Zomercursus Wiskunde

Katholieke Universiteit Leuven
Groep Wetenschap & Technologie

September 2008

Lineaire algebra

(versie 15 september 2008)

Deze module wordt zowel gegeven in het A-programma als in het B-programma van de zomercursus wiskunde. In het A-programma wordt de nadruk gelegd op de hoofdstukken 1 en 2 en worden de hoofdstukken 3.2, 5.2 niet behandeld.

Inleiding

Lineaire algebra is de theorie van vectoren en matrices. Er zijn verschillende benaderingen mogelijk tot deze materie. De aanpak van deze tekst heeft als voornaamste doel om concreet te leren rekenen met vectoren in $\mathbb{R}^n$ en matrices, en om meetkundige intuïtie bij te brengen die nuttig is bij het redeneren over vectoren. Daarnaast wordt ook de link gelegd met de soms sterk verschillende kijk op vectoren in de fysica en in de wiskundige theorie van vectorruimten. We eindigen met een kort hoofdstuk over determinanten.

Niet alle stof in deze module is voorkennis uit het secundair onderwijs. Maar we zien deze module ook als een nuttige brug tussen het secundair onderwijs en de cursussen lineaire algebra en fysica.

1 Vectoren in $\mathbb{R}^n$ en matrices

Wat is een vector. Het is een vraag die in de loop van deze tekst verschillende antwoorden zal krijgen. We beginnen met de volgende definitie.

Definitie 1.1 (Vector - Antwoord 1)
Een *vector* is (voorlopig) een element van $\mathbb{R}^n$. Dat wil zeggen, een stel van n getallen, die we noteren als

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Voorbeeld 1.2
$(1, -3, 1)$ is een vector in $\mathbb{R}^3$.
$(\sqrt{2}, 0, -0.5, \pi)$ is een vector in $\mathbb{R}^4$.

De afzonderlijke getallen $a_1, a_2, \ldots$ worden de componenten van de vector genoemd.

Definitie 1.3 (Matrix)
Een *matrix* is een rechthoekig rooster van getallen.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Een rooster met m rijen en n kolommen heet een $m \times n$ matrix. De verzameling van alle $m \times n$ matrices met reële getallen wordt vaak genoteerd als $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Voorbeeld 1.4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2.3 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ is een } 2 \times 3 \text{ matrix.}$$

De afzonderlijke getallen $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots$ van een matrix worden meestal matrixelementen genoemd. De eerste index geeft het nummer van de rij aan, de tweede index van de kolom.

Een vector wordt ook vaak voorgesteld door een kolommatrix, dit is een matrix met slechts één kolom (ook "kolomvector") genoemd, dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ i.p.v. } (1, 3, -2).$$

In vele handboeken wordt dan ook geen onderscheid gemaakt tussen $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Op analoge wijze wordt meestal geen onderscheid gemaakt tussen een 1×1 matrix of een vector met 1 component of gewoon een getal.
Soms wordt ook gesproken over rijmatrices of rijvectoren. Dit zijn matrices met slechts één rij (dus in $\mathbb{R}^{1\times n}$). Het is echter van belang in te zien dat rijmatrices en kolommatrices verschillende matrices zijn. Dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

De gehele matrix of vector kan ook voorgesteld worden door één symbool, bv.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

In deze tekst zullen we vectoren meestal voorstellen met een kleine letter, en matrices met hoofdletters. In sommige handboeken worden symbolen die vectoren voorstellen vetgedrukt, of met een pijltje erboven weergegeven. In andere handboeken worden matrices vetgedrukt. In deze tekst wordt geen van deze conventies gevolgd.

De belangrijkste bewerkingen op vectoren zijn de optelling en de scalaire vermenigvuldiging.

Definitie 1.5 (Optelling van vectoren)
De *som* van twee vectoren $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ in $\mathbb{R}^n$ is

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Voorbeeld 1.6

$$(1, -1.5, 3) + (2.2, -1, 0) = (3.2, -2.5, 3).$$

Merk op dat de optelling alleen gedefinieerd is voor vectoren van hetzelfde formaat. Zo is de som van $(1, 2)$ en $(3, 4, 5)$ niet gedefinieerd.

