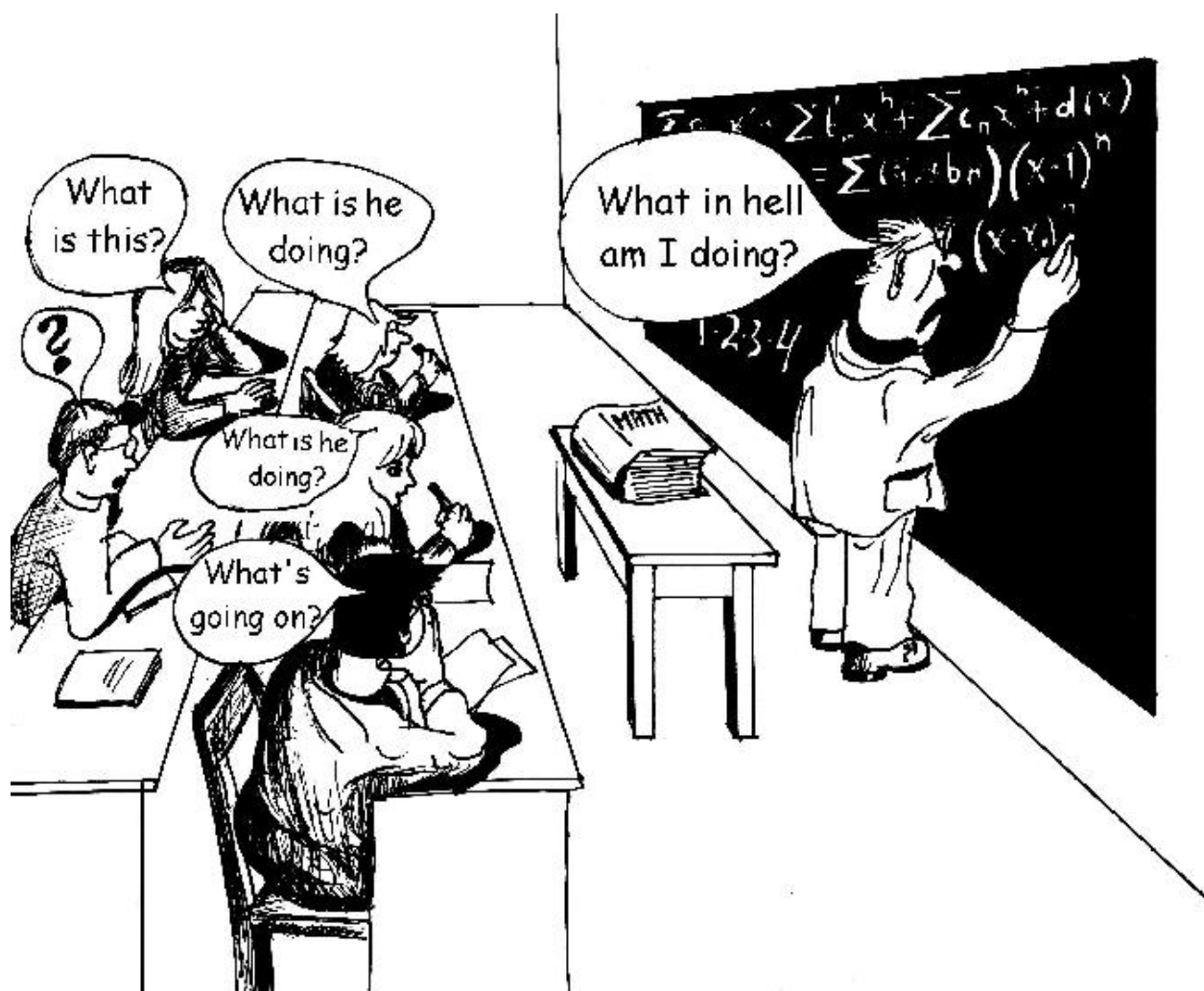


Doorlopende leerlijn WDA



Dit materiaal is gemaakt gedurende de
Leergang Wiskunde Delft, voorjaar 2014

Inhoudsopgave

Achtergrondinformatie	3
Voorwoord	5
Introductie	6
Powers of Ten en WDA.....	8
Voorbeeld WDA'S	18
Modelleren en Algebraïseren	19
Ordenen en structureren:.....	32
Analytisch denken en probleemoplossen.....	35
Formules manipuleren	49
Abstraheren	53
Logisch redeneren en bewijzen	54
Bijlage 1: artikel "Denkactiviteiten, onderzoekend leren en de rol van de docent"	58
Bijlage 2: artikel "Wat zijn denkactieve opgaven?"	63

Achtergrondinformatie

Auteurs:

Jim van Bekhoven
Frans Jager
Marian Kollenveld
Eelko Kruse
Rob Piet
Kiki Prins
Sanne Schaap
Theo Wesker

Doelgroep:

Wiskundedocenten die les gaan geven in de nieuwe examenprogramma's voor het VO waarvan de examens voor het eerst worden afgenomen in 2017.

Waaruit bestaat het materiaal?

Dit materiaal bevat, naast een groot aantal voorbeelden, een theoretische onderbouwing van het fenomeen wiskundige denkactiviteit (WDA), een beschrijving van de kenmerken van WDA's verdeeld over verschillende wiskundige vaardigheden en een inkijk in het proces wat de werkgroep heeft doorlopen om tot opgaven en deze handleiding te komen.

Sanne Schaap schetst een conceptueel raamwerk waarin hij verkent wat belangrijke elementen van een denkbare opgave zouden kunnen zijn. Helaas is dit artikel door omstandigheden niet helemaal af gekomen. Er is een link opgenomen naar een artikel op de site van het Freudenthal Instituut naar een artikel van Anne van Streun, waarin hij een oriëntatie biedt op wiskundige denkactiviteiten.

Het materiaal biedt een keur aan opgaven die in de ogen van de auteurs gebruikt kunnen worden om leerlingen uit te dagen tot wiskundige denkactiviteiten. Tevens is een verslag opgenomen van een poging om zelf opgaven te bedenken die leerlingen kunnen aanzetten tot wiskundige denkactiviteiten naar aanleiding van de documentaire Powers of Ten.

Het geheel moet lezers motiveren om zelfstandig aan de slag te gaan met het vormgeven van hun lessen door eigen opgaven te bedenken of bestaande opgaven om te zetten in WDA's.

Wat was de aanleiding om dit te ontwerpen?

De aanleiding is het artikel "Denkactiviteiten, onderzoekend leren en de rol van de docent" van Michiel Doorman, Henk van der Kooij en Ad Mooldijk. Het gaf ons de motivatie om in het kader van de Google-leergang Leergang Vernieuwing Wiskundeonderwijs een aanzet te geven tot het ontwikkelen van een leerlijn waarin leerlingen vanaf de brugklas tot aan het examen worden aangezet tot wiskundige denkactiviteiten.



Dit materiaal is gemaakt gedurende de
Leergang Wiskunde Delft, voorjaar 2014

Wat zijn de aanbevelingen voor verdere ontwerpen?

Na het lezen van deze handleiding hopen wij natuurlijk dat u de kennis en inspiratie heeft opgedaan om zelf opgaven te ontwikkelen en zo mogelijk met anderen te delen.

De initiatie van WDA's in een klassensituatie is de volgende uitdaging die u als docent moet aangaan. In welke mate is het plezierig én leerzaam voor leerlingen om WDA's in de klas uit te voeren? Moet het hele programma doorspekt worden met deze opgaven, of zijn er stukken die zonder WDA's behandeld moeten worden? Bij de presentatie van dit materiaal na afsluiting van de leergang waarschuwde Paul Drijvers, hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij het Freudenthal Instituut, nadrukkelijk dat WDA's geen geïsoleerde opgaven moeten zijn die je tussendoor een keer doet. Dit soort opgaven moet worden geïntegreerd in het hele lesgebeuren.

Wanneer slaan het plezier en de creativiteit onder leerlingen om in verveling en irritatie over de mate van zelfstandigheid die zij tentoon moeten spreiden? Hoe hangt de toepassing van WDA's af van het niveau van de leerlingen?

Deze en andere vragen kunnen wij niet voor u beantwoorden. Zij zijn afhankelijk van uw eigen inspiratie, uw lesstijl, het type leerling in uw klassen en nog vele andere factoren.

Een andere vraag die u zich kunt stellen, is: kan en wil ik de tot nu toe gebruikte methode vervangen door of aanvullen met het materiaal dat, bijvoorbeeld in deze handleiding, voorhanden is? In de Leergang Vernieuwing Wiskundeonderwijs zijn meerdere werkgroepen bezig geweest met het ontwikkelen van materiaal op alle domeinen van het nieuwe examenprogramma. Aan u is de keuze of dit materiaal voldoende en geschikt is om een methode van een uitgever deels te vervangen of aan te vullen of dat het uitdaagt om zelf wat te ontwikkelen. Dat vraagt wellicht een gedachtenomslag binnen de wiskundesectie van uw school, maar het heeft een aantal voordelen: de opgaven zijn gratis te verkrijgen, zijn gemaakt door docenten die het werkveld goed kennen en kunnen zowel als inleiding, als oefenopgaven en als afsluiting van een stuk leerstof gebruikt worden.

Ontdekt u zelf wat er allemaal mogelijk is ter vernieuwing van het wiskundeonderwijs. Misschien is het zelfs raadzaam om leerlingen eigen WDA's te laten maken, bijvoorbeeld als Praktische Opdracht.

Succes met de beslissingen en de creatieve uitdagingen in de komende jaren.

Voorwoord

In schooljaar 2016-2017 zal het Centraal Examen wiskunde voor het eerst zijn samengesteld volgens de nieuwe examenprogramma's. In deze examenprogramma's spelen Wiskundige Denkactiviteiten (WDA's) een belangrijke rol. Anders dan nu nog het geval is, worden de examenleerlingen geacht voor een wiskundig probleem zelf een goed werkende strategie te bedenken en uit te kunnen voeren. Het aan de hand meenemen van een leerling door een opgave zal in veel beperktere mate voorkomen.

Om deze vaardigheid goed aan te leren, heeft de werkgroep WDA van de Leergang Vernieuwing Wiskundeonderwijs in Delft deze handleiding samengesteld. De handleiding geeft docenten die les gaan geven in de nieuwe examenprogramma's een keur aan WDA's, maar stelt hen ook in staat zelf WDA's te ontwikkelen.

Om dit ontwikkelproces voor docenten te begeleiden, bevat de handleiding naast een groot aantal voorbeelden ook een theoretische onderbouwing van het fenomeen WDA, een beschrijving van de kenmerken van WDA's verdeeld over verschillende wiskundige vaardigheden en een inkijk in het proces wat de werkgroep heeft doorlopen om tot opgaven en de handleiding te komen.

Het geheel zal de lezer hopelijk motiveren om zelfstandig aan de slag te gaan met het vormgeven van hun lessen door eigen opgaven te bedenken of bestaande opgaven om te zetten in WDA's.

De handleiding is tot stand gekomen met medewerking van de Leergang Vernieuwing Wiskundeonderwijs, samenwerkingsverband van Platform Bèta Techniek, Freudenthal Instituut, Platform Wiskunde Nederland, SLO en de vaksteunpunten.

Speciale dank gaat uit naar Leonie Blom, Dédé de Haan en Henk van der Kooij voor het mogelijk maken van deze leergang op de Technische Universiteit Delft.

Veel leesplezier!

Introductie

De twee volgende artikelen geven een motivatie en achtergronden om na te denken over de manier waarop denkactiviteiten in de reguliere lessen kunnen worden ingepast.

Artikel: "Denkactiviteiten, onderzoekend leren en de rol van de docent"

Michiel Doorman, Henk van der Kooij en Ad Mooldijk

Leerlingen leren nadenken, leerlingen aanzetten tot een onderzoekende houding, dat zijn zaken die sterk in de belangstelling staan. Maar hoe realiseer je dit als docent in je eigen klas? Binnen het Primasproject is een nascholingscursus hiervoor ontwikkeld. Er worden enkele voorbeelden gegeven, met als toegevoegd een werkblad over algebrapiramides voor een leuke les. Het artikel staat in Bijlage 1.

Artikel: "Wat zijn denkactieve opgaven?"

Sanne Schaap

Denkactiviteiten vormen, bij de ontwikkeling van de nieuwe examenprogramma's door cTWO voor 2015, een van de wezenlijke aspecten van de vernieuwing.

In het artikel worden achtergronden en denkwijzen over dit aspect in een breder theoretisch kader gezet, waarbij ook internationale zienswijzen uitgebreid aan bod komen.

Het artikel staat in Bijlage 2.

In het vervolg komen aan bod:

- Het filmpje "Powers of ten" als inspiratiebron voor het ontwikkelen van denkactiviteiten
- Een serie voorbeelden van mogelijke opgaven die een beroep doen op denkactiviteiten, met een variatie in moeilijkheidsgraad, bij de verschillende vormen van 'denkactiviteiten'.

Powers of Ten en WDA

De beschrijving hieronder geeft weer hoe we zelf WDA's bedacht hebben naar aanleiding van de film Powers of Ten om het getalbegrip van leerlingen te bevorderen. Uitgangspunt voor een WDA is geweest dat het niet-routine problemen moeten zijn die een beroep doen op analytisch denken, creativiteit, strategieontwikkeling, flexibiliteit en reflectie. Het doel van dit hoofdstukje is om de lezer mee te nemen in deze oefening.

Het gelijknamige negen minuten durende filmpje is vrij op Youtube te vinden. Het voert de kijker naar de wereld van de grote getallen tot 10^{24} meter enerzijds en de kleinst mogelijke getallen tot 10^{-16} meter anderzijds. Het is een reis door de ruimte die je alleen in je fantasie kunt beleven maar die je ondertussen inzicht geeft in de grootte van getallen door een koppeling naar bekende fenomenen. De wetenschappelijke notatie van getallen is doorlopend in beeld naast een beschrijving in woorden.

Eerst hebben we de tekst omgezet naar het Nederlands vanuit het Engelse transcript om taalproblemen te omzeilen. Het transcript is te vinden op het internet ([link](#)). Vervolgens hebben we bij het bekijken van de film waarnemingen geformuleerd. Na het transcript zijn deze in de tekst hieronder opgenomen.

De laatste stap was gestructureerde en minder gestructureerde vragen te bedenken die recht doen aan de bovengenoemde criteria. Het is uiteraard aan iedere individuele ontwerper zijn eigen vragen te noteren. De vragen die we bedacht hebben zijn bedoeld voor leerlingen in verschillende leerjaren. Daarbij was er de wens de leerlingen de mogelijkheid te bieden tot differentiatie.

Wanneer leerlingen toe zijn aan deze vragen is onderwerp van discussie geweest en ieder mag daar uiteraard zijn eigen mening over hebben. Leerlingen in de brugklas zijn nieuwsgierig genoeg om met een aantal vragen aan de slag te gaan, maar er zijn ook aanknopingspunten voor leerlingen die iets met een profielwerkstuk gaan doen. Het is zeker niet onze bedoeling leerlingen de hele lijst met vragen in een keer door te laten werken en het filmpje zou in meerdere leerjaren en herhaald getoond kunnen worden. De vragen hebben meest betrekking op het gedeelte van de film dat handelt over grote afstanden en snelheden. In het laatste deel van de film wordt er ingezoomd en wordt er gepraat over heel kleine afstanden tot zelfs binnen de kern van een atoom. Het zal biologen en scheikundigen aanspreken hier eigen vragen bij te bedenken, maar dit deel sprak ons minder tot de verbeelding. Wellicht een uitdaging voor de lezer om hier zelf vragen aan toe te voegen.

In het volgende stuk volgt eerst de vertaling van het transcript. Daarna volgen als inleiding op het ontwerpen van de vragen een aantal waarnemingen en tot slot volgt een verzameling vragen waar ook delen van uitgewerkt zijn.

Transcript

[Powers of ten \(Youtube\)](#)

1 meter: Een picknick aan het meer van Chicago (Lake Michigan) is het startpunt van een luie middag op 1 oktober 1977. Het begint met een tafereel van 1 m^2 , gezien van een afstand van 1 meter. Iedere 10 seconden kijken we van een 10 maal zo grote hoogte en ons uitzicht wordt dan 10 keer zo breed.



10^1 meter. Dit vierkant is 10 meter breed en over 10 seconden is het volgende vierkant weer 10 keer zo breed. Ons beeld houdt de picknickers in het middelpunt ook al verdwijnen ze uit zicht.



10^2 . Honderd meter breed, een afstand die een mens kan rennen in 10 seconden. Auto's bewegen druk over de snelweg, speedboten liggen in hun dok. De kleurige "Bleachers" horen bij Soldier Field (in Chicago).

10^3 . Dit vierkant is een kilometer breed, een afstand die een raceauto in 10 seconden af kan leggen. We zien de grote stad langs de kust van het meer.

10^4 meter, 10 kilometer, de afstand die een supersonisch vliegtuig af kan leggen in 10 seconden. We zien eerst de ronding van Lake Michigan, dan het hele meer.

10^5 meter, de afstand die een satelliet bestrijkt in 10 seconden in zijn zoektocht rond de aarde. Een lange stoet wolken, het weer van vandaag in het MID westen van Amerika.

10^6 , een 1 met zes nullen, 1.000.000, een miljoen meter. Spoedig zal de aarde te zien zijn als een vaste bol.

10^7 . We kunnen de hele aarde nu zien, iets meer dan 1 minuut op weg. De aarde verdwijnt in de verte, maar de sterren op de achtergrond zijn zó veel verder weg dat het er nog niet op lijkt dat ze bewegen.

10^8 . Een lijn wordt getekend met de ware snelheid van het licht. In 1 seconde legt het een afstand af, gelijk aan de straal van de gebogen baan van de maan om de aarde.

10^{10} meter. Nu markeren we een klein gedeelte van het pad waarlangs de aarde om de zon beweegt. Nu verschijnen banen van onze buitenplaneten om de zon.

10^{11} , Venus en Mars, dan Mercurius.

10^{12} , een miljoen miljoen meters. In ons blikveld verschijnt het gloeiende centrum van ons zonnestelsel, de zon, gevolgd door de grote buitenplaneten, wijd uitzwaaiend in hun baan om de zon.

10^{13} . Die ongewone baan hoort bij Pluto. Een zoom van miljoenen kometen, te zwak om te zien, maakt het zonnestelsel compleet.

10^{14} meter, Terwijl het zonnestelsel krimpt tot één heldere punt in de verte is onze zon maar gewoon één van de sterren.

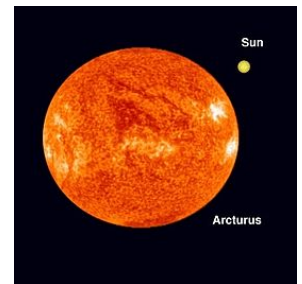
10^{15} meter. Vanaf hier zien we 4 constellaties aan de zuidelijke hemel zoals ze in de verte vanaf de aarde te zien zijn.

10^{16} . Dit vierkant is 10^{16} meter, 1 lichtjaar. Nog niet tot aan de dichtstbijzijnde ster.

