennisbasis expliciteren de opleidingen welke bronnen de leraar tenminste gebruikt en in de kennisbank worden die toegankelijk gemaakt. De kennistoetsen die ontwikkeld worden ten slotte, zullen uit verschillende vormen van examinering moeten bestaan om recht te kunnen doen aan de complexiteit van kennisgebruik in de beroepspraktijk. Toetsen in de meer traditionele zin zoals cito-toetsen, schriftelijke eindexamens, digitale voortgangstoetsen, enzovoort, zijn geschikt om bijvoorbeeld leerstofbeheersing aan te tonen. Met meer complex samengestelde meesterproeven kan de leraar laten zien dat hij zijn kennis ook productief kan maken op de wijze en het niveau waarop dat van hem in de beroepspraktijk verwacht gaat worden.
Bij de inrichting en het onderhoud van de kennisbasis heeft de opleider naast het negenvelden kader ook het referentiekader van de meesterproeven die de leraar bij het eindassessment aflegt. Met het beschrijven van de kwaliteitscriteria die de opleider hanteert bij de beoordeling van de meesterproeven maakt de opleider duidelijk hoe de Dublin descriptoren en het EKK worden toegepast. Van daaruit terugkijkend naar het begin van de opleiding kan worden geëxpliciteerd wat de leraar in opleiding op welk moment leert en op welke wijze en welke leerbronnen daarbij worden aangeboden. Een belangrijk deel van die leerbronnen zal ontsloten worden in de kennisbank die de opleidingen gaan aanleggen. Terugkijkend naar het begin van de opleiding heeft de opleider nog een derde referentiepunt, namelijk het beginniveau van kennis dat de opleiding veronderstelt bij de leraar in opleiding bij aanvang van de opleiding. Dat is de basis van algemene vorming waarop de opleiding zal voortbouwen en die dient dus ook duidelijk te zijn.
Het proces van inrichten van de kennisbasis speelt zich dus af tussen de twee polen van het expliciteren van het uitgangspunt en het voorlopige eindpunt van kennisverwerving en kennisgebruik, met daartussen het expliciteren van het kennisaanbod vanuit de opleiding.

Vakkennis nader ingevuld

Wat leraren tenminste moeten kennen en kunnen is vastgelegd in bekwaamheidseisen en die bekwaamheidseisen zijn geordend in zeven competenties. De bekwaamheidseisen bestaan uit eisen die betrekking hebben op het beroepsgedrag en eisen die betrekking hebben op de kennis van de leraar. Bij de beschrijving van de kennisbasis worden met name de kennisvereisten bij de verschillende competenties uitgewerkt, te beginnen met de kennis van de onderwijsinhoud. De kennisvereisten die betrekking hebben op de onderwijsinhoud zijn tezamen met de kennisvereisten ten aanzien van (vak)didactiek ondergebracht bij de vakinhoudelijk en didactische competentie. Om die eisen nu ten behoeve van de opleiding nader operationeel uit te werken, moet in de eerste plaats worden vastgesteld welke beginsituatie bij de leraar in opleiding verondersteld moet worden. In de tweede plaats (en dat spreekt voor zich) moet de leraar-in opleiding zich de leerstof die voor de leerlingen in het onderwijs aan de orde is, eigen maken. Om dat te kunnen moet hij ruimschoots boven die leerstof staan en wat dat inhoudt wordt hier ten slotte op hoofdlijnen nader gepreciseerd.

De beginsituatie

Bij het uitwerken van de kennisbasis mag de opleider er van uitgaan dat hij kan aansluiten op een behoorlijk niveau van algemene ontwikkeling, het cumulatieve resultaat van voorafgaand leven, leren en werken. Die algemene ontwikkeling bestaat uit weten en kunnen op verschillende gebieden én uit een zekere intellectuele habitus. (Inderdaad, kennis, vaardigheden, houding.) Op deze drie componenten, niet in de laatste plaats de intellectuele habitus, bouwt de lerarenopleiding voort. De beginsituatie kan op verschillende manieren beschreven worden, bijvoorbeeld in termen van standaarden die bij doorlopende leerlijnen beschreven zijn (bijvoorbeeld taal en rekenen/wiskunde) of ontwikkeld worden. Een andere mogelijkheid is om aan te sluiten bij het begrippenkader dat in ontwikkeling is in het kader van een gemeenschappelijke Europese taal voor beroeps- en burgerschapskwalificaties. In die context zijn acht sleutelcompetenties gedefinieerd:

a. Communicatie in de moedertaal
b. Communicatie in vreemde talen
c. Wiskundige competentie en basiscompetenties op het gebied van wetenschappen en technologie
d. Digitale competentie
e. Leercompetentie
f. Interpersoonlijke, interculturele, en sociale competenties en civiele (burgerlijke) competentie
g. Ondernemerschap (in de brede zin van het woord: ondernemende geest, flexibiliteit, initiatief, creativiteit etc.)
h. Cultureel bewustzijn

Deze sleutelcompetenties zijn weliswaar niet in termen van kennis beschreven maar impliceren haar wel.

De eisen die op deze gebieden aan de kennis van de leraar in spé moeten worden gesteld moeten nader worden gepreciseerd. Gedeeltelijk gebeurd dat al in de vorm van toelatingseisen voor de lerarenopleiding (denk aan a en c, rekenen en taal), gedeeltelijk zijn elementen van deze sleutelcompetenties terug te vinden in de SBL onderwijscompetenties (denk aan e en f en gedeeltelijk ook h). Over de hele linie geldt dat meer specifiek verduidelijkt moet worden wat van leraren verwacht wordt. Vervolgens kan in drie stappen worden nagegaan: (1) welke eisen op deze acht gebieden als instapvoorwaarde voor de opleiding tot het beroep moeten worden gezien; (2) waar en in welke mate competentiegroei op deze acht gebieden geïntegreerd kan worden in de opleiding in de richting van de SBL onderwijscompetenties; en (3) wat de ambitie van de opleiding zou moeten/kunnen zijn in het bijdragen aan de meer algemene intellectuele vorming van de leraar op deze gebieden.

Beheersen van de leerstof

Leerstof is de onderwijsinhoud die leerlingen moeten leren. Het spreekt voor zich dat de leraar zelf die leerstof uitstekend moet beheersen en daar ook boven moet staan. Hij moet immers op een flexibele manier leerlingen helpen om de leerstof te leren en dat lukt alleen als je die goed overziet, meer dan één manier weet om daar mee om te gaan en uit de voeten kunt met de gekste vragen. Maar 'boven de leerstof staan' wat houdt dat in? Het antwoord op deze vraag luidt anders voor de leraar in het primair onderwijs dan voor de leraar in het voortgezet onderwijs en het beroepsonderwijs.

Boven de stof staan voor de leraar in het voortgezet onderwijs en het beroepsonderwijs
Leerstof wordt afgeleid van een groter geheel van een of meer schoolvakken en/of van de beroepskennis van een beroep of een groep beroepen. Bij een schoolvak betekent 'boven de stof staan' onder meer dat de leraar het schoolvak grondig kent en kan overzien. Grondige kennis van het schoolvak betekent dat de leraar:

- beschikt over de sleutelkennis van het schoolvak en van daaruit het corpus van leerstof in het schoolvak door de leerjaren heen kan overzien;
- het corpus van leerstof in het schoolvak en de vakgebonden vaardigheden die daarin besloten liggen, door de leerjaren heen beheerst;
- het corpus van de leerstof overziet en verbindingen maakt met het stadium van ontwikkeling / leren van de leerling;
- de doorlopende leerlijnen kan overzien, dus weet hoe onderwijstypen op elkaar aansluiten in relatie tot het schoolvak (aansluiting tussen basisonderwijs en (verschillende vormen van) voortgezet onderwijs en tussen voortgezet onderwijs en (verschillende vormen van beroepsonderwijs en hoger onderwijs);
- het eigen schoolvak kan plaatsen te midden van verwante schoolvakken en globaal op de hoogte is van de inhoud en werkwijze van die verwante vakken;
- de culturele en historische achtergronden van het schoolvak kent en het verband weet van de ontwikkelingen in en van het schoolvak met maatschappelijke ontwikkelingen en ontwikkelingen in de wetenschap;
- de praktische legitimering van het schoolvak kent in termen van relevantie van de inhouden en vaardigheden van het schoolvak voor het alledaagse leven, de wereld van het werk en de wereld van de wetenschap;
- de wetenschappelijke legitimering van de inhouden en vaardigheden van het schoolvak kent in die zin dat hij op de hoogte is van de ontwikkelingen in de voor zijn schoolvak relevante wetenschap(pen) en van de manier waarop die wetenschappelijke kennis ontwikkeld wordt.