Een belangrijke vector is de

Definitie 1.7 (Nulvector)
De *nulvector* 0_n is de vector die bestaat uit n nullen.

Indien het formaat duidelijk is uit de context wordt de index n meestal weggelaten.

Voor elke vector a geldt

$$a + 0 = a.$$

Voor elke vector bestaat ook een "tegengestelde" vector.

Definitie 1.8 (Tegengestelde vector)
De *tegengestelde vector* van $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ is

$$-a = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n).$$

Definitie 1.9 (Verschil van vectoren)
Het *verschil* van vectoren wordt gedefinieerd als

$$a - b = a + (-b).$$

Er geldt ook dat

$$a + (-a) = 0.$$

Definitie 1.10 (Scalaire vermenigvuldiging van een vector met een getal)
De *scalaire vermenigvuldiging* van een vector $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ met een getal $r \in \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$r(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ra_1, ra_2, \ldots, ra_n).$$

Voorbeeld 1.11

$$3(1, -1, 0.5) = (3, -3, 1.5).$$

$r(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heet ook een *scalair veelvoud* van $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Merk op dat voor elke vector a geldt dat

$$1a = a \text{ en } (-1)a = -a.$$

Een heel belangrijk concept in de theorie van vectoren is de lineaire combinatie.

Definitie 1.12 (Lineaire combinatie)
Een *lineaire combinatie* van een (eindig) stel vectoren is een som van scalaire veelvouden van die vectoren.

Voorbeeld 1.13
$3(1, 2.5, -1, 1) - 2(2, 0, 1, -1) + 2(1, -1, 0.5, 0) = (1, 5.5, -4, 5)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1, 2.5, -1, 1)$, $(2, 0, 1, -1)$ en $(1, -1, 0.5, 0)$. De getallen 3, -2 en 2 heten de *coëfficiënten* of *gewichten* van de lineaire combinatie.

Ook voor matrices wordt op analoge manier de optelling en de scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd.

Definitie 1.14 (Optelling van matrices)

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}$$

Merk opnieuw op dat de optelling alleen gedefinieerd is voor matrices van hetzelfde formaat (d.w.z. aantal rijen en kolommen).

Definitie 1.15 (Scalaire vermenigvuldiging van een matrix met een getal)

$$r \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{1,1} & ra_{1,2} & \cdots & ra_{1,n} \\ ra_{2,1} & ra_{2,2} & \cdots & ra_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{m,1} & ra_{m,2} & \cdots & ra_{m,n} \end{bmatrix}$$

Ook het aftrekken van matrices, en de tegengestelde matrix, worden gedefinieerd in analogie met de begrippen voor vectoren.

We definiëren ook de nulmatrix:

Definitie 1.16 (Nulmatrix)
De *nulmatrix* $O_{m \times n}$ is een $m \times n$ matrix waarvan alle elementen nul zijn.

De index $m \times n$ wordt vaak weggelaten indien het formaat duidelijk is uit de context.

Een veelgebruikte operatie op matrices is het transponeren.

Definitie 1.17 (Transponeren)

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 1.18

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

De getransponeerde matrix wordt ook de *transpose* genoemd. Merk op dat de transpose van een $n \times m$ matrix een $m \times n$ matrix is, en dat de kolommen van A overeenkomen met de rijen van A^T.

We definiëren nu het product van een matrix met een vector. Dit levert een nieuwe vector. De vector die vermenigvuldigd wordt, moet evenveel componenten hebben als het aantal kolommen van de matrix. De resultaatvector heeft evenveel componenten als het aantal rijen van de matrix.