10^{17} . Onze laatste stap van 10 seconden bracht ons 10 lichtjaren ver weg en bij de volgende stap zijn we op 100 lichtjaren afstand van de aarde.

Ons uitzicht verandert zo veel in iedere stap dat nu zelfs de sterren op de achtergrond naar elkaar toe lijken te bewegen.

Eindelijk passeren we de heldere ster Arcturus en sommige sterren van de Grote Beer.



10^{18} . Normaal maar toch onwennig worden we omringd door sterren en wolken van gas terwijl we verder reizen door de Milky Way.

10^{19} . Reuzenstappen brengen ons naar het randgebied van het melkwegstelsel.

10^{20} . En terwijl we verder trekken beginnen we de grote platte spiraal te ontdekken voor ons.

10^{21} . De tijd en het pad dat we kozen om Chicago te verlaten bracht ons uit het melkwegstelsel langs een pad bijna loodrecht op zijn schijf.

De twee kleine satellietstelsels van ons eigen melkwegstelsel noemen we de wolken van Magelhaen.



10^{22} . 1 miljoen lichtjaren. Groepen van melkwegstelsels brengen een nieuwe structuur aan in ons blikveld. Gloeiende stippen zijn niet langer enkele sterren maar hele melkwegstelsels van sterren, te zien als één.



10^{23} . We passeren het grote Virgo cluster (sterrenbeeld Maagd) tussen vele andere melkwegstelsels op een afstand van 100 miljoen lichtjaren.

10^{24} . Terwijl we de grens van wat voor ons zichtbaar is naderen pauzeren we voordat we terugkeren. Deze desolate blik, waarin de melkwegstelsels er uitzien als stof, is zoals het grootste deel van de ruimte er uitziet. Deze leegte is normaal. De rijkdom van onze eigen omgeving is de uitzondering.

De weg terug naar de picknick aan het meer is een versnelde uitvoering. We verkleinen de afstand naar de aarde met een factor 10, iedere 2 seconden.

Iedere 2 seconden leggen we 90% van de overgebleven afstand naar de aarde af. Merk de afwisseling op tussen grote activiteit en relatieve inactiviteit, een ritme dat zich voortzet tot aan ons volgende

doel: een proton in de kern van een koolstofatoom onder de huid op de hand van de slapende man bij de picknick.

$10^9, 10^8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$. We zijn terug bij ons uitgangspunt. We gaan weer langzaam bij 1 meter afstand, 10 tot de macht 0 (10^0).

Nu verkleinen we de afstand tot ons doel met 90% iedere 10 seconden. Elke stap van 10 seconden is kleiner dan de stap daarvoor. Bij 10^{-2} meter, één centimeter, naderen we de oppervlakte van de hand. Over een paar seconden gaan we door de huid naar binnen, door laag na laag, van de buitenste laag dode cellen van de huid tot in een klein bloedvat aan de binnenkant. Huidlagen verdwijnen op hun beurt, een buitenste laag cellen – elastisch collageen, een haarvat met rode bloedlichaampjes en een ruwe lymfocyt. We gaan de witte bloedcel binnen tussen de vitale organellen, de poreuze wand van de celkern verschijnt. De kern binnen de cel bevat de erfelijke informatie van de mens in de opgerolde strengen van het DNA.

10^{-6} . Terwijl we inzoomen komen we bij de dubbele spiraal zelf. Een molecuul, als een lange gedraaide ladder, wiens treden van baseparen in een alfabet van 4 letters de woorden spellen van een machtige genetische boodschap.

Op atomische schaal wordt het samenspel van vorm en beweging zichtbaar. We richten onze aandacht op een alledaagse groep van drie waterstofatomen, gebonden door elektrische krachten aan een koolstofatoom. Vier elektronen vormen de buitenste schil van het koolstofatoom. Ze verschijnen in een quantumbeweging als een zwerm van lichtende puntjes.

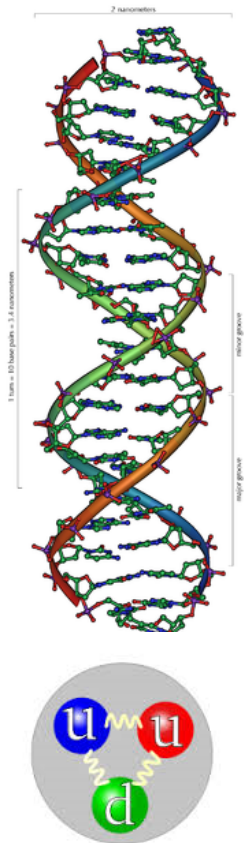
Bij 10^{-10} meter, 1 Ångström, bevinden we ons tussen die buitenste elektronen. Nu komen we bij de twee binnenste elektronen, in een kleinere zwerm gevangen.

10^{-11} . Als naar het aantrekkende centrum van het atoom bewegen komen we binnen in een uitgestrekte binnenruimte.

10^{-12} . Eindelijk komen we bij de koolstofkern, zo massief en zo klein. De koolstofkern bestaat uit 6 protonen en 6 neutronen. We komen op het terrein van algemeen geldende modules. Er zijn protonen en neutronen in elke kern, elektronen in elk atoom. Atomen binden zich in elk molecuul tot in het verste melkwegstelsel. Als een proton ons gehele beeld vult bereiken we de grens van wat we op het moment (1977) weten. Zijn dit quarks die met elkaar samenwerken?

Onze reis heeft zich uitgestrekt over 40 machten van 10.

10^{-16} , 0,000 001 Ångström. Als nu de breedte de eenheid is dan waren het 10^{40} eenheden toen we vele clusters van melkwegstelsels bij elkaar zagen, een 1 met veertig nullen.



Vragen bij Powers of Ten

Waarnemingen:

De film start met een camerabeeld van 1 m^2 op 1 m afstand van het tafereel. Per 10 seconden neemt de afstand toe met een factor 10 en nemen de lengte en breedte van het tafereel ook toe met een factor 10. Er worden verschillende vergelijkingen getroffen: Na tweemaal 10 seconden zie je de afstand (100 meter) die een mens in 10 seconden af kan leggen.

Tien seconden later de afstand die een raceauto af kan leggen in 10 seconden (1000 meter). De afstand die een vliegtuig in 10 seconden kan afleggen is (10 000 meter) en de afstand die een Satelliet in 10 seconden afspeurt is 100.000 meter. Daarna geen vergelijkingen meer van dit type.

Vragen: waarom geen vergelijkingen meer met alledaagse fenomenen? Hoe hard gaat een satelliet eigenlijk in zijn cirkelbaan om de aarde? Zijn er bekende objecten die harder gaan? Hoe hard gaat een raket die de aarde verlaat? Hoe hard gaat de komeet van Halley bijvoorbeeld.

Waarnemingen.

10^7 meter. De sterren zijn zover weg dat het er niet op lijkt dat ze bewegen. Wat zegt dit?

10^8 meter. De lichtsnelheid wordt in beeld gebracht en vergeleken met de afstand aarde-maan in 2 seconden. Dankzij de vertaling is dit een detail wat duidelijk wordt. Als het licht zo hard gaat in 2 seconden, hoe groot is die afstand dan?

De afstand wordt snel groter. Hoe hard gaat de camera eigenlijk weg van het tafereel?

10^{10} meter. De baan van de aarde wordt zichtbaar. Hoe ver staat de aarde dan van de zon? Hoe lang heeft het licht nodig om deze afstand te overbruggen?

10^{12} meter. Een miljoen miljoen. Hoe zit het met de voorvoegsels bij het metrieke stelsel? Welke kennen we? We hebben vast wel een paar hele grote maten nodig.

10^{13} meter. Ongewone baan van Pluto. Hoezo ongewoon? Wat maakt de rest gewoon? Wie heeft dat wanneer ontdekt en hoe?

10^{15} meter. 4 constellaties. Zijn dit sterren van ons melkwegstelsel? Zijn het constellaties van melkwegstelsels? Wat is zoiets als de Grote Beer?

10^{16} meter. 1 Lichtjaar. Klopt dit met de gegevens hierboven? Hoe snel reist de cameraman de komende 10 seconden gemiddeld? Is dat haalbaar? Wanneer is de grens van het haalbare van deze fictieve reis eigenlijk bereikt?

$10^{17} - 10^{18}$ meter. De sterren beginnen te bewegen. Wat betekent dat, hoe komt dat? Wat is de afstand naar deze sterren gelet op de snelheid waarmee de afstand tussen de sterren op het tafereel afneemt en de snelheid waarmee de camera van het tafereel weg beweegt? Zegt dat iets over de vraag of het sterren uit ons eigen melkwegstelsel zijn of dat het zelf melkwegstelsels zijn?

10^{20} meter. We ontdekken de grote platte spiraal. Waar en hoe diep zitten we in die wolk van sterren in de melkweg?

10^{22} meter. Zijn de stippen van hetzelfde type als bij 10^{17} ? Hoe groot is de verhouding?

10^{23} meter. Er wordt gezegd 100 miljoen lichtjaar. Klopt dat?

Wanneer passeren we Virgo? (10^{24} meter = 10^8 lichtjaar). Is dit de grens van wat we (de wetenschappers) waargenomen hebben? Was dat in de tijd dat de film opgenomen werd en hoe is dat nu? Zijn we tegenwoordig al een factor 10 verder?

De oerknal is ruim 14 miljard jaar geleden, de aarde is 8 miljard jaar oud. Hoe ziet de aarde er op dit moment uit op Virgo?

Het lijkt erop alsof er op de terugweg eerst enorm versneld wordt en pas op het laatste moment hard wordt afgeremd maar de werkelijkheid is tegengesteld. Wat zegt dit over onze perceptie en de rijkdom van onze eigen omgeving? Met welke snelheid dringen we het bloedvat binnen?

Verkleinen: waar zit het punt van vermenigvuldiging? Alfabet van 4 letters? Stuk scheikunde/biologie.

Hoe kunnen we alle info in beeld brengen? Tijdlijn? Afstandenlijn?

WDA's bedenken voor de leerlingen:

Voor leerlingen vanaf de brugklas:

1. De standaardeenheid om een afstand te meten is de *meter*. Voor grotere en kleinere afstanden gebruik je voorvoegsels, zoals *kilo* bij *kilometer* en *mili* zoals bij *milimeter*.
 - a. Welke voorvoegsels ken je voor grote en kleine getallen?
 - b. Is er een naam voor de grootste afstand uit het verhaal van Powers of Ten?

yocto · zepto · atto · femto · pico · nano · micro · milli · centi · deci · 1 · deca · hecto · kilo · mega · giga · tera · peta · exa · zetta · yotta

2. In plaats van het gebruiken van voorvoegsels zijn er ook namen voor getallen met veel nullen. Getallen met veel nullen leiden snel tot verwarring. Dat wordt nog erger omdat Amerikanen dezelfde namen gebruiken voor andere getallen. De meest voorkomende instinker is billion. Dit is Amerikaans voor 'miljard', oftewel duizend miljoen.
 - a. Zijn er geen afspraken over gemaakt waar iedereen zich aan moet houden en zijn er meer Amerikaanse namen van eenheden en hoeveelheden die voor verwarring zorgen omdat ze erg op elkaar lijken?
 - b. Hoe kunnen we verwarring voorkomen bij het noemen van grote getallen?

Een antwoord op de laatste vraag zou kunnen zijn 'de wetenschappelijke notatie' of 'het gebruik van voorvoegsels'. Het SI eenhedenstelsel is natuurlijk van invloed, maar of hier ooit over nagedacht is ...

3.
 - a. Wat is het snelste voertuig wat je kent?
 - b. Welke afstand legt dat voertuig af in 10 seconden?

Een antwoord kan zijn: een raket heeft een snelheid van minimaal 40.000 km/h om de zwaartekracht te kunnen ontvluchten. Dat is in 10 seconden een afstand van ongeveer

110.000 meter, vergelijkbaar met de snelheid van een satelliet. Antwoorden kunnen ook gezocht worden in vuurwapens of misschien wel in snelle auto's. Zie verderop.

Vraag: ongestructureerd

4. In de film worden voorbeelden gegeven van objecten die op dát moment in de film in 10 seconden de breedte van het vierkant af kunnen leggen. In de vijfde stap vergelijkt de spreker de snelheid met die van een satelliet in een baan om de aarde. Na de vijfde stap stopt de verteller in de film met deze voorbeelden. Kun je zelf nog een of meer stappen verder gaan bij het bedenken van voorbeelden?

Een antwoord kan zijn dat de snelheid van licht ongeveer gelijk is aan $300\,000 \frac{km}{s} =$

$$300\,000\,000 \frac{meter}{seconde} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

5. Gestructureerde vragen:

Een auto rijdt met een maximale snelheid over de A2 van $\left(130 \frac{km}{h}\right)$. Is dat snel?

- Verzamel een paar snelheden van snelle objecten en ga na bij welke stap de verteller zo'n snelheid als voorbeeld kan noemen?
- Hoe snel reist een vliegtuig dat op 10 kilometer hoogte van Amsterdam naar Sydney (Australië) vliegt?
- Beweegt de aarde sneller om zijn as dan het vliegtuig rond de aarde? Maakt het wat uit welke kant het vliegtuig op vliegt (met de beweging mee of ertegen in?).
- Een supersonisch vliegtuig beweegt met een snelheid van meer dan het geluid (sonisch=geluids). Is de snelheid van een supersonisch vliegtuig vergelijkbaar met de snelheid van een raket die de aarde verlaat?

Een vliegtuig vliegt op 10 kilometer hoogte van Amsterdam naar Sydney in 20 uur en 41 minuten. De afstand volgens opgave is 16.658 km (de kortste afstand is 16642,35 km). De snelheid is dus $805 \frac{km}{h}$.

De straal van de aarde is 6371 km. De snelheid van de aardkorst langs de omtrek van de aarde is dus $1668 \frac{km}{h}$ of $463 \frac{m}{s}$.

De snelheid van de satelliet is $36.000 \frac{km}{h}$.

De snelheid van de raket is minimaal $40.000 \frac{km}{h}$. Bij een lagere snelheid komt de satelliet in een baan om de aarde en kan hij het zwaartekrachtsveld niet verlaten.

Een supersonisch vliegtuig vliegt harder dan de geluidssnelheid van $\approx 340 m/s$. De Concorde vloog met een maximum snelheid van 2,06 Mach en heeft een record gezet op $1920 \frac{km}{h} \approx \frac{533m}{s}$.

6. Meer structuur:

- Hoe groot is de gemiddelde snelheid van de camera tussen tijdstip 50 en tijdstip 60?

- b. Op tijdstip $t = 60$ op een afstand van 1 miljoen meter, beweegt de camera inmiddels met een snelheid van $230.000 \frac{m}{s}$.

Kan een gelanceerde raket die de aarde verlaat deze snelheid evenaren?

Antwoord:

a. De gemiddelde snelheid is $\frac{10^6 - 10^5 \text{ meter}}{10 \text{ seconden}} = 90.000 \frac{m}{s}$

b. Een raket die de aarde verlaat heeft een minimale snelheid van $40.000 \frac{km}{h} \approx 11.000 \frac{m}{s}$

De camera heeft nu een snelheid van $230.000 \frac{m}{s} = 828.000 \frac{km}{h}$, dus 21 keer zo snel.

7. Ongestructureerd: Ook b. zonder vraag a. is denkbaar.

- De camera beweegt steeds sneller weg van de hand van de slapende man bij de picknick. Leg uit hoe je op ieder moment de afstand naar de hand van de man kan berekenen.
- Bereken de gemiddelde snelheid per stap van 10 seconden voor de eerste 10 stappen.
- Als je kunt beschikken over het snelst denkbare voertuig, hoe lang is het dan denkbaar om de ruimtereis in praktijk na te bootsen?

Antwoord: In de tiende stap is de gemiddelde snelheid $\frac{10^{10} - 10^9}{10} = 9 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$. Dat is driemaal de snelheid van het licht. Als de snelheid van het licht de maximale snelheid is dan houden de mogelijkheden op ergens in de tiende stap.

8. Hiernaast is de grafiek getekend van "10 keer zo ver in 10 seconden".

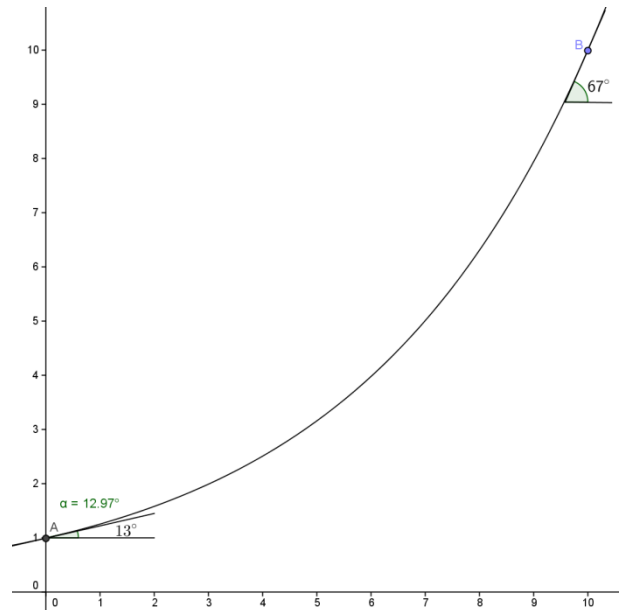
- Laat zien aan de hand van de grafiek dat ook de snelheid bij iedere stap 10 keer zo groot is geworden.

Je kunt deze grafiek gebruiken om op ieder moment in deze 10 seconden een schatting te maken hoeveel keer zo snel de reis gaat ten opzichte van $t = 0$.

Er is gegeven dat de camera op een miljoen meter afstand een snelheid heeft van $230.000 \frac{m}{s}$

De snelheid van het licht is $299.792.458 \text{ m/s}$.

Afgerond is dit $3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$



- De camera maakt een reis door het heelal. Veronderstel dat je als cameraman of cameravrouw meereist met de camera en de lichtsnelheid de theoretisch maximaal haalbare snelheid is. Hoe lang kun je dat dan volhouden als je alle technische middelen ter wereld tot je beschikking hebt?

9. Meer structuur. Tussenstappen desgewenst weglaten.

Bekend wordt verondersteld de afgeleide van $y = 10^{t/10}$ met GR of algebraïsch toe te passen:

Op het tijdstip $t = 0$ staat de camera op een afstand van 1 meter van de hand van de man.

Op tijdstip $t = 10$ staat de camera op een afstand van 10 meter van de hand van de man, op tijdstip $t = 20$ op een afstand van 100 meter.

En zo neemt de afstand elke 10 seconden toe met een factor 10.

- Bedenk een formule die de afstand op elke seconde vastlegt.
- Bepaal de snelheid op tijdstip 20. Valt die snelheid mee of tegen?
- De Apollo 11 legde de afstand van de aarde naar de maan in 3 dagen af. In een bepaalde stap is op gegeven moment de snelheid van de camera gelijk aan de gemiddelde snelheid van de Apollo 11 op deze reis? In welke stap is dat?
- Hoe is het op tijdstip 20 met de versnelling?
- Een versnelling van $15g$ (15 keer de zwaartekrachtversnelling) kan een mens onder goed beschermende omstandigheden verdragen. Wanneer wordt dat moment bereikt voor de cameraman in deze filmopname?
- Zijn er andere grenzen aan de mogelijkheden voor de cameraman? Zo ja bereken deze grenzen.

