

Hoe reKent Nederland?

Hoe rekent Nederland?

Rede
uitgesproken bij de aanvaarding
van het ambt van gewoon hoogleraar
in de Didactiek van het Wiskundeonderwijs
aan de Faculteit Bètawetenschappen
van de Universiteit Utrecht

door

**Martha Henrica Antonetta Maria
van den Heuvel-Panhuizen**

op dinsdag 10 maart 2009



Universiteit Utrecht

“Thus, a teacher of mathematics has a great opportunity. If he fills his allotted time with drilling his students in routine operations he kills their interest, hampers their intellectual development, and misuses his opportunity. But if he challenges the curiosity of his students by setting them problems proportionate to their knowledge, and helps them to solve their problems with stimulating questions, he may give them a taste for, and some means of, independent thinking.”

Pólya, 1945¹

Uitgave

Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en
Natuurwetenschappen (FISME), Universiteit Utrecht
© 2009 M. van den Heuvel-Panhuizen
ISBN 978-90-74684-31-6

Druk

All Print, Utrecht

Omslag

Grafische vormgeving Reyndert Guiljam

Toelichting

Mensen, apen, dolfijnen en duiven kunnen het, en nu blijken ook insecten het te kunnen. Onlangs hebben onderzoekers uit Duitsland en Australië vastgesteld dat honingbijen (*Apis mellifera*) kunnen tellen, tot vier wel te verstaan.² Uit het onderzoek kwam naar voren dat ze niet alleen het verschil kunnen zien tussen twee en drie stippen, maar dat honingbijen deze kennis ook kunnen gebruiken om drie van vier te onderscheiden zonder dat ze daarvoor aanvullende training hebben gehad.

*Mijnheer de Rector,
waarde collega's, lieve familie en vrienden,*

Dit wordt een rede over de staartdeling, want of de Nederlandse basisschoolleerling vandaag de dag nog zo'n deling kan maken, is nog steeds *de* brandende vraag die opkomt als het gaat om hoe Nederland rekt. Ofschoon de discussie over de staartdeling de laatste decennia eigenlijk nooit echt is verstomd³, is deze in het recente debat over de kwaliteit van het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs weer helemaal in het middelpunt van de belangstelling komen te staan.⁴

Aangevoerd door degenen die terug willen naar het rekenonderwijs van veertig jaar geleden—toen de staartdeling nog een prominente plaats innam in het Nederlandse rekenprogramma—vullen krantenkolommen zich met de voor waar aangenomen 'achteruitgang' van de Nederlandse rekenvaardigheid. In deze stukken wordt vaak met een beschuldigende vinger gewezen naar het huidige reken-wiskundeonderwijs en de mensen die in de afgelopen veertig jaar aan de ontwikkeling hiervan hebben gewerkt. In plaats van duidelijk te maken met hoeveel veldoverleg dit innovatieproces is gepaard gegaan⁵, wordt gesteld dat de vernieuwde rekenaanpak aan de Nederlandse methodeschrijvers en leraren is opgelegd. Niets is minder waar. Nederland kent geen staatsdidactiek. Nederlandse basisschoolleraars zijn altijd vrij geweest in wat en hoe ze onderwijzen, zolang ze zich maar hielden aan de globaal voorgeschreven leerstof per leerjaar en het aantal uren per vak.⁶

Sinds 1993 zijn daar de kerndoelen als richtsnoer bijgekomen, maar ook deze houden nog geen staatsdidactiek in. Als methodeschrijvers en leraren—binnen dit doelenkader—terug willen naar het rekenen van vroeger, bestaat daarvoor geen enkele wettelijke belemmering; de kerndoelen voor rekenen-wiskunde in het primair onderwijs passen op een A-viertje⁷ en zijn multi-interpretabel.

De tegenstanders van het tegenwoordige rekenonderwijs pleiten voor rekenen met kale getallen, waarbij de leraar de sommen voordoet en de leerling deze al nadoende leert. Voor elke bewerking wordt één procedure voorgeschreven, namelijk die van het cijferen, waarmee al wordt begonnen bij het rekenen tot 100. Er dient veel geoefend te worden en door dat oefenen zou het inzicht vanzelf ontstaan.^{8 / 9} Tegelijk met dit pleidooi wordt een groot aantal misvattingen en onjuistheden over het huidige rekenonderwijs in de media gedebiteerd.¹⁰ Zo kan men regelmatig lezen:

- dat bij realistisch rekenonderwijs niet geoefend wordt. Deze opvatting is in flagrante tegenspraak met de lange traditie die realistisch reken-wiskundeonderwijs heeft op het gebied van oefenen¹¹—al verstaan we daar, zoals Jan van Maanen¹² twee jaar geleden in zijn oratie duidelijk maakte, wel wat anders onder dan het oefenen zonder begrip en samenhang.
- dat realistisch rekenonderwijs inhoudt dat het cijferen is afgeschaft. Onwaar. Zie wat in de Proeve¹³ en de TAL-leerlijnen¹⁴ hierover is geschreven en kijk wat het Cito meldt in het laatste PPO-rapport.¹⁵ De traditionele cijferalgoritmen worden nog volop onderwezen, al moet hier direct aan toegevoegd worden dat de mate waarin dat gebeurt per methode sterk verschilt.¹⁶

Een andere onjuistheid in de berichtgeving is, dat het traditionele cijferalgoritme en de kolomsgewijze aanpak met hele getallen ten onrechte als twee tegengestelde eindvormen worden geafficheerd, terwijl de kolomsgewijze aanpak juist bedoeld is als een inzichtelijke opmaat naar dat cijferalgoritme. Verder zijn de in de media gegeven voorbeelden van de kolomsgewijze aanpak vaak ronduit stuitend: één grote chaos en gegoochel met getallen waarmee men geen kind zou willen lastig vallen.

- dat het bij realistisch rekenonderwijs voornamelijk gaat om het maken van verhaaltjessommen.

Ook dit klopt niet. Sla maar een willekeurig realistisch lesboek open. Wat men ziet zijn grote aantallen kale sommen. Al past ook hier de aantekening dat de aantallen per methode wel variëren.

- dat realistisch rekenonderwijs betekent zoveel mogelijk verschillende strategieën aanleren.

Onjuist. Er wordt aangesloten bij wat de kinderen zelf bedenken en doen —daarin zit een natuurlijke variatie—en van daaruit wordt geleidelijk naar een standaardmanier toegewerkt, die echter geen keurslijf is. De leerlingen moeten oog hebben voor de getallen waarmee ze rekenen en indien mogelijk verkorte rekenmanieren toepassen.

- dat alle realistische lesboeken slecht zijn.¹⁷

Alle op dit punt uitgevoerde onderzoeken logenstraffen deze boude bewering. Volgens het Cito is er evidentie dat de nieuwere methoden tussen 1992 en 2004 een klein, maar wel positief summatief effect hebben gehad op de prestaties van de leerlingen.¹⁸ Zonder deze methoden zouden de prestaties dus waarschijnlijk minder zijn geweest.

- dat de gemiddelde leerling die groep 8 verlaat niet kan rekenen.

Ook deze uitspraak moet naar het rijk der fabelen worden verwezen. Neem de laatste TIMSS-gegevens over groep 6. Als het waar is dat de gemiddelde leerling niet kan rekenen, dan geldt dit niet alleen voor ons land, maar ook voor alle andere Westerse landen die aan dit internationale onderzoek hebben meegedaan. Ik kom hierop nog terug, evenals op de voor vaststaand aangenomen achteruitgang van de rekenprestaties.

- dat men zich piekerend afvraagt waarom het onderwijs in Nederland is vernieuwd en daarbij suggereert dat er sprake is van een soort nationale didactische dwaling. Utlatingen als deze getuigen van het ontbreken van enige kennis over de problemen waar het rekenonderwijs veertig jaar geleden nationaal en internationaal mee kampte en over het vele onderzoek dat sindsdien is uitgevoerd om deze problemen op te lossen. Over deze ontwikkelingen en de huidige opvattingen over het rekenonderwijs hebben Verschaffel, Greer en De Corte onlangs gerapporteerd in het gerenommeerde *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*.¹⁹ Voor iedereen die het verslag van hun review-studie leest, zal het duidelijk zijn, dat de Nederlandse onderzoekers die gewerkt hebben aan realistisch reken-wiskundeonderwijs geen werk in achterkamertjes hebben verricht, maar een alom gewaardeerde, toonaangevende bijdrage hebben geleverd aan de internationale ontwikkeling van het rekenonderwijs.

Met een vak als ‘didactiek van reken-wiskundeonderwijs’ dat zo in ontwikkeling is, waarin zoveel interessant onderzoek gaande is, waarover zoveel valt te melden, heb ik er toch voor gekozen om in het belang van goed reken-wiskundeonderwijs in deze rede het ontstane, foutieve beeld te corrigeren. Behalve dat ik hiermee recht wil doen aan diegenen die hebben bijgedragen aan de ontwikkeling en realisatie van het huidige rekenonderwijs, doe ik dit ook ter ondersteuning van de leraren die iedere dag bezig zijn om hun leerlingen te leren rekenen.

Deze rechtzetting betekent geenszins dat ik niet met een kritische blik naar realistisch reken-wiskundeonderwijs wil kijken, noch dat mijn boodschap is dat alles goed is met het reken-wiskundeonderwijs in Nederland en dat we ons geen zorgen hoeven te maken over de rekenvaardigheid van onze leerlingen. Zorgpunten te over, maar belangrijk is dat we ons bij het werken aan die punten baseren op de feiten.

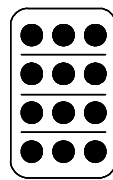
De staartdeling een kwart eeuw geleden

In 1983 kwam Fred Goffree met het idee om naar analogie van de in datzelfde jaar door het Avro-programma *Vinger aan de pols* gehouden nationale enquête *Hoe bevalt Nederland?*, te onderzoeken hoe op een gewone dag in november, op een gewone basisschool in Nederland een rekenles eruit ziet. Het werd dinsdag 15 november 1983. Goffree vroeg mij om samen met hem dit onderzoek uit te voeren, hetgeen in 1986 leidde tot de SLO-publicatie *Zo rekent Nederland*.²⁰

Iedere leraar kon meedoen aan dit onderzoek en mocht zelf het reken-wiskundeonderwijs van die dag beschrijven. Niemand die controleerde of hetgeen werd opgeschreven ook daadwerkelijk had plaatsgevonden. Op het eerste oog lijkt dit—in de zin van betrouwbaarheid—geen wetenschappelijke aanpak. Natuurlijk konden de leraren hun onderwijs mooier voorstellen dan wat zich in werkelijkheid in hun klas heeft voorgedaan, maar wat ze vertelden over dat reken-wiskundeonderwijs weerspiegelde in ieder geval wel hun denken erover. Het was dan ook vooral deze vakdidactische bagage waar we bij dit onderzoek naar zochten en niet zozeer wat praktisch werd uitgevoerd. De opvattingen van de leraren over reken-wiskundeonderwijs en hun vakdidactische kennis bepaalden waarschijnlijk ook in hoge mate welke les ze voor deze speciale dag hadden uitgekozen.

We kregen 161 lesbeschrijvingen binnen, die samen een veelheid van onderwerpen bevatten. De staartdeling ontbrak daarbij niet.

In een derde klas werd die dag zelfs toevallig de staartdeling aangeleerd.²¹ Als uitgangspunt werd genomen: twaalf verdelen in vieren. Zoals de methode *Naar Aanleg en Tempo*²² uitlegde, kun je dit opschrijven als ‘deling’ of als ‘deling in de vorm’.



de deling

$$12 : 4 = 3$$

de deling
in de vorm

$$4 \left| \begin{array}{r} 12 \\ 12 \\ \hline 0 \end{array} \right. 3$$

De leraar gaf er de volgende uitleg bij:

*Je moet maar denken dat die twee schuine strepen staartjes zijn.
4 op de 12 gaat 3 keer.
Je schrijft die 3 op. Dan neem je die laatste 3 x 4 is 12.
Afgetrokken 0. Denk eraan: aftrekken.*

Vervolgens gaf de leraar een paar sommen op voor in het oefenschrift: 20 : 5 en 30 : 5. Deze werden daarna op het bord behandeld.

*Wie had ze goed? Zie je nu hoe het moet? Nog een paar zulke sommetjes. De laatste 0 moet onder het goede cijfer.
Hoe heet deze deling ook alweer? Staartdeling. In het boek noemen we dat ‘in de vorm’.*

Inderdaad ging het bij dit leren van de staartdeling alleen maar om de vorm, om het aanleren van allerlei uiterlijkheden zoals ‘hoe het heet’, ‘hoe het eruit ziet’, ‘wat moet je doen’, en ‘wat moet je zeggen’. De leraar schrijft een deling op en de leerlingen moeten daarvan een staartdeling maken.

Dit lukte bijna alle kinderen. De leraar kon tevreden zijn.

Maar is deze tevredenheid terecht?

Het probleem van een sommetje als $12 : 4 = 3$ om de staartdeling mee aan te leren, is dat er helemaal geen staart is.²³ Vandaar ook dat deze leraar de toevlucht moest nemen tot de ‘vlechtjes’. Het is de vraag of dit een leerling die niet meer weet ‘hoe het moest’²⁴ verder heeft geholpen. Staartdeling? Oh ja, met die twee staartjes. En wat moest er ook al weer tussen?

Gelukkig was er ook een lesbeschrijving waaruit bleek dat de leerlingen met meer begrip het staartdelen hadden geleerd. In deze vijfde klas²⁵ werd gewerkt met het op Wiskobas geïnspireerde *Vlaardings Programma*.²⁶

De kinderen kregen een rijtje met staartdelingsopgaven. Ze moesten die opgaven op twee manieren maken.²⁷

“zoals geleerd in vierde klas”

“op de manier zoals gebruikelijk op de meeste scholen”

$$5459 : 53 =$$

$$\begin{array}{r} 5459 \\ - \underline{5300} \quad 100 \\ \quad 159 \\ - \underline{159} \quad \quad 3 \\ \quad \quad 0 \quad \quad 103 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 53 \overline{) 5459} \quad \backslash 103 \\ \underline{53} \\ \quad 159 \\ \underline{159} \\ \quad \quad 0 \end{array}$$

De leraar schreef in het verslag dat de tweede manier door de leerlingen ‘overigens’ vrij gemakkelijk werd gevonden. De aanpak in de vierde klas had zijn werk kennelijk goed gedaan. Dit betekende echter niet dat men het hierbij liet. Die tweede manier hoorde er ook bij.

Deze tweede manier is weer van stal gehaald, omdat deze werkwijze bij grotere getallen en getallen met een komma erin, sneller en gemakkelijker is. Zonodig kan een som (ook) op de eerste manier worden gemaakt.

Nogmaals, we schrijven hier 1983. Helaas liet niet iedereen in die tijd zoveel didactische kennis van zaken zien.

Een directeur van een LBO-school vertelde dat hij van zijn dochter die op de PABO zat, de nieuwe didactiek van het staartdelen had geleerd. Op de vraag of die manier op zijn school gebruikt werd, antwoordde hij: “Nee, want die kun je niet met trucjes maken. Bij deze manier vallen de leerlingen meteen door de mand.