Definitie 1.19 (Matrix-vector-product)
Het product van een $m \times n$ matrix met een vector met n componenten is een vector met m componenten, gegeven door

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}.$$

In hoofdstuk 2 zullen we zien hoe deze definitie nuttig is bij het compact voorstellen en manipuleren van stelsels lineaire vergelijkingen. We geven hier ook een interpretatie als lineaire combinatie:

Interpretatie 1.20 (Matrix-vector-product)
Als A een $m \times n$ matrix is en x een vector met n componenten dan is Ax de lineaire combinatie van de kolommen van A met als coëfficiënten de componenten van x:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \ldots x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

We kunnen matrices ook met elkaar vermenigvuldigen. In tegenstelling tot de optelling gebeurt dit niet door de overeenkomstige elementen met elkaar te vermenigvuldigen. (Een dergelijke definitie kan uiteraard soms nuttig zijn, en heet dan meestal elementsgewijs product).

Een $m \times n$ matrix A kan maar vermenigvuldigd worden (aan de rechter kant) met een $m' \times n'$ matrix B als $n = m'$, d.w.z. als het aantal kolommen van A gelijk is aan het aantal rijen van B. Er zijn verschillende equivalente manieren om de definitie van het product van twee matrices te beschrijven.

Definitie 1.21 (Matrix-matrix-product 1)
Het product van een $n \times m$ matrix A met een $m \times p$ matrix B is een $n \times p$ matrix C waarvan de j-de kolom gelijk is aan het matrix-vector product van A met de j-de kolom van B (voor alle j van 1 tot p).

Voorbeeld 1.22

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \\ b_{4,1} & b_{4,2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} + a_{1,4}b_{4,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{3,2} + a_{1,4}b_{4,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} + a_{2,3}b_{3,1} + a_{2,4}b_{4,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} + a_{2,3}b_{3,2} + a_{2,4}b_{4,2} \\ a_{3,1}b_{1,1} + a_{3,2}b_{2,1} + a_{3,3}b_{3,1} + a_{3,4}b_{4,1} & a_{3,1}b_{1,2} + a_{3,2}b_{2,2} + a_{3,3}b_{3,2} + a_{3,4}b_{4,2} \end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 1.23

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

Volgens interpretatie 1.20 zijn de kolommen van $C = AB$ dan lineaire combinaties van de kolommen van A.

Voorbeeld 1.24
In voorbeeld 1.23 is de tweede kolom van het product gelijk aan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Een equivalente manier om het product te lezen is de volgende:

Interpretatie 1.25 (Matrix-matrix-product 2)
Als $AB = C$ dan is het element op rij i en kolom j van C gelijk aan het product van rij i van A met kolom j van B.

Voorbeeld 1.26
In voorbeeld 1.23 geldt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 22.$$

Nog een equivalente manier om een matrixproduct te lezen is de volgende:

Interpretatie 1.27 (Matrix-matrix-product 3)
Als $AB = C$ dan is rij i van C gelijk is aan rij i van A vermenigvuldigd met B.

Voorbeeld 1.28
In voorbeeld 1.23 geldt

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

Of nog:

Interpretatie 1.29 (Matrix-matrix-product 4)
Als $AB = C$ dan is rij i van C gelijk aan een lineaire combinatie van de rijen van B met als coëfficiënten de elementen van rij i van A.

Voorbeeld 1.30
In voorbeeld 1.23 geldt

$$3 \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

De belangrijkste reden om het product op deze manier te definiëren is de volgende eigenschap:

$$A(Bx) = (AB)x.$$

In woorden: als we een vector x met een matrix B vermenigvuldigen (volgens het hogerbeschreven matrix-vectorproduct (definitie 1.19)) en de bekomen vector nog eens (links) met een matrix A vermenigvuldigen, dan kunnen we hetzelfde resultaat bekomen door de vector x (links) met het product van A en B te vermenigvuldigen.

Een belangrijke matrix is de eenheidsmatrix:

Definitie 1.31 (Eenheidsmatrix)
De *eenheidsmatrix* I_n is een $n \times n$ matrix waarvan de diagonaalelementen gelijk zijn aan 1 en alle andere elementen gelijk zijn aan 0.

Voorbeeld 1.32
De 3×3 eenheidsmatrix is

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De index bij I geeft het formaat van de (vierkante) matrix aan. Indien het formaat duidelijk is uit de context wordt dit vaak weggelaten.