Antwoord:

Afstand = $10^{t/10} (\approx 1,2589^t)$ meter met t in seconden. De maximale snelheid is de lichtsnelheid van $3,0 \cdot 10^8$ m/s.

De afgeleide functie en tweede afgeleide kunnen bepalen met de GR of algebraïsch. Verschillende niveaus.

De snelheidsformule $v = \frac{1}{10} \ln(10) \cdot 10^{\frac{t}{10}}$ met v in m/s en t in seconden.

De gemiddelde afstand van de aarde tot de maan is 384.500 km. De gemiddelde snelheid is dus $\frac{384.500.000m}{3 \cdot 24 \cdot 3600s} = 1483 \frac{m}{s} = 5340 \frac{km}{h}$. Deze snelheid wordt bereikt na 38,1 seconden volgens de formule.

De versnelling $a = \frac{1}{100} \ln^2(10) \cdot 10^{\frac{t}{10}}$ met a in m/s^2 en t in seconden.

Op tijdstip $t = 20$ is de snelheid $23,0 \frac{m}{s}$ en de versnelling $5,3 m/s^2$.

De versnelling loopt echter heel snel op: voor $t = 24,5$ is de versnelling al $15 g$. De camera is geen lang leven beschoren.

De maximale snelheid van $3 \cdot 10^8 m/s$ wordt bereikt voor $t = 91$

10. Ongestructureerd:

De maan beweegt in een straal van 384.500 km om de aarde in 27 dagen, 9 uur en 44 minuten. De aarde beweegt in een straal van 149.600 km om

de zon in in 365,26 *dagen*. Bereken de maximale snelheid van de maan ten opzichte van de zon.

Antwoorden:

De snelheid van de maan rond de aarde bedraagt

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 384500000}{27 \cdot 24 \cdot 3600 + 9 \cdot 3600 + 44 \cdot 60} \frac{\text{meter}}{\text{seconden}} = \frac{2415884751}{23678340} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 102,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 367 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

De snelheid van de aarde in zijn baan om de zon is dus $2\pi \cdot \frac{149600000}{365,26 \cdot 24 \cdot 3600} \frac{\text{meter}}{\text{seconden}} = 29,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

De snelheid van de maan ten opzichte van de zon is maximaal als de bewegingen gelijkgericht zijn, dus ongeveer $102,0 + 29,8 \approx 132 \text{ m/s}$.

11.

In de film wordt ergens tussen 10^{15} en 10^{16} meter gesproken over een lichtjaar. Bereken de werkelijke afstand die het licht in een jaar aflegt ().

Antwoord: $9,46 \cdot 10^{15} \text{ meter}$.

12. Gestructureerd

De afstand van ons zonnestelsel tot het centrum van de Melkweg is nu $0,5 \cdot 10^{20} \text{ meter}$. Hoe lang doet het licht erover om van de buitenkant van het melkwegstelsel het middelpunt van het melkwegstelsel te bereiken als je weet dat de snelheid van het licht $299.792.458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bedraagt?

Antwoord: de aarde zit niet echt in het centrum van de Melkweg. De afstand naar het centrum van de Melkweg is $0,5 \cdot 10^{20} \text{ meter}$. Met de snelheid van het licht duurt het

$$\frac{0,5 \cdot 10^{20}}{9,46 \cdot 10^{15}} = 5285 \text{ jaar}$$

13. In de film wordt gepraat over de schijf waarin de spiraal van de Melkweg beweegt. Hoe breed en hoe dik is die schijf?

Antwoord: De breedte is 100.000 lichtjaar, de dikte 3000 lichtjaar.

14. In 226 miljoen jaar beweegt de zon rond het centrum van het melkwegstelsel met een snelheid van $220 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Wat is de straal van de baan? Geef het antwoord in lichtjaren.

Antwoord: De omtrek is

$$2 \cdot \pi \cdot r = 220 \cdot 226.000.000 \cdot 365,26 \cdot 24 \cdot 3600 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{jaar}}{\text{jaar}} \cdot \frac{\text{dagen}}{\text{dag}} \cdot \frac{\text{uren}}{\text{uur}} \cdot \frac{\text{s}}{\text{uur}} = 1,569 \cdot 10^{18} \text{ km}$$

De straal is dan $\frac{1,569 \cdot 10^{18}}{2 \cdot \pi} \text{ km} \approx 2,497 \cdot 10^{17} \text{ km} \approx \frac{2,497 \cdot 10^{17}}{9,46 \cdot 10^{15}} \text{ lichtjaar} = 26,4 \text{ lichtjaar}$

15. De terugreis lijkt met een constante snelheid te verlopen totdat aan het eind duidelijk wordt afgeremd. Kun je hier iets over zeggen?

Antwoord: Iedere 2 seconden daalt de afgelegde weg met factor 10. Dat geldt dus ook voor de snelheid.

16. In onze reis door de ruimte langs 40 machten van 10 zijn we allerlei afstanden en allerlei snelheden tegengekomen. Maak een overzicht op een tijdlijn en een afstandenlijn van alle snelheden en afstanden die in deze lesbrief worden genoemd en berekend.

Antwoord: de noodzaak wordt hier snel duidelijk dat een logaritmische schaal onontbeerlijk is om iets te kunnen tonen.

17. De film eindigt met de opmerking: “Als 10^{-16} de eenheid is”. Hebben we een naam voor deze eenheid? Hebben we een naam voor 10^{40} ? Vertaal de conclusie in een mooie volzin.

Voorbeeld WDA'S

Bij onze zoektocht naar bestaande opgaven die naar onze mening voldeden aan het criterium niet-routine problemen die een beroep doen op analytisch denken, creativiteit, strategieontwikkeling, flexibiliteit en reflectie, zijn we ook gaan kijken naar de bestaande methoden. Opvallend was dat vaak interessante opgaven te vinden waren achterin het boek of aan het eind van een paragraaf die dan meteen het stempel complex of steropgave meekregen. In onze eigen lessen hebben we geëxperimenteerd met het geven van niet-routine problemen als inleiding op een onderwerp en daarmee goede ervaringen opgedaan.

Ook valt het op dat problemen vaak eenvoudig om te zetten zijn en leerlingen daarmee beter aanzetten tot actie. Een voorbeeld van een complexe opgave voor de brugklas uit het boek van Moderne Wiskunde is de volgende:

Willem is een klusjesman. Voor een klus rekent hij 15 euro voorrijkosten en 20 euro voor elk gewerkt uur. Willem wil de tarieven aanpassen zodat hij voor een klus van vier uur 5 euro meer ontvangt.

Hoe hoog moet hij de voorrijkosten maken als het uurtarief gelijk blijft?

En hoe hoog moet het uurtarief worden als de voorrijkosten gelijk blijven?

Wij vonden dit een mooie opgave maar zouden het nog beter vinden als het de leerling de mogelijkheid biedt om zelf een strategie ontwikkelen om het doel te bereiken. Het zal leiden tot discussie en misschien zelfs de ondernemersgeest prikkelen.

Hieronder volgt een grote hoeveelheid opgaven, weggeplukt onder meer uit verzamelingen Kangoeroeopgaven. We hebben ze onderverdeeld naar de 6 denkactiviteiten met aanduidingen voor “eenvoudig, gemiddeld en moeilijk”, voor zover dat doenlijk was. Daarbij moet zeker worden opgemerkt dat het niveau van de opgave ook afhangt van de vraag hoever de leerling gevorderd is in zijn ontwikkeling.

De denkactiviteiten zijn:

- a. Modelleren en algebraïseren
- b. Ordenen en structureren
- c. Analytisch denken en probleem oplossen
- d. Formules manipuleren
- e. Abstraheren en
- f. Logisch redeneren en bewijzen

Modelleren en Algebraïseren

Eenvoudig

Priemgetallen

Een priemgetal is een getal dat alleen deelbaar is door 1 en zichzelf. Zo zijn 2, 3, 5 en 37 priemgetallen. Je kan vrij makkelijk bewijzen dat er geen grootste priemgetal is, er zijn namelijk oneindig veel priemgetallen.

Wie vindt binnen 5 minuten het grootste priemgetal van de klas?

We spreken af dat $a \heartsuit b$ betekent: $ab + a + b$. Bijvoorbeeld $5 \heartsuit 8 = 5 \cdot 8 + 5 + 8 = 53$.

Er is een getal x waarvoor geldt: $3 \heartsuit 5 = 2 \heartsuit x$.

Welk getal is x ?

Daan, Sem en Thomas hebben samen 30 knikkers. Sem geeft 5 knikkers aan Thomas.

Thomas geeft er 4 aan Daan en Daan geeft er 2 aan Sem.

Nu hebben ze alle drie evenveel knikkers.

Hoeveel knikkers had Daan eerst?



Uitleg omtrek cirkels

De docent heeft de klas verdeeld in groepjes (van 2 of 3 leerlingen) en heeft elk groepje één cirkelvormig figuur gegeven. Voorbeelden van goed te gebruiken figuren zijn:



Bakringen



Ronde waxine lichthouders



Ronde schaaltjes

Kortom: alles wat rond en glad is, met rechte zijanten

Op een tafel legt de docent stiften, geodriehoeken, stukjes touw (of dropveters ☺) en andere materialen klaar waarmee leerlingen kunnen werken.

Beide opdrachten hieronder gaan over deze figuren en materialen.

Omtrek

Eenvoudig:

De omtrek van een figuur is de lengte van de buitenkant van dat figuur. Deze omtrek kun je bepalen op verschillende manieren. Kijk eens op de tafel waar allerlei materialen klaar liggen voor gebruik en kies een aantal materialen waarmee je de omtrek goed kunt meten.

Bepaal de omtrek van jullie ronde figuur.

Gemiddeld:

De omtrek van een figuur is de lengte van de buitenkant van dat figuur.

Bepaal de omtrek van jullie ronde figuur.

Moeilijk:

Bepaal de omtrek van jullie ronde figuur.

Na afloop van de opdracht volgt een onderwijsleergesprek over de omtrek van cirkels.

Vragen die hierbij leidend zijn, zijn:

- Hoe kun je de omtrek van een cirkel bepalen?
- Vergelijk de verschillende manieren die gebruikt zijn. Welke manier werkt het beste?
- Hoe groot is de omtrek van elk gebruikt figuur? Wat is het verband tussen de grootte van een cirkel en de omtrek?
- Welke afstand kan de grootte van een cirkel bepalen?

Na dit OLG is de leerlingen duidelijk geworden dat de straal of de diameter van een cirkel de grootte en dus de omtrek van een cirkel bepaalt. Dan volgt de volgende opdracht:

Formule voor de omtrek

Eenvoudig:

De omtrek van een cirkel wordt bepaald door de diameter of de straal van de cirkel. Je kunt een formule maken met de diameter als onafhankelijke variabele en de omtrek als de afhankelijke variabele. Die formule heeft dan de vorm $Omtrek = a \cdot diameter$

Maak de formule voor de omtrek.

Gemiddeld:

De omtrek van een cirkel wordt bepaald door de diameter of de straal van de cirkel. Hierbij hebben omtrek en diameter of straal een bepaalde verhouding.

Maak een formule met één onafhankelijke variabele waarmee je de omtrek van een cirkel kunt uitrekenen.

Moeilijk:

Maak een formule met één onafhankelijke variabele waarmee je de omtrek van een cirkel kunt uitrekenen.

Toepassingen omtrek cirkels

De docent heeft voorin en achterin de klas twee fietsen op zijn kop neergezet (bijvoorbeeld fietsen van leerlingen of van zichzelf, misschien zelfs een kinderfietsje).

De opdracht hieronder gaat over deze fietsen.

Binnenband

Een fietsenmaker krijgt van een klant een fiets aangeboden ter reparatie: de binnenband is al een aantal keer lek gegaan en moet nu vervangen worden.

De fietsenmaker heeft allemaal verschillende maten binnenbanden liggen en moet natuurlijk weten welke maat de goede is voor op deze fiets.



Eenvoudig:

De binnenband wordt om het wiel heen gespannen. Dat betekent dat de lengte van de binnenband hetzelfde is als de omtrek van het fietswiel.

Wat was ook alweer de formule voor de omtrek van een cirkel?

Bepaal welke lengte de binnenband voor deze fiets (minimaal) moet hebben.

Gemiddeld:

De binnenband wordt om het wiel heen gespannen. Dat betekent dat de lengte van de binnenband bepaald wordt door de omtrek van het fietswiel.

Bepaal welke lengte de binnenband voor deze fiets (minimaal) moet hebben.

Moeilijk:

Bepaal welke lengte de binnenband voor deze fiets (minimaal) moet hebben.

Trapvermogen van kinderen

(Kan ook met de fietsen in de klas, als er een kinderfietsje bij staat)

Vader Jasper fietst samen met dochter Nora naar school. De afstand van hun huis naar de school van Nora is 850 meter.

Jasper fietst op een fiets waarvan de wielen een diameter hebben van 26 inch. Nora's fiets heeft wielen met een diameter van 18 inch. Een inch staat gelijk aan 2,54 cm.

Eenvoudig:

Nora moet, omdat ze kleinere wielen heeft, vaker trappen om bij school te komen dan Jasper.

Hoe vaak beiden moeten trappen, heeft te maken met de omtrek van de fietswielen.

Als je kunt uitrekenen hoe vaak beiden moeten trappen, kun je ook uitrekenen hoeveel keer zo vaak Nora moet trappen dan Jasper.

Bereken hoeveel keer zo vaak Nora moet trappen om bij school te komen dan Jasper.

Gemiddeld:

Nora moet, omdat ze kleinere wielen heeft, vaker trappen om bij school te komen dan Jasper.

Als je kunt uitrekenen hoe vaak beiden moeten trappen, kun je ook uitrekenen hoeveel keer

Nora vaker moet trappen dan Jasper.

Bereken hoeveel keer zo vaak Nora moet trappen om bij school te komen dan Jasper.

Moeilijk:

Bereken hoeveel keer zo vaak Nora moet trappen om bij school te komen dan Jasper.

Gemiddeld

Na afloop van een test bleek dat de gemiddelde score 1,2 hoger zou zijn geweest als iedere jongen van de klas 3 punten meer had gehaald.
Hoeveel procent van de klas was meisje?

De omtrek (in cm) van een cirkel is gelijk aan zijn oppervlakte (in cm^2).
Hoeveel cm is de straal van de cirkel?

Uitleg sinusoïden

De docent heeft voorin en achterin de klas twee fietsen op zijn kop neergezet (bijvoorbeeld fietsen van leerlingen of van zichzelf, misschien zelfs een kinderfietsje). Het stuur van elke fiets moet voor de leerlingen aan de rechterkant zitten.

De opdrachten hieronder gaan over deze fietsen.

Ventielreflector

Een ventielreflector is een LED-lampje wat op het ventiel van een fietswiel kan worden bevestigd en wat tijdens het fietsen bij elke draai van het wiel een blauwe lichtflits afgeeft. Deze reflectoren worden gebruikt om nog beter zichtbaar te zijn in het donker.



Elke keer als het ventiel zich tijdens het fietsen helemaal onderin het wiel bevindt, wordt de lichtflits 'geactiveerd'.

Laat van de fiets in de klas het ventiel van het achterwiel aan de rechterkant beginnen. Laat het wiel 1 hele ronde draaien door de trapper rond te laten gaan en stop het wiel dan weer (het ventiel zit dan dus weer aan de rechterkant).

Eenvoudig:

Als het wiel draait, draait het ventiel in één ronde over 360° rond. Tijdens die ronde zit het ventiel telkens op een andere hoogte. Deze hoogte hangt af van het aantal graden dat het wiel gedraaid heeft en van de straal van het wiel.

Geef in een grafiek de hoogte van het ventiel in één draaiing van het wiel weer. Gebruik op de horizontale as de draaihoek in graden van het ventiel als variabele.

Gemiddeld:

Als het wiel draait, draait het ventiel in één ronde over 360° rond. Tijdens die ronde zit het ventiel telkens op een andere hoogte.

Geef in een grafiek de hoogte van het ventiel in één draaiing van het wiel weer. Gebruik op de horizontale as de draaihoek in graden van het ventiel als variabele.

Moeilijk:

Geef in een grafiek de hoogte van het ventiel in één draaiing van het wiel weer. Gebruik op de horizontale as de draaihoek in graden van het ventiel als variabele.

Na deze opdracht worden de grafieken bekeken en wordt het begrip 'sinusoïde' behandeld.

Sinusoïde

Je hebt bij de vorige opdracht een sinusoïde getekend met als onafhankelijke variabele de draaihoek.

In technische toepassingen is het gebruikelijk om niet de draaihoek te nemen, maar de afgelegde afstand van een punt als onafhankelijke variabele.

Eenvoudig:

De afgelegde afstand van een punt op een cirkel is hetzelfde als (een deel van) de omtrek van een cirkel. Bereken dus eerst de omtrek van het fietswiel.

Teken dezelfde sinusoïde, maar dan met de afgelegde afstand (in meters) van het ventiel als onafhankelijke variabele.

Gemiddeld:

De afgelegde afstand van een punt op een cirkel is hetzelfde als (een deel van) de omtrek van een cirkel.

Teken dezelfde sinusoïde, maar dan met de afgelegde afstand (in meters) van het ventiel als onafhankelijke variabele.

Moeilijk:

Teken dezelfde sinusoïde, maar dan met de afgelegde afstand (in meters) van het ventiel als onafhankelijke variabele.

Toepassingen sinusoïden

Brandweerkazerne

Hieronder zie je een plaatje van de 38 meter lange en 16 meter brede Fanny Blankers-Koenkazerne in Amsterdam Nieuw-West. Het dak van deze kazerne heeft, zoals je in het zij-aanzicht kunt zien, de vorm van een sinusoïde.



Het enige hoogste punt van deze kazerne zit op 9,0 meter, het laagste punt zit op 6,8 meter hoogte. Het dak begint en eindigt op dezelfde hoogte, op 7,4 meter.

Eenvoudig:

Stel een formule op die de hoogte h van het dak in meters aangeeft. Neem de lengte x van het gebouw in meters als onafhankelijke variabele met $x = 0$ bij het linkerbegin van het dak. Je kunt kiezen voor een formule van de vorm $h = a + b\sin(c(x - d))$ of $h = a + b\cos(c(x - d))$.

Gemiddeld:

Stel een formule op die de hoogte h van het dak in meters aangeeft. Neem de lengte x van het gebouw in meters als onafhankelijke variabele met $x = 0$ bij het linkerbegin van het dak.

Moeilijk:

Stel een formule op die de hoogte h van het dak aangeeft. Stel de verticale as op het linkerbegin van het dak.

Na deze opdracht worden de formules uitgewisseld en besproken.

Asfalteren

Het dak van de kazerne moet opnieuw geasfalteerd worden. Voordat deze taak gedaan wordt, moet eerst de oppervlakte van het dak bekend zijn, zodat de benodigde hoeveelheid asfaltrollen bepaald kan worden.

