PANAMA-POST

Wiskunde leren is complexer dan je denkt

Reactie op 'Vraagtekens bij realistisch reken-wiskundeonderwijs'

K.P.E. Gravemeijer
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

In dit artikel wordt gereageerd op de wiskundige Opmeer (2005), die in het vorige nummer van dit tijdschrift een kritische bespreking wijdde aan het discussiestuk 'De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen' (Keijzer, Figueiredo, Van Galen, Gravemeijer & Van Herpen, 2005). In deze reactie wordt betoogd dat Opmeers kritiek voortkomt uit een fundamenteel verschil van inzicht in waar het bij het leren van wiskunde omgaat. Dit verschil wordt uitgewerkt aan de hand van een toelichting op de realistische benadering en er wordt beargumenteerd dat de realistische benadering die uitgaat van 'betekenis en toepassingen eerst' vruchtbaarder is dan een benadering die uitgaat van 'definities en procedures eerst'.

1 Inleiding

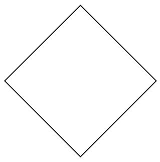
In het laatste nummer van dit tijdschrift (jrg 23 nr 4) trekt de wiskundige Opmeer (2005) van leer tegen het realistisch reken-wiskundeonderwijs in het algemeen en tegen de voorstellen in de discussienota 'De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen' (Keijzer, Figueiredo, Van Galen, Gravemeijer & Van Herpen, 2005) in het bijzonder. Achter zijn kritiek steekt duidelijk een andere visie op wat wiskunde is en hoe je wiskunde leert, dan die ten grondslag ligt aan het realistische reken-wiskundeonderwijs. Ik begin deze reactie daarom met een toelichting op waar het bij het leren van rekenen-wiskunde in de realistische visie om gaat. Ik start met een voorbeeld uit het aanvankelijke rekenen, daarna ga ik op de kritiek van Opmeer in.

2 Het leren van wiskunde

Het kan zijn dat jonge leerlingen op een gegeven moment de vraag: 'Hoeveel is vier plus vier?' niet begrijpen, terwijl ze wel weten dat vier blokjes en nog eens vier blokjes erbij acht blokjes opleveren. Getallen zijn voor deze leerlingen nog gebonden aan hoeveelheden, ze functioneren als het ware als bijvoeglijke naamwoorden en hebben nog geen zelfstandige betekenis. Aan deze leerlingen vertellen dat vier plus vier acht is, heeft weinig zin. Uiteraard kunnen ze dat wel uit hun hoofd leren en zullen ze er ook misschien wel mee kunnen werken, maar het blijft goochelen met maniertjes. Een extreem voorbeeld van waar dit goochelen toe kan leiden, levert de (ongeveer zesjarige) leerling Auburn die in het kader van een Amerikaans onderzoek wordt geïnterviewd (Cobb, 1989). Zij laat zien dat eenzelfde opgave, 16 + 9, wat haar betreft twee verschillende antwoorden kan hebben, die allebei goed zijn. Eén antwoord dat voor haar waar is in de context van het rekenen op school (in dit geval 15, verkregen door een verkeerd uitgevoerd algoritme) en één dat waar is in de alledaagse werkelijkheid (namelijk 25, verkregen via doortellen).

Een manier om de leerlingen te helpen getalrelaties te ontwikkelen, is om ze activiteiten te laten verrichten rond het structureren van hoeveelheden. De leerlingen kunnen dan ontdekken dat vier van iets en nog eens vier van hetzelfde acht van hetzelfde oplevert. Door dergelijke situaties te generaliseren, kunnen ze de getalrelatie 'vier plus vier is acht' construeren.[1] Wanneer de leerlingen over steeds meer van dergelijke relaties gaan beschikken, verandert de betekenis van de getallen. Dan wordt 'vier' geleidelijk aan een op zichzelf staand object dat zijn betekenis ontleent aan de getalrelaties waarmee het geassocieerd wordt. Bij 'vier' wordt dan gedacht aan $2 + 2 = 4$, $3 + 1 = 4$, $5 - 1 = 4$, $2 \times 2 = 4$, $8 : 2 = 4$, $4 + 4 = 8$, enzovoort. Getallen als wiskundige objecten worden dus geconstrueerd langs de weg van onderzoeken, generaliseren en (mentaal) construeren.