De belangrijkste eigenschap van de eenheidsmatrix is

$$I_m A = A \text{ en } AI_n = A \text{ (voor } A \in \mathbb{R}^{m\times n}).$$

Hieronder geven we nog een lijst van eigenschappen van de hogerbeschreven bewerkingen op vectoren en matrices. De eigenschappen zijn geformuleerd in termen van matrices, maar leveren ook eigenschappen van vectoren op door ze waar mogelijk toe te passen op $n\times 1$ matrices. Het zijn allemaal eigenschappen die je kent van het rekenen met symbolen die getallen voorstellen. Minstens even belangrijk is echter de opsomming van eigenschappen die je wel mag toepassen op getallen maar niet op vectoren of matrices (zie verder onder "Wat mag niet?"). De opgesomde eigenschappen gelden voor alle getallen a,b,c, en matrices A,B,C. Overal waar een optelling of vermenigvuldiging van matrices voorkomt, wordt verondersteld dat de matrices een formaat hebben dat deze bewerkingen toelaat. (Merk ook op dat 0 hieronder het getal 0 voorstelt en O de nulmatrix van een gepast formaat, eventueel te interpreteren als de nulvector in het geval van een kolommatrix.)

1. $A + B = B + A$,
   (De optelling van matrices of vectoren is *commutatief*),
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$,
   (De optelling van matrices of vectoren is *associatief*),
3. $A + O = A$,
   (De nulmatrix/vector is het *neutraal element* voor de optelling van matrices/vectoren),
4. $A + (-A) = O$,
   ($-A$ is het *tegengestelde* van A voor de optelling van matrices of vectoren).
5. $a(A + B) = aA + aB$,
   (De scalaire vermenigvuldiging is *distributief* t.o.v. de optelling van matrices of vectoren).
6. $(a + b)A = aA + bA$,
   (De scalaire vermenigvuldiging is distributief t.o.v. de optelling van getallen),
7. $a(bA) = (ab)A$,
   (De vermenigvuldiging van getallen en de scalaire vermenigvuldiging zijn gemengd associatief),
8. $1A = A$
9. $0A = O$

10. $OA = O$
11. $aO = O$
12. $(-1)A = -A$
13. $IA = A$ en $AI = A$,
    (De eenheidsmatrix is het *neutraal element* voor de vermenigvuldiging van matrices),
14. $A(BC) = A(BC)$,
    (De vermenigvuldiging van matrices is *associatief*),
15. $A(B + C) = AB + AC$,
    (De vermenigvuldiging van matrices is *distributief* t.o.v. de optelling van matrices).

Wat mag niet?

Let wel op dat we niet alles mogen doen met matrices wat we met symbolen die getallen voorstellen mogen doen:

(1) In het algemeen geldt NIET $AB = BA$.

Voorbeeld 1.33

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

maar

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dit kan wel gelden voor specifieke matrices A en B.

Voorbeeld 1.34

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Je kan niet delen door een matrix of een vector. Voor vierkante matrices A bestaat in sommige gevallen wel een inverse matrix. Dit is een matrix die als A^{-1} genoteerd wordt en waarvoor $AA^{-1} = I$ en $A^{-1}A = I$.

Voorbeeld 1.35

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

want

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrices A waarvoor de inverse bestaat heten inverteerbaar. Als de inverse bestaat is hij uniek. We benadrukken nog eens dat alleen vierkante matrices een inverse kunnen hebben. We zullen in hoofdstuk 2 zien hoe je een inverse matrix kan berekenen.

(3) Uit $AB = O$ (met O de nulmatrix) kunnen we (in tegenstelling tot bij getallen) niet besluiten dat $A = O$ of $B = O$.

Voorbeeld 1.36

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(4) Uit de matrixgelijkheid $AB = AC$ mag niet besloten worden dat $B = C$. Bij getallen mag dit wel als $A \neq 0$. Bij matrices mag dit als A inverteerbaar is. We kunnen dan immers beide leden van $AB = AC$ links vermenigvuldigen met A^{-1}:

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C.$$

We zullen dergelijke tussenstappen meestal weglaten.