Eenvoudig:

Het dak heeft de vorm van een rechthoek. Bereken eerst de lengte van het dak. Hiervoor kun je bedenken dat de sinusoïde oorspronkelijk voortgekomen is uit een cirkelbeweging.

Bereken daarna de oppervlakte van het dak in gehele m^2 nauwkeurig.

Gemiddeld:

Het dak heeft de vorm van een rechthoek. Bereken eerst de lengte van het dak.

Bereken dan de oppervlakte van het dak in gehele m^2 nauwkeurig.

Moeilijk:

Bereken de oppervlakte van het dak in gehele m^2 nauwkeurig.

Een nieuwe kast

Sara heeft een nieuwe kast gekocht die bijna net zo hoog is als haar kamer. De kast wordt in z'n geheel afgeleverd. De afmetingen van de kast zijn 81 x 41 x 230 cm. Haar kamer is 5 m. bij 4 m. en 2,40 m. hoog. Omdat de kast niet rechtop door de deur van de kamer kan, wordt de kast liggend op de zijkant naar binnen gebracht. Daarna wordt de kast gekanteld.

a. Lukt het om de kast in de kamer rechtop te zetten? Verklaar je antwoord met behulp van een schets en een berekening.

b. Is er nog een andere manier om de kast te kantelen en rechtop te zetten?

Verklaar je antwoord met behulp van een schets en een berekening.

Sara en Daan gaan samenwonen en Daan trekt bij Sara in. Ook zijn kast heeft de vorm van een balk. De bodem van de kast is een vierkant van 50 bij 50 cm. Het lukt echter niet om die kast in de kamer rechtop te zetten.

c. Op het moment dat de kast klem komt te zitten tussen de vloer en het plafond, maakt de kast een hoek van 70° met de vloer. Hoe hoog is de kast in hele cm?

Moeilijk

De wijzers van de klok

Hoeveel minuten na 13:00 uur staan de grote en de kleine wijzer precies op elkaar?

Iemand zoekt tweetallen positieve gehele getallen x en y , met $x \leq y$, waarvoor geldt: $1/x + 1/y = 1/3$. Hoeveel van die tweetallen zijn er?

Zon en Maan

Schijnbeweging en echte beweging

Schijnbaar komt de zon op onze breedtegraad elke dag op in het oosten, en beschrijft dan een grote boog doorheen de hemel. Zij bereikt haar hoogste punt op de (sterrenkundige) middag en verdwijnt achter de horizon in het westen.

In werkelijkheid is het de aarde die in 23 uur 56 minuten en 4 seconden rond haar eigen as draait: deze tijdsduur noemen wij de sterrendag. In die tijd verplaatst de aarde zich echter zelf ook over haar baan en daarom moeten wij nog 3 minuten en 56 seconden wachten tot wij de zon terug op dezelfde plaats zien als de vorige dag. Dat is dus precies 24 uur: dit noemen wij een zonnedag.

De aarde draait in oostelijke richting. Daarom zien wij daar de zon opkomen. Kijk je vanuit de ruimte op de Noordpool, dan zie je de aarde in tegenwijzerzin bewegen. Aan de Zuidpool zie je een beweging in wijzerzin.

Bij de sterren zien wij dat deze bewegen rond een vast punt. De Poolster bevindt zich in dit vaste punt.

De seizoenen

In de loop van een jaar verandert het deel van de aarde dat verlicht wordt door de zon, en ook de plaats waar de stralen van de zon loodrecht invallen.

Wanneer lichtstralen schuin invallen verlichten zij een groter oppervlak minder intens dan bij rechte inval. Dit verklaart de klimaats gordels en de seizoenen.

De eigen bewegingen van de maan

De maan is de natuurlijke satelliet van de aarde. Zelf straalt ze geen licht uit, maar voor ons is ze wel zichtbaar omdat ze zonlicht in de richting van de aarde weerkaatst. De maan voert gelijktijdig twee bewegingen uit :

een aswenteling in tegenwijzerzin in 27 dagen, 7 uur en 44 minuten

een omwenteling om de aarde, ook in tegenwijzerzin en in 27 dagen, 7 uur en 44 minuten

Zon en maan

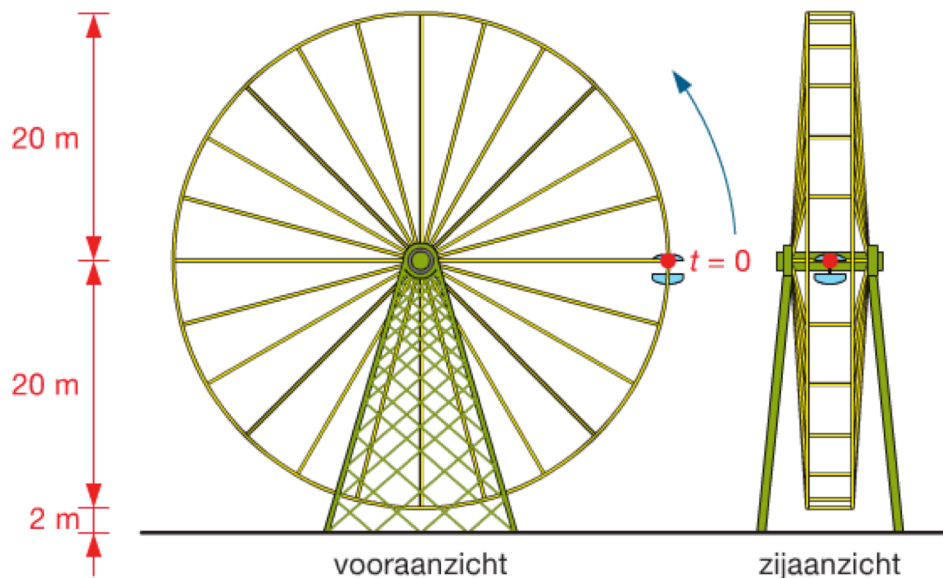
Bij halfvolle maan, vormen de zon (Z), maan (M) en aarde (A) een rechthoekige driehoek. $\angle M$ is op dat moment 90° en $\angle Z$ is dan heel klein, namelijk $\frac{1}{7}^\circ$.

Timo zegt: Tijdens halfvolle maan is de afstand van de aarde naar de zon 400 keer zo groot als de afstand van de aarde naar de maan.

Ga met een berekening na of Timo gelijk heeft.



Reuzenrad (vrij uit G&R havo B2)



Op de kermis wordt een reuzenrad gebouwd. De diameter van het rad is 40 meter. Nadat één stoeltje in het rad is gehangen wordt er proefgedraaid. Hierbij wordt de omlooptijd gemeten. Die blijkt 75 seconden te zijn. In het vooraanzicht draait het stoeltje linksom over een cirkel waarvan het middelpunt 22 meter boven de grond zit. In het zijaanzicht van het ronddraaiende reuzenrad maakt het stoeltje een harmonische beweging. Zie de figuur.

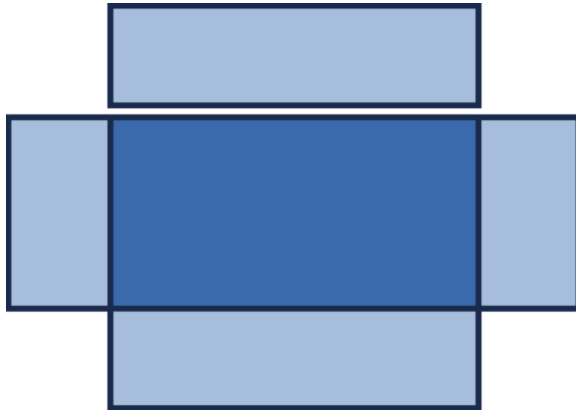
1. Stel de formule op van de hoogte h in meters van het stoeltje als functie van de tijd t in seconden.
2. Hoe hoog hangt het stoeltje na 25 seconden?
3. Hoeveel seconden per omwenteling is de hoogte van het stoeltje meer dan 32 meter?
4. Als stoeltje 1 zich op $t=0$ in P bevindt en er zijn 24 stoeltjes, stel dan de formule op van stoeltje 2 en ook van stoeltje 21.

Doos zonder deksel

Moeilijk

Van stevig karton maken we een doos zonder deksel.

De doos heeft een inhoud van 42 liter. (1 liter = 1 dm^3) De bodem is een rechthoek, waarbij lengte en breedte zich verhouden als 3 : 2.



Je wilt een doos maken met een vierkante bodem, en ook een inhoud van 42 liter. De hoogte mag niet meer worden dan 25 cm.

Bereken de mogelijke lengte van de bodem in cm nauwkeurig.

Ordenen en structureren:

Combineren van mogelijkheden: Eenvoudig

Guldens tellen

Heel vroeger betaalde men in Nederland met guldens. Een gulden was onderverdeeld in 100 centen. Er bestonden muntstukken van 1 cent, 5 cent ("stuiver"), 10 cent ("dubbeltje") en 25 cent ("kwartje").

Op hoeveel manieren is een bedrag van 2 gulden samen te stellen uit stuivers, dubbeltjes en kwartjes? Schrijf alle manieren systematisch op.

Fibonnaccigetallen

Een Fibonnaccigetal is een getal dat voorkomt in de rij 1-1-2-3-5-8-13-21-34-55-enzovoort. Wie vindt binnen 5 minuten zonder rekenmachine het grootste Fibonnaccigetal?

Als Lucas op een tafel staat en Daan staat op de grond, dan komt Lucas 80 cm boven Daan uit. Als Daan op dezelfde tafel staat en Lucas op de grond, dan komt Daan een meter boven Lucas uit. Hoeveel cm is de tafel hoog?

Gemiddeld

De grote gelijkzijdige driehoek is verdeeld in 36 kleine gelijkzijdige driehoekjes, elk met een oppervlakte van 1 cm^2 . Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van de groene driehoek?



Fietstassen

Mevrouw Brouwer is een perfectioniste. Ze gaat binnenkort met fietsvakantie en wil haar fietstassen evenwichtig inpakken zodat haar linker- en rechtertas zo mogelijk even zwaar zijn.

Het gewicht van haar spullen is 1, 10, 13, 29, 29, 50, 67, 67, 77, 96.

Bedenk hoe mevrouw Brouwer haar spullen moet verdelen.

Torens van Hanoi

Een bekende Oosterse legende is de legende van de Torens van Hanoi. Een orde van Tibetaanse monniken moet 64 in diameter afnemende schijven, die opgestapeld aan een verticale gouden pen zijn geregen, verplaatsen naar een koperen pen. Hierbij mag gebruik worden gemaakt van een derde, zilveren pen. De volgende regels moeten in acht worden genomen:

- Er mag maar één schijf tegelijk worden verplaatst. De andere schijven moeten dan op één van de pennen zitten.
- Nooit mag een schijf op een schijf met een kleinere diameter worden geplaatst.

Volgens de legende breekt het einde der tijden aan wanneer alle schijven op de koperen pen staan. We nemen aan dat de monniken iedere seconde een schijf verplaatsen. Over hoeveel jaar kunnen we, op grond van deze legende, het einde der tijden tegemoet zien?

Een houten kubus heeft drie rode en drie blauwe zijvlakken. De kubus wordt in $3 \times 3 \times 3 = 27$ kleine kubusjes gezaagd, allemaal even groot. Hoeveel van deze kubusjes hebben 'n blauw én 'n rood zijvlak?

Pythagoras-trio's

We noemen het trio (3,4,5) een Pythagoras-trio, omdat die drie getallen voldoen aan de stelling van Pythagoras: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Zo is (6,8,10) ook een Pythagoras-trio: $6^2 + 8^2 = 10^2$.

Maar het tweede trio is gewoon een vergroting (met factor 2) van het eerste trio, en daarom noemen we (6,8,10) een niet-primitief Pythagoras trio.

(3,4,5) is wél primitief.

Het grootste primitieve Pythagoras-trio dat we konden vinden is:

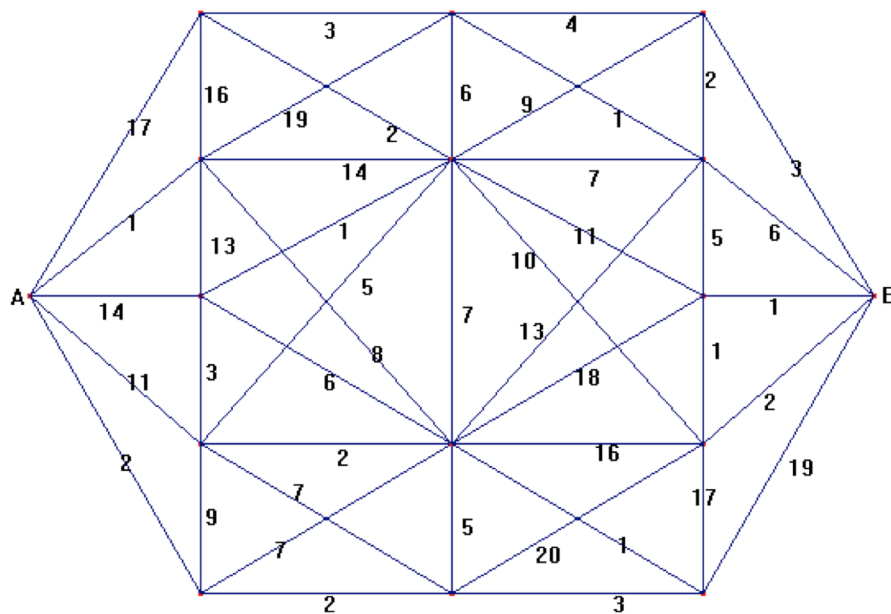
Moeilijk

In een meer leven 6-, 7- en 8-armige inktvissen.
De 7-armigen liegen altijd, de 6- en 8-armigen spreken altijd de waarheid.
Op het strand liggen vier inktvissen bij elkaar: een blauwe, een groene, een gele en een rode.
De blauwe inktvis zegt: "Bij elkaar hebben we 28 armen",
de groene zegt: "We hebben samen 27 armen",
de gele zegt: "We hebben samen 26 armen" en
de rode zegt: "We hebben samen 25 armen".
Hoeveel armen heeft de rode inktvis?



Kortste pad probleem

Geef in het onderstaande netwerk met een tekstmarker de kortste route van A naar B.



Analytisch denken en probleemoplossen

Eenvoudig

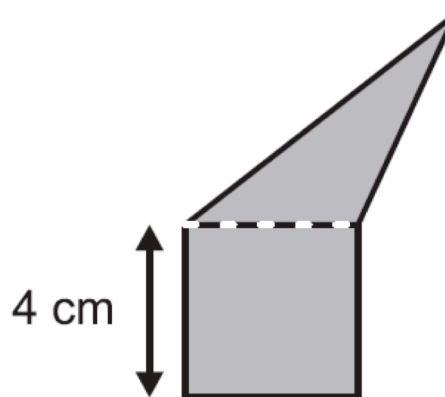
Vijf atleten hebben hardgelopen.
In het assenstelsel hiernaast kun je voor elke atleet zijn of haar tijd en afstand aflezen.
Wie liep het hardst?



Aan een hardloopwedstrijd hebben 2009 mensen meegedaan.
Gerard was één van de deelnemers.
Het aantal lopers dat achter Gerard eindigde is drie keer zo groot als het aantal lopers dat voor Gerard eindigde.
Op welke plaats eindigde Gerard?



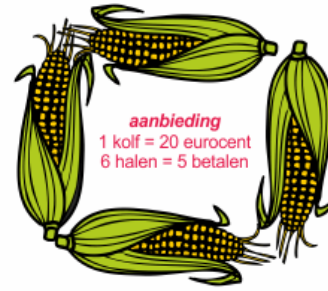
De getallen $1 = 1 \times 1$, $4 = 2 \times 2$, $9 = 3 \times 3$, $16 = 4 \times 4$, ... heten kwadraten.
Hoeveel procent van de getallen 1, 2, 3, 4, ... tot en met 10.000 is een kwadraat?



DRIEHOEK EN VIERKANT

Een vierkant en een driehoek vormen samen een vijfhoek. Zie de figuur hierboven. Het vierkant en de driehoek hebben dezelfde omtrek. Hoeveel cm is de omtrek van de vijfhoek?

Mevrouw *Boer* koopt voor ieder van de vier personen van haar gezin 4 maïskolven.
De winkel heeft een speciale aanbieding, zie hieronder



Hoeveel euro moet zij betalen?

Landmeetkunde: voorwaartse insnijding

Om de positie van een bepaald punt P in kaart te brengen werkten landmeters vroeger met de sinusregel. Daartoe werden de afstanden tot P vanuit bekende punten berekend. Door omcirkelen vanuit die bekende punten kon P op de kaart worden aangegeven. Deze procedure heette “voorwaartse insnijding”. Deze methode werkt alleen in de “lagere geodesie”, de landmeetkunde waarbij het aardoppervlak als plat kan worden beschouwd.

Stel dat A en B de bekende punten zijn, ze liggen 125,3 m uit elkaar.

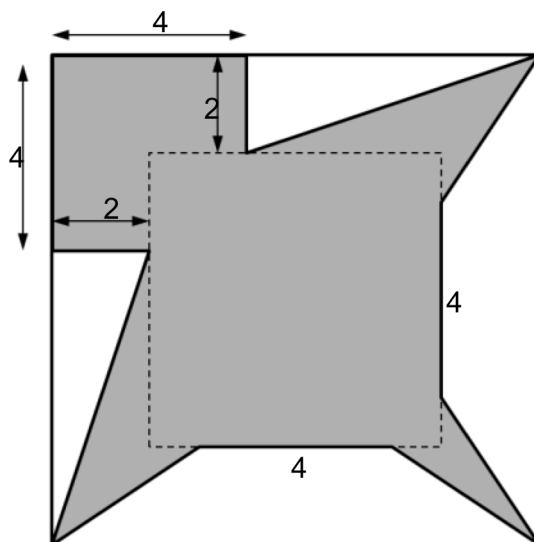
Je wilt de positie van P bepalen.

Je meet de hoeken BAP en ABP : $\angle BAP = 68,3^\circ$ en $\angle ABP = 77,4^\circ$.

Bereken nu de lengtes van AP en BP .

Ismael speelt een spel meerdere keren. De eerste keer behaalt hij 1 punt. Alle volgende keren behaalt hij 5 punten. Zijn gemiddelde is nu 4 punten per spel. Hoeveel keer heeft Ismael het spel gespeeld?

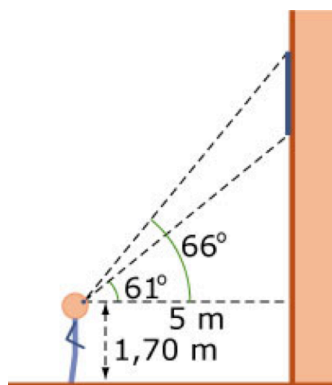
Bekijk de figuur hieronder. De maten zijn gegeven in cm. Het grote vierkant is 10 bij 10 cm. Het gestippelde vierkant binnenin is 6 bij 6 cm. Bereken de oppervlakte van het grijze gebied.