Dit lijkt de omgekeerde wereld: probeer de leerlingen de staartdeling niet te laten begrijpen, maar beperk je tot het aanleren van de uiterlijke vorm. Het probleem van dit blinde cijferen is dat het succes maar beperkt is. Ondanks de grote hoeveelheid onderwijstijd die aan het cijferen werd besteed—voor het leren staartdelen waren dat vaak meer dan vijftig lessen²⁸—waren de resultaten mager. Een op de drie kinderen had problemen met de staartdeling en meer dan helft struikelde bij de wat moeilijkere delingsopgaven met nullen in de uitkomst.^{29 / 30}

De eerste Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau (PPON)³¹ in 1987 liet een groot verschil zien tussen de eenvoudige delingen met kale getallen en deelopgaven gepresenteerd als contextopgaven.

	% correcte antwoorden
	1987
806 : 26 = _____	85
Jolien heeft 326 vakantiefoto's. Er passen 12 foto's op een pagina. Hoeveel pagina's heeft Jolien nodig om al deze foto's op te plakken? _____ pagina's	40

Werd een kale som als $806 : 26$ nog door veel leerlingen aan het eind van groep 8 goed gemaakt³², bij contextopgaven zoals die over de vakantiefoto's waren de prestaties duidelijk minder. Bij deze opgaven gaat het in feite niet om het kunnen staartdelen, maar om het kunnen interpreteren van een rest of van een kommagetal als uitkomst.³³ Het was met name het toepassingsaspect dat de leerlingen erg moeilijk vonden.³⁴

Zoals onder andere ook al in *Zo Rekent Nederland* naar voren was gekomen, liep het reken-wiskundeonderwijs eind jaren zeventig, begin jaren tachtig qua inhoud en aanpak erg uiteen. Daarom besloot de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskundeonderwijs (NVORWO) een aanzet te laten maken voor een nationaal plan voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool.³⁵

Een conceptversie van dit plan werd in 1984 als *10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde*³⁶ gepubliceerd en aan een grote groep deskundigen voorgelegd.

Voor cijferen³⁷ werd voorgesteld om:

- het minder centraal te stellen ten gunste van hoofdrekenen, schattend rekenen en getalinzicht
- het meer toepassinggericht te maken, en
- leerlingen niet direct de meest verkorte standaard-algoritmen te leren (waarin met cijfers wordt gewerkt), maar te beginnen met een notatiewijze met hele getallen; bij het staartdelen betekende dit: beginnen met herhaald aftrekken.

Van de bijna 300 respondenten (waaronder ongeveer 70 pabo-docenten, 70 schoolbegeleiders en 70 basisschoolleraars)³⁸ die zich over dit conceptplan voor het cijferen hebben uitgesproken, was 95 procent het met deze opvatting eens.³⁹ Ofschoon in de commentaren ook duidelijk werd dat sommige respondenten niet zo optimistisch waren over de tijdwinst die deze nieuwe aanpak zou opleveren en er zorgen waren over de implementatie, was over het geheel genomen sprake van een vrijwel unanieme instemming met de in het conceptplan voorgestelde vernieuwing van het rekenonderwijs. Dit gold niet alleen voor deze groep geraadpleegde deskundigen, maar ook voor de destijds door het bureau Inter/View van Maurice de Hond enquêteerde ouders. Zij vonden rekenen toegepast in het dagelijks leven en hoofdrekenen vaker ‘heel belangrijk’ dan cijferen.⁴⁰

De ontwikkeling van de prestaties bij cijferend delen

Eind jaren tachtig was Nederland er dus aan toe om voor het cijferen een nieuwe weg in te slaan. Hier moet echter meteen aan worden toegevoegd, dat dit niet de weg was waarvoor men in Engeland had gekozen na het uitkomen van het Cockcroft Report in 1982.⁴¹ Weliswaar wilde men ook hier meer tijd besteden aan het oplossen van toepassingsopgaven uit het dagelijks leven, maar anders dan in Engeland, ging Nederland uitdrukkelijk niet zo ver om de staartdeling af te schaffen.⁴²

Londen, 25 april — De Britse minister van onderwijs stuurt volgend schooljaar 350 ‘wiskundezendelingen’ op pad die leerlingen en leerkrachten ervan moeten overtuigen dat [...] staartdelingen [...] begrippen uit het verleden zijn.

NRC-Handelsblad, 25 april 1985

De NVORWO wilde alleen af van die eenzijdige gerichtheid op het cijferen en koos tegelijkertijd voor een meer inzichtelijke opbouwen ervan. De gevolgen van deze nieuwe aanpak bleven niet uit. Toen in 1997 opnieuw de balans werd opgemaakt, lieten de PPOON-scores⁴³ aan het eind van groep 8 op de schaal ‘Bewerkingen: Vermenigvuldigen en Delen’—waar het schriftelijk delen inmiddels bij was ondergebracht⁴⁴—een negatief effect van bijna een halve standaarddeviatie zien—zeg maar een daling van ruim 10 procentpunten in de scores—vergeleken met de prestaties van 1987.⁴⁵

Kijken we naar de twee deelopgaven die ook in de PPON van 1987 zaten, dan zien de resultaten voor het eind van groep 8 er in 1992 nog hetzelfde uit, maar laat 1997 voor beide opgaven een kleine (en te verwachten) daling zien.^{46 / 47}

	% correcte antwoorden		
	1987	1992	1997
806 : 26 = _____	85	85	75
Jolien heeft 326 vakantiefoto's. Er passen 12 foto's op een pagina. Hoeveel pagina's heeft Jolien nodig om al deze foto's op te plakken? _____ pagina's	40	40	35

Interessant zijn daarbij de uitkomsten van de eveneens door het Cito in 1997 uitgevoerde methode-analyse.^{48 / 49} Voor het onderdeel 'Bewerkingen: Vermenigvuldigen en Delen' scoorde de methode *De Wereld in Getallen*—de oudste nog in gebruik zijnde realistische methode—even hoog als *Naar Zelfstandig Rekenen*—destijds de oudste in gebruik zijnde mechanistische methode—terwijl die laatste methode veel meer tijd aan het leren cijferen besteedde.⁵⁰ Voor het onderdeel 'Samengestelde Bewerkingen', waarbij het om het toepassen gaat en de leerlingen zelf moeten beslissen welke bewerkingen ze moeten uitvoeren, deed *De Wereld in Getallen* het zelfs beter dan *Naar Zelfstandig Rekenen*.⁵¹ Opmerkelijk is bovendien—zeker als men bedenkt dat nu opnieuw dergelijke mechanistische rekenmethoden op de markt worden gebracht—dat van alle 24 onderdelen

De Wereld in Getallen bij 19 ervan als allerbeste uit de vergelijking kwam en de mechanistische methode *Naar Zelfstandig Rekenen* geen enkele keer. Deze methode scoorde bij 13 onderdelen het slechtste.^{52 / 53}

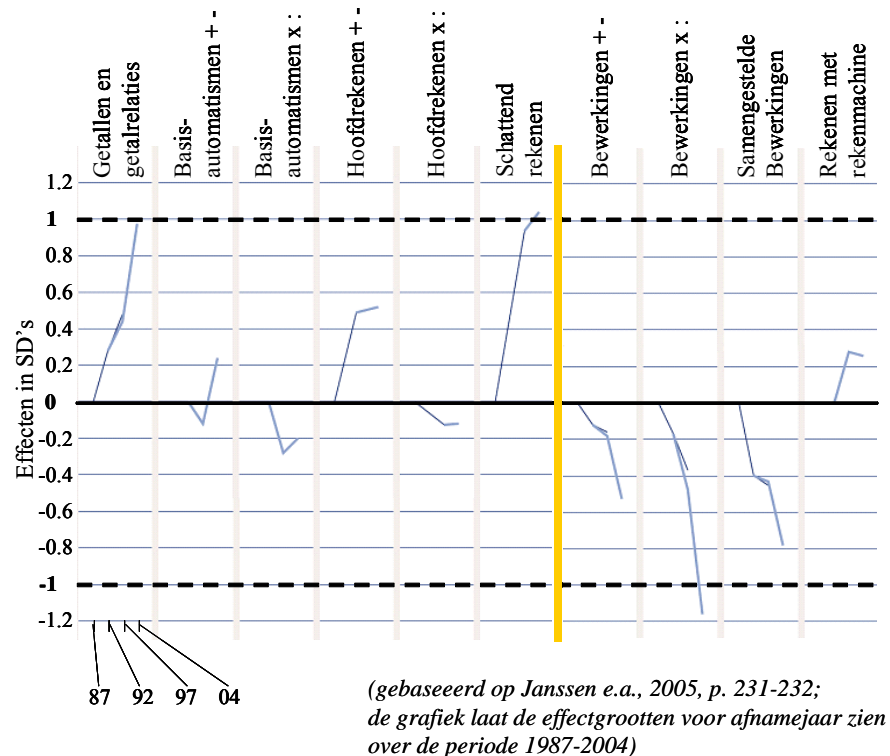
Na 1997 zijn er voor afzonderlijke methoden geen vergelijkingen meer gemaakt, maar deze uitkomsten zouden degenen die nu zo'n nieuwe mechanistische methode willen aanschaffen toch te denken moeten geven.⁵⁴

Het volgende PPON-meetpunt was 2004. Opnieuw was aan het einde van de basisschool bij het onderdeel 'Bewerkingen: Vermenigvuldigen en Delen' een achteruitgang te zien.⁵⁵

Deze keer was er, vergeleken met de prestaties van 1997, sprake van een duidelijk (en niet verwacht) negatief effect van ongeveer driekwart standaarddeviatie. Dit betekent dat de scores op dit onderdeel sinds 1987 in totaal zo'n 30 procentpunten zijn gedaald. Voor het onderdeel 'Samengestelde bewerkingen' bedraagt de totale daling 20 procentpunten en voor de 'Bewerkingen: Optellen en aftrekken' is dit zo'n 15 procentpunten.⁵⁶ Het schriftelijk rekenen is dus duidelijk minder geworden.

Maar dit is niet het hele verhaal.

Daarnaast zijn er ook onderdelen waarop van 1987 tot 2004 juist vooruitgang is geboekt.⁵⁷ Zo zijn zowel de scores voor getallen en getalrelaties en die voor schattend rekenen zo'n 25 procentpunten omhoog gegaan en is het hoofdrekenend optellen en aftrekken zo'n 10 procentpunten verbeterd, evenals het rekenen met procenten.⁵⁸



Wat Nederland anno 2004 aan rekenprestaties laat zien, komt in zekere mate overeen met het vaardigheidsprofiel waar twintig jaar geleden voor werd gekozen. De destijds voorgestelde innovatie heeft zich inderdaad voltrokken en wel vanuit het onderwijs zelf zonder overheidsinterventie, hetgeen op z'n minst opmerkelijk kan worden genoemd. Minstens even verrassend is echter dat de verandering in wat de leerlingen kunnen, met name in het publieke debat, wordt opgevat als een terugval in de reken-wiskunde prestaties. Kennelijk wordt schriftelijk rekenen meer geïdentificeerd met rekenen dan getalinzicht, schattend rekenen, hoofdrekenen en toepassingen in de vorm van procentrekenen.

Onderzoek naar de verandering in de vaardigheid van het schriftelijk delen tussen 1997 en 2004

De hiernaast afgebeelde PPON-grafiek laat, zoals gezegd, onmiskenbaar zien dat de vaardigheid in het schriftelijk vermenigvuldigen en delen is gedaald. Ofschoon deze teruggang voor een deel als het resultaat gezien kan worden van de breed gedragen keuze om minder tijd aan het cijferen te besteden, is het prestatieverschil toch groter dan verwacht en bedoeld. Het is dus zaak om de oorzaken hiervan te achterhalen.

Dit is echter niet eenvoudig. Zo hebben de analyses van het Cito uitgewezen dat, ondanks de sterke teruggang bij het schriftelijk rekenen, de nieuwere rekenwiskundemethoden—en dan bedoel ik weer de lesboeken—in hun totaliteit toch een kleine, positieve bijdrage hebben geleverd aan de rekenvaardigheid van de leerlingen.⁵⁹

Ook een verdere analyse van het schriftelijk delen door Hickendorff, Heiser, Van Putten en Verhelst, waarbij de goedscore in samenhang met de toegepaste strategie werd bekeken, maakte duidelijk dat het voor de goedscore zowel in 1997 als in 2004 niet uitmaakte of een kind een realistische of een traditionele strategie had toegepast.^{60 / 61}

Op grond hiervan werd vervolgens geconcludeerd dat het vervangen van het traditionale cijferalgoritme door een realistische strategie geen slechte ontwikkeling is als het gaat om het krijgen van het goede antwoord.

Wat wel van grote invloed was op de goedscore, is of het kind bij het uitrekenen iets opgeschreven had.

In 2004 liet 36 procent van de leerlingen meestal geen schriftelijke uitwerking zien.⁶² Deze neiging van Nederlandse leerlingen om geen berekeningen op papier te maken en geen gebruik te maken van hulpnotities bij het hoofdrekenen en het oplossen van puzzelachtige problemen met getallen, is ook uit ander onderzoek naar voren gekomen⁶³, maar is zeker niet iets dat door realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt gepropageerd of dat past bij de theoretische uitgangpunten ervan. In tegendeel, schetsjes maken, een bepaalde situatie in schema brengen en je oplossingsstappen opschrijven wordt bij realistisch reken-wiskundeonderwijs juist belangrijk gevonden. Het ondersteunt het oplossen en het reflecteren en communiceren over het oplossingsproces waardoor leerlingen beter begrijpen wat ze doen.⁶⁴ Het belang van het opschrijven is dan ook geen discussiepunt met degenen die terug willen naar het rekenonderwijs van vroeger.⁶⁵ Wat blijft, is de discussie over de opbouw van het schriftelijk leren delen: moet er meteen worden begonnen met een staartdeling waarbij met cijfers wordt gewerkt of is het beter om de leerlingen eerst een beginvorm te leren—die voor zwakke rekenaars ook de eindvorm kan inhouden—waarbij gerekend wordt met hele getallen?

Een andere vraag die naar aanleiding van dit onderzoek naar voren komt, is of op basis van de PPO-data onomstotelijk kan worden vastgesteld dat de vaardigheid in het schriftelijk delen tussen 1997 en 2004 dramatisch is gedaald. Er zijn in ieder geval drie punten die aanleiding geven om deze conclusie ter discussie te stellen: (a) de gebruikte opgaven, (b) het tijdstip waarop gemeten is, en (c) de gegeven toetsinstructie. Ik heb daarover met mijn collega's Robitzsch, Köller en Treffers gepubliceerd.⁶⁶

De gebruikte opgaven

Voor het toetsen van het delen uit het onderdeel 'Bewerkingen: Vermenigvuldigen en delen' zijn in totaal negentien deelopgaven gebruikt. Slechts vier ervan zaten zowel in de toets van 1997 als in die van 2004. Deze opgaven zijn gebruikt om de scores van de twee meetmomenten aan elkaar te koppelen. Ongelukkigerwijs waren ook nog drie van deze ankeropgaven, waarvan er twee hieronder zijn afgebeeld, zodanig dat ze—zeker met het betere getalinzicht in 2004—eerder aanleiding kunnen geven tot hoofdrekenen dan tot schriftelijk rekenen.

800 : 4 200
40 : 4 210
32 : 4 **218**

872 : 4 =

1600 : 16 100
64 te veel 4
64 : 16 **96**

1536 : 16 =

Zestien opgaven waren contextopgaven en bij vier daarvan ging het om het kunnen interpreteren van de rest; wat iets anders is dan het kunnen uitvoeren van de deelvewerking. Van de moeilijkste deelopgaven met hele getallen, de deelopgaven met een nul in de uitkomst (bijvoorbeeld $64800 : 16$), zat er maar één in de negentien toetsopgaven, terwijl juist bij dit soort opgaven de realistische aanpak minder foutgevoelig is dan het traditionele algoritme.

$$\begin{array}{r}
 16 \overline{) 64800} \quad 4050 \\
 \underline{64} \\
 080 \\
 \underline{80} \\
 00 \\
 \underline{0} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 16 \overline{) 64800} \\
 \underline{64000} \quad 4000\times \\
 800 \\
 \underline{800} \quad 50\times \\
 0 \quad 4050
 \end{array}$$

Bij deze laatste aanpak gaat 16 op de 8 nul keer en dan moet je niet vergeten een nul in de uitkomst te zetten. Hetzelfde gebeurt nog een keer aan het eind van de deling.