De Van Hieles (Van Hiele, 1973) observeerden een vergelijkbaar verschil in referentiekader tussen novice en expert in het meetkundeonderwijs op de middelbare school. Leraar en leerlingen bleken onder dezelfde woorden heel verschillende dingen te verstaan. Voor de leerlingen was een 'ruit' een figuur met bepaalde visuele kenmerken. Voor de leraar verwees het begrip ruit naar samenhangende eigenschappen: de zijden zijn twee aan twee parallel, de zijden zijn even lang, de diagonalen staan loodrecht op elkaar. Voor de leraar was het vanzelfsprekend dat als een voldoende aantal van deze eigenschappen geldt, de andere ook gelden. De leerlingen waren echter van mening dat een vierkant geen ruit was.



figuur 1: vierkant op zijn punt

In een afbeelding van een vierkant op zijn punt (fig.1) herkenden ze echter wel een ruit. De Van Hiele's constateerden dat er sprake was van een communicatieprobleem tussen leraar en leerlingen: ze gebruiken dezelfde woorden maar bedoelen verschillende dingen. Leraar en leerlingen beschikken over verschillende referentiekaders, waarin het woord 'ruit' verschillende dingen betekent. Om de leerlingen het wiskundige begrip ruit te laten ontwikkelen, is een proces van onderzoeken, generaliseren en (mentaal) construeren nodig.

In de realistische benadering streven we ernaar de leerlingen dergelijke processen van kennisconstructie te laten starten in betekenisvolle situaties. Het centrale begrip hierbij is 'betekenisvol', waar de benaming 'realistisch' ook naar verwijst. 'Realistisch' staat niet voor alledaagse werkelijkheid, maar voor 'zich realiseren': de leerling moet zich kunnen realiseren waar het om gaat en waar de gebruikte symbolen en begrippen voor staan. Er moet, anders gezegd, een betekenisvolle basis zijn om op voort te bouwen. Dat is ook het belang van contexten, waarbij in realistische kring bij herhaling benadrukt wordt dat onderdelen van de wiskunde zelf ook de context kunnen bieden, mits de leerlingen zover zijn dat die betekenis voor hen hebben gekregen. De realistische benadering past goed binnen algemeen onderwijskundige inzichten. In kringen van onderwijswetenschappers wordt in ruime kring onderkend dat je kennis niet via het uitleggen van regels en definities kunt overdragen, maar dat je de leerlingen moet helpen kennis te construeren.

3 Kommagetallen

Tegen deze achtergrond ga ik op het stuk van Opmeer in. Deze stelt dat we alleen met de leerlingen over kommagetallen moeten spreken wanneer we ze hiervan een definitie hebben gegeven.

> Anders moeten de leerlingen maar raden welke van de betekenissen er nu weer bedoeld wordt.
> (pagina 26 van zijn artikel)

De betekenissen waar Opmeer hier op doelt, zijn respectievelijk kommagetallen met een eindig en oneindig aantal symbolen achter de komma, en kommagetallen die uiteindelijk periodiek zijn. Overigens raak ik hier op mijn beurt zelf ook in verwarring: hebben die uiteindelijk periodieke kommagetallen geen oneindig aantal symbolen achter de komma? Ik denk dat de definities die Opmeer wil geven - bij wijze van introductie, naar ik aanneem - meer verwarring stichten dan helderheid verschaffen.
Wij starten liever op een andere manier. In het discussiestuk waar Opmeer zijn kritiek op richt worden kommagetallen geïntroduceerd in de context van het meten en de daar optredende noodzaak tot maatverfijning. Daar wordt ingegaan op het feit dat dit principe van maatverfijning in wezen onbeperkt kan worden doorgezet. Dit wordt gekoppeld aan een toenemende precisie van het meten: eerst wordt gewerkt met een systematische verfijning op basis van delen door tien, wat maten oplevert die je achtereenvolgens kunt schrijven als $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, enzovoort,[2] later wordt daar, naar analogie van het positiestelsel dat de leerlingen van de gehele getallen kennen, de verkorte schrijfwijze voor ingevoerd die we 'kommagetallen' noemen.
Opmeer kiest voor het introduceren van kommagetallen met behulp van definities, terwijl wij kommagetallen laten voortvloeien uit een ontwikkelingsproces dat de leerlingen zelf doormaken en kunnen beïnvloeden. Kommagetallen verkrijgen via deze leergeschiedenis meer betekenis dan via definities waarin drie typen kommagetallen worden onderscheiden.

4 Realiteit en structuur

Wanneer het om dergelijke didactische keuzen gaat onderscheidt Opmeer in eerste instantie twee benaderingen, een op definities gebaseerde didactiek en de realistische didactiek. Hij zegt daarover:

> De op definities gebaseerde didactiek negeert de realiteit en de realistische didactiek negeert de structuur. (pag.25)

Hij bepleit een middenweg, maar de voorstellen die hij doet komen niet verder dan de op definities gebaseerde didactiek die de realiteit negeert. Zo zegt hij op pagina 26:

> Het is niet zo moeilijk om breuken te definiëren in termen van gehele getallen. Wanneer dat gedaan wordt, dan is tenminste duidelijk waar we het over hebben.