Reclamebord

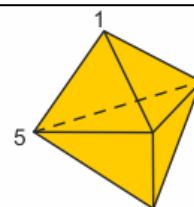
Ariana wil de hoogte van een rechthoekig reclamebord bepalen. Het reclamebord is opgehangen aan de gevel van een hoog gebouw. Ga er van uit dat het reclamebord verticaal hangt en dat ook de gevel verticaal is. De onderrand van het bord is horizontaal. Ariana's ogen zitten op 1,70 m boven de grond en precies 5 m van de gevel met het reclamebord. De hellingshoek van haar kijklijn naar de bovenrand van het reclamebord is 66° . De hellingshoek van haar kijklijn naar de onderrand van het reclamebord is 61° .

Bereken de hoogte van het reclamebord in cm nauwkeurig. Geef een duidelijke berekening.

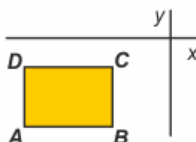


Gemiddeld

Een ruimtelijk figuur heeft zes driehoekige vlakken en vijf hoekpunten. Bij elk hoekpunt hoort een getal. Twee van deze getallen zijn hier te zien. Als we de getallen bij de drie hoekpunten van elk vlak optellen, krijgen we zesmaal hetzelfde antwoord. We tellen alle vijf de getallen die bij de hoekpunten horen op. Wat is de uitkomst?



Rechthoek $ABCD$ is getekend in een assenstelsel. De zijden zijn evenwijdig met de assen. De rechthoek ligt onder de x -as en links van de y -as, zoals in het plaatje.



Voor ieder van de punten A , B , C en D delen we de y -coördinaat door de x -coördinaat. Voor welk punt vinden we de kleinste uitkomst?

Mist

Stel je voor dat op 60 km van een eiland je schip in dichte mist vergaat.

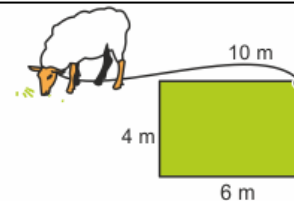
Je kunt jezelf drijvend houden op een vlot, maar alle instrumenten zijn verloren. Natuurlijk probeer je dan rechtstreeks naar dat eiland te peddelen. Je legt ongeveer 2,5 km per uur af. Zonder dat je dat weet staat er een stroming die er voor zorgt dat je 30° uit de koers raakt. Na 20 uur zou je nog 10 km van het eiland verwijderd moeten zijn, als je er inderdaad recht naar toe gepeddeld was.

Noodlanding

Een piloot vertrekt met zijn sportvliegtuig van vliegveld A en vliegt 3 uur met een constante snelheid van 140 km/h een koers 30° ten opzichte van het Noorden. Daarna verandert hij zijn koers in 170° en de snelheid in 120 km/h. Na 1,5 uur moet hij een noodlanding maken.

Over de radio geeft hij aan de verkeersleiding van vliegveld T door waar hij is geland en dat hij ernstig gewond is geraakt. Onmiddellijk wordt een helikopter gestuurd. Bereken de afstand die de helikopter moet vliegen.

Het schaap zit vast aan een touw van 10 meter lang.
Het touw zit vast aan een hoek van de schaapskooi van 6 bij 4 meter.

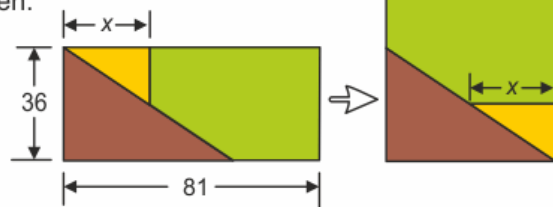


De oppervlakte van het gebied waar het schaap kan grazen is

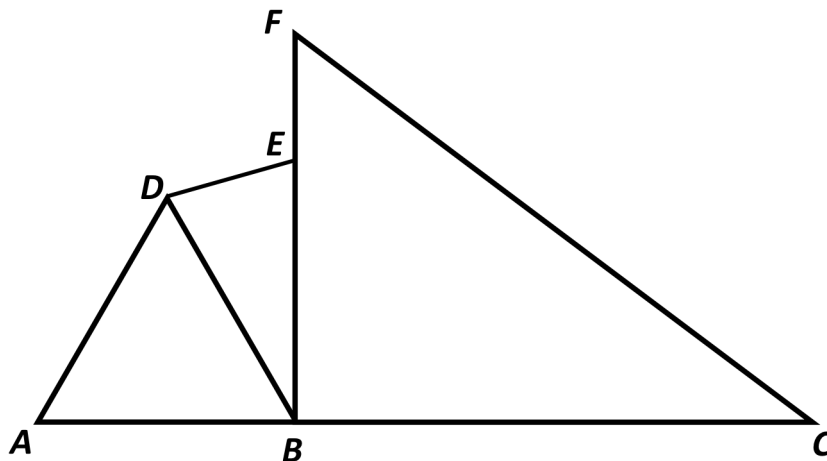
De warmwaterkraan van een bad levert water van 64°C ,
de koudwaterkraan water van 20°C .
Vol opengedraaid leveren de kranen evenveel water.
De warmwaterkraan wordt voor $\frac{2}{3}$ opengedraaid,
de koudwaterkraan voor $\frac{4}{5}$.
Hoe warm in $^{\circ}\text{C}$ is het water dat in het bad komt?



Een rechthoek van 36×81 is in drie stukken gesneden.
Van de drie stukken kunnen we een vierkant maken.
Hoe lang is x ?



Bijzondere driehoeken



In het figuur hierboven zie je drie bijzondere driehoeken:

De gelijkzijdige driehoek ABD met zijde 4

De gelijkbenige driehoek BED met $BE = BD = 4$ en $DE = 2$

Driehoek BCF met $BC = 8$. $CF = 10$. E ligt op BF . $EF = 2$.

$\angle ABC$ lijkt een gestrekte hoek, maar is dat ook zo?

Bereken $\angle ABC$.

Oppervlakte onder een kromme

Gegeven is de formule $y = \frac{1}{x}$.

Geef een zo nauwkeurig mogelijke schatting van de oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van de functie, de x -as en de lijnen $x=1$ en $x=2$. Zie het plaatje hieronder.



Schapen houden

Andreüs Schrandter heeft als hobby schapenfokken, maar de kosten van het voedsel voor zijn beestjes lopen de laatste tijd een beetje uit de hand. Er zijn twee goede soorten schapenvoedsel op de markt, *Ramses* en *Mekka*, die in een trog overigens heel goed gemengd kunnen worden.

De kosten van de voeders zijn:

Ramses kost € 5 per kilo en Mekka € 2,50 per kilo.

De volgende kwaliteitsverschillen tussen de beide soorten schapenvoeders bestaan:

Ramses bevat 125 gram proteïne per kilo. Mekka bevat 53 gram proteïne per kilo.
Ramses levert 1100 kJ energie per kilo. Mekka levert 1800 kJ energie per kilo.

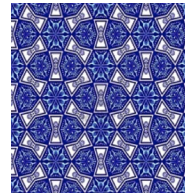
De schapenfokbranche legt de volgende beperkingen aan Schrandter op:

Ieder schaap moet wekelijks minstens 100 gram proteïne binnenkrijgen.
Ieder schaap moet wekelijks minstens 1220 kJ binnenkrijgen.

Andreüs kocht eerst alleen 2 kilo van het goedkopere Mekka per schaap per week, maar vraagt zich af of dat wel de goedkoopste oplossing is. Een beetje mengen met het, weliswaar duurder en energie-armere, maar wel proteïnerijkere Ramses, zou uiteindelijk misschien geld kunnen besparen.

Bereken hoeveel kilo Ramses en hoeveel kilo Mekka Andreüs per week per schaap moet inkopen om zo goedkoop mogelijk uit te zijn. Geef de bijbehorende kosten.

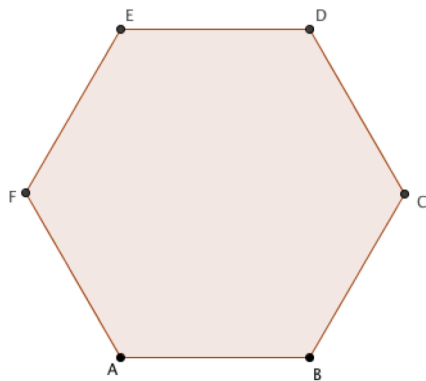
Aantal kilo Ramses	Aantal kilo Mekka	Kosten
per schaap per week	per schaap per week	per schaap per week



Vlakvulling

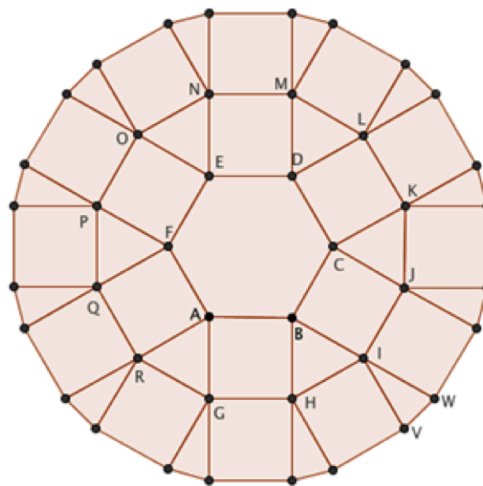
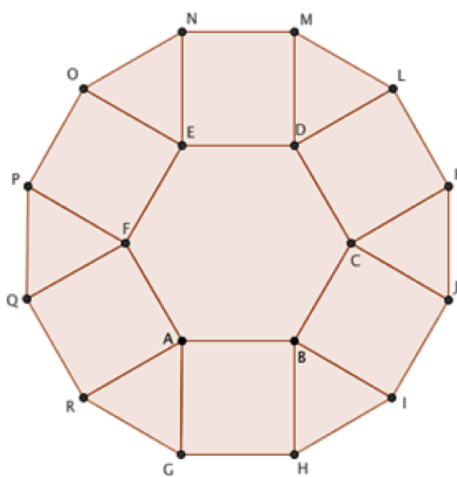
In de Islamitische cultuur komen we veel vlakvullingen tegen. In de opgaven hieronder maken we onze eigen vlakvulling, die ook regelmatig in Islamitische kunst verwerkt zit.

Gegeven is de regelmatige zeshoek $ABCDEF$. In een regelmatige zeshoek zijn alle zijden en hoeken gelijk. De zijden van deze zeshoek zijn gelijk aan 1. Een regelmatige zeshoek is opgebouwd uit zes gelijkzijdige driehoeken.



- a. Bereken exact de oppervlakte van zeshoek $ABCDEF$.

Om de zeshoek wordt een nieuwe rand getekend. De rand bestaat uit vierkanten en driehoeken, zodat veelhoek $GHIJKLMNOPQR$ ontstaat, die hieronder links is getekend.



- b. Bewijs dat $\triangle FPQ$ een gelijkzijdige driehoek is.
- c. Bereken de exacte oppervlakte van $GHIJKLMNOPQR$.
In de rechterfiguur hierboven is nog een extra rand om de figuur heen gelegd, die uit vierkanten en gelijkbenige driehoeken bestaat.
- d. Bereken de lengte van lijnstuk VW . Rond je antwoord af op twee decimalen.

Moeilijk

Trein G passeert een seinpaal in 8 seconden.
 Trein H passeert de seinpaal in 12 seconden in tegengestelde richting.
 De treinen G en H passeren elkaar in 9 seconden.



Welke bewering is waar?

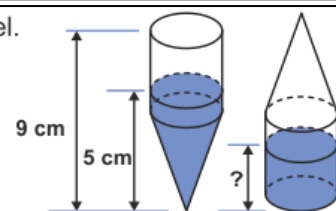
- A. trein G is twee keer zo lang als trein H
- B. trein G is anderhalf keer zo lang als trein H
- C. trein G is even lang als trein H
- D. trein G is half zo lang als trein H
- E. je kunt de verhouding van de lengtes van de treinen G en H niet weten

Een container van 9 cm hoog is opgebouwd uit een cilinder en een kegel.
 De kegel is minder dan 5 cm hoog.

De container is voor $\frac{1}{3}$ deel gevuld met water.

Als de container met de kegel omlaag wordt gehouden,
 dan staat het water 5 cm hoog.

Hoe hoog staat het water als we de container omkeren?



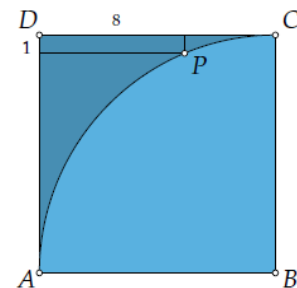
Susan heeft van precies 2009 gelijke kubusjes een balk gemaakt. Zij heeft ook 2009 stickertjes.

Aan de buitenkant van de balk plakt zij op het midden van elk vierkantje zo'n stickertje.

Susan houdt nog stickertjes over.

Hoeveel?

Binnen een vierkant $ABCD$ is een kwartcirkel beschreven met B als middelpunt en de zijde als straal. Een punt P op de kwartcirkel heeft afstand 1 tot CD en afstand 8 tot AD . Bereken de lengte van de zijde van het vierkant.



Sonia heeft twee kubusvormige bakken.

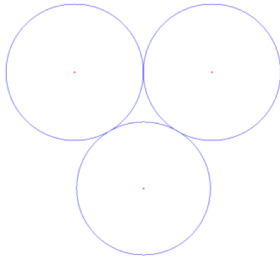
De ribben van de grootste kubus zijn 1 dm groter dan die van de kleinste.

Beide bakken zijn gevuld met water. De grootste bak heeft 217 liter meer.

Hoeveel liter water zit er in de kleinste bak?



Bierviltjes



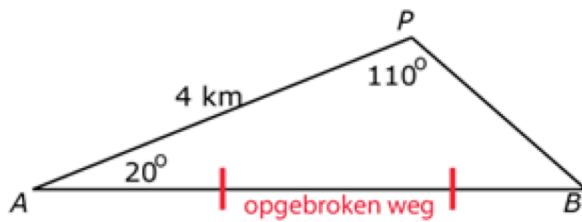
Bepaal de oppervlakte van het gebied tussen de drie bierviltjes zo nauwkeurig mogelijk. Neem voor het gemak aan dat de straal van de cirkels gelijk is aan 1.

Let wel: Een antwoord zoals bijvoorbeeld $\sqrt{2} + \frac{1}{2}\pi$ is veel nauwkeuriger dan de afronding 2,985009889.

Tarzan en Jane

Tarzan zwemt 1,12 m/s en loopt 2,73 m/s. Hoe is hij het snelste bij Jane? Hoe lang duurt deze route?





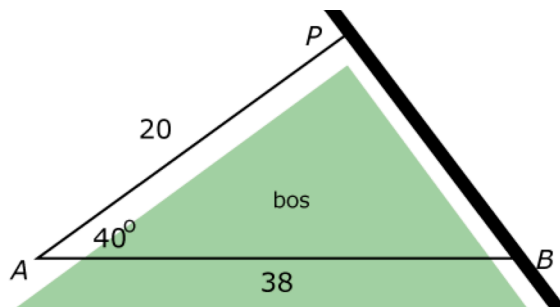
sinusregel

Tussen de punten A en B is de weg opgebroken. Er is een omleiding via P .

De wegen AB en AP maken een hoek van 20° met elkaar. De hoek tussen PA en PB is 110° .

De weg van A naar P is 4 km.

Hoeveel langer is de weg A naar B via P dan de rechtstreekse weg AB ?



cosinusregel

Bij een crosscountry wedstrijd moeten de deelnemers van punt A naar punt B zien te komen. Er zijn twee mogelijkheden. De eerste is rechtstreeks door het bos van A naar B .

De tweede manier is via punt P naar een geasfalteerd fietspad te lopen. De paden AB en AP maken een hoek van 40° met elkaar. De weg van A naar P is 20 m, die van A naar B is 38 m. Eén van de lopers wil weten hoeveel verschil er is tussen de weg van A naar B via P en over het fietspad en de weg AB door het bos.

Waarom kun je de sinusregel niet gebruiken?

Dit materiaal is gemaakt gedurende de
Leergang Wiskunde Delft, voorjaar 2014



Tycho Brahe Planetarium



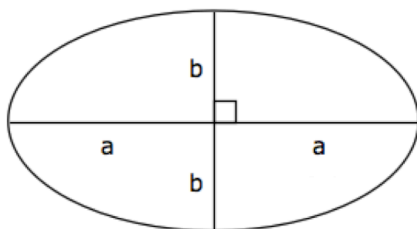
Op de bovenstaande foto zie je een gebouw met de vorm van een afgezaagde cilinder. Het is het Tycho Brahe Planetarium dat in Kopenhagen staat. De maximale hoogte van het gebouw is 38 meter en de diameter 36 meter. Het dak heeft een hellingshoek van $26,5^\circ$.

Er moet een nieuwe verzekering worden afgesloten voor het gebouw. De directie van het planetarium heeft een verzekering gevonden voor 6 Deense kroon per kubieke meter per jaar.

- a. Bereken hoeveel de verzekering per jaar voor het Tycho Brahe Planetarium gaat kosten.

Het dak van het Tycho Brahe Planetarium heeft de vorm van een ellips.

De oppervlakte van een ellips is te berekenen met de formule $O_{\text{ellips}} = \pi \cdot a \cdot b$. Met a en b zoals hiernonder in de figuur.



Er moet nieuwe dakbedekking op het dak. De dakdekker wil daarom weten hoeveel vierkante meter dakbedekking er nodig is voor het dak.

- b. Bereken hoeveel hele vierkante meters het dak is.

Formules manipuleren

Delingsalgoritme, ggd/kgv, getalsnotatie, variabelen: Eenvoudig

Karel heeft drie van de getallen 2, 4, 16, 25, 50 en 125 met elkaar vermenigvuldigd. Hij kreeg 1000 als uitkomst. Wat is de som van die drie getallen?

We bekijken alle getallen van drie cijfers die een positief veelvoud van 4 zijn. Wat is het verschil van het grootste en het kleinste van deze getallen?

Gemiddeld

Op een dag in 2013 merken *Karel* en zijn zoon *Fred* op: als je onze leeftijden vermenigvuldigt, krijg je 2013.



In welk jaar is *Karel* geboren?

Sneeuw

Hoeveel sneeuw is er nodig om een sneeuwpop te maken?

Om dit te onderzoeken gaan we uit van het meest simpele model sneeuwpop.

Het lijf is een grote bol en het hoofd is een kleine bol. Over de versiering hebben we het hier niet.

De inhoud van een bol bereken je met de formule: $I = \frac{4}{3}\pi r^3$

met $I = \text{inhoud}$ in m^3 en $r = \text{straal}$ in m.

a. De diameter van het lijf is 1 meter en het hoofd heeft een diameter van 0,4 meter.

Bereken hoeveel m^3 sneeuw je dan nodig hebt om deze sneeuwpop te maken, rond je antwoord af op 2 decimalen.

In een tuin van 5 meter breed en 6 meter lang is overal 5 cm sneeuw gevallen.

b. Lig er genoeg sneeuw in de tuin om de sneeuwpop uit vraag a. te maken?

c. Noem drie redenen waardoor in de realiteit de antwoorden van a. en b. zullen afwijken.