Het tijdstip waarop gemeten is

Omdat het Cito bij het PPON-onderzoek van 2004 tegelijkertijd een peilingsonderzoek van het Cito-Leerlingvolgsysteem heeft uitgevoerd, weten we niet alleen hoe de leerlingen op de deelopgaven hebben gescoord aan het eind van groep 8, maar kennen we ook hun scores halverwege die jaargroep.⁶⁷ De gevonden teruggang tussen eind groep 8 in 1997 en eind groep 8 in 2004, blijkt dan gecompliceerd in elkaar te zitten.

De neerwaartse beweging in de prestaties bij de onderdelen ‘Bewerkingen’ blijkt vooral in de tweede helft van groep 8 te hebben plaatsgevonden.

Gegevens over halverwege groep 8 in 1997 zijn er helaas niet, maar door het in 2004 uitgevoerde peilingsonderzoek van het Cito-Leerlingvolgsysteem zijn wel de scores van van midden en eind groep 7 bekend. Hieruit blijkt dat in de tweede helft van groep 7 juist van een vooruitgang sprake was.⁶⁸

Natuurlijk kan hetzelfde patroon met die opvallende achteruitgang in groep 8 zich ook in 1997 hebben voorgedaan. Er is echter ook wel wat voor te zeggen, dat de tendens om na de Cito-toets in groep 8 minder tijd aan rekenen te besteden, in de loop der tijd steeds sterker is geworden. Voeg daarbij nog het feit, dat na de basisschool direct wordt overgestapt op het rekenen met de rekenmachine, dan is het geenszins verwonderlijk meer dat het niet goed gaat met de latere rekenvaardigheid. Ik kan het advies van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen⁶⁹ om meer aandacht te besteden aan het rekenen in het voortgezet onderwijs dan ook in hoge mate onderschrijven.

Dan kom ik nu bij het derde punt dat maakt dat er vraagtekens kunnen worden geplaatst bij de conclusie dat de vaardigheid in het schriftelijk delen sterk achteruit is gegaan.

De gegeven toetsinstructie

Om het strategiegebruik van de leerlingen bij de deelopgaven te onderzoeken, zijn bij 140 leerlingen die deel hebben genomen aan de schriftelijke PPON-toets van 2004 ook individuele interviews afgenomen.⁷⁰ Behalve dat dit aanvullende onderzoek het mogelijk maakte om het effect van de realistische en de traditionele oplossingsstrategie te onderzoeken, kwam bij dit onderzoek aan het licht dat er tussen beide toetsvormen een aanzienlijk verschil in goedscores blijkt te bestaan.⁷¹

Strategie	1997	2004	2004
	% Strategie-aandeel		
	Schriftelijke toets	Schriftelijke toets	Individueel interview
	736 : 32 (in context)		
Traditioneel algoritme	42	19	26
Realistische aanpak ^a	24	33	71
Geen schriftelijke verwerking	22	30	0
Overige	12	19	3
<i>% Goed</i>	71	52	84
	7849 : 12 (in context) ^b		
Traditioneel algoritme	41	19	27
Realistische aanpak	22	25	68
Geen schriftelijke verwerking	17	35	0
Overige	20	21	5
<i>% Goed</i>	44	29	60

De goedscores van de vrijgegeven deelopgaven 736 : 32 en 7849 : 12 lagen bij de mondelinge individuele afname zo'n 30 procentpunten hoger dan bij de klassikale schriftelijke toets. Vergeleken met opgaven uit andere onderdelen die op twee manieren zijn afgenomen, is dit een groot verschil.⁷²

Een ander opmerkelijk verschil is, dat er bij de mondelinge afname geen enkele leerling was zonder schriftelijke verwerking. Bij de schriftelijke toets lag dit op 30 en 35 procent. Kennelijk was de instructie bij de schriftelijke toets vergeleken met die van de mondelinge afname niet sterk genoeg om de kinderen in alle gevallen op papier te laten rekenen. Wil men echter onderzoeken of Nederlandse leerlingen het schriftelijk rekenen beheersen en wil men uitspraken doen over veranderingen die zich hierbij in de loop der tijd hebben voorgedaan, dan moet men de leerlingen heel expliciet vragen de berekening op papier te maken.⁷³ Het toetsen of leerlingen rekenopgaven kunnen oplossen is iets anders dan het toetsen of leerlingen bepaalde rekenprocedures kunnen uitvoeren.

De drie genoemde problematische punten (de gebruikte opgaven, het tijdstip van meten en de gegeven toetsinstructie) laten zien dat onderzoek naar veranderingen in prestaties niet eenvoudig is en zeker niet als er tegelijkertijd een innovatieproces gaande is in het onderwijs. Een opgave als $736 : 32$ die in 1997 eerder via een deling op papier werd opgelost, zal in 2004—als gevolg van de grotere nadruk op getalinzicht—eerder uitlokken om te gaan hoofdrekenen: $736 : 32$, ... bij 20 zit je al op 640, 2 erbij, 64, dan zit je op 704 en nog 1 erbij, 32, dan zit je op 736; samen 23. Als deze hoofdrekenstrategie dan vervolgens een overschatting van je rekenvaardigheid is, gaat het fout, terwijl uit de mondelinge afname blijkt dat 84 procent van de leerlingen er met schriftelijk rekenen wel uitkomt.

Wat zegt TIMSS 2007 over hoe Nederland rekt?

Voor de meest recente gegevens over hoe Nederland rekt moeten we zijn bij de laatste TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*).⁷⁴

Dit onderzoek is in 2007 uitgevoerd in grade 4 en 8 (onze groep 6 en klas twee voortgezet onderwijs). Nederland heeft alleen met groep 6 meegedaan. In totaal hebben 36 landen⁷⁵ aan dit deel van het onderzoek deelgenomen. Nederland deed dit ook in 2003 en in 1995. De belangrijkste conclusie die de analyse van de Nederlandse totaalscores voor rekenen-wiskunde in groep 6 in deze drie onderzoeksjaren heeft opgeleverd, is dat er sprake is van een significante achteruitgang tussen 1995 en 2007. Problematisch aan deze conclusie is echter dat Nederland in 1995 niet voldeed aan de eisen voor de steekproeftrekking.⁷⁶ In 2003 en 2007 was dit wel het geval, maar tussen deze jaren is geen significante verandering gevonden.

Behalve gegevens over hoe de reken-wiskundeprestaties van Nederlandse leerlingen zich over een bepaalde tijdsperiode ontwikkelen, levert TIMSS ook informatie over hoe goed of slecht Nederland het doet vergeleken met andere landen. Voor het onderdeel Rekenen⁷⁷—want daar gaat de huidige discussie steeds over—levert dit de volgende volgorde van landen op: Nederland staat op de achtste plaats⁷⁸, met boven zich de vier Aziatische landen en stadstaatjes en drie Oost-Europese landen.

Van de negen West-Europese landen die mee hebben gedaan, heeft Nederland de hoogste score. Dat geldt ook voor alle overige Westerse landen die hebben deelgenomen: de Verenigde Staten, Australië en Nieuw Zeeland.⁷⁹

TIMSS 2007 groep 6
Scores onderdeel Rekenen

Singapore	611
Hongkong	606
Taiwan	581
Japan	561
Kazakhstan	556
Rusland	546
Letland	536
Nederland	535
Engeland	531
<i>Verenigde Staten</i>	<i>524</i>
Duitsland	521
Denemarken	509
Italië	505
Oostenrijk	502
<i>Australië</i>	<i>496</i>
Zweden	490
Schotland	481
<i>Nieuw Zeeland</i>	<i>478</i>
Noorwegen	461
+ 17 andere landen	

Een kwalificatie als ‘Best of the West’⁸⁰ misstaat hier niet, maar in het blad *j/m Voor Ouders* heet dat: “Internationaal gezien scoren onze kinderen slecht in rekenen.”⁸¹

Wil dit nu zeggen dat er niets meer te wensen blijft ten aanzien van de rekenprestaties van onze basisschoolleerlingen? Nee, verre van dat. Ik kom hierop nog terug. Nu eerst nog iets over TIMSS.

Een probleem van internationale vergelijkende studies zoals TIMSS is, dat gezien de verschillende reken-wiskunde-programma's en doelen die men in de deelnemende landen nastreeft (van Kazakstan tot Colombia en van Tsjechië tot Algerije—om maar een paar uitersten te noemen), het moeilijk is om daarvoor één uniforme toets te maken. We kunnen bij TIMSS niets anders doen dan allerlei onzuivere vergelijkingen op de koop toe nemen en er toch zoveel mogelijk lessen uit proberen te trekken. Zo'n les is dan *niet* dat we het volgens internationale normen slecht doen en dat ons rekenen achteruitholt. Wat dit betreft doen de krantenkoppen geen recht aan de resultaten.

Wat TIMSS 2007 ons bijvoorbeeld wel laat zien, is dat

- onze zwakke leerlingen het relatief goed doen⁸²
- in ons land, in afwijking van de meeste andere landen, de meisjes het minder goed doen dan de jongens, en
- wij helemaal onderaan staan als het gaat om nascholing.

Die laatste twee zaken zijn in ieder geval wel een reden tot zorg. Hetgeen ook geldt voor een aantal gegevens die over het lesgeven en de klasseorganisatie naar voren zijn gekomen:

- van alle landen hebben wij het laagste percentage uitleggen van het antwoord, en
- het hoogste percentage zelfstandig werken aan opgaven.⁸³

Dit laatste hangt wellicht samen met de beperkte vaardigheid van Nederlandse leerlingen om berekeningen systematisch te noteren. Via klassikale instructie is dit namelijk effectief te leren. Waarom Nederlandse leraren zo weinig klassikale instructie gebruiken is onduidelijk. Mogelijk is het een uitvloeisel van het vanaf de jaren negentig door de Inspectie van het Onderwijs gevoerde beleid van 'onderwijs-op-maat'.⁸⁴

Opmerkelijk in dit verband is, dat Engeland, de grootste stijger van alle landen, rond diezelfde tijd met de *National Numeracy Strategy*⁸⁵—mede geïnspireerd door de ideeën van realistisch reken-wiskundeonderwijs—juist gekozen heeft voor ‘whole-class teaching’.⁸⁶

Uit het voorgaande zal duidelijk zijn dat de TIMSS-resultaten serieus moeten worden genomen. Er valt veel van te leren, met name over de condities waaronder het leren van de leerlingen plaatsvindt. De internationale gegevens houden ons wat dit betreft een spiegel voor. Wat we hierin zien, kan richtinggevend zijn voor nieuw beleid. Of dit ook geldt voor de leerprestaties valt te betwijfelen. Als het gaat over wat we onze leerlingen willen leren, is het maar zeer de vraag of we ons bij het vaststellen van het ambitieniveau moeten laten leiden door bijvoorbeeld de hoge rekenscore van Singapore⁸⁷, waar bijna alle door TIMSS getoetste opgaven ook worden onderwezen.⁸⁸ Voor Nederland zou dit betekenen dat de breuken en kommagetallen een jaar naar voren moeten worden geschoven. Maar willen we dat? Ook in andere opzichten kan ‘teaching-to-the-test’ Nederland een hogere score opleveren. Maar is dit de weg die we moeten gaan? Ofschoon Singapore in veel vergelijkende studies steeds weer aan kop gaat, maakt men zich in Singapore zelf ernstig zorgen of dit door de toets bepaalde onderwijs niet dodelijk is voor de creativiteit die nodig is om tot doorbraken en innovaties te komen.⁸⁹

Hoe zou Nederland moeten rekenen; en welk onderzoek kan daarop antwoord geven?

Tot nu toe heb ik het vooral gehad over de prestaties van de leerlingen. Dit wordt het ‘gerealiseerde curriculum’ genoemd.⁹⁰ Door de leerlingen te toetsen, kunnen we dit curriculum vaststellen. Maar hoe bepalen we het ‘beoogde curriculum’? Hoe wordt beslist wat als standaard wordt genomen bij wat de leerlingen in groep 8 geleerd moeten hebben?

Een mogelijkheid om aan deze standaard te komen, is om daarvoor weer die toetsen te nemen en dan bijvoorbeeld per opgave een panel bestaande uit 25 personen—voor een belangrijk deel bestaande uit leraren basisonderwijs met minimaal drie jaar ervaring in groep 8—te laten beoordelen welk beheersingsniveau (Goed, Matig, Onvoldoende)⁹¹ nodig is om bijvoorbeeld de standaard Voldoende⁹² te halen. Zo doet het Cito dit.⁹³

Erg ingewikkeld en met een uitkomst die de leerlingen overschat.⁹⁴ Afgaande op het oordeel van de beoordelaars hebben de leerlingen bij de PPON van 2004 bij zes van de tien onderdelen van het domein ‘Getallen en Bewerkingen’ de standaard Voldoende *niet* gehaald. De scores bij TIMSS 2007 voor het onderdeel Rekenen staan hiermee in schril contrast.

Bedenk echter wel dat om 70 procent van de leerlingen de standaard Voldoende te laten halen⁹⁵, een opgave door 80 à 85 procent van de leerlingen goed moet worden gemaakt.⁹⁶ Dit is een extreem hoge standaard die ons land—als we die norm zouden halen—meteen het ‘best-scorende land van de wereld’ zou maken.

Afgezien van de veel te hoge, niet realistische norm die door het Cito al jaren wordt gebruikt, is het nog maar de vraag of een methode van ‘meeste-stemmen-gelden’ wel de juiste weg is om te beslissen over standaarden en onderwijsinhouden. Natuurlijk is inbreng vanuit de algemeen maatschappelijke en specifiek beroepsmatige context noodzakelijk, maar het publieke debat is niet de plaats waar kan worden bepaald wat kinderen op de basisschool wel en niet moeten leren. Door dit wel te doen, veronderstel je dat iedere Nederlander voldoende vakdidactisch geschoold is om hierover mee te kunnen praten, of veeg je met één beweging een hele professie van tafel. Natuurlijk kan men al het ontwikkelwerk en onderzoek dat wereldwijd aan het leren rekenen is gewijd negeren en kan men personen laten beslissen⁹⁷ die niet geschoold zijn in de reken-wiskundedidactiek voor de basisschool. De kans is dan echter groot dat we afstevenen op één procedure per bewerking—voor het delen zal dat dan de traditionele staartdeling zijn—en die procedure dan gewoon veel laten oefenen.

Keuzes over het *wat* van het reken-wiskundeonderwijs evenals beslissingen over het *hoe* moeten wetenschappelijk onderbouwd zijn. Een raadpleging van deskundigen kan daarvan deel uitmaken, mits de deskundigheid van de geconsulteerde personen gewaarborgd is. Als een beoordelaar niet voldoende inzicht heeft in—zoals de Duitsers dat noemen—de ‘mathematische Grundvorstellungen’⁹⁸ van bijvoorbeeld de vier hoofdbewerkingen (dus niet alle didactische *ins* en *outs* van deze bewerkingen kent) kan deze moeilijk beslissen over wat basisschoolleerlingen op dit gebied moeten kennen en kunnen. Ook de verkregen toetsscores als uitgangspunt nemen, kent zijn beperkingen. Een beetje hoger gaan zitten dan wat de leerlingen bij de toetsing aan prestaties hebben laten zien, levert een norm op zonder veel houvast, want met een iets andere vraagstelling krijg je meteen weer een heel andere toetsscore.