De hiervoor genoemde leerling, Auburn, laat zien wat de consequenties van deze didactische aanpak kunnen zijn. Een bekend voorbeeld op het gebied van breuken en kommagetallen is het verhaal van 'Benny', een casestudy van Erlwanger (1973). Daarin beschrijft hij het tragische verhaal van de begaafde leerling Benny, die door het mechanistische onderwijs zijn eigen wereldjes creëert met elk hun eigen regels, en daardoor verschillende antwoorden voor dezelfde opgave accepteert ($2 + 0{,}3 = 0{,}5$, maar met stroken is het antwoord 2,3 en met breuken $2\frac{3}{10}$.

Maar, misschien begrijp ik het wel niet goed. Opmeer doet namelijk niet veel moeite om uit te leggen hoe die door hem voorgestane didactiek eruit zou moeten zien. In plaats daarvan bedient hij zich van retorische vragen, tendentieuze metaforen (over gif in de voedselketen) en overdrijving. De als retorisch bedoelde vragen suggereren dat hij niet op de hoogte is van onderzoek naar allochtone leerlingen (Van den Boer, 2003), zwakke rekenaars (Kraemer, 1995, 1996), of internationaal vergelijkend onderzoek (zoals PISA en TIMSS). Wat het overdrijven betreft, doet zijn opmerking 'Blijkbaar kun je inzicht hebben zonder het te kunnen' (pag.27) geen recht aan onze stellingname.

Wij bepleiten een accentverschuiving van kunnen naar begrijpen, met meer nadruk op inzicht en wat minder op beheersen. Dat is niet hetzelfde als het ene afschaffen om het andere te kunnen bevorderen. We werken dit in de nota gedetailleerd uit, bijvoorbeeld wanneer we ingaan op de kwestie van de differentiatie. We spreken wat begrijpen betreft steeds van kerninzichten. Die kerninzichten betreffen de structuur van de wiskunde. In die zin staan onze voorstellen misschien wel dichterbij de middenweg die Opmeer bepleit dan hij denkt.

Wel heeft Opmeer gelijk, wanneer hij stelt dat wij het reken-wiskundeonderwijs nog verder in realistische richting willen ombuigen. Het gaat daarbij om een dubbelslag: een betekenisvolle fundering met meer fundamenteel denkwerk voor de leerlingen. Bij dit laatste gaat het ook om de structuur van de wiskunde. Het gevaar bestaat dat realistisch reken-wiskundeonderwijs blijft steken in pragmatiek, in het vinden van goede antwoorden bij de gestelde problemen. Een gevaar waar overigens het op algoritmen en oefenen gerichte programma van Opmeer zeker zo veel aan blootstaat. Om vooruitgang te kunnen boeken in wiskundig inzicht en denken zal de aandacht van de leerlingen verlegd moeten worden van een pragmatische naar een wiskundige motivatie. De belangstelling zal moeten verschuiven van het oplossen van problemen naar het redeneren over de oplossingsmethoden en de daarin betrokken wiskundige concepten. Zaken als generaliseren en bewijzen komen hier aan de orde, al zullen we daar niet direct zulke grote woorden voor gebruiken, maar eerder vragen: 'Geldt dit altijd?', 'Kunnen we dit ook op andere situaties toepassen?', 'Weet je het zeker, en hoe weet je dat?'

Ik denk dat dergelijke vragen in het huidige (reken-)wiskundeonderwijs te weinig worden gesteld. In het algemeen wordt ervan uitgegaan dat leerlingen gemotiveerd zijn voor het oplossen van praktische problemen maar niet voor de wiskunde zelf. Ik denk echter dat er te veel wordt uitgegaan van de gedachte dat de motivatie van leerlingen een statisch gegeven is en dat je je daar als leraar aan moet aanpassen. Wiskundige motivatie en belangstelling kunnen ontwikkeld worden wanneer de leraar zich erop richt deze te cultiveren. Verandering van het reken-wiskundeonderwijs in deze richting lijkt me veel belangrijker dan het oefenen van procedures, zoals Opmeer dat bepleit.

Het is bovendien de vraag of meer leerlingen voor een exacte studie zullen kiezen wanneer het onderwijs voor een groter deel zal bestaan uit het leren van definities en het oefenen van procedures. Nog los van het feit dat ze dan om een verkeerde reden exact zouden kiezen, spreekt dit leerlingen niet aan. Adolescenten hechten veel waarde aan activiteiten die passen bij hun zelfbeeld. Het nadoen van wat anderen bedacht hebben hoort daar niet bij. Het oplossen van uitdagende problemen en het ervaren dat je iets echt door hebt (een *aha erlebnis*) zullen, denk ik, betere stimuli zijn voor het kiezen voor een exacte studie.