Moeilijk

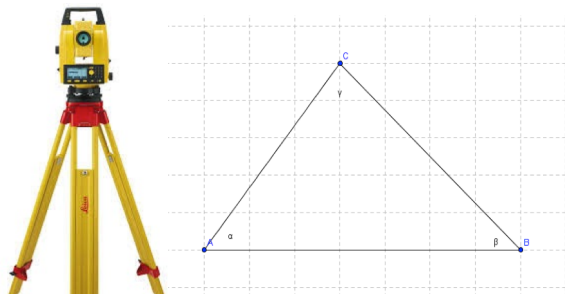
Fred schrijft elf breuken op.

Hij gebruikt elk van de getallen 1 t/m 22 één keer, óf in een teller óf in een noemer.

Wat is het grootste aantal breuken die gelijk zijn aan een geheel getal?

De landmeter

Een landmeter voert op bouwterreinen driehoeksmetingen uit om zo het land in kaart te brengen. Hiervoor kan hij een theodoliet of een tachymeter gebruiken.



Het maken van zo'n driehoeksmeting gaat als volgt:

Eerst kiest de landmeter op het terrein twee punten A en B uit. De horizontale afstand tussen deze twee punten meet hij nauwkeurig op. Vervolgens kiest hij een punt C, dat zowel vanuit A als vanuit B te zien is. Vanuit de punten A en B meet hij met de theodoliet de hoek op die lijnstuk AB maakt met punt C. Dit kan hij doen, omdat het apparaat over een verticale as kan draaien, waardoor in het horizontale vlak de hoeken tussen AB en AC en tussen AB en BC gemeten kunnen worden.

De hoeken α en β zijn hiermee bekend.

Omdat hij deze drie gegevens van de driehoek heeft, zijn de andere drie gegevens (AC, BC en γ) gemakkelijk te berekenen.

Makkelijk:

Laat duidelijk zien hoe je, met AB, α en β gegeven, de andere drie gegevens kunt uitrekenen.

Je kunt ervoor kiezen eerst een getallenvoorbeeld te geven en daaruit af te leiden hoe de berekeningen gedaan moeten worden. Begin met het berekenen van γ .

Gemiddeld:

Laat duidelijk zien hoe je, met AB, α en β gegeven, de andere drie gegevens kunt uitrekenen.

Je kunt ervoor kiezen eerst een getallenvoorbeeld te geven en daaruit af te leiden hoe de berekeningen gedaan moeten worden.

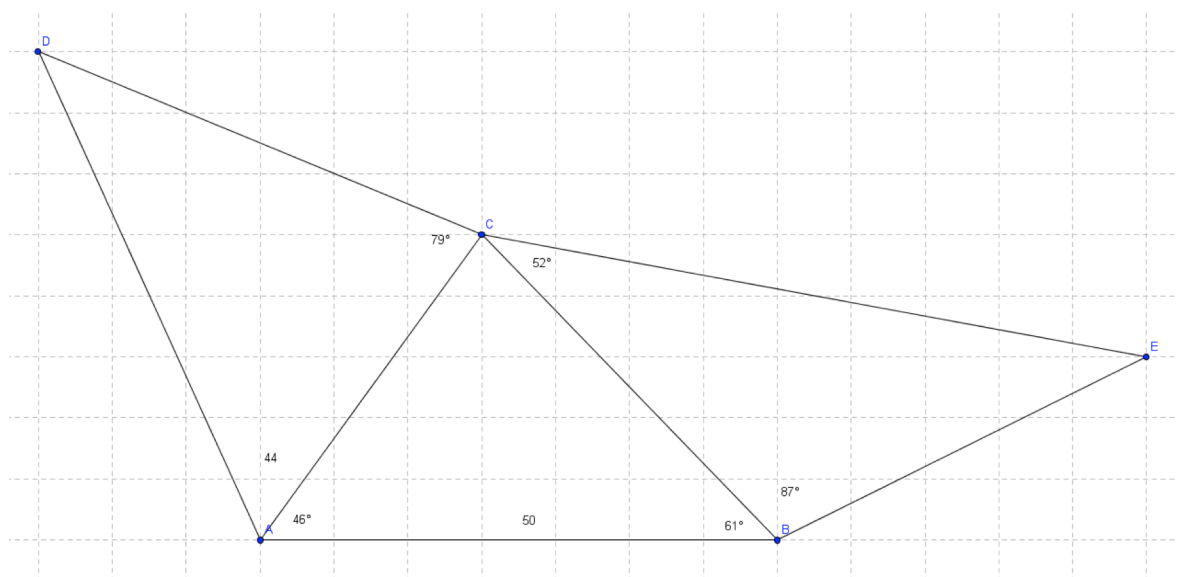
Moeilijk:

Laat duidelijk zien hoe je, met AB, α en β gegeven, de andere drie gegevens kunt uitrekenen.

Driehoeksmetingen

Wanneer van één driehoek alle drie zijden en hoeken bekend zijn, kan het gehele land onderverdeeld worden in aan elkaar grenzende driehoeken. Hiermee kan het hele land in kaart gebracht worden.

Ga voor deze opdracht uit van de situatie die hieronder is gegeven. Een stuk land kan altijd op een dergelijke manier worden onderverdeeld. Belangrijk is te beseffen dat door hoogteverschillen soms niet het hele land in slechts weinig driehoeken kan worden onderverdeeld (je kunt dan niet altijd punt C heel ver nemen). Soms worden netwerken van wel meer dan 50 driehoeken gebruikt (afhankelijk van de omvang van het stuk land en de diverse hoogteverschillen die voorkomen).



Makkelijk:

Bereken alle onbekende zijden en alle onbekende hoeken in de gegeven situatie. Begin met het berekenen van alle onbekende gegevens in driehoek ABC.

Gemiddeld:

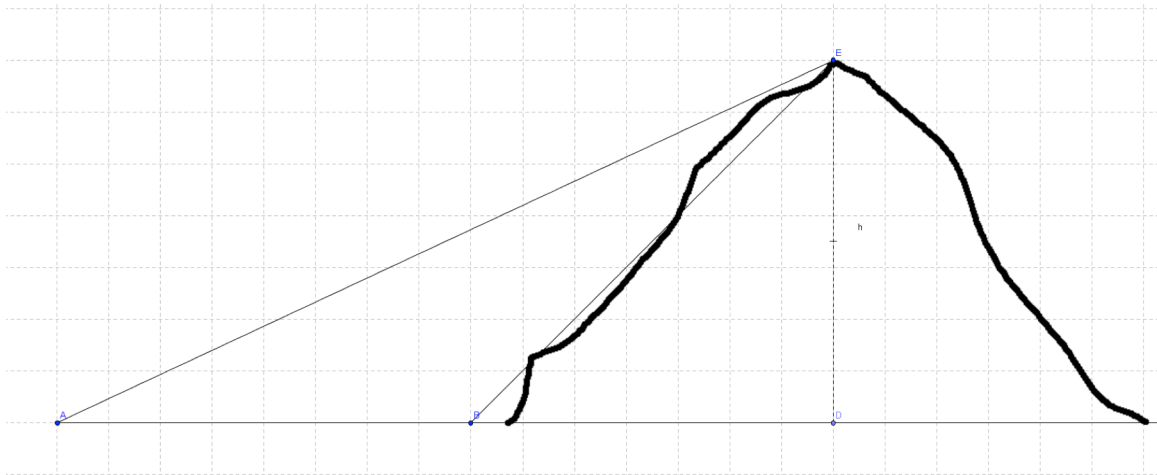
Bereken alle onbekende zijden en alle onbekende hoeken in de gegeven situatie. Als je niet weet waar je moet beginnen, bekijk de vorige opdracht ('De landmeter') dan nog eens.

Moeilijk:

Bereken alle onbekende zijden en alle onbekende hoeken in de gegeven situatie.

Verticale driehoeksmetingen

Wanneer een stuk land grote hoogteverschillen heeft, kan ook de hoogte van een punt eenvoudig met driehoeksmetingen worden bepaald. Het plaatje hieronder laat zo'n situatie zien met de driehoeken die gebruikt kunnen worden om de hoogte h te berekenen.



Een theodoliet kan ook over een horizontale as draaien, waardoor scherpe hoeken tussen de grondlijn en een punt T boven de grondlijn (zoals hier de top van de berg) kunnen worden gemeten.

Makkelijk:

Leg duidelijk uit hoe met behulp van driehoeksmetingen de hoogte h kan worden berekend.

Ga eerst aan de slag in driehoek ABT. Gebruik daarna driehoek BRT om h uit te rekenen.

Gemiddeld:

Leg duidelijk uit hoe met behulp van driehoeksmetingen de hoogte h kan worden berekend.

Ga eerst aan de slag in driehoek ABT.

Moeilijk:

Leg duidelijk uit hoe met behulp van driehoeksmetingen de hoogte h kan worden berekend.

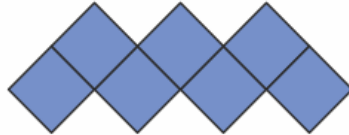
Abstraheren

Regelmaat, algoritme, patroon herkennen en voortzetten: Eenvoudig

In het plaatje zie je dat $1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4$.
Waarvan is $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21$ gelijk?



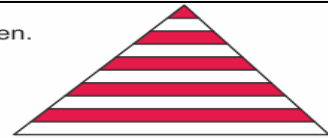
De figuur hieronder bestaat uit een "zigzag" van zeven vierkanten van 1×1 cm.
Zijn omtrek is 16 cm.



Hoeveel cm is de omtrek van een "zigzag" die op dezelfde manier is gemaakt van 2013 vierkanten?

Gemiddeld

In de driehoek hiernaast zie je 9 evenwijdige lijnstukken.
Die lijnstukken verdelen twee zijden van de driehoek in 10 gelijke stukken.
Hoeveel procent van de oppervlakte van de driehoek is rood?



In een autorace rijden de auto's elk met constante snelheid.
Ze vertrekken om het uur van dezelfde startplaats.
De eerste auto rijdt met een snelheid van 50 km/u.
De tweede auto vertrekt een uur later met een snelheid van 51 km/u.
De derde auto vertrekt weer een uur later met een snelheid van 52 km/u.
Zo gaat het door.
De laatste auto vertrekt 50 uur na de eerste met een snelheid van 100 km/u.
Wat is de snelheid van de auto die op kop ligt 100 uur na de start van de eerste auto?



Moeilijk

Van een rechthoekige driehoek zijn de rechthoeks zijden 6 en 8 cm lang. K , L en M zijn de middens van de zijden.
Hoeveel cm is de omtrek van driehoek KLM ?

A. 10

B. 12

C. 15

D. 20

E. 24

Wortel benaderen

Geef zonder rekenmachine een benadering van $\sqrt{22}$ in zo veel mogelijk decimalen.

We maken een getal van zes cijfers.
Het derde cijfer en elk cijfer daarna is de som van de voorgaande twee cijfers.
Hoeveel getallen van zes cijfers zijn er zo te maken?

Logisch redeneren en bewijzen

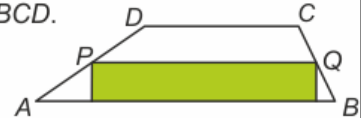
Informatie, logische puzzels: Eenvoudig

Anna stuurt Bram een boodschap die verscijferd is met het volgende systeem.
Elke letter wordt vervangen door een getal: A = 01, B = 02, C = 03, ..., Z = 26.
Daarna wordt elk getal vervangen door de uitkomst van de berekening $2 \times \text{getal} + 9$.
De rij uitkomsten wordt naar Bram gestuurd.
Hij heeft de rij 25, 39, 19, 38 ontvangen en wil deze rij ontcijferen.



Welke boodschap vindt Bram?

De punten P en Q zijn de middens van de zijden van het trapezium $ABCD$.
De groene rechthoek heeft oppervlakte 13 cm^2 .



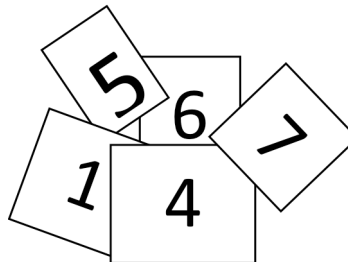
Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van het trapezium?

Drie meisjes houden een hardloepwedstrijd. Vier toeschouwers doen elk een voorspelling.
De eerste: "Lisa of Sofie gaat winnen."
De tweede: "Rachida eindigt achter Sofie."
De derde: "Sofie eindigt vóór Lisa of ze wordt laatste."
De vierde: "Sofie of Rachida wordt tweede."
Na afloop van de race blijken alle voorspellingen goed te zijn.
In welke volgorde kwamen de meisjes over de finish?

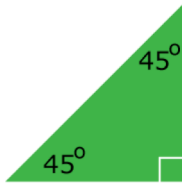


Kaarttruc

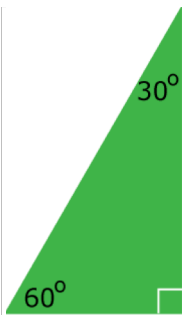
In een doos zitten zeven kaarten. De kaarten zijn genummerd 1 tot en met 7. Emile pakt zonder te kijken drie kaarten. Daarna pakt Tim twee kaarten. Er zitten nu nog twee kaarten in de doos. Emile ziet aan de nummers op zijn kaarten dat de twee nummers op Tims kaarten samen even moeten zijn. Hoeveel zijn de nummers van Emile samen?



Speciale driehoeken (in plaats van uit het hoofd leren van de exacte waarde-cirkel)



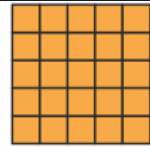
1. Bereken in een rechthoekige driehoek de schuine zijde als gegeven is dat de beide rechthoekszijden gelijk zijn. Neem de lengte van de rechthoekszijde 5. Hoe groot zijn de twee niet-rechthoekige hoeken? Wat is de verhouding van de drie zijden? Geldt dit alleen voor deze driehoek?



2. Neem een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken respectievelijk 60° en 30° zijn. Neem de rechthoekszijde tussen de hoeken van 90° en 60° met lengte 5. Wat is hier de verhouding van de zijden? Geldt dit alleen voor deze driehoek?
3. Reken de hoeken van de driehoek om in radialen en gebruik π . Gelden de verhoudingen nu nog?

Gemiddeld

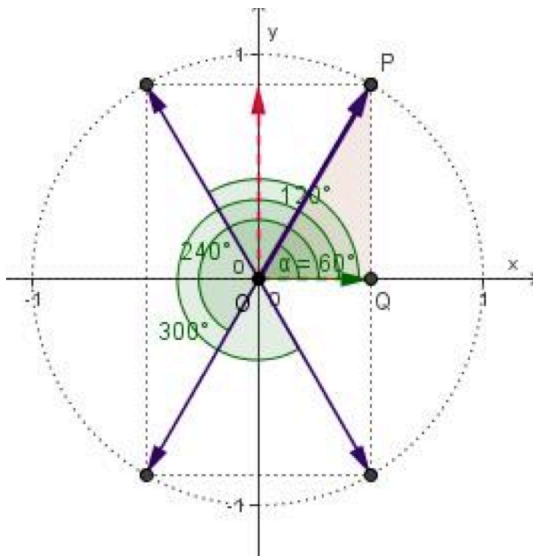
Iemand gaat in een 5×5 - tabel wat vakjes aankruisen.
Hij doet dit zó dat in ieder vierkant van 3×3 vakjes hetzelfde aantal is aangekruist.
Hoeveel kruisjes kunnen er in een 3×3 - vierkant staan?
Dat aantal kan natuurlijk 0 en 9 zijn.
Welke andere aantallen (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) zijn mogelijk?



Op een eiland wonen 2013 mensen. Sommigen zijn ridders, die spreken altijd de waarheid.
De anderen liegen altijd.



Iedere dag zegt een van de mensen:
"Na mijn vertrek zal het aantal ridders gelijk zijn aan het aantal leugenaars."
Daarna verlaat hij het eiland. Na 2013 dagen is het eiland onbewoond.
Hoeveel leugenaars waren er aan het begin?

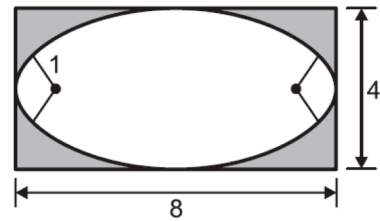


Exacte waarden berekenen

Bereken exact de sin, cos en tan van hoeken van 60° , 120° , 240° en 300° .

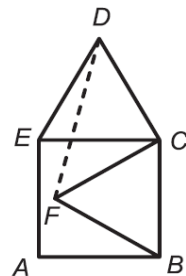
Moeilijk

Een ovaal bestaat uit vier cirkelbogen. De bogen links en rechts zijn gelijk en ook de bogen boven en onder zijn gelijk. Het ovaal heeft een horizontale en een verticale symmetrieas, en geen knikpunten. Het ovaal past precies in een rechthoek van 4 bij 8. De zijden van de rechthoek zijn evenwijdig aan de symmetrieassen van de ovaal. De straal van de kleine cirkelbogen is 1. Wat is de straal van de grote cirkelbogen?



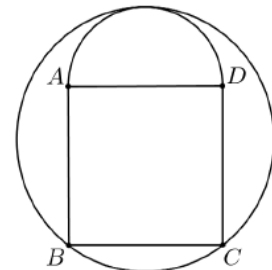
- A. 6 B. 6,5 C. 7 D. 7,5 E. 8

$ABCE$ is een vierkant met zijde 1.
 BCF en CDE zijn gelijkzijdige driehoeken.
 Hoe lang is FD ?

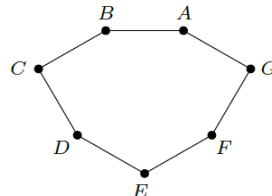


- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{5} - 1$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{6} - 1$ E. $\sqrt{3}$

Een figuur bestaat uit een vierkant $ABCD$ en een halve cirkel met middellijn AD buiten het vierkant. De zijde van het vierkant heeft lengte 1. Wat is de straal van de omgeschreven cirkel van de figuur?



Gegeven is zevenhoek $ABCDEFG$, waarvan alle zijden lengte 2 hebben. Bovendien geldt: $\angle E = 120^\circ$, $\angle C = \angle G = 90^\circ$ en $\angle A = \angle B = \angle D = \angle F$. Wat is de oppervlakte van de zevenhoek?



- A) $10 + 2\sqrt{2}$ B) $8 + 3\sqrt{3}$ C) 14 D) $10 + 2\sqrt{6}$ E) $8 + 3\sqrt{6}$

In een rij van 25 mannen zegt iedereen (behalve de voorste) dat de man voor hem liegt. De voorste man zegt dat iedere man achter hem liegt. Hoeveel mannen in deze rij liegen?

Op de site <http://www.fi.uu.nl/ctwo/WDA/> vind u artikelen van de hand van Anne van Streun over Wiskundige Denkactiviteiten. Naast een oriëntatie op wiskundige denkactiviteiten geeft hij ook een analyse aan de hand van meerdere voorbeelden en voorbeeldexamens havo.

Bijlage 1.