De wetenschappelijke onderbouwing vraagt dus meer dan een sociaal-wetenschappelijke, empirische basis. Daarom kunnen onderwijskundigen en psychologen die vanuit een empirisch onderzoeksparadigma werken vaak maar moeilijk overweg met de onderwijsinhouden: ze plaatsen de beantwoording van de *wat*-vragen het liefst buiten de wetenschap.^{99 / 100} Anderen—het onderwijsveld, de ouders, de politiek, het bedrijfsleven—mogen het *wat* bepalen en dan gaan de onderzoekers vervolgens de *hoe*-vragen beantwoorden.

Zo'n empirisch georiënteerde benadering van onderwijsonderzoek is een ongewenste inperking van domeinspecifiek onderwijsonderzoek. Ook internationaal wordt deze inperking bekritiseerd. Zo wordt het als zorgelijk ervaren dat het tegenwoordige onderzoek van reken-wiskundeonderwijs vaak alleen maar gegevens verzamelt over lessen en over wat de leerlingen kunnen, zonder dat de opgaven die aan hen zijn voorgelegd, worden geproblematiseerd.¹⁰¹

Volgens Erich Wittmann is zelfs het onderzoek rond realistisch reken-wiskundeonderwijs soms ver van de wiskundige inhoud—ofwel de *mathematical substance*—komen te staan, met als gevolg veel nadruk op oppervlakkige toepassingen. Wittmann spreekt daarom van een 'RME light'.¹⁰² Volgens hem is de door Freudenthal—in navolging van Treffers—benadrukte balans tussen horizontaal en verticaal mathematiseren verstoord geraakt.

Ik zie het als mijn opdracht om deze ontwikkeling te keren—of beter gezegd, om het herstel van de balans te ondersteunen en vorm te geven—door bij het onderzoek het primaat (weer) bij de vakdidactiek te leggen met de daarbij behorende centrale rol van de wiskundige inhoud. Behalve bij de Wiskobas-traditie¹⁰³ sluit dit ook aan bij de Duitse¹⁰⁴, Scandinavische¹⁰⁵ en Franse¹⁰⁶ vakdidactische tradities. Voortbouwend op deze Europese wortels van reken-wiskundededidactiek als wetenschappelijke discipline¹⁰⁷ wil ik bijdragen aan de verdere ontwikkeling van realistisch reken-wiskundeonderwijs.

Goed reken-wiskundeonderwijs vraagt om een sterke wetenschappelijke basis en een reken-wiskundedidactiek als wetenschappelijke discipline die deze basis kan leveren.

De reken-wiskundedidactiek die ik hierbij voor ogen heb, zie ik als een autonome wetenschap die enerzijds gerelateerd is aan de wiskunde en de andere bèta-wetenschappen als moederdisciplines, en anderzijds een band heeft met het geheel van onderwijswetenschappen.¹⁰⁸

Belangrijk voor deze reken-wiskundedidactiek als wetenschap is dat zij voor de beantwoording van onderzoeksvragen een eigen, herkenbare methodologie heeft.

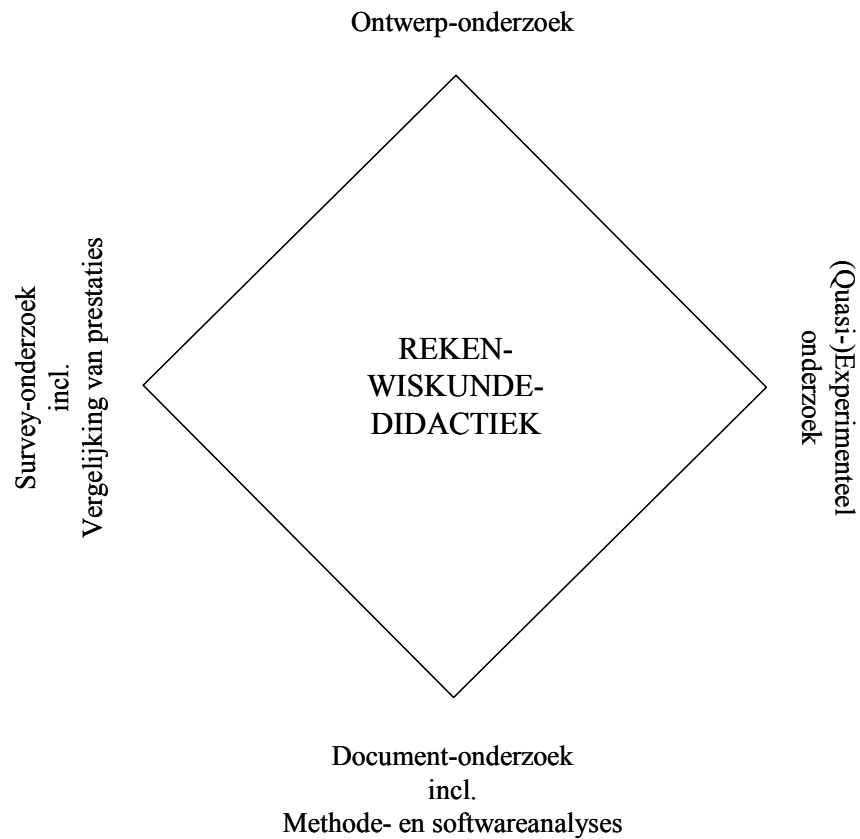
Ik zie daarbij een model voor me, waarbij de reken-wiskundedidactiek zich bedient van een veelheid van onderzoeksvormen.

Hierbij is een hoofdrol toebedeeld aan:

- *ontwerp-onderzoek*, omdat dit type onderzoek direct raakt aan de kernopdracht waar de reken-wiskundedidactiek voor staat: het ontwikkelen van reken-wiskundeonderwijs.¹⁰⁹

Daarnaast zijn echter ook andere vormen van onderzoek van belang:

- *(quasi)experimenteel onderzoek* om bijvoorbeeld het effect van een bepaald didactisch model te onderzoeken
- *document-onderzoek* om bijvoorbeeld analyses van methoden en software uit te voeren
- en *survey-onderzoek* om bijvoorbeeld de reken-wiskundeprestaties van leerlingen te vergelijken.



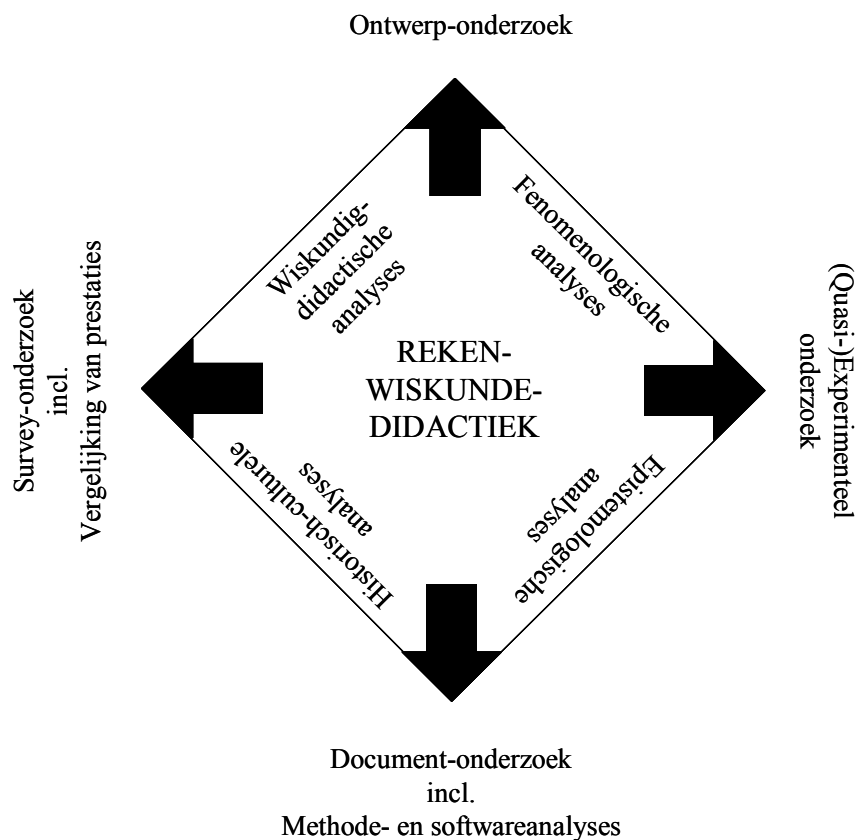
Tot zover verschilt dit scala van onderzoeksvormen niet van wat men bij andere onderwijswetenschappen kan tegenkomen.

Het eigene van de reken-wiskundendidactiek als wetenschap en de daarbij behorende methodologie zit in de kern van het model.

Al deze sociaal-wetenschappelijke onderzoeksvormen worden namelijk gevoed door aan de wiskunde-inhoud gerelateerde analyses:

- wiskundig-didactische analyses
- fenomenologische analyses
- epistemologische analyses
- historisch-culturele analyses.

Deze vier analyses kunnen elk op zichzelf of in samenhang met elkaar input geven aan elk van de vier onderzoeksvormen¹¹⁰, die ook samen kunnen voorkomen.



Het voert nu te ver om uitgebreid op deze analyses in te gaan, daarom volsta ik met een korte toelichting.

- Bij *wiskundig-didactische analyses* gaat het om het blootleggen van de aard van wiskundige concepten, de samenhang ertussen en de vak-inherente relevantie ervan. Dit soort analyses—die in Duitsland ‘stoffdidaktische Analysen’¹¹¹ worden genoemd—vormden in de Wiskobastijd een belangrijke basis voor het ontwikkelwerk¹¹², maar raakten later op de achtergrond of gingen op in de ook maar spaarzaam uitgevoerde fenomenologische analyses (hierover zal ik direct nog iets zeggen).

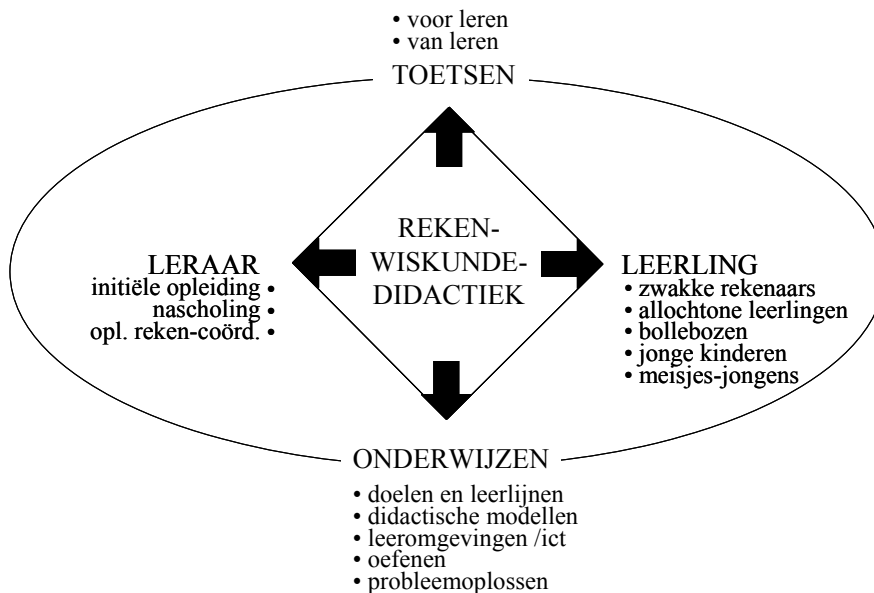
Door de wiskundig-didactische analyses in de kern van reken-wiskundedidactiek als wetenschap te plaatsen, wordt de wiskundige inhoud (weer) geproblematiseerd. Ik heb daar de laatste jaren—onder andere samen met Teppo—expliciet aan gewerkt¹¹³ en heb recent nog—samen met Treffers—zo’n wiskundig-didactische analyse uitgevoerd. Het betrof hier de opgaven die bij psychologisch-georiënteerde studies waren gebruikt om de achterliggende principes van het oplossen van aftrekopgaven te onderzoeken.¹¹⁴ Bij deze analyse werd wederom duidelijk dat cognitieve psychologen en reken-wiskundedidactici ieder op hun eigen manier naar wiskunde en het leren ervan kijken en dat de wiskundig-didactische invalshoek ook bij psychologisch georiënteerd onderzoek dat over rekenen gaat niet gemist kan worden.¹¹⁵

- De eerste associatie bij *fenomenologische analyses* zal ontegenzeggelijk Freudenthals standaardwerk ‘Didactische fenomenologie van wiskundige structuren’ zijn.¹¹⁶ Ik zou deze analyses echter iets anders willen invullen. Terwijl ze bij Freudenthal vaak ook de wiskundige inhoud van de concepten betreffen, zou ik de fenomenologische analyses liever willen toespitsen op het zicht krijgen op de verschijningsvormen van de wiskundige concepten—preciezer geformuleerd—op het onderzoeken hoe bepaalde concepten zich aan leerlingen voordoen en welke aangrijpingspunten er zijn om ze deze concepten te leren.
- Bij de *epistemologische analyses* is weer van een andere invalshoek sprake. Bij deze analyses wordt op basis van neerslagen van interacties in de klas of andere leeromgevingen, onderzocht hoe leerlingen tot kennis komen, hoe ze een ‘shift in mathematical understanding’ maken, op welk moment dat inzicht ontstaat en wat ertoe heeft bijgedragen. In Nederland is op het gebied van epistemologische analyses niet echt een onderzoekstraditie. Duitsland heeft deze wel, met name door het werk van Steinbring.¹¹⁷
- Bij *historisch-culturele analyses* wordt de geschiedenis van de wiskunde en wiskundendidactiek en/of de verschillende culturele settings waarin deze gestalte hebben gekregen, gebruikt om beter zicht te krijgen op hoe kinderen wiskunde leren en hoe onderwijs hiertoe kan bijdragen. De bevindingen van deze analyses zijn een belangrijke bron bij ontwikkeling en onderzoek van reken-wiskundeonderwijs.

In Nederland heeft deze historisch-culturele invalshoek altijd veel aandacht gekregen.¹¹⁸

Met deze vier analyses als kern kunnen verschillende vormen van onderzoek worden ingezet om reken-wiskundeonderwijs te ontwikkelen en onderzoeken.

Het onderstaande schema beschrijft de componenten waarop dit onderzoeks- en ontwikkelwerk zich kan richten: op het onderwijzen—en in samenhang daarmee op het toetsen—en op de componenten leerling en leraar.



Het schema geeft ook goed mijn eigen onderzoeksgebied weer. Binnen het onderzoeksprogramma van het Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen spitst zich dit voornamelijk toe op het thema ‘Elementair leren van rekenen-wiskunde’.

Hieruit wil ik drie onderzoeken noemen waarbij ik betrokken ben:

- het door Sylvia van den Boogaard uitgevoerde en door een nieuwe aio voort te zetten onderzoek naar het gebruik van prentenboeken om kleuters te laten kennismaken met wiskundige concepten, waarbij we in een NWO-PROO-aandachtsgebied onder voorzitterschap van De Glopper samenwerken met onderzoekers uit Groningen¹¹⁹, Tilburg¹²⁰ en het buitenland.¹²¹
- het onderzoek naar het oplossen van puzzelachtige reken-wiskunde problemen door basisschoolleerlingen waaraan Angeliki Kolovou werkt, en
- het onderzoek naar onbenut leerpotentieel van sbo-leerlingen waarmee Marjolijn Peltenburg zich bezighoudt.