Merk op dat uit $AB = AC$ kan besloten worden dat $A(B - C) = O$. Dat we hieruit niet kunnen besluiten dat als $A \neq O$, $B - C = O$ en dus $B = C$ kan ook gezien worden als een speciaal geval punt (3).

(5) Als A inverteerbaar is, is de matrixvergelijking

$$AX = B$$

equivalent met

$$X = A^{-1}B$$

(met A^{-1} aan de linker kant van B!). Uit

$$AX = B$$

volgt immers

$$X = A^{-1}B$$

door beide leden links te vermenigvuldigen met A^{-1}. Omgekeerd, volgt uit $X = A^{-1}B$ dat $AX = B$ door beide leden rechts te vermenigvuldigen met A^{-1}.

Op analoge wijze is

$$XA = B$$

equivalent met

$$X = BA^{-1}, \text{(waarbij } A^{-1} \text{ rechts staat!)}.$$

Bij getallen zouden we in beide gevallen ($AX = B$ en $XA = B$) besluiten dat $X = B/A$. Bij matrices moet je als het ware weten of je "links of rechts moet delen".

2 Stelsels van lineaire vergelijkingen

In dit hoofdstuk beschouwen we stelsels lineaire vergelijkingen of lineaire stelsels. Dergelijke stelsels zijn onlosmakelijk verbonden met de theorie van vectoren en matrices. We geven enkele interpretaties van lineaire stelstels en bespreken de oplossingsmethode via de berekening van een rijechelonvorm. Tot slot geven we een methode voor het inverteren van een matrix.

2.1 Lineaire stelsels, formulering en interpretatie

We beschouwen het volgende probleem:

Probleem 2.1
Bepaal alle mogelijke vectoren $(s, t, u, v, w) \in \mathbb{R}^5$ waarvoor

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{array}\right.$$

Dit is een *lineair stelsel* van drie vergelijkingen in vijf onbekenden.

We beschouwen ook het overeenkomstige *homogene* stelsel (d.w.z. met rechter leden 0).

Probleem 2.2
Bepaal alle mogelijke vectoren $(s, t, u, v, w) \in \mathbb{R}^5$ waarvoor

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 0 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 0 \end{array}\right.$$

Met de definities rond matrices en vectoren uit hoofdstuk 1, kunnen we deze stelsels ook in matrixvorm neerschrijven

De vector met de vijf onbekenden s,t,u,v en w schrijven we als een vector

$$x = \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

De coëfficiënten brengen we samen in de *coëfficiëntenmatrix*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

De rechter leden van het niet-homogene stelsel brengen we samen in een vector

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De stelsels kunnen nu compact neergeschreven worden als

$$Ax = b$$

voor het niet-homogene stelsel en

$$Ax = 0$$

voor het homogene stelsel, waarbij we met 0 de nulvector in $\mathbb{R}^3$ bedoelen.

Alle stelsels van deze vorm (met $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ en $b \in \mathbb{R}^m$) worden lineaire stelsels genoemd.

Voor we tot een oplossing van deze problemen overgaan geven we eerst enkele interpretaties. In de loop van de tekst worden daar nog andere interpretaties aan toegevoegd.

Interpretatie 2.3 (Lineaire stelsels 1)
Lineaire stelsels doen zich vaak voor bij vraagstukken (in de wiskunde, fysica, scheikunde, economie of noem maar op), waarbij we een aantal onbekende grootheden (x,y,z,...) willen te weten komen, uitgaande van informatie over lineaire combinaties van die grootheden.

Voorbeeld 2.4
Als we van twee onbekende getallen u en v, weten dat de som gelijk is aan 5 en het verschil gelijk aan 1, voldoen die getallen aan

$$\begin{cases} u + v &= 5 \\ u - v &= 1 \end{cases}$$

Merk op dat als we i.p.v. het verschil het product zouden kennen, we geen *lineair* stelsel meer hebben.