Denkactiviteiten, onderzoekend leren en de rol van de docent

Michiel Doorman, Henk van der Kooij, Ad Mooldijk; Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Inleiding

Denkactiviteiten staan in de belangstelling en krijgen een plek in de nieuwe eindexamenprogramma's (Drijvers, 2011). De ideeën achter denkactiviteiten staan dicht bij de doelstellingen van onderzoekend leren, een leerproces waarin leerlingen een onderzoekende rol hebben en zelf actief betrokken zijn bij de ontwikkeling van kennis en vaardigheden. Dit betekent niet dat leerlingen voortdurend aan het onderzoeken zijn of dat docenten volledig nieuw lesmateriaal moeten ontwikkelen. Kleine ingrepen in de dagelijkse lespraktijk aan de hand van het gebruikelijke boek kunnen hiertoe al bijdragen. Twee voorbeelden illustreren mogelijke ingrepen. Ze zijn beide ontstaan tijdens een cursus Onderzoekend Leren¹ op het Lek & Linge College te Culemborg.

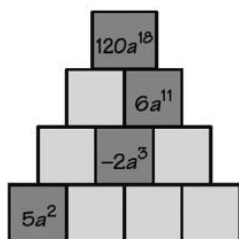


fig. 1 Een algebrapiramide.

Voorbeeld 1:

Dit voorbeeld is geïnspireerd op opdrachten uit *Getal & Ruimte* waarbij tweedeklasleerlingen (HAVO/VWO) de lege vakken in piramides moeten invullen (zie figuur 1). De regel is dat de uitkomst van een vermenigvuldiging van twee expressies in het vakje erboven staat. De ingreep bij deze opdrachten is dat leerlingen gevraagd wordt om zelf een makkelijke en een moeilijke piramide te maken met machten, wortels, breuken of getallen in de wetenschappelijke notatie. De docent die de ingreep bedacht – Corine van den Boer – liet zien dat dit tot een grote variëteit aan opgaven leidde, waarbij zowel zwakkere als betere leerlingen zich uitgedaagd voelden (zie figuur 2).

Tijdens die activiteit ontstond bij de leerlingen spontaan de vraag hoeveel hokjes je minimaal moet invullen om de hele piramide op te kunnen lossen; een leuk zijspoor dat enkele groepjes extra uitdaagde. Vooral het feit dat de docent het antwoord hierop niet direct wist, daagde uit tot proberen, redeneren en 'slim' zijn. Een optelpiramide met de getallen 1, 2, 5 en 6 in de onderste rij is eenvoudig op te lossen. Als we nu 5 en 6 weglaten en alleen 10 in de top zetten (dus drie in plaats van vier gegevens), is er dan maar één oplossing? Een vraag waarbij variabelen in de oplossing een natuurlijke rol kunnen spelen.

Na inleveren van alle piramides koos de docent de volgende dag drie piramides en legde deze aan de klas voor. Twee waren veel moeilijker dan die in het boek staan. Alle leerlingen gingen er vol enthousiasme mee aan het werk. Deze ingreep en de positieve ervaringen laten zien hoe leerlingen meer eigenaar van de wiskundige activiteit worden. Dit stimuleerde de docent om ze vaker zulke opdrachten te geven. Het is bovendien een mooie manier om te differentiëren tussen leerlingen van verschillende niveaus.

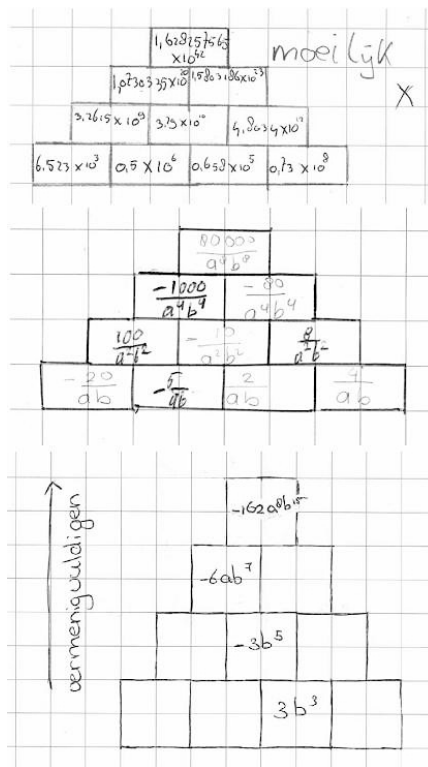


fig. 2 Enkele piramides van leerlingen.

Voorbeeld 2: In dit tweede voorbeeld hebben de leerlingen voorafgaand aan de les de stof rond merkwaardige producten zelf behandeld. De docent – Hermien Eigeman – bedacht de volgende opdracht (zie figuur 3) om de leerlingen op een andere manier naar dergelijke producten te laten kijken.

$x^2 - 4x + 8$	$x^2 + 9$	$x^2 + 4x + 16$
$x^2 - 36$	$x^2 + 2x + 1$	$x^2 - 64$
$x^2 - 22x + 121$	$x^2 - 6x + 12$	$x^2 - 10x + 25$
$x^2 - 144$	$x^2 - 49$	$x^2 - 16x + 64$
$x^2 + 81$	$x^2 + 5x + 25$	$x^2 - 6x + 6$
$x^2 + 8x + 16$	$x^2 - 18x + 81$	$x^2 - 20x + 100$
$x^2 + 25$	$x^2 + 26x + 169$	$x^2 + 4x + 4$

fig. 3 Kwadratische vormen.

De opdracht was om een serie kwadratische expressies in te delen in twee groepen: expressies die iets met merkwaardig producten te maken hebben en expressies die geen resultaat van zo'n product lijken te zijn (zie ook bijvoorbeeld Doorman, 2011). Nu dus niet van $(a - b)^2$ naar $a^2 - 2ab + b^2$, maar van het resultaat naar het oorspronkelijke product. Deze ingreep was bedoeld voor een klassikale discussie van 15 minuten. De expressies stonden op losse kaartjes; voor elk groepje een set. De kaartjes waren ook zichtbaar op het smartboard, zodat het tonen en indelen snel kon gebeuren en ook voor leerlingen aantrekkelijk was om te doen. De docent gaf geen antwoord op de vraag of een kaartje goed lag, maar gaf alleen aan of de totale indeling juist was. Dit wekte nieuwsgierigheid naar wat de juiste indeling moest zijn. Door deze activiteit werden de leerlingen enorm gemotiveerd om de 'fouten' te vinden en

bekeken ze nog eens goed de theorie in het boek. Een aantal leerlingen had het idee dat de a en b in het boek iets te maken had met de a en b in $ax^2 + bx + c$. en zagen niet de relatie tussen de merkwaardige producten in het boek en de expressies op het scherm. Deze misvatting was anders niet boven tafel gekomen. De docent realiseerde zich weer eens hoe conventies ontstaan en hoe makkelijk leerlingen verkeerde patronen inslijpen.

Voor zowel leerlingen als docent was deze ingreep een openbaring; voor de leerlingen, omdat ze nu zagen hoe je een merkwaardig product kunt herkennen, en voor de docent, omdat dankzij de opdracht verschillende verkeerde concepties boven tafel kwamen.

Achtergrond

Deze voorbeelden zijn door docenten ontwikkeld en uitgevoerd in het kader van een nascholingstraject Onderzoekend leren. Dit traject is mogelijk gemaakt dankzij het Europese Primasproject². In Europa is sinds enkele jaren aandacht voor onderzoekend leren: onderwijs met inbreng van en een actieve rol voor leerlingen. Het doel is dat leerlingen beter leren, meer eigenaar van de lesstof zijn, onderzoeksvaardigheden en een onderzoekende houding ontwikkelen en dat docenten beter zicht hebben op de capaciteiten van hun leerlingen en in het onderwijs daar beter op kunnen aansluiten. Dit doel sluit aan bij wat in Europees jargon heet de wensen van de huidige samenleving. Onze samenleving vraagt om vaardigheden als probleemoplossen, in groepen kunnen werken, creativiteit, onderzoeksattitude, flexibiliteit en kritisch burgerschap. Uit een Europees onderzoek blijkt dat op beleidsniveau veel gebeurt om onderzoekend leren te stimuleren, maar dat de lespraktijk in veel landen gericht is op grotendeels gedateerde basiskennis en (rigide) vaardigheden (Rocard e.a., 2007).

Wat onderzoekend leren voor de lespraktijk betekent, is niet vanzelfsprekend. Te gemakkelijk wordt vaak gedacht dat een gestructureerd probleem (a t/m h) eenvoudig te transformeren is tot een open probleem (geef alleen vraag h) en dat leerlingen dan vanzelf onderzoekend aan de slag gaan. Discussies over en onderzoek naar effecten van deze onderwijsbenadering leiden snel tot conclusies als (Kirschner e.a., 2006):

- Alleen gerichte instructie en herhaald oefenen hebben effect op het langetermijngeheugen.
- Als leerlingen alles zelf moeten ontdekken, raken ze gefrustreerd.
- Onderzoekend leren werkt pas als leerlingen voldoende kennis en motivatie hebben om zichzelf te sturen.

Het grootste probleem blijkt de mate van begeleiding en structuur die voor leerlingen aanwezig moeten zijn, ook bij onderzoekend leren. De vraag is dan hoe deze steun vorm kan krijgen als die niet in de opgaven zit. Het Primasproject probeert handvatten te ontwikkelen voor het beantwoorden van deze vraag.

Primas en onderzoekend leren

Het Primasproject brengt docentvaardigheden voor onderzoekend leren in kaart en ontwikkelt nascholing waarmee docenten zich deze vaardigheden eigen kunnen maken. In de eerste module staat de organisatie van een les centraal waarin leerlingen aan een open probleem werken. Een video van een les illustreert hoe een docent dat doet en in vijftig minuten met de hele klas de fases van exploratie, probleemformulering, systematisch onderzoek en rapportage van bevindingen organiseert. Bovenstaande voorbeelden zijn uitgevoerd na de cursusbijeenkomst met deze module. De lesindeling bij de eerste opdracht was:

- Werkblad uitdelen en groepjes laten bedenken wat de bedoeling is. Na enkele minuten de klas vragen of ze aan de slag kunnen.
- Na circa vijf minuten kort de antwoorden bespreken en vragen hoe je zelf een piramide-opgave kunt maken. Aangeven dat hun opgaven de komende les als oefenmateriaal gebruikt zullen worden. Zorg eventueel voor een goede verdeling van typen piramides (met wortels, breuken, etcetera).
- Vervolgens gaat iedereen weer aan de slag. Vraag bij alle groepjes naar de aanpak.

Zo'n lesindeling is belangrijk als de opdracht zelf weinig structuur biedt. Een ander onderwerp dat van belang is voor onderzoekend leren, is de manier waarop we vragen stellen aan leerlingen. De module rond vragen stellen is bedoeld om docenten bewust te maken van effecten van technieken om vragen te stellen. Bijvoorbeeld:

- Geen vingers, geef iedereen tijd om zelf te denken. – Geef iedereen voldoende denktijd.
- Vraag door op reacties van leerlingen, laat andere leerlingen met een antwoord verder gaan, laat anderen verduidelijken of samenvatten.
- Gebruik werkvormen als denken, delen, uitwisselen.

Dergelijke tips lijken misschien triviaal, maar uit onderzoek in Engeland bleek bijvoorbeeld dat de gemiddelde denktijd voor leerlingen minder dan één seconde is. Hetzelfde onderzoek toonde aan dat wanneer een docent na een opmerking een waardeoordeel gaf, dit een negatief effect had op de betrokkenheid van leerlingen, zelfs met een positief oordeel zoals "goed gedaan!". Des te minder verbale beloningen er waren, des te beter bleven de leerlingen betrokken bij de discussie. Wanneer een docent elke reactie beoordeeld met 'ja', 'goed', 'bijna', enzovoorts, denken leerlingen vermoedelijk snel bij zichzelf: "De docent zei dat het goed was. Dat was niet wat ik wilde zeggen. Dus wat ik wilde zeggen, kan niet goed zijn. Dus zeg ik niks."

Leerlingen kunnen heel goed in actieve vormen van samenwerken inzichten construeren. Daarbij kan een rubric helpen om hen bewust te maken van de doelen van de opdracht of om hen elkaars werk te laten beoordelen. Dat blijkt een effectieve methode voor het geven van feedback. Die feedback is essentieel om duidelijk te maken dat het hier niet alleen gaat om een goed cijfer of om het aftekenen van een opdracht, maar dat ze gelegenheid krijgen om hun werk te verbeteren en daarmee beter leren onderzoekend te leren.

Binnen het Primas-project wordt met verschillende perspectieven gewerkt aan een bewustwording van de mogelijkheden van onderzoekend leren. Juist die aspecten van onderzoek die met een open en kritische houding te maken hebben, blijken goed in te zetten in veel van de gewone lessen. Op de website vind u (nascholings)materiaal en inspiratiebronnen voor uw eigen lessen.

Literatuur

- Doorman, M. (2011). Kwartetten met tabellen en grafieken. *Nieuwe Wiskrant*, 31(1), 25-28.
- Drijvers, P. (2011). Wat bedoelen ze toch met... denkactiviteiten? *Nieuwe Wiskrant*, 31(2), 38-41.
- Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, 41, 75-86.
- Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H. & Hemm, V. (2007). *Science Education Now: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe*. Brussels: Directorate General for Research, Science, Economy and Society.
- Rowe, M. B. (1974). Wait time and rewards as instructional variables, their influence on language, logic and fate control. *Journal of Research in Science Teaching*, 11, 81-94.

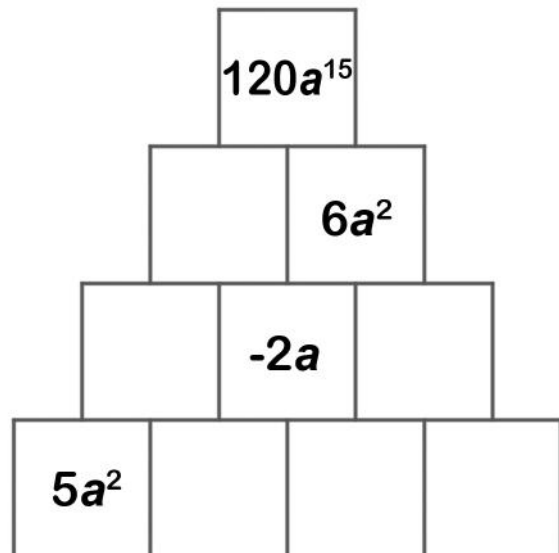
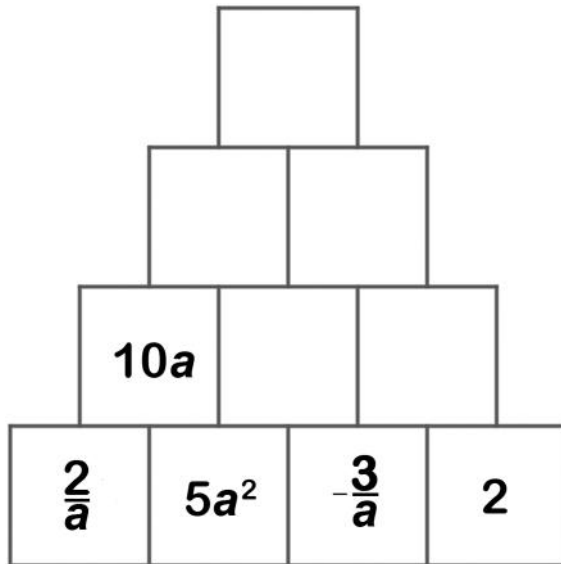
Noten

- [1] Informatie over de cursus: <http://www.betasteun.punt-utrecht.nl/index.php?pid=260>
- [2] <http://www.primas-project.eu>

Werkblad

Twee vermenigvuldigpiramides.

Opdracht 1: Vul de ontbrekende vakjes in.



Opdracht 2: Ontwerp zelf een makkelijke en een moeilijke piramide die iemand anders moet kunnen oplossen. Deze zullen de komende les als oefenmateriaal gebruikt worden.

Voorwaarden:

- Maak zo min mogelijk bekende vakjes.
- Gebruik optellen of vermenigvuldigen.
- Probeer gebruik te maken van wortels, haakjes, wetenschappelijke notatie, machten en breuken.

Bijlage 2

Artikel: "Wat zijn denkactieve opgaven?"

Sanne Schaap (S.Schaap@stanislascollege.nl)

Onderstaan document is slechts 'een aanzet tot...'. De lezer wordt van harte uitgenodigd aanvullingen en aanmerkingen te geven op dit document.

Inleiding

Als één van de werkgroepen bij de Leergang Vernieuwing Wiskundeonderwijs Delft hebben we ons tot doel gesteld een aanzet te geven voor een *leergang wiskundige denkactiviteiten*.

Tijdens een eerste inventarisatie merkten we op dat er al redelijk wat opgaven beschikbaar zijn die wiskundige denkactiviteiten zouden kunnen stimuleren. Het leek ons dan ook niet zinnig om alleen nog meer van dergelijke opgaven te bedenken. Het zou juist nuttig zijn om te bedenken waaraan je een denkactieve opgave kunt herkennen (en dus kunt selecteren of zelf ontwerpen) en hoe je de gevonden denkactieve opgaven kunt inbouwen in het curriculum, dusdanig dat er een leerlijn WDA ontstaat én dat deze leerlijn een coherent geheel vormt met het gehele wiskunde curriculum (bijvoorbeeld: hoe verschilt een denkactieve opgave in klas 1 van een denkactieve opgave in de examenklas).

In dit artikel wordt verkend wat belangrijke elementen van een denkactieve opgave zouden kunnen zijn. Daarbij wordt gebruik gemaakt van aanwezige literatuur.

Conceptueel raamwerk

Een opgave is voor een leerling alleen een denkactieve opgave wanneer het niet een routineopgave voor hem of haar is. Er is dus geen sprake van *reproductie* van een geleerde procedure die onderdeel is van het curriculum, maar van *productie*. De leerling ziet daarbij niet meteen een oplossingsweg, en ervaart de opgave daardoor als een *probleem* (van Streun & Kop, 2012; van Streun, ongepubliceerd). Van Streun en Kop (2012) geven daarom de suggestie om per jaar en schooltype vast te leggen wat als probleem kan worden opgevat en wat als routine. Ze citeren Ehrenfest-Afanassjewa die aangeeft dat de start van een nieuw onderwerp een goed moment is om het opbouwen van de stof te laten beleven. Juist op die plek ervaren de leerlingen als het goed is de nieuwe stof als een probleem, maar is de nieuwe stof binnen handbereik, omdat het verbonden is met eerder geleerde stof die als productie kan worden beschouwd. Op een dergelijk plek zou het inzetten van denkactieve opgaven dus geschikt kunnen zijn.

In haar visiedocument *Rijk aan Betekenis* en in haar eindrapport *Denken en doen* benoemt cTWO (2007; 2012) de volgende activiteiten als wiskundige denkactiviteiten:

- modelleren en algebraïseren,
- ordenen en structureren,
- analytisch denken en probleemoplossen,

Dit materiaal is gemaakt gedurende de
Leergang Wiskunde Delft, voorjaar 2014

- formules manipuleren,
- abstraheren, en
- logisch redeneren en bewijzen.