Bij leerstof die afgeleid is van beroepskennis is het wat ingewikkelder, maar blijft staan dat de leraar goed op de hoogte is van de actuele knowhow in dat beroep/die beroepen. Het is ingewikkelder omdat die knowhow lang niet altijd beschreven is en omdat de leraar niet altijd en niet persé dat beroep van binnenuit kent of dat zou moeten (hoewel dat zeker een voordeel is!). Bij leerstof die afgeleid is van beroepskennis is het 'boven de stof staan' niet helemaal op de manier van de schoolvakkennis te beschrijven, maar wel te benaderen. Het gaat er om dat de leraar:

- vertrouwd is met de basisprincipes en concepten van het vak;
- de kennis en vaardigheden van het beroepsgerichte vak zelf goed kent en beheerst;
- doorlopende leerlijnen kan overzien, dus weet hoe voorafgaande onderwijs doorloopt in beroepsgericht onderwijs en hoe verschillende typen beroepsgericht onderwijs op elkaar aansluiten wat betreft zijn beroepsgerichte vak(ken);
- het werkterrein van het beroep kent en op de hoogte is van (cultuur)historische en actuele ontwikkelingen in het beroep en de sector(en) waarin dat beroep wordt uitgeoefend;
- op de hoogte is van innovatie en kennisontwikkeling in en om de beroepspraktijk en van de manier waarop dat gebeurt en weet wat dat betekent voor het onderwijs in zijn beroepsgerichte vak(ken);

Boven de stof staan voor de leraar in het basisonderwijs

Leerstof in het primair onderwijs is gerelateerd aan de kerndoelen voor het basisonderwijs. Die zijn geordend in 7 leergebieden (inclusief Fries). In principe wordt van de leraar verwacht dat hij de leerinhouden van deze gebieden beheerst. Dat slaat eerst en vooral op de beheersing van de leerstof zoals die in het curriculum wordt aangeboden. Dit is vakkennis op een praktisch niveau en die dient op methodisch niveau ten minste gepaard te gaan met overzicht over de leerlijnen en didactische basisprincipes van alle leergebieden (waarbij Fries optioneel is). De leergebieden Nederlandse taal en rekenen-wiskunde moeten op methodisch niveau zowel inhoudelijk als didactisch goed beheerst worden. Daarnaast is ook methodische verdieping nodig ten aanzien van de inhouden en de didactiek van de andere leergebieden. Onmiskenbaar bestaat daarbij spanning tussen breedte en diepte, die op verschillende manieren methodisch kan worden bemiddeld. In de wijze waarop dat gebeurd kunnen pabo's zich afzonderlijk of gezamenlijk op verschillende manieren profileren. Wat betreft wetenschappelijke verdieping ten slotte ligt het voor de hand die te richten op pedagogisch-didactische thema's en onderliggende leerpsychologische en ontwikkelingspsychologische theorieën.
Dit leidt tot de volgende puntsgewijze opsomming.

De leraar basisonderwijs:

- beheerst en overziet de leerstof en de daarin besloten liggende vaardigheden van het basisschool curriculum en kan die verbinden met het stadium van ontwikkeling / leren van de leerling;
- kent het belang van de leerstof voor het dagelijks leven van basisschoolkinderen en hij weet hoe zij die leerstof gebruiken;
- heeft een grondige inhoudelijke en didactische kennis van de leergebieden Nederlandse taal en rekenen-wiskunde;
- overziet de doorlopende leerlijnen in de leergebieden Nederlandse taal en rekenen-wiskunde en weet op deze gebieden hoe het basisonderwijs aansluit op VVE en op het voortgezet onderwijs;
- beschikt over kennis van de hoofdlijnen en didactische principes van de verschillende leergebieden en kan die door de leerjaren heen overzien;
- heeft methodisch en wetenschappelijk verdiepte kennis van inhouden en didactiek van de verschillende leergebieden;
- kent verschillende leerpsychologische theorieën en hun praktische en methodische relevantie voor verschillende leergebieden.