Dit zijn alle drie onderzoeken waarbij grenzen worden verlegd¹²², door respectievelijk

- prentenboeken te nemen die niet voor het leren van wiskunde geschreven zijn
- computergames en internet in te zetten om jonge kinderen met variabelen te laten werken, en
- zwakke rekenaars te toetsen waarbij ze gebruik kunnen maken van een in een computeromgeving ingebouwde dynamische hulptool.

Op deze manier genereren deze onderzoeken nieuwe inzichten over het elementair leren van rekenen-wiskunde. Het door De Lange samen met Dijkgraaf en Van Benthem geïnitieerde multi-disciplinaire Talentenkrachtproject¹²³ houdt ons daarbij steeds alert voor onvermoede mogelijkheden van kinderen.

Tot slot

Het Nederlandse reken-wiskundeonderwijs op de basisschool kan nog op veel punten worden verbeterd. Ook de ideeën over realistisch reken-wiskundeonderwijs zijn in de loop der tijd, zowel van binnenuit als van buitenaf, voortdurend bijgesteld en dat moet zo blijven, willen we het rekenen van Nederland op peil houden.

Ik zie het als mijn taak om aan dit op peil houden de komende jaren te werken, door niet alleen de wiskunde weer terug te halen naar de kern van het onderzoek van reken-wiskundeonderwijs, maar ook door meer wiskunde te brengen in het platte rekenen dat ons rekenonderwijs kenmerkt.¹²⁴

Dit laatste is een van de zorgpunten waarover ik in het begin sprak. In het Nederlandse basisonderwijs doen we veel te weinig om kinderen wiskundig te leren redeneren. Het onderzoeken van getalpatronen, het op een elementaire manier kennismaken met variabelen, functies en combinatoriek ontbreken bijna volledig in ons basisschoolprogramma. Dit is een van de grote verschillen met het Mathematikunterricht in de Duitse Grundschule. Tekenend is bijvoorbeeld dat in een recent verschenen boek¹²⁵ dat bedoeld is om de Duitse kerndoelen voor het basisonderwijs te implementeren, niet begonnen wordt—zoals dat bij ons gebruikelijk is—met een hoofdstuk over getallen en bewerkingen, maar met een hoofdstuk over ‘Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept’¹²⁶ voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool.

Dit hoofdstuk maakt duidelijk dat het rekenonderwijs in de Duitse basisschool meer wiskundig georiënteerd is dan in Nederland. We zouden hier met het oog op het geconstateerde achterblijven van Nederlandse leerlingen bij probleem oplossen¹²⁷—dat met name ook bij goede rekenaars is vastgesteld¹²⁸—een voorbeeld aan moeten nemen.

Het moge duidelijk zijn dat mijn werk in Duitsland, zowel bij de Universiteit Dortmund als bij de Humboldt Universiteit in Berlijn mij hiervoor de ogen heeft geopend en mij in feite weer heeft teruggebracht bij de basis die Wiskobas hier al voor heeft gelegd.

Nog een les die uit het Duitse reken-wiskundeonderwijs valt te trekken, is de eigen plaats die Duitse reken-wiskundedidactici¹²⁹ toekennen aan het zogenoemde ‘halbschriftliches Rechnen’. Naast het ‘Kopfrechnen’, het ‘schriftliches Rechnen’ en het ‘Rechnen mit dem Taschenrechner’ is het ‘halbschriftliches Rechnen’ een eigen plaats toebedeeld in het totale ‘Rechenverfahren’. Die eigen plaats betekent automatisch dat hieraan in het onderwijs expliciet aandacht wordt besteed en dat kinderen leren hoe ze notities kunnen maken als ze hoofdrekenwijzen combineren met rekenen op papier. Gezien het bij ons gesignaleerde tekort in het noteren van rekenstappen¹³⁰ is er alle reden toe om wat dit betreft ook bij onze oosterburen te rade te gaan.

Zoals gezegd, zie ik als toekomst: de wiskunde terug in de kern van het onderzoek van reken-wiskundeonderwijs en in het rekenprogramma op de basisschool. Voor beide zaken kan onze vakdidactische traditie ons helpen, en ook de omstandigheid dat we ons werk vanaf 1 december 2006 in een bredere context doen, namelijk samen met onze collega's van Didactiek van Natuurwetenschappen. Dit kan niet anders dan een versterking betekenen van het vakdidactisch onderzoek in Utrecht.

Hiermee ben ik aan het einde van mijn inaugurele rede gekomen. Ik rond af met een woord van dank.

Dankwoord

Allereerst wil ik mijn erkentelijkheid betuigen aan het College van Bestuur, het Bestuur van de Faculteit Bètawetenschappen en het Departement Wiskunde voor mijn benoeming als gewoon hoogleraar Didactiek van het Wiskundeonderwijs en het in mij gestelde vertrouwen. Deze dank geldt evenzeer voor Jan de Lange en Jan van Maanen, de vorige en de huidige directeur van het Freudenthal Instituut, en vooral voor Adri Treffers van wie ik als gewoon hoogleraar het stokje overneem.

Ik prijs me gelukkig het werk voor deze leerstoel te kunnen doen in een zeer inspirerende omgeving, waarbij Utrecht en Berlijn elkaar aanvullen.

Olaf Köller en mijn collega's van het *Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen* van de Humboldt Universiteit Berlijn, dank ik zeer hartelijk voor deze vruchtbare samenwerking.

Mijn thuisbasis is het Freudenthal Instituut, een bijzonder instituut. Vol met creatieve mensen met de passie, expertise en visie die nodig zijn om een voorhoederol te spelen bij het ontwikkelen en onderzoeken van reken-wiskundeonderwijs, zoals we dat al veertig jaar doen. Het FI is het instituut waar ik voortdurend kansen heb gekregen om te komen waar ik nu ben en waar ik vooral veel heb geleerd. Ik voel me daarbij op de schouders staan van grote reken-wiskundedidactici en onderzoekers.

Daarom wil ik dan ook besluiten met het motto dat Erich Wittmann aan zijn afscheidsrede¹³¹ meegaf toen hij met emeritaat ging: ‘Zukunft braucht Herkunft’.

Mijn man Gerard zou er een uitspraak van een Asmat-beeldhouwer uit Nieuw-Guinea bijhalen en zeggen ‘het nieuwe touw aan het oude vastknopen’. Hij en onze zoon Geert geven me alle steun—en meer dan dat—die nodig is om mijn werk te kunnen doen. Ik wil ze hiervoor hartelijk bedanken. Toch had Gerard liever gezien dat ik me met een andere discipline was gaan bezighouden, een met minder sommetjes en meer etnografica.

Ik heb gezegd.

Noten

- ¹ Pólya, G. (1957, p. v). Deze tekst stond ook al in de ‘Preface to the First printing’ in de eerste uitgave van 1945, uitgegeven door Princeton University Press.
- ² Gross e.a. (2009).
- ³ Zie bijvoorbeeld Knip (2003), Kool (2003), Luteijn (2003) en De Moor (2003; 2004).
- ⁴ Zie bijvoorbeeld Salm (2008), Naaijkens (2008) en Van Galen (2008).
Zie ook de verhelderende bijdrage over de staartdeling van Kees Hoogland (2008) in *Nieuw Archief voor Wiskunde*.
- ⁵ Het ontwikkelwerk is altijd in en met het veld uitgevoerd (zie Freudenthal, 1975).
- ⁶ Dit was vastgelegd in de Lager Onderwijswet van 1920. De eerste wet voor het Lager Onderwijs van 1801 somde alleen de vakken op (Boekholt, 2002).
- ⁷ Zie <http://kerndoelen.kennisnet.nl/>.
- ⁸ Zie bijvoorbeeld de lezing van Van de Craats op de Panama-conferentie 2007 (<http://staff.science.uva.nl/~craats/PanamaScreen.pdf>) en zijn artikel in *Nieuw Archief voor Wiskunde* (Van de Craats, 2007). Zie ook de reacties hierop van Uittenbogaard (2007; 2008).
- ⁹ Uitgaande van de door Treffers (1978; 1987) onderscheiden en vaak geciteerde typen van reken-wiskundeonderwijs (*mechanistisch, empiristisch, structuralistisch, realistisch*) is het onder andere door Van de Craats voorgestane rekenonderwijs mechanistisch te noemen. Het is echter wel een extreme variant van mechanistisch rekenonderwijs, doordat men het cijferen al bij het rekenen tot 100 laat beginnen. Dit betekent dat de informele strategieën van leerlingen worden onderdrukt en het hoofdrekenen een ondergeschikte rol krijgt toebedeeld.

- Bovendien is het vraag of deze ‘one issue’ didactiek wel als een volwaardige reken-wiskundendidactiek kan worden beschouwd.
- ¹⁰ Ook de Onderwijsraad (2009, p. 135-136) maakt melding van de overheersend negatieve toon bij de berichtgeving over het onderwijs in de media en pleit ervoor dat het kennisfundament van het debat sterker moet worden.
- ¹¹ Zie De Jong e.a. (1975), De Moor (1980), Treffers & De Moor (1990), Van den Heuvel-Panhuizen & Treffers (1998), Menne, (2001b).
Ook medelingen in de krant dat de leerlingen de tafels niet meer leren, zijn in tegenspraak met wat bijvoorbeeld de PPOON mediopeiling in 2003 (Kraemer e.a., 2005, p. 4) daarover meldt: “Vrijwel alle leerlingen beheersen de producten van de tafels van 2, 5 en 10 en realiseren daarmee het tussendoel eind jaargroep 4. De helft van de leerlingen kan praktisch alle tafelproducten routinematig oplossen en realiseert zodoende halverwege jaargroep 5 al het tussendoel voor eind jaargroep 5. Ook naar het oordeel van de experts bereiken voldoende leerlingen de standaarden Voldoende en Minimum.”
- ¹² Van Maanen (2007).
- ¹³ Treffers & De Moor (1990).
- ¹⁴ Van den Heuvel-Panhuizen e.a. (2001).
- ¹⁵ Zie Janssen e.a. (2005, p. 43-44).
- ¹⁶ De methode *De Wereld in Getallen* bevat bijvoorbeeld ongeveer 3000 cijfersommen, 1200 voor optellen en aftrekken, 1000 voor vermenigvuldigen en 750 voor delen (Levering, 2009).
- ¹⁷ Zie Van de Craats in *NRC Handelsblad*, 30-9-2008.
- ¹⁸ Zie Janssen e.a.(2005, p. 236-237). Eerder heeft het Cito bovendien vastgesteld dat de realistische methoden vaker bij de beste methoden behoorden dan de traditionele methoden (Janssen e.a.,1999, p. 182-186).
- ¹⁹ Verschaffel, Greer, & De Corte (2007).
- ²⁰ Van den Heuvel-Panhuizen & Goffree (1986).

- ²¹ Van den Heuvel-Panhuizen & Goffree (1986, p. 66-67).
- ²² Uit: *Naar Aanleg en Tempo*, Leerlingenboek 6, Taak 32 (z.j., uitgegeven door Thieme – Zutphen).
- ²³ Deze opbouw wordt de ‘progressieve complicering’ genoemd (Treffers, 1982a; 1982b). De kinderen leren hierbij meteen al bij het rekenen tot 100 te cijferen. Als ze dit beheersen, krijgen ze geleidelijk aan opgaven met iets grotere getallen. De nieuwe traditionele methode *Het Grote Rekenboek* van uitgeverij Scala Leuker Leren BV kiest ook voor zo’n opbouw. In het voorbeeldmaterial van deze methode staat aangegeven dat de leerlingen een deling op de volgende manier moeten opschrijven:
 $32 : 8 = 8 / 32 \setminus 4$.
- ²⁴ Het is opvallend hoe vaak leerlingen die een opgave niet kunnen oplossen daarover spreken in de verleden tijd en zeggen dat ze “niet meer weten hoe het moest.” Dit zegt in mijn ogen veel over het achterliggende leerproces. Het zal waarschijnlijk niet met veel eigen inbreng van de leerling gepaard zijn gegaan.
- ²⁵ Van den Heuvel-Panhuizen & Goffree (1986, p. 68-69).
- ²⁶ Dit programma werd destijds uitgegeven door de Onderwijsbegeleidingsdienst Nieuwe Waterweg-Noord in Vlaardingen.
- ²⁷ Die eerste manier (links afgebeeld) is het kolomsgewijs delen. Bij deze rekenwijze wordt met hele getallen gewerkt in plaats van met cijfers. Deze inzichtelijke, voor de leerlingen natuurlijke aanpak van het delen dient als een introductie op het cijferend delen (rechts afgebeeld). Bij een opbouw waarbij wordt begonnen met kolomsgewijs delen en geleidelijk aan een meer verkorte rekenwijze wordt toegepast, is sprake van ‘progressieve schematisering’ (Treffers, 1982a; 1982b). Voordat deze staartdeling in de realistische reken-wiskundemethoden werd opgenomen, was deze al te vinden in de methode *Boeiend Rekenen* die begin jaren 60 werd uitgegeven. Bovendien werd deze kolomsgewijze aanpak ook in de *Grondslagen van de*

rekendidactiek van Van Gelder (1959) beschreven als een overgang naar de meest verkorte werkwijze. De geschiedenis van deze reken- en notatiewijze gaat echter nog verder terug. In het begin van de twintigste eeuw was dit rekenen met hele getallen in plaats van met cijfers al terug te vinden bij de Duitse rekendidacticus Kühnel (1925). Hazekamp (1978) verwijst in het NCTM Yearbook over *Developing computational skills* zelfs naar een voorbeeld in een rekenboek uit 1729.

Het moge ook duidelijk zijn dat deze kolomsgewijze staartdeling niet iets typisch voor Nederland is. Deze wordt wereldwijd op veel plaatsen gebruikt, zoals onder andere in de Verenigde Staten (Kilpatrick e.a., 2001, p. 211-212), Engeland (<http://nationalstrategies.standards.dcsf.gov.uk/node/19829>; Thompson, 1999, 2008; Anghileri, 2001) en Hongkong (Leung e.a., 2006).