Interpretatie 2.5 (Lineaire stelsels 2)
We kunnen het matrixproduct Ax in $Ax = b$ interpreteren als een lineaire combinatie van de kolommen van A met onbekende coëfficiënten (zie interpretatie 1.20). Het stelsel $Ax = b$ kan daarom geïnterpreteerd worden als het zoeken naar de gepaste coëfficiënten om een gegeven vector b te schrijven als een lineaire combinatie van een gegeven stel vectoren, die we in de kolommen van A geplaatst hebben.

Voorbeeld 2.6
Als we de vector $(5, 1)$ willen schrijven als een lineaire combinatie van $(1, 1)$ en $(1, -1)$, lossen we het stelsel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

op.

Merk op dat dit hetzelfde stelsel is als in voorbeeld 2.4.

Interpretatie 2.7 (Lineaire stelsels 3)
Beschouw de afbeelding f die vectoren x afbeeldt op vectoren $f(x) = Ax$ door vermenigvuldiging met een $m \times n$ matrix A. (Dergelijke operaties komen vaak voor. Het zijn lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$). Als we ons afvragen welke vectoren door f op de gegeven vector b worden afgebeeld, dan moeten we het stelsel $Ax = b$ oplossen.

Voorbeeld 2.8
Om te weten welke vectoren x door voorvermenigvuldiging met

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

worden afgebeeld op $(5, 1)$, moeten we opnieuw hetzelfde stelsel als in voorbeelden 2.4 en 2.6 oplossen.

Voor we overgaan tot de beschrijving van een oplossingsmethode voor lineaire stelsels, geven we al het resultaat voor de stelsels van probleem 2.1 en 2.2.

Voorbeeld 2.9
We zullen straks aantonen dat de oplossingenverzameling van probleem 2.1 bestaat uit alle vectoren van de vorm

$$(-2 + 2a + b - 3c, a, 1 - 2b + 2c, b, c),$$

waarbij a, b en c willekeurig te kiezen reële getallen zijn. Dit kan ook geschreven worden als alle vectoren

$$(-2, 0, 1, 0, 0) + a(2, 1, 0, 0, 0) + b(1, 0, -2, 1, 0) + c(-3, 0, 2, 0, 1).$$

Voorbeeld 2.10
We zullen straks aantonen dat de oplossingenverzameling van probleem 2.2 bestaat uit alle vectoren van de vorm

$$(2a + b - 3c, a, -2b + 2c, b, c),$$

waarbij a, b en c willekeurig te kiezen reële getallen zijn, of ook

$$a(2, 1, 0, 0, 0) + b(1, 0, -2, 1, 0) + c(-3, 0, 2, 0, 1).$$

Let op de gelijkenis tussen beide oplossingenverzamelingen. Een willekeurige oplossing van het niet-homogene stelsel kan bekomen worden door een willekeurige oplossing van het homogeen stelsel te nemen en daar een vaste vector bij op te tellen.

2.2 De echelonvorm en de methode van Gauss

Hieronder beschrijven we een methode om lineaire stelsels

$$Ax = b$$

op te lossen. De methode staat bekend als de eliminatiemethode van Gauss en maakt gebruik van de (gereduceerde) rijechelonvorm (of trapvorm) van de matrix

$$[A\ b].$$

Dit is de matrix A waaraan b als extra kolom is toegevoegd. Deze matrix wordt de *uitgebreide matrix* van het stelsel genoemd. De methode van Gauss voert operaties uit op $[A\ b]$ die het stelsel omzetten in een nieuw stelsel. Doorheen de verschillende operaties blijft de oplossingenverzameling van het stelsel dezelfde. De bedoeling is dat het stelsel in een eenvoudigere vorm gebracht wordt, waaruit we snel die oplossingenverzameling kunnen aflezen.

We voeren drie soorten operaties uit op de uitgebreide matrix. Deze operaties worden *elementaire rijoperaties* genoemd

1. **Schaling:** Een rij vermenigvuldigen met een van 0 verschillend getal.
2. **Verwisseling:** Twee rijen verwisselen.
3. **Vervanging:** Een rij vervangen door de som van zichzelf en een veelvoud van een andere rij.