5 Bètastudenten

Tot slot wil ik nog even ingaan op de kwestie van de bètainstroom. Of Nederland internationaal gezien zo'n laag aantal bètastudenten heeft als wordt beweerd, is maar de vraag. Wat diverse landen in hun tellingen meenemen blijkt namelijk te verschillen. Zo maakt het nogal wat uit of je bijvoorbeeld studenten econometrie wel of niet bij de bèta's telt. De dalende belangstelling voor wiskunde is een internationaal verschijnsel. Het is wat al te gemakkelijk om het Nederlandse onderwijs de schuld te geven. Interessanter is de vraag waardoor het komt dat niet meer leerlingen voor een bètastudie kiezen. Het feit dat steeds meer reken-wiskundige taken door elektronica worden overgenomen, zal daar mogelijk iets mee te maken hebben.

Dat brengt mij op de vraag, wat de consequenties van de toenemende automatisering van reken-wiskundige routinetaken zijn voor het wiskundeonderwijs. Je hoort er klachten over dat aankomende bètastudenten de staartdeling niet kunnen maken. Ik denk dat er iets ernstig mis is met de bètaopleidingen in Nederland wanneer de leerlingen daar nog staartdelingen moeten maken. Niet dat er geen probleem is met de vaardigheden van de aankomende studenten.
Ik hoorde onlangs dat exact-georiënteerde vwo-leerlingen een merkwaardig product van het type $a^2 - b^2$ niet herkenden in een opgave. Het ongedifferentieerd benadrukken van het belang van alle mogelijke vaardigheden kan echter het leren van echt belangrijke vaardigheden in de weg staan.
Bovendien is het zojuist genoemde probleem niet opge-

lost wanneer leerlingen $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ uit het hoofd geleerd hebben. De leerlingen moeten de structuur van dit merkwaardige product spontaan herkennen in een expressie die er heel anders uitziet. Het gaat dan om toepassen.

En daarmee is de cirkel rond: het leren van regels en definities heeft geen zin als je niet zorgt dat je er ook in toepassingen - binnen of buiten de wiskunde - iets mee kunt. Daar is meer voor nodig dan Opmeer veronderstelt en juist het realistische reken-wiskundeonderwijs kan daarin een belangrijke rol vervullen.

Noten

1 Bij deze constructie gaat het overigens om meer dan generaliseren over patronen, het gaat ook om een integratie van tellen, als strategie om een aantal te bepalen, en doortellen, als strategie om de uitkomst van een optelling te bepalen (Grey & Tall, 1994).

2 De leerling ervaart dan bovendien dat je bij het afmeten van $\frac{1}{4}$ aan twee submaten voldoende hebt ($\frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$), maar dat je bij $\frac{1}{3}$ onbeperkt door zou moeten gaan.

Literatuur

Boer, C.J.E.M. van den (2003). *Als je begrijpt wat ik bedoel. Een zoektocht naar verklaringen voor achterblijvende prestaties van allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs.* Utrecht: CD-beta press.

Cobb, P. (1989). *Reconstructing elementary school mathematics*. Paper presented at a conference of the Research council for Diagnostic and Prescriptive Mathematics.

Erlwanger, S.H. (1973). Benny's conceptions of Rules and Answers in IPI Mathematics. *Children's Mathematical Behavior, 1*(2).

Grey, E. M. & D.O. Tall (1994). Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 115–141.

Hiele, P.M.van (1973). *Begrip en Inzicht*. Purmerend: Muusses.

Keijzer, R., N. Figueiredo, F. van Galen, K. Gravemeijer & E. van Herpen (2005). *De kern van breuken, verhoudingen, procenten en kommagetallen.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

Kraemer, J.M. (1995). Aanknopingspunten voor de versterking van het aanvankelijk rekenen in LOM- en MLK-scholen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 14*(2), 3-16.

Kraemer, J.M. (1996). Aanknopingspunten voor de versterking van het aanvankelijk rekenen in LOM-en MLK-scholen (2). *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs, 14*(4), 3-16.

Opmeer, M.R. (2006). Vraagtekens bij realistisch reken-wiskundeonderwijs. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 24*(4), 25-28.

In an earlier issue of this journal, the mathematician Opmeer criticized the realistic approach to mathematics education, and more specifically the way in which this approach is implemented in a discussion paper on fractions, ratio, percents and decimal numbers (Keijzer, Figueiredo, Van Galen, Gravemeijer & Van Herpen, 2005). The current article argues that his critique originates from a fundamental difference in opinion on what mathematics is and how it is learned. This opposing view is clarified with an elaboration of the realistic position, and it is argued that the realistic approach, which espouses 'meaning and applications first' is more fruitful for the learner than an instructional approach that puts 'definitions and procedures first'.