- ²⁸ Zie Treffers, De Moor & Feijs (1989, p. 49). De gegevens van de PPON van 1987 over de aan het cijferen bestede tijd komen hiermee overeen. Bij deze PPON werd gevonden dat in de laatste drie jaar van het basisonderwijs gemiddeld een uur per week aan het cijferen met hele getallen en kommagetallen wordt besteed. Dat is voor alle bewerkingen samen. In totaal komt dat op 120 uur (zie Wijnstra, 1988, p. 105). Aangenomen kan worden dat daarvan het grootste deel werd besteed aan het cijferend delen.
- ²⁹ Zie Treffers & De Jong (1984, p. 2). Als wordt gezegd dat meer dan de helft van de leerlingen over de moeilijkere staartdelingen struikelt, gaat het over “de typische procedurefouten, zoals het niet opnemen van de nullen in het quotiënt, het nemen van een te groot restgetal, niet ‘aanhalen’, invullen van een getal in het quotiënt dat groter is dan tien” (Treffers, 1986, p. 21).
- ³⁰ Ook de Amerikaanse onderzoeken van die tijd gaven aan dat het staartdelen een groot probleem voor de leerlingen was. Zo liet Bright (1978) zien dat bij de National Longitudinal Study of Mathematical Abilities (NLSMA), die eind jaren zestig is

- uitgevoerd door de School Mathematics Study Club, slechts 44 procent van de tienjarige leerlingen bij een opgave als $9792 : 32$ (uitkomst 306) een goed antwoord had gegeven en dat bij $482 : 24$ (uitkomst 20 rest 2) de goedscore lag op 61 procent.
- ³¹ Wijnstra (1988).
- ³² Uit Bokhove en Janssen (1989) is bekend dat 76 procent van de leerlingen een goede beheersing had van deze opgave (dit wil zeggen dat de kans op een goed antwoord 0,8 of groter is), 20 procent een matige beheersing (kans op goed antwoord ligt tussen 0,5 en 0,8) en 4 procent een onvoldoende beheersing (kans op goed antwoord is 0,5 of kleiner). Op basis van deze gegevens kan via $76 \times 0,9 + 20 \times 0,65 + 4 \times 0,25 \approx 85$, het percentage goede antwoorden geschat worden. Zie ook Treffers (2007b).
- ³³ De Amerikaanse National Assessment of Educational Progress (NAEP) van 1982 (zie Lindquist e.a., 1983) liet zien dat als dertienjarigen dergelijke contextopgaven met een rekenmachine maakten de goedscores sterk terugliepen.
- ³⁴ Dit kwam ook in Engels onderzoek naar voren. Zo vond Brown (1981) dat leerlingen niet wisten welke operaties bij contextopgaven hoorden.
- ³⁵ “De NVORWO achtte de tijd rijp om na alle leerplanpublicaties, achtergrondstudies, overzichten en ontwikkelingen op de methodenmarkt uit de jaren zeventig en begin tachtig, nu tot een meer specifiek op leerinhouden toegepitste studie omtrent de basisvorming (einde basisschool) te komen” (Treffers & De Moor, 1984, p. 5). Het doel ervan is “een zekere inhoudelijke homogenisering in het reken-wiskundeonderwijs te bereiken, en gunstige condities te scheppen voor opleiding, nascholing, begeleiding, ontwikkeling en onderzoek, en de samenhang ertussen” (ibid.).
- ³⁶ Treffers & De Moor (1984).
- ³⁷ Treffers & De Moor (1984, p. 40-41).

- ³⁸ In totaal hebben 278 respondenten zich uitgesproken over het cijferen. De groep bestond uit 66 pabo-docenten, 72 schoolbegeleiders, 73 basisschoolleraars, 59 onderzoeker-ontwikkelaars, 5 inspecteurs, en 3 deelnemers waarvan de achtergrond onbekend is (Cadot & Vroegindewey, 1986, p. 47).
- ³⁹ Meer in detail waren de resultaten als volgt: 57 procent volledig eens met deze opvatting, 38 procent grotendeels eens, 5 procent grotendeel oneens, en minder dan 1 procent was het volledig oneens met de opvatting (Cadot & Vroegindewey, 1986, p. 47).
- ⁴⁰ Bij de ouders gaf 62 procent aan het rekenen toegepast in het dagelijks leven 'heel belangrijk' te vinden, 56 procent van de ouders vond dit van het hoofdrekenen en slechts 43 procent koos deze qualificatie voor het cijferen. De leraren van groep 8 zaten daar nog een stuk onder. Slechts 32 procent vond cijferen 'heel belangrijk'. Binnen het voortgezet onderwijs als geheel lag de waardering voor het cijferen hoger: 49 procent van de leraren voortgezet onderwijs koos hierbij voor 'heel belangrijk'. Binnen deze groep schoten met name de mavo-leraren eruit: 67 procent vond cijferen 'heel belangrijk'. De lbo-leraren en hun collega's van vwo/havo maakten duidelijk een andere keuze. Respectievelijk 71 en 69 procent van hen vond het rekenen toegepast in het dagelijks leven 'heel belangrijk' (Ahlers, 1987).
- ⁴¹ DES (1982).
- ⁴² Zie Treffers & De Moor (1990, p. 10)
- ⁴³ Janssen e.a. (1999, p. 178).
- ⁴⁴ Bij de PPON van 1997 was geen sprake meer van een aparte schaal voor cijferend delen zoals het geval was in 1987 en 1992, maar was het cijferend delen ondergebracht in de schaal 'Bewerkingen: Vermenigvuldigen en delen'.
- ⁴⁵ Het Cito kwalificeert dit als iets minder dan een matig negatief effect (Janssen e.a., 1999, p. 178).
- ⁴⁶ Ook voor 1992 (zie Bokhove e.a., 1996, p. 59) en 1997 (zie Janssen e.a., 1999, p. 78) zijn de goedscores weer geschat op

- basis van het percentage leerlingen dat respectievelijk een goede, een matige en een onvoldoende beheersing had op deze opgaven.
- ⁴⁷ Deze teruggang in het maken van deelopgaven waarbij de rest geïnterpreteerd moet worden, geldt niet voor alle opgaven. Eenzelfde soort opgave (2475 supporters; in één bus 48; hoeveel bussen nodig?) waarbij de rekenmachine gebruikt mocht worden, liet in 1992 een goedscore van 56 procent zien, terwijl in 2004 de goedscore op 87 procent lag (Janssen e.a., 2005, p. 120-121; let op, in de tabel staat een fout).
- ⁴⁸ Janssen e.a. (1999, p. 182-186).
- ⁴⁹ Zie voor een analyse van de bij het onderzoek betrokken rekenwiskundemethoden De Jong (1986).
- ⁵⁰ Bij het onderdeel ‘Bewerkingen: Vermenigvuldigen en delen’ behoorde behalve *De Wereld in Getallen* en *Naar Zelfstandig Rekenen* ook *Nieuw Rekenen* tot de groep best scorende methoden. Ofschoon deze methode niet in alle opzichten realistisch genoemd kan worden, sluit ze wat betreft haar cijfer- en hoofdrekeraanpak wel daar bij aan.
- ⁵¹ *De Wereld in Getallen* deed het helemaal beter dan mechanistische methode *Niveaucursus Rekenen*.
- ⁵² Ook de mechanistische methode *Niveaucursus Rekenen* kwam geen enkele keer als beste uit de bus en scoorde bij 11 onderdelen het slechtste.
- ⁵³ Als het advies van Leo Prick in *j/m Voor Ouders* (13e jaargang, nr. 3, p. 67: “Je mag aannemen dat methodes waarvan komt vast te staan dat ze niet werken, niet meer gebruikt zullen worden”) gevolgd gaat worden, zijn volgens deze PPO-gegevens de methoden die niet meer gebruikt zouden moeten worden de mechanistische methoden.
- ⁵⁴ Ook de lage rekenprestaties in de Verenigde Staten—waar men bij het rekenen tot honderd vaak meteen begint met cijferend rekenen—geven weinig aanleiding om terug te gaan naar het mechanistische rekenonderwijs.

- ⁵⁵ Janssen e.a. (2005, p. 232).
- ⁵⁶ Janssen e.a. (2005, p. 232).
- ⁵⁷ Janssen e.a. (2005, p. 231-236).
- ⁵⁸ Afgezien van het rekenen met procenten zijn de prestaties bij de onderdelen ‘Verhoudingen, Breuken en Procenten’ en ‘Meten en Meetkunde’ van 1987 tot 2004 nauwelijks veranderd.
- ⁵⁹ Janssen e.a. (2005, p. 236-237).
- ⁶⁰ Hickendorff e.a.(2009, p. 16, Online First).
- ⁶¹ Ofschoon dit op het eerste gezicht een conclusie lijkt die al degenen die aan de ontwikkeling en implementatie van realistisch reken-wiskundeonderwijs hebben gewerkt met tevredenheid zal stemmen, kan er moeilijk iets over het effect van de twee werkwijzen gezegd worden als de instructietijd niet constant is gehouden. De ervaringen op de Dreesschool en de resultaten van het onderzoek van Rengerink (1983) wezen uit dat de leerlingen via de leerweg van de kolomsgewijze aanpak in kortere tijd tot betere resultaten konden komen. Hiermee vergeleken vallen de resultaten van Hickendorff e.a. dus eigenlijk tegen. Een probleem van dit onderzoek is dat de factor tijd niet is meegenomen. Hierdoor kan een vertekend beeld van het effect van de twee werkwijzen zijn ontstaan.
- ⁶² Zie Janssen e.a. (2005) en Hickendorff e.a.(2009, p. 12, Online First).
- ⁶³ Zie bijvoorbeeld Van den Heuvel-Panhuizen & Bodin (2004) en Buijs (2008; 2009).
- ⁶⁴ Zie bijvoorbeeld Whitin & Whitin (1998).
- ⁶⁵ Zie Ros (2009).
- ⁶⁶ Van den Heuvel-Panhuizen, Robitzsch, Treffers, & Köller, (2009).
- ⁶⁷ Janssen e.a. (2005, p. 23).
- ⁶⁸ Voor het onderdeel ‘Bewerkingen: Vermenigvuldigen en Delen’ was in de tweede helft van groep 7 sprake van een vooruitgang van 0.4 standaarddeviatie (zie grafiek Janssen e.a., 2005, p.107).
- ⁶⁹ Zie Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008).

- ⁷⁰ Van Putten (2005) en Van Putten & Hickendorff (2006).
- ⁷¹ Van den Heuvel-Panhuizen, Robitzsch, Treffers, & Köller, (2009).
Toelichting op de noten in de tabel:
a) Hier wordt bedoeld de ‘Realistische aanpak’ zoals gedefinieerd door Hickendorff e.a. (2009) die de kolomsgewijze aanpak (‘chunking’ of ‘partitioning’) op papier inhoudt.
b) In Hickendorff e.a. (2009) wordt een dummy-versie van deze toetsopgave (9157 : 14) genoemd.
- ⁷² Bij opgaven uit de eerste PPON in 1987 was maar in één geval sprake van een verschil van ruim 10 procentpunten tussen de schriftelijke en de individuele afname. Bij de overige opgaven bedroeg dit verschil slechts enkele procentpunten (Treffers, 2007b, p. 13).
- ⁷³ Dit wordt bijvoorbeeld gedaan in de Duitse DEMAT (Gölitze, Roick, & Hasselhorn, 2006).
- ⁷⁴ Mullis e.a. (2008) en Meelissen & Drent (2008).
- ⁷⁵ Het TIMSS-rapport (Mullis e.a., 2008, p. 18) stelt dat van 37 landen de onderzoeksgegevens staan vermeld. De tabellen (zie bijvoorbeeld Mullis e.a., 2008, p. 34) bevatten echter de gegevens van 36 landen en 7 ‘benchmarking participants’.
- ⁷⁶ De onderzoekers van TIMSS 2007 melden dat Nederland niet voldeed aan de eisen van de steekproeftrekking (“Did not satisfy guidelines for sample participation rates”, Mullis e.a., 2008, p. 44), maar hebben de gegevens van 1995 wel bij hun trendanalyses gebruikt. Ook in 2007 verliep de dataverzameling in Nederland niet helemaal probleemloos (“Nearly satisfied for sample participation rates only after replacement schools were included” (ibid.)).
- ⁷⁷ In TIMSS 2007 worden voor het vak rekenen-wiskunde drie leerstofonderdelen onderscheiden: ‘Number’, ‘Geometric Shapes and Measures’, en ‘Data Display’. De Nederlandse equivalenten hiervan zijn: ‘Getallen en Bewerkingen’ of kortweg gezegd

‘Rekenen’, ‘Meten en Meetkunde’ en ‘Informatieverwerking’ of ‘Grafieken’.

- ⁷⁸ Mullis e.a. (2008, p. 120).
- ⁷⁹ Om deze overige Westerse landen te onderscheiden van de West-Europese landen zijn ze cursief gedrukt.
- ⁸⁰ Levering (2009).
- ⁸¹ *j/m Voor Ouders*, 13e jaargang, nr. 3, p. 65.
- ⁸² Bij de Nederlandse scores is sprake van een lage spreiding. Dit is een verschijnsel dat ook al bij eerdere TIMSS- en PISA-onderzoeken naar voren is gekomen en dat iets wezenlijks zegt over ons onderwijs. Toch wordt hieraan maar relatief weinig aandacht besteed. Kennelijk willen wij onszelf niet afficheren als een ‘kampioen gelijke kansen’ (zie Van Streun, 2009).
- ⁸³ Deze klasseorganisatie komt in ieder geval niet overeen met het bij realistisch reken-wiskundeonderwijs passende interactieve klassikale onderwijs.
- ⁸⁴ Zie bijvoorbeeld het Onderwijsverslag over 1997 (Inspectie van het Onderwijs, 1998).
- ⁸⁵ Zie Askew (2002).
- ⁸⁶ Uit een door Kyriacou (2005) uitgevoerde review-studie kwam echter naar voren, dat de invloed van ‘whole-class teaching’ niet altijd even sterk was. Daarnaast vond deze onderzoeker ook dat het idee van ‘whole-class teaching’ in de onderwijspraktijk niet altijd goed werd toegepast.
- ⁸⁷ Die hoge score van Singapore gaat wel samen met een grote spreiding in resultaten. De beste leerlingen in Singapore doen het beter dan onze beste leerlingen, maar de zwakste leerlingen van Singapore zitten ongeveer op hetzelfde niveau als onze zwakste leerlingen.
- ⁸⁸ Mullis e.a. (2008, p. 204). De bij het onderdeel Rekenen gebruikte toetsopgaven passen voor 91 procent bij de leerstof die in Singapore wordt onderwezen. Voor Nederland is dat maar 64 procent. Van de landen met een hogere rekenscore dan wij,

hebben wij het laagste dekkingspercentage (van twee landen is dit niet bekend). Zo staat in Nederland het rekenen met breuken en kommagetallen niet op het programma van groep 6, terwijl de leerlingen bij de TIMSS-toets hierop wel getoetst zijn.

⁸⁹ Luke e.a. (2005).

⁹⁰ Zie bijvoorbeeld Meelissen & Drent (2008).

⁹¹ ‘Goed’ betekent: de kans op een goed antwoord is 0,8 of groter.
‘Matig’ betekent: de kans op een goed antwoord ligt tussen 0,5 en 0,8.
‘Onvoldoende’ betekent: de kans op een goed antwoord is 0,5 of kleiner.

⁹² In feite hanteert het Cito drie standaarden. De standaard ‘Voldoende’ is de belangrijkste. Hiervan wordt verondersteld dat deze door 70 tot 75 procent van de leerlingen wordt bereikt. Van de standaard ‘Minimum’ wordt verondersteld dat deze door 90 procent tot 95 procent van de leerlingen wordt bereikt. De standaard ‘Gevorderd’ omvat de opgaven die de kerndoelen van het basisonderwijs overstijgen.

⁹³ Janssen e.a. (2005, p. 29-32).

⁹⁴ Vanaf de eerste PPO in 1987 is deze kritiek gekomen op de standaarden en het gebruik ervan. Teunissen (1988, p. 180) zei daarover: “De waarden van een ijkingsprocedure van eindtermen door een panel van respondenten te vragen wenselijke eindniveaus te selecteren wordt betwijfeld. Deze procedures lokken subjectieve oordelen uit die moeilijk te interpreteren zijn en scheppen irreële verwachtingen omtrent het eindniveau van de basisschoolpopulatie als geheel.” Ook vanuit het Cito zelf kwam kritiek op het gebruik van deze oordelen als norm; zie Bokhove & Janssen (1987). Recent nog gaf Bokhove (2008, p. 33) onomwonden zijn mening hierover: “Het is voor de mensen die het PPO-onderzoek vorm geven wel zaak geen voedsel te geven aan hypes, zoals nu de oplaaierende discussie over de achteruitgang van het niveau van het rekenonderwijs [...]. Het Cito mag bovendien zijn hand wel in eigen boezem steken met betrekking tot het vergelijken van de uitkomsten met

‘deskundige’ oordelen. Het blijkt systematisch dat ‘deskundigen’, wie dat dan ook mogen zijn, steeds weer de mogelijkheden van het onderwijs overschatten. [...] Het soort ‘expertoordelen’ opgenomen in de balans van het rekenwiskundeonderwijs geeft voedsel aan ongewenste opwinding over de teloorgang van het ouderwetse rekenen.”

Treffers (1988, p. 187) die bij de eerste PPON evenals Teunissen (1988) er voor pleitte om het niveau reëler in te schatten (“PPON hoeft niet voor Prestaties Permanent Onder Niveau te staan”), maakte onlangs (Treffers, 2007a) met een paar sprekende voorbeelden duidelijk dat deze standaarden totaal niet bruikbaar zijn. Van 1987 tot 1997 steeg het schattend rekenen met zo’n 20 procentpunten, terwijl volgens de geraadpleegde beoordelaars de standaard Voldoende maar door ruim 20 procent van de leerlingen werd gehaald (zie Janssen e.a., 1999, p. 67).

Opmerkelijk genoeg hebben de beoordelaars bij de peiling in 2004 weer een andere norm gehanteerd, want ofschoon er dan bij dit onderdeel geen noemenswaardige vooruitgang is geboekt, voldoet nu ineens 42 procent aan de standaard Voldoende (zie Janssen e.a., 2005, p. 89). Nog een voorbeeld van Treffers (2007b). Nu over de PPON in 2003 halverwege de basisschool (Kraemer e.a., 2005). Op geen van de acht onderdelen wordt de standaard Voldoende gehaald, terwijl wel op alle onderdelen vooruitgang is geboekt.

⁹⁵ Voor het onderdeel ‘Bewerkingen: vermenigvuldigen en delen’ haalde bij de PPON van 2004 maar 12 procent van de leerlingen dit niveau (Van der Schoot, 2008, p. 20).

⁹⁶ Als de norm is dat 70 tot 75 procent van de leerlingen een goede beheersing heeft van de opgaven (kans op een goed antwoord is 0,8 of groter) dan heeft gezien de gebruikte schaling de rest grotendeels een matige beheersing (kans op een goed antwoord ligt tussen 0,5 en 0,8). Op basis hiervan kan via

- 72,5 x 0,9 + 27,5 x 0,65, het percentage goede antwoorden geschat worden. Zie ook noot 32.
- ⁹⁷ Op basis van een maatschappelijk debat beslissingen nemen over wat basisschoolleerlingen moeten leren, is duidelijk iets anders dan wat in de jaren tachtig gebeurde toen een door vakdidactici gemaakt voorstel werd voorgelegd aan verschillende doelgroepen om enerzijds het voorstel te toetsen en anderzijds draagvlak voor de vernieuwing te creëren. Dit zelfde geldt bijvoorbeeld ook voor de consultaties die eind jaren negentig zijn uitgevoerd bij de ontwikkeling van de TAL-leerlijnen en tussendoelen voor het rekenen met hele getallen (De Goeij, Nelissen & Van den Heuvel-Panhuizen 1998; De Goeij, & Nelissen, 1999a; De Goeij & Nelissen, 1999b; Van den Heuvel-Panhuizen & De Goeij, 1999a; Van den Heuvel-Panhuizen & De Goeij, 1999b).
- ⁹⁸ ‘Grundvorstellungen’ van wiskundige inhouden zijn een didactisch construct dat zich in het spanningsveld bevindt tussen realiteit, wiskunde en individu. Ze bevatten de kern van wiskundige inhouden en geven antwoord op de vraag naar de betekenis van de inhouden (Vom Hofe, 1995).
- ⁹⁹ Van den Heuvel-Panhuizen (2005).
- ¹⁰⁰ Dit geldt ook voor bepaalde, vaak Amerikaanse onderzoekers van reken-wiskundeonderwijs, terwijl aan de andere kant meer algemeen-georiënteerde Amerikaanse onderzoekers beslissingen over de inhoud juist niet buiten het onderwijsonderzoek willen plaatsen. Tot de eerste groep horen bijvoorbeeld Kilpatrick e.a. (2001) en Hiebert (1999; 2003) en tot de tweede groep horen Greeno (2003) en Bruner (1999).
- ¹⁰¹ Sierpinska (2003; 2004).
- ¹⁰² Wittmann (2005).
- ¹⁰³ Die weer voortbouwt op de vakdidactische traditie die in Nederland in 1874 is begonnen met Versluys (zie De Moor, 1994b; 1999). Overzichten van wiskundedidactisch onderzoek in

- Nederland zijn te vinden in Van Dormolen & Vedder (1983) en Goffree (2002).
- ¹⁰⁴ Zie bijvoorbeeld Oehl (1962), Wittmann (1974; 1984; 1995), Müller & Wittmann (1977) en Winter (1991).
- ¹⁰⁵ Zie bijvoorbeeld Bengtsson (1997) en Imsen (1999).
- ¹⁰⁶ Zie bijvoorbeeld Brousseau (1997), Artigue & Perrin-Glorian (1991) en Artigue (1994).
- ¹⁰⁷ Freudenthal (1978; 1987); Wittmann (1984; 1995); Treffers (1987); Biehler e.a. (1994); Niss (1999).
- ¹⁰⁸ Zie wat Roest (1982; 1984) hierover in de jaren tachtig schreef.
- ¹⁰⁹ Zie Freudenthal (1991). Kenmerken van dit ontwerp-onderzoek—ook wel ontwikkelingsonderzoek of ‘design research’ genoemd—zijn behalve bij Freudenthal (onder andere) ook te vinden bij Streefland (1990; 1991) en bij Gravemeijer (1994a; 1994b; 2007).
- ¹¹⁰ Er is dus geen exclusieve relatie tussen een bepaalde analyse en een bepaalde onderzoeksvorm, ook al suggereert het schema dit misschien wel.
- ¹¹¹ Zie bijvoorbeeld het werk van Müller & Wittmann (1977) en Wittmann & Müller (1995).
- ¹¹² Zie Treffers (1979, pp. 82-88).
- ¹¹³ Zie Van den Heuvel-Panhuizen (2005), Van den Heuvel-Panhuizen & Teppo (2007) en Teppo & Van den Heuvel-Panhuizen (2007; 2008).
- ¹¹⁴ Van den Heuvel-Panhuizen & Treffers (2009).
- ¹¹⁵ Zo heeft Treffers (1986) al eerder laten zien dat algemene onderwijsleertheoretische uitgangspunten ontoereikend zijn voor het ontwikkelen en onderzoeken van reken-wiskundeonderwijs.
- ¹¹⁶ Freudenthal (1983).
- ¹¹⁷ Steinbring (2005; 2007).
- ¹¹⁸ Dit geldt dan met name voor de historische invalshoek. Zie bijvoorbeeld het werk van De Moor (1994a, 1999), Streefland

- (1979; 2003), Van Maanen (1987, 2003), Kool (1999), Doorman & Van Maanen (2008) en Menne (2001a).
- ¹¹⁹ Met name met Kees de Glopper, Jan Berenst en Aletta Kwant.
- ¹²⁰ Met name met Helma van Lierop-Debrauwer en Coosje van der Pol.
- ¹²¹ Met name met Petra Scherer (zie Scherer e.a., 2007).
- ¹²² Ik bevind me hierbij in de gelukkige omstandigheid te mogen werken met uitermate talentvolle aio's. Allemaal vrouwen. Dat doet me als eerste Nederlandse vrouwelijke hoogleraar Didactiek van het Wiskundeonderwijs zeer deugd.
- ¹²³ Zie <http://www.talentenkracht.nl> en bijvoorbeeld http://www.fi.uu.nl/talentenkracht/docs/Boekje_CuriousMinds-2008.pdf, De Lange e.a. (2007a; 2007b) en Van Geert e.a. (in voorbereiding).
- ¹²⁴ Zie Kolovou & Van den Heuvel-Panhuizen (2009) en Van den Heuvel-Panhuizen, Kolovou, & Bakker (2009).
- ¹²⁵ Walther e.a. (2007).
- ¹²⁶ Wittmann & Müller (2007).
- ¹²⁷ PISA-NL-team (2006).
- ¹²⁸ Van den Heuvel-Panhuizen & Bodin-Baarends (2004).
- ¹²⁹ Zie bijvoorbeeld Wittmann & Müller (1991), Krauthausen (1993), Sundermann & Selter (1995).
- ¹³⁰ Zie Janssen e.a. (2005), Hickendorff e.a. (2009, p. 12, Online First), Van den Heuvel-Panhuizen & Bodin (2004) en Buijs (2008; 2009).
- ¹³¹ Wittmann (2004).

Literatuur

- Ahlers, J. (1987). Grote eensgezindheid over basisonderwijs. Onderzoek onder leraren en ouders. *School*, 15(4), 5-10.
- Anghileri, J. (2001). Development of division strategies for Year 5 pupils in ten English schools. *British Educational Research Journal*, 27(1), 85-103.
- Artigue, M., & M.-J. Perrin-Glorian (1991). Didactic engineering, research and development tool: some theoretical problems linked to this duality. *For the Learning of Mathematics*, 11, 13-18.
- Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 27-39). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Askew, M. (2002). The changing primary mathematics classroom – the challenge of the National Numeracy Strategy. In L. Haggarty (Ed.), *Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice*. London: RoutledgeFalmer.
- Bengtsson, J. (1997). Didactical dimensions. Possibilities and limits of an integrated didactics. *Journal of Swedish Educational Research*, 2(4), 241–261.
- Biehler, R., Scholz, R. W., Strässer, R., & Winkelmann, B. (Eds.). (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Boekholt, P. (Eindred.) (2002). *Tweehonderd jaar onderwijs en de zorg van de Staat*. Assen: Koninklijke Van Gorcum.
- Bokhove, J., & Janssen, J. (1987). Periodiek peilingsonderzoek in het basisonderwijs. *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs*, 6(1), p. 3-6.
- Bokhove, J., & Janssen, J. (1989). Periodiek peilingsonderzoek in het basisonderwijs (5) – resultaten peiling einde basisonderwijs deel 2. *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs*, 7(3/4), 3-13.

- Bokhove, J., Van der Schoot, F., & Eggen, Th. (1996). *Balans van het rekenonderwijs aan het einde van de basisschool 2*. Arnhem: Cito.
- Bokhove, J. (2008). Kritische kanttekeningen bij de huidige toetspraktijk. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 27(1), 30-34.
- Bright, G. W. (1978). Assessing the development of computation skills. In M. N. Suydam, & R. E. Reys (1978). *Developing computational skills* (pp. 148-241). Reston, VA: NCTM.
- Buijs, K. (2008). *Leren vermenigvuldigen met meercijferige getallen*. Utrecht: FIsme, Universiteit Utrecht.
- Buijs, K. (2009). Hoe schrijf je dat nou netjes op? Het gebruik van hulpmiddelen in het reken-wiskundeonderwijs. *Volgens Bartjens*, 28(3), 30-34.
- Brousseau, G., Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R., & Warfield, V. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathematiques, 1970–1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Brown, M. (1981). Number operations. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 23-47). Londen: John Murray.
- Bruner, J. (1999). Some reflections on education research. In E. C. Lagemann, & L. S. Shulman (Eds.). *Issues in education research: problems and possibilities* (pp. 399–409). San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Cadot, J., & Vroegindewij, D. (1986). *10 voor de basisvorming, Rekenen/wiskunde onderzocht. Op weg naar een nationaal plan voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool en het gebruik van de computer daarbinnen*. Utrecht: OC&OW, Rijksuniversiteit Utrecht.
- De Jong, R., Treffers, A., & Wijdeveld, E. (Eds.) (1975). *Overzicht van Wiskundeonderwijs op de Basisschool. Leerplanpublicatie 2*. Utrecht: IOWO, Rijksuniversiteit Utrecht.

- De Jong, R. A. (1986). *Wiskobas in methoden. Vernieuwing van reken/wiskundemethoden voor het Nederlandse basisonderwijs (1965-1985)*. OC&OW, Rijksuniversiteit Utrecht.
- De Lange, J., Feijs, E., & Uittenbogaard, W. (2007a). Kleine genieën. Onderzoeksprogramma Talentenkracht. *Talent*, 9(3), 20-22.
- De Lange, J., Feijs, E., & Uittenbogaard, W. (2007b). Ik ben alleen maar nieuwsgierig. Onderzoeksprogramma Talentenkracht. *Talent*, 9(4), 26-27.
- De Moor, E. (1980). Gevarieerd rekenen. Leerplanpublicatie 11. *Wiskobas-Bulletin*, 9(1/2/3). Utrecht: IOWO, Rijksuniversiteit Utrecht.
- De Moor, E.W.A. (1994a). De betekenis van historisch-didactisch onderzoek. *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs*, 13(1), 39-42.
- De Moor, E.W.A. (1994b). Jan Versluys en het ontstaan van de vakdidactiek. *Nieuwe Wiskrant*, 14(1), 8-13.
- De Moor, E.W.A. (1999). *Van vormleer naar realistische meetkunde – een historisch didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw*. Utrecht: CD-beta Press, Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen.
- De Moor, E. (2003). *NRC Handelsblad*, zaterdag 29-11-2003.
- De Moor, E. (2004). De moordenaars van de staartdeling. *Willem Bartjens*, 23(4), 33.
- Department of Education And Science (DES) (1982). *Mathematics Counts* [The Cockcroft Report], London: HMSO.
- Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (2008). *Over de drempels met rekenen*. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen.
- De Goeij, E., Nelissen, J., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1998). *Tussendoelen annex leerlijnen. Consultatie-nota*. Utrecht: Freudenthal Instituut.

- De Goeij, E., & Nelissen, J. (1999a). Reacties op het 'ABC van het cijferen'. *Willem Bartjens*, 19(1), 28-33.
- De Goeij, E., & Nelissen, J. (1999b). In gesprek met schoolteams. Kolomsgewijs rekenen en cijferen. *Willem Bartjens*, 19(1), 34-36.
- Doorman, L. M., & Van Maanen, J. (2008). A historical perspective on teaching and learning calculus. *Australian Senior Mathematics Teacher*, 22(2), 4-14.
- Freudenthal, H. (1975). Voorwoord. In R. de Jong, A. Treffers, & E. Wijdeveld (Eindredactie), *Overzicht van Wiskundeonderwijs op de Basisschool. Leerplanpublicatie 2* (pp. 5-7). Utrecht: IOWO, Rijksuniversiteit Utrecht.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing. Preface to a science of mathematical education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1987). Theoriebildung zum Mathematikunterricht. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 3, 96-103.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Goffree, F. (2002). Wiskundendidactiek in Nederland. Een halve eeuw onderzoek. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/3(3), 233-243.
- Gölitz, D., Roick, T., & Hasselhorn, M. (2006). DEMAT 4: Deutscher Mathematiktest für vierte Klassen. Göttingen, Germany: Hogrefe.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994a). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CdB Press, Universiteit Utrecht.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994b). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(5), 443-471.
- Gravemeijer, K.P.E. & Cobb, P.A. (2007). Ontwikkelingsonderzoek als methode voor onderzoek rond innovatieve leergangen. *Pedagogische Studiën*, 84(5), 330-339.

- Greeno, J. G. (2003) Situative research relevant to standards for school mathematics. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 304–332). Reston, VA: NCTM.
- Gross H. J, Pahl, M., Si, A., Zhu, H., Tautz, J., & Zhang, S. (2009) Number-based visual generalisation in the honeybee. *PLoS ONE* 4(1): e4263. doi:10.1371/journal.pone.0004263.
- Hazekamp, D. (1978). Teaching multiplication and division algorithms. In M. N. Suydam, & R. E. Reys (1978). *Developing computational skills* (pp. 96-128). Reston, VA: NCTM.
- Hickendorff, M., Heiser, W. J., Van Putten, C. M., & Verhelst, N. D. (2009). Solution strategies and achievement in Dutch complex arithmetic: Latent variable modeling of change. Dit artikel wordt gepubliceerd in *Psychometrika*, 74(2). DOI: 10.1007/S11336-008-9074-Z (www.springerlink.com/content/j66j04535373562t/fulltext.pdf)
- Hiebert, J. (1999). Relationships between research and the NCTM Standards. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(1), 3–19.
- Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM Standards. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 5–23). Reston, VA: NCTM.
- Hoogland, K. (2008). Nostalgische terugblik op de staartdeling. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/9(4), 279-281.
- Imsen, G. (1999) Reflection as a bridging concept between normative and descriptive approaches to didactics. In B. Hudson, F. Buchberger, P. Kansanen, & H. Seel (Eds.), *Didaktik/fachdidaktik as science(-s) of the teaching profession?* (pp. 95–105). Umea, Sweden: Umea University, Department of Teacher Education and Research.

- Inspectie van het Onderwijs (1998). *Verslag van de staat van het onderwijs in Nederland over het jaar 1997*. Utrecht: Inspectie van het Onderwijs.
- Janssen, J., Van der Schoot, F., Hemker, B., & Verhelst, N. (1999). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3*. Arnhem: Cito.
- Janssen, J., Van der Schoot, F., & Hemker, B. (2005). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4*. Arnhem: Cito.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Knip, K. (2003). Requiem voor een staartdeling. *NRC Handelsblad*, zaterdag 15-11-2003.
- Kolovou, A., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2009). Hoeveel probleemoplossingsopgaven zitten er in onze reken-wiskundemethoden? In M. van Zanten (Red.), *Doorgaande ontwikkelingen rekenen-wiskunde* (pp. 101-106). Utrecht: Flsme, Universiteit Utrecht.
- Kool, M. (1999). *Die conste vanden getale. Een studie over Nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw, met een glossarium van rekenkundige termen*. Hilversum: Verloren.
- Kool, M. (2003). *NRC Handelsblad*, zaterdag 29-11-2003.
- Kraemer, J. M., Janssen, J., Van der Schoot, F., & Hemker, B. (2005) *Balans van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 4. Uitkomsten van de vierde peiling in 2003*. Arnhem: Cito.
- Krauthausen, G. (1993). Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 14(3/4), 189-219.
- Kühnel, J. (1925). *Neubau des Rechenunterricht II* (5. Druck). Leipzig: Klinkhardt.

- Kyriacou, Ch. (2005). The impact of daily mathematics lessons in England on pupil confidence and competence in early mathematics: a systematic review. *British Journal of Educational Studies*, 53(2), 168–186.
- Leung, I., Wong, R., & Pang, W. (2006). *Departing from the Traditional Long Division Algorithm: An Experimental Study*. Paper gepresenteerd op de 29th Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia. Canberra, Australia
(<http://www.merga.net.au/documents/RP382006.pdf>)
- Levering, B. (2009). Ons rekenonderwijs is *Best of the West*. *Pedagogiek in Praktijk Magazine*, 47, 14-20.
- Lindquist, M. M., Carpenter, Th. P., Silver, E., & Matthews, W. (1983). The Third National Mathematics Assessment: Results and implications for elementary and middle schools. *Arithmetic Teacher*, December, 14-19.
- Luteijn, P. J. (2003). *NRC Handelsblad*, zaterdag 06-12-2003.
- Luke, A., Freebody, P., Shun, L., & Gopinathan, S. (2005). Towards research-based innovation and reform: Singapore schooling in transition. *Asia Pacific Journal of Education*, 25(1), 5-28.
- Meelissen, M. R. M., & Drent, M. (2008). *TIMSS 2007. Trends in leerprestaties in exacte vakken in het basisonderwijs*. Enschede: Universiteit Twente, Vakgroep Onderwijsorganisatie en –management.
- Menne, J.J.M. (2001a). Geschiedenis van de lege getallenlijn. *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Rekenwiskundeonderwijs*, 20(1), 3-14.
- Menne, J. J. M. (2001b). *Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100 – een onderwijsexperiment*. Utrecht: CD-beta Press, Universiteit Utrecht.

- Mullis, I.V.S., Martin, M.O., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 International Mathematics Report*. Chestnut hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.
- Müller, G., & Wittmann, E. Ch. (1977; 1984, 3e hernieuwde druk). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe*. Braunschweig: Vieweg.
- Naaijken, E. (2008). De strijd om de staartdeling. *Brabants Dagblad*, 4-11-2008.
- Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 1–24.
- Oehl, W. (1962). *Der Rechenunterricht in der Grundschule*. Hannover: Schroedel.
- Onderwijsraad (2009). *Stand van educatief Nederland 2009*. Den Haag: Onderwijsraad.
- PISA-NL-team (2006). *Wiskundige geletterdheid volgens PISA. 1. Analyse – hoe staat de vlag erbij?* Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.
- Pólya, G. (1957). *How to solve it. A new aspect of mathematical method* (2nd Edition). Garden City, New York: Doubleday Anchor Books, Doubleday & Company, Inc.
- Rengerink, J. (1983). *De staartdeling: Een geïntegreerde aanpak volgens het principe van progressieve schematisering*. Utrecht: OW&OC, Rijksuniversiteit Utrecht.
- Roest, P. (1982). Vakdidactieken nader beschouwd. *Pedagogisch Tijdschrift / Forum voor Opvoedkunde*, 7(7), 318-322.
- Roest, P. (1984). Wisselend landschap. Een terugblik op vijf vakdidactische bijdragen. *Pedagogisch Tijdschrift / Forum voor Opvoedkunde*, 9(6), 270-275.
- Ros, B. (2009). Een pittig tweegesprek over rekenen. Staartdelen of happen? *Didaktief*, 39(1-2), 4-8.
- Salm, H. (2008). Wat is er nou ouderwets aan een staartdeling? *Trouw*, donderdag 30-10-2008.

- Sierpinska, A. (2003). Research in mathematics education. Through a keyhole. In *CMESG/GCEDM Proceedings 2003* (<http://flm.educ.ualberta.ca/Sierpinska.pdf>).
- Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: task problematization. *For the Learning of Mathematics*, 24(2), 7-15.
- Scherer, P., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Van den Boogaard, S. (2007). Einsatz des Bilderbuchs "Fünfter sein" bei Kindergartenkindern – Erste Ergebnisse eines internationalen Vergleichs. In GDM (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (pp. 921-924). Hildesheim: Franzbecker.
- Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction—an epistemological perspective*. Berlin: Springer.
- Steinbring, H. (2007). Epistemology of mathematical knowledge and teacher-learner interaction. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39, 95-106.
- Streefland, L. (1979). Historisch perspectief. In A. Treffers (Ed.), *Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). Overzicht en achtergronden. Leerplanpublikatie 10* (pp. 131-153). Utrecht: IOWO, Rijksuniversiteit Utrecht.
- Streefland, L. (1990). Developmental research and tests – sine functions as a paradigm. In *Proceedings of 2nd Bratislava International Symposium on Mathematics Education, Bratislava* (pp. 78–98).
- Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Streefland, L. (2003). Learning from history for teaching in the future. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 37–62.
- Sundermann, B. & Selter, Chr. (1995). Halbschriftliches Rechnen auf eigenen Wegen. In G. N. Müller, & E. Ch. Wittmann (Hg.), *Mit Kindern rechnen* (pp. 165-178). Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule.

- Teppo, A. R., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2007). *Mathe-didactical analysis: A crucial component of task design*. Paper gepresenteerd op de 'Mathematical Thinking: An Interdisciplinary Workshop' gehouden op de University of Nottingham op 21-22 november 2007 (http://www.fi.uu.nl/~marjah/documents/Math-Thinking_Nottingham_2007_website_final.pdf).
- Teppo, A. R. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Qualitative research methods: mathe-didactical analysis of task design. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Conference PME32-PMENAXXX* (Vol 1, pp. 205-208), Morelia, Mexico.
- Teunissen, F. (1988). Een hoge norm. In J. Wijnstra (Ed.), *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool* (pp. 169-180). Arnhem: Cito.
- Thompson, I. (1999). Written methods of calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 169-183). Buckingham: Open University Press.
- Thompson, I. (2008). Deconstructing calculation methods, Part 4: division. *Mathematics teaching*, 208, 6-8.
- Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. Utrecht: IOWO, Rijksuniversiteit Utrecht.
- Treffers, A. (Ed.) (1979). *Cijferend vermenigvuldigen en delen (1). Overzicht en achtergronden. Leerplanpublicatie 10*. Utrecht: IOWO, Rijksuniversiteit Utrecht.
- Treffers, A. (1982a) Cijferen in het rekenonderwijs van toen en nu. *Pedagogische Studiën*, 59(3), 97-115.
- Treffers, A. (1982b) Basisalgoritmen in het wiskunde-onderwijs op de basisschool. *Pedagogische Studiën*, 59(11), 471-483.
- Treffers, A. (1983) Geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering. *Pedagogische Studiën*, 60, 351-362.
- Treffers, A., & De Jong, R. A. (1984). Nieuwe aanpak 'ouderwetse rekenkwast' voldoet uitstekend. *Didaktief*, 14(2), 2-4.

- Treffers, A., & De Moor, E. (1984). *10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde. Werkboek*. Utrecht: OW&OC, Rijksuniversiteit Utrecht.
- Treffers, A. (1986). Analyseren en ontwikkelen van reken/wiskundeonderwijs vanuit twee verschillende basisconcepties. *Pedagogische Studiën*, 63, 14-25.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction—the Wiskobas Project*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Treffers, A. (1988). Over de merkbare invloed van onderwijsmethoden op leerprestaties. In J. Wijnstra (Ed.), *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool* (pp. 181-189). Arnhem: Cito.
- Treffers, A., De Moor, E., & Feijs, E. (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel I. Overzicht einddoelen*. Tilburg: Zwijssen.
- Treffers, A., & De Moor, E. (1990). *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en Cijferen*. Tilburg: Zwijssen.
- Treffers, A. (2007a). *Rekenniveau verkeerd ingeschat*. Interne publicatie Freudenthal Instituut.
- Treffers, A. (2007b). De kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs – een virtueel vraaggesprek. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(4), 11-17.
- Uittenbogaard, W. (2007). Hoe Juliette en Jonas leren rekenen. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(1), 32-36.
- Uittenbogaard, W. (2008). Geen catechismus leren, maar nadenken. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/9(1), 60-64.
- Van de Craats, J. (2007). Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/8(2), 132-136.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Goffree, F. (1986). *Zo rekent Nederland*. Enschede: SLO.

- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Treffers, A. (1998). *NCRC-module Oefenen*. Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & De Goeij, E. (1999a). De resultaten van een nationale bezinning op het rekenen in de bovenbouw van de basisschool (1). *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs*, 17(4), 3-14.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & De Goeij, E. (1999b). De resultaten van een nationale bezinning op het rekenen in de bovenbouw van de basisschool (2). *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs*, 18(1), 3-20.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., Buys, K., & Treffers, A. (Red.) (2001). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen annex leerlijnen. Hele getallen bovenbouw basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Bodin-Baarends C. (2004). All or nothing: Problem solving by high achievers in mathematics. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education*, 8(3), 115-121.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). Can scientific research answer the 'what' question of mathematics education? *Cambridge Journal of Education*, 35(1), 35-53.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Teppo, A. (2007). Tasks, teaching sequences, longitudinal trajectories: about micro didactics and macro didactics. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 293). Seoul: PME (http://www.fi.uu.nl/~marjah/documents/SO_vdHeuvel-Teppo_website_final.pdf).

- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Treffers, A. (2009). Mathedidactical reflections on young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 102-112.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., Kolovou, A., & Bakker, A. (2009). Non-routine problem solving tasks in primary school mathematics textbooks – A needle in a haystack. Geaccepteerd voor publicatie in *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., Robitzsch, A., Treffers, A., & Köller, O. (2009). Large-scale assessment of change in student achievement: Dutch primary school students' results on written division in 1997 and 2004 as an example. Dit artikel wordt gepubliceerd in *Psychometrika*, 74(2).
- Van der Schoot, F. (2008). *Onderwijs op peil? Een samenvattend overzicht van 20 jaar PPO*. Arnhem: Cito.
- Van Dormolen, J., & Vedder, J. (1983). Een staalkaart van de didactiek van de wiskunde. *Pedagogisch Tijdschrift / Forum voor Opvoedkunde*, 8(7), 363-374.
- Van Galen, L. (2008). Staartdeling is middel en geen doel. *Trouw*, donderdag 6-11-2008.
- Van Geert, P., e.a. (in voorbereiding). *Wesley and the Air Squirt*.
- Van Gelder, L. (1959). *Grondslagen van de rekendidactiek* (3e druk). Groningen: J.B. Wolters.
- Van Maanen, J. A. (1987). *Facets of seventeenth century mathematics in the Netherlands*. Utrecht: Universiteit Utrecht.
- Van Maanen, J. A. (2003). Cardinael in de geschiedenis van de wiskunde. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/4(1), 51-55.
- Van Maanen, J. (2007). *De koeiennon*. Utrecht: FIsme, Universiteit Utrecht.
- Van Putten, C. M. (2005). Strategiegebruik bij het oplossen van deelsommen. In J. Janssen, F. van der Schoot, & B. Hemker, *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4* (pp. 125-131). Arnhem: Cito.

- Van Putten, C. M., & Hickendorff, M. (2006). Strategieën van leerlingen bij het beantwoorden van deelopgaven in de periodieke peilingen aan het eind van de basisschool van 2004 en 1997. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 25(2), 16-25.
- Van Streun, A. (2009). Het moet en kan beter?! Wat dan? Voor wie? En hoe? In M. van Zanten, *Doorgaande ontwikkelingen rekenen-wiskunde* (pp. 11-32). Utrecht: FIsme, Universiteit Utrecht.
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 557-628). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.
- Walther, G., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Granzer, D., & Köller, O. (Hrsg.) (2007). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Whitin, D. J., & Whitin, Ph. E. (1998). The 'write' way to mathematical understanding. In L.J. Morrow, & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics. 1998 Yearbook NCTM*. Reston, VA: NCTM.
- Wijnstra, J. (Ed.) (1988). *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool*. Arnhem: Cito.
- Winter, H. (1991). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik* (2^eed.). Braunschweig: Vieweg.
- Wittmann, E. Ch. (1974). Didaktik der Mathematik als Ingenieurwissenschaft. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 3, 119-121.
- Wittmann, E. Ch. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 25-36.

- Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (1991). *Handbuch produktiver Rechenübungen / Halbschriftliches und schriftliches Rechnen*. Leipzig: Klett.
- Wittmann, E. Ch. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 355-374.
- Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (1995). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Bd. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Bd. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*. Stuttgart: Klett.
- Wittmann, E. Ch. (2004). *Von den 'Grundfragen' zum 'Zahlenbuch' und zurück*. Afscheidsrede uitgesproken op 30-7-2004 tijdens het symposium ter gelegenheid van Wittmanns emeritaat, gehouden op de Technische Universiteit Dortmund, Fakultät Mathematik, Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts.
- Wittmann, E. Ch. (2005). Realistic Mathematics Education, past and present. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/6(4), 294-296.
- Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer, & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (pp. 42-65). Berlin: Cornelsen Verlag.