We kunnen over deze operaties natuurlijk ook denken als operaties op het lineaire stelsel (in plaats van de uitgebreide matrix). Elke rij van de uitgebreide matrix komt gewoon overeen met een vergelijking van het stelsel.

We geven enkele voorbeelden, die meteen ook de eerste stappen van de methode van Gauss zullen blijken te zijn.

Voorbeeld 2.11
De uitgebreide matrix van het stelsel van probleem 2.1 is

$$[A\ b] = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

We vermenigvuldigen de tweede rij met 3. Dit is een scaleringsoperatie. We bekomen

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 3 & -6 & 6 & 9 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

We gaan verder en tellen bij rij 2 rij 1 op. Dit is een vervangingsoperatie.

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

We kunnen de beide uitgevoerde operaties samen ook als één (niet elementaire) operatie beschouwen, waarbij rij 2 vervangen wordt door 3 maal zichzelf plus rij 1.

Op een analoge manier kunnen we rij 3 vervangen door 3 maal zichzelf (echter nooit 0 maal zichzelf!) plus 2 maal rij 1. Dit levert

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}.$$

Zoals gezegd is het doel van de methode van Gauss om het stelsel om te vormen tot een eenvoudiger stelsel zonder iets te veranderen aan de oplossingenverzameling. We gaan na dat deze operaties niets veranderen aan de oplossingenverzameling van het stelsel.

1. Voor de scaleringsoperatie is dit onmiddellijk duidelijk. Zo heeft de vergelijking

$$s - 2t + 2u + 3v - w = 0 \tag{1}$$

duidelijk precies dezelfde oplossingen (s, t, u, v, w) als

$$3s - 6t + 6u + 9v - 3w = 0 \tag{2}$$

2. Ook het verwisselen van twee vergelijkingen verandert uiteraard niets aan de oplossingenverzameling van het stelsel.

3. Voor de vervangingsoperatie redeneren we opnieuw op voorbeeld 2.11. Als een oplossing (s, t, u, v, w) voldoet aan

$$-3s + 6t - u + v - 7w = 5 \tag{3}$$

en aan

$$3s - 6t + 6u + 9v - 3w = 0 \tag{4}$$

geldt ook

$$(-3s + 6t - u + v - 7w) + (3s - 6t + 6u + 9v - 3w = 0) = 5 + 0$$

en dus

$$5u + 10v - 10w = 5.$$

Dus elke oplossing van het oorspronkelijke stelsel is ook oplossing van het nieuwe stelsel. Maar weten we ook zeker dat elke oplossing van het nieuwe stelsel een oplossing van het oorspronkelijke stelsel is? Ja, want de weg terug is ook een elementaire rijoperatie van hetzelfde type. Als we van de nieuwe tweede rij de eerste rij (die ongewijzigd gebleven is) terug aftrekken bekomen we terug de oorspronkelijke matrix. Een gelijkaardige afleiding als hierboven toont dat alle oplossingen behouden blijven.

De methode van Gauss zet de oorspronkelijke matrix $[A\ b]$, met behulp van de drie types van elementaire rijoperaties, om in een matrix in rijechelonvorm.

Definitie 2.12 (Echelonvorm)
De *gereduceerde rijechelonvorm* of *rijcanonieke vorm* is een matrix met de volgende eigenschappen.

1. Indien er nulrijen (d.w.z. rijen met enkel nullen) voorkomen, staan ze onderaan.
2. In de niet-nulrijen is het eerste element dat verschillend is van 0 een 1. We noemen dit element de *spil* (of pivot).
3. Boven en onder de spil staan enkele nullen.
4. De spil van een lagere rij staat meer naar rechts dan de spil van een hogere rij.

Voorbeeld 2.13
De volgende matrix is in gereduceerde rijechelonvorm.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De omcirkelde posities zijn de spilposities. We zullen straks zien dat deze matrix de rijechelonvorm is van de uitgebreide matrix van probleem 2.1.

Vaak wordt ook een niet-gereduceerde rijechelonvorm (of kortweg rijechelonvorm) gedefinieerd. Voor deze