Deze activiteiten zijn vaak met elkaar verweven (Drijvers, 2011; Van Streun, ongepubliceerd). Een leerling zal bij het succesvol maken van een denkactieve opgave dus vaak meerdere van bovenstaande denkactiviteiten uitvoeren.

(mathematisch) modelleren

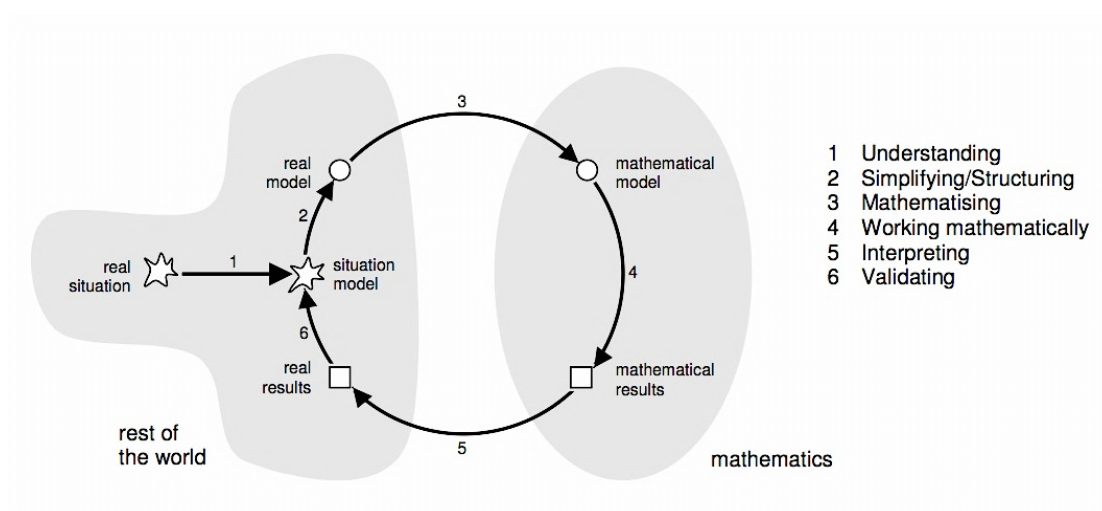
Welke activiteiten zijn karakteristiek voor het mathematisch modelleren?:

- algebraïseren
 - o verkennen, structureren en simplificeren van de situatie, d.m.v. visualiseren, schematiseren en representeren
 - o relevante variabelen identificeren,
 - o herkennen van een verband tussen de relevante variabelen,
 - o omzetten van een verband tussen variabelen naar een formule.
- uitvoeren van wiskundige bewerkingen (geeft wiskundig resultaat)
- inbedden van wiskundige resultaat in oorspronkelijke probleemsituatie
- valideren van ingebedde resultaat

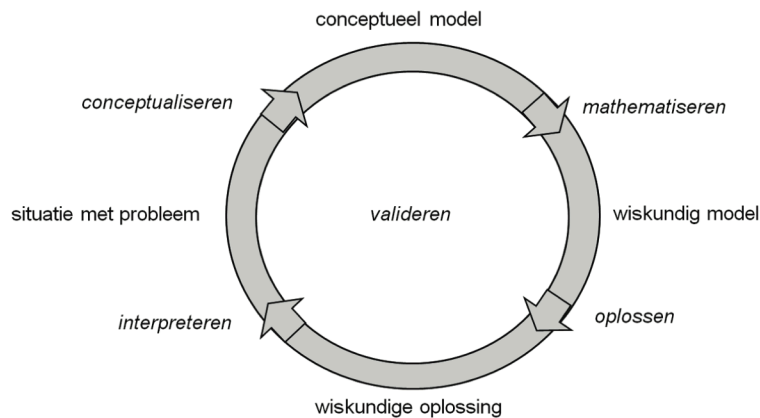
(Blum & Leiß, 2005; cTWO, 2007; Schaap et al., 2011b; Van Streun, 2007)

Voor algebraïseren is een *functionele situatie* (Schaap et al., 2011b) vereist, dat wil zeggen: situaties die functioneel zijn voor het beantwoorden van een opgave.

Wanneer bij het mathematisch modelleren een situatie niet vertaald wordt naar een formule, maar naar een andere wiskundige representatie (zoals een tabel of een grafiek), dan spreken we niet van algebraïseren, maar in bredere zin van mathematiseren. Ook in dat geval spreken we van mathematisch modelleren. Zie onderstaande modelleercycli (Blum & Leiß, 2005;).



Modelleercycli van Blum en Leiß (2005)



Modelleercyclus van Spandaw en Zwaneveld (2012)

Bij het ontwerpen van een denkactieve opgave waarbij modelleren wordt beoogd, kan de opgavenmaker/docent proberen om meerdere van bovenstaande activiteiten in de opgave terug te laten komen. Daarnaast zou de opgavenmaker/docent zich kunnen richten op de *belemmeringen* die de leerlingen mogelijkervaren bij het modelleren en de *kansen* die zij aangrijpen om deze belemmeringen op te heffen of te verminderen.

Galbraith en Stillman (2006) hebben een raamwerk opgezet om blokkades in overgangen in het modelleerproces te kunnen beschrijven. Zie het kader op de volgende bladzijde.

Schaap et al (2011a) hebben voorgesteld voor het identificeren van belemmeringen en kansen bij leerlingen dit raamwerk uit te breiden met probleem aanpak strategieën¹, metacognitie² en beliefs³. Met een dergelijk raamwerk vonden zij tijdens hun onderzoek bij leerlingen de volgende kansen: tussenresultaten opschrijven, de probleemsituatie tekenen, het probleem verkennen, het herlezen van de probleemtekst, onbewust het probleem vereenvoudigen, het proces vertragen door de tijd te nemen, het model controleren door een schatting te maken, aannemen dat een (tussen)resultaat klopt. Daarnaast werden de volgende belemmeringen gevonden: het doen van foute aannames, relevante variabelen niet herkennen, niet in staat zijn de specificaties van een relevante variabele om te zetten in een relatie, wat niet in de probleemtekst staat hoeft niet gebruikt te worden in de berekeningen, het gebrek aan algebraïsche vaardigheden, belangrijke elementen in de probleemtekst over het hoofd zien, een belemmerende formulering van de probleemtekst, een blokkade in communicatie.

¹ Ook wel heuristieken (Polya, 1988) genoemd. Zie voor een beschrijving van heuristieken verderop in dit document.

² metacognitie: zelf-regulering of '*monitoring en control*' van je probleemaanpak valt onder de term metacognitie (Schoenfeld, 1992).

³ beliefs: je opvatting over je eigen kunnen en de opvatting over het nut van wiskunde (Schoenfeld, 1992).

1. MESSY REAL WORLD SITUATION → REAL WORLD PROBLEM STATEMENT:

- 1.1 Clarifying context of problem [ACTING OUT, SIMULATING, REPRESENTING, DISCUSSING PROBLEM SITUATION]
- 1.2 Making simplifying assumptions [RUNNERS WILL MOVE IN STRAIGHT LINES]
- 1.3 Identifying strategic entit(ies) [RECOGNISING LENGTH OF LINE SEGMENT AS THE KEY ENTITY]
- 1.4 Specifying the correct elements of strategic entit(ies) [IDENTIFYING *SUM* OF THE *TWO CORRECT LINE SEGMENTS*]

2. REAL WORLD PROBLEM STATEMENT → MATHEMATICAL MODEL:

- 2.1 Identifying dependent and independent variables for inclusion in algebraic model [TOTAL RUN LENGTH AND DISTANCE OF STATION FROM CORNER]
- 2.2 Realising independent variable must be uniquely defined [CANNOT USE x FOR DISTANCE FROM BOTH A & B]
- 2.3 Representing elements mathematically so formulae can be applied [TOTAL LENGTH EXPRESSED IN TERMS OF EDGE DISTANCES ALONG THE FIELD]
- 2.4 Making relevant assumptions [PYTHAG. TH. IS APPROPRIATE GIVEN STRAIGHT LINE APPROXIMATIONS TO PATHS]
- 2.5 Choosing technology/mathematical tables to enable calculation [RECOGNISING HAND METHODS IMPRACTICAL]
- 2.6 Choosing technology to automate application of formulae to multiple cases [*LISTS* HANDLE *MULTIPLE X-VALUES*]
- 2.7 Choosing technology to produce graphical representation of model [SPREADSHEET OR GRAPHING CALCULATOR WILL GENERATE PLOT OF L FOR *DIFFERENT X-VALUES*]
- 2.8 Choosing to use technology to verify algebraic equation [RECOGNISING GRAPHING CALCULATOR FACILITY TO GRAPH L VERSUS x]
- 2.9 Perceiving a graph can be used on function graphers but not data plotters to verify an algebraic equation [GRAPHING CALCULATOR CAN PRODUCE GRAPH OF FUNCTION TO FIT POINTS – SPREADSHEET CANNOT]

3. MATHEMATICAL MODEL → MATHEMATICAL SOLUTION:

- 3.1 Applying appropriate formulae [$L = \sqrt{(14400+X^2)} + \sqrt{(1600+(240-X)^2)}$, WITH RELEVANT x -VALUES SELECTED]
- 3.2 Applying algebraic simplification processes to symbolic formulae to produce more sophisticated functions [PRODUCING ALGEBRAIC EQUATION FROM MANIPULATION OF LIST FORMULAE]
- 3.3 Using technology/mathematical tables to perform calculation [SUCCESSFUL CALCULATION OF L -VALUE]
- 3.4 Using technology to automate extension of formulae application to multiple cases [EFFECTIVE USE OF *LISTS*]
- 3.5 Using technology to produce graphical representations [USE OF SPREADSHEET CHART/GRAPHING CALCULATOR]
- 3.6 Using correctly the rules of notational syntax (whether mathematical or technological) [CORRECT USE OF ALGEBRAIC NOTATION IN EQUATIONS]
- 3.7 Verifying of algebraic model using technology [GRAPHING A FUNCTION TO MATCH A DATA PLOT]
- 3.8 Obtaining additional results to enable interpretation of solutions [CALCULATING & PLOTTING EXTRA VALUES TO TEST HUNCHES OR SUSPICIONS]

4. MATHEMATICAL SOLUTION → REAL WORLD MEANING OF SOLUTION:

- 4.1 Identifying mathematical results with their real world counterparts [INTERPRETING L -VALUES IN TERMS OF RESPECTIVE CHECKPOINT STATIONS].
- 4.2 Contextualising interim and final mathematical results in terms of RW situation (routine → complex versions) [INDIVIDUAL L -VALUES GIVE STATION SPECIFIC RESULTS: STRATEGY DECISIONS (E.G. OPTIMUM POSITIONING OF STATION – REQUIRE EXTENDED COMPARATIVE DATA)]
- 4.3 Integrating arguments to justify interpretations [PRESENTING REASONED CHOICE FOR OPTIMUM PLACEMENT OF STATION IN TERMS OF GRAPHICAL BEHAVIOUR]
- 4.4 Relaxing of prior constraints to produce results needed to support a new interpretation [PLACING 19TH STATION – NEED TO BREAK PATTERN OF SUCCESSIVE STATIONS AT 10M INTERVALS]
- 4.5 Realising the need to involve mathematics before addressing an interpretive question [BE UNWILLING TO SUGGEST POSITION OF OPTIMALLY LOCATED STATION WITHOUT SOME MATHEMATICAL SUPPORT]

5. REAL WORLD MEANING OF SOLUTION → REVISE MODEL OR ACCEPT SOLUTION:

- 5.1 Reconciling unexpected interim results with real situation [RECALCULATING L -VALUE AS CONSEQUENCE OF OBVIOUS ERROR WHEN COMPARED TO NEIGHBOURING VALUES]
- 5.2 Considering Real World implications of mathematical results [LOCAL – DO INDIVIDUAL CALCULATIONS/GRAPHS ETC MAKE SENSE WHEN TRANSLATED TO REAL WORLD MEANINGS?]
- 5.3 Reconciling mathematical and Real World aspects of the problem [L -VALUES SHOULD VARY STEADILY WITH CHANGING STATION LOCATIONS]
- 5.4 Realising there is a limit to the relaxation of constraints that is acceptable for a valid solution [19TH STATION MUST BE ON AB – NOT ON STRAIGHT LINE JOINING GATES]
- 5.5 Considering real world adequacy of model output globally [MODEL PROVIDES ALL ANSWERS TO RW PROBLEM?]

Emergent raamwerk van Galbraith en Stillman (2006)

Analytisch denken en probleemoplossen

Het gaat hierbij om het kiezen van een probleemaanpak, de vaardigheid om het probleem te kunnen formuleren, de vaardigheid om het probleem te kunnen representeren en de vaardigheid om oplossingsstrategieën te vinden (Drijvers, 2011).

Polya (1988) heeft heuristieken beschreven die moeten helpen een probleem op te lossen.

Zie onderstaand kader.

1. UNDERSTANDING THE PROBLEM

- **First.** You have to *understand* the problem.
- What is the unknown? What are the data? What is the condition?
- Is it possible to satisfy the condition? Is the condition sufficient to determine the unknown? Or is it insufficient? Or redundant? Or contradictory?
- Draw a figure. Introduce suitable notation.
- Separate the various parts of the condition. Can you write them down?

2. DEVISING A PLAN

- **Second.** Find the connection between the data and the unknown. You may be obliged to consider auxiliary problems if an immediate connection cannot be found. You should obtain eventually a *plan* of the solution.
- Have you seen it before? Or have you seen the same problem in a slightly different form?
- *Do you know a related problem?* Do you know a theorem that could be useful?
- *Look at the unknown!* And try to think of a familiar problem having the same or a similar unknown.
- *Here is a problem related to yours and solved before. Could you use it?* Could you use its result? Could you use its method? Should you introduce some auxiliary element in order to make its use possible?
- Could you restate the problem? Could you restate it still differently? Go back to definitions.
- If you cannot solve the proposed problem try to solve first some related problem. Could you imagine a more accessible related problem? A more general problem? A more special problem? An analogous problem? Could you solve a part of the problem? Keep only a part of the condition, drop the other part; how far is the unknown then determined, how can it vary? Could you derive something useful from the data? Could you think of other data appropriate to determine the unknown? Could you change the unknown or data, or both if necessary, so that the new unknown and the new data are nearer to each other?
- Did you use all the data? Did you use the whole condition? Have you taken into account all essential notions involved in the problem?

3. CARRYING OUT THE PLAN

- **Third.** *Carry out* your plan.
- Carrying out your plan of the solution, *check each step*. Can you see clearly that the step is correct? Can you prove that it is correct?

4. Looking Back

- **Fourth.** *Examine* the solution obtained.
 - Can you *check the result*? Can you check the argument?
 - Can you derive the solution differently? Can you see it at a glance?
- Can you use the result, or the method, for some other problem?

Samenvatting van Polya's "How to Solve it" : <http://www.math.utah.edu/~pa/math/polya.html>.

Kritiek op deze heuristieken is dat deze heuristieken geschikt zijn om te benoemen hoe je een probleem hebt opgelost, maar niet geschikt zijn om een probleem mee op te lossen (o.a. Schoenfeld, 1992); de beschreven heuristieken hebben met andere woorden een descriptieve functie in plaats van een prescriptieve functie.

Formules manipuleren

Naast dat de leerling over *algebraïsche vaardigheden* moet beschikken om formules om te kunnen vormen, moet de leerling inzicht ontwikkelen in de structuur van formules en zicht hebben op het te volgen oplossingsproces als geheel (cTWO, 2007). Het gaat hier dus om het ontwikkelen van *symbol sense* (Arcavi, 1997).

Symbol sense is van belang bij plannen, coördineren en interpreteren van algebraïsche basisprocedures en omvat *strategisch werken*, *globaal kijken* en *algebraïsch redeneren* (Drijvers, 2012). Zie onderstaand kader. Bij het kiezen van de opgaven is het daarbij goed een *variatie van opgaven* te gebruiken, waardoor zich verrassingen voordoen – die zorgen voor een frisse kijk op het probleem – of zelfs crises, die uitnodigen tot een andere aanpak.

- *Strategische vaardigheden* om een geschikte probleemaanpak te kiezen, om tijdens de uitvoering daarop overzicht te houden, om daarbinnen handige keuzes te maken en om, als een strategie vastloopt, een andere invalshoek te zoeken.
- Het vermogen om *globaal te kijken* naar expressies en formules, om de structuur van (deel-) expressies te doorzien, om de betekenis van symbolen in de context te herkennen en om expressies op een andere manier weer te geven.
- Het vermogen tot *algebraïsch redeneren*. Denk bijvoorbeeld aan het herkennen van ‘winnende’ factoren in een formule, aan symmetrieoverwegingen of aan redeneringen met randgevallen.

Literatuur

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sensemaking in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.

Blum, W. & Leiß, D. (2005). „Filling Up“– the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosch (red.), *Proceedings of the Working Group on Mathematical Modelling and Applications at the 4th Conference on European Research in Mathematics Education (CERME-4)*. Gerona, Spain: FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull.

cTWO (2007). *Rijk aan Betekenis: Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO.

cTWO (2012). *Denken & doen. wiskunde op havo en vwo per 2015*. Utrecht: cTWO.

Drijvers, P. (2011). [Wat bedoelen ze toch met... denkactiviteiten?](#) *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 31 (2), 38-41.

- Drijvers, P. (2012). [Wat bedoelen ze toch met... symbol sense?](#) *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 31 (3), 39-42.
- Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the Modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 143-162.
- Polya, G. (1988). *How to solve it* (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press.
- Schaap, S., Vos, P. & Goedhart, M. J. (2011a). Students overcoming blockages while building a mathematical model; exploring a framework. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (red.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 137-146). New York: Springer.
- Schaap, S., Vos, P., T. Ellermeijer, T. & M. Goedhart, M. (2011b). De vertaalslag van een situatie naar een wiskundige formule; een studie naar vraagstellingen en leerlingprestaties op het centraal examen Wiskunde B1. *Tijdschrift voor Didactiek der b -wetenschappen* 28 (1) 3-31.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: Macmillan.
- Spandaw, J., & Zwaneveld, B. (2012). Modelleren, van werkelijkheid naar wiskunde en weer terug. In P. Drijvers, A. van Streun, & B. Zwaneveld, *Handboek Wiskundendidactiek* (pp. 235-264). Utrecht: Epsilon.
- Van Streun, A. (2007). Parate kennis en algebra; Aflevering 2: Symbol sense. *Euclides*, 82(4), 151-152.
- Van Streun, A., & Kop, P. (2012). Wiskundige denkactiviteiten. In P. Drijvers, A. van Streun, & B. Zwaneveld (Eds.), *Handboek voor wiskundendidactiek* (pp. 339–368). Amsterdam: Epsilon Uitgaven.
- Van Streun, A. (ongepubliceerd). Wiskundige denkactiviteiten versie 2. Conceptversie. Gedownload op 8 februari 2014 van <http://www.fi.uu.nl/ctwo/WDA/docs/WDA2.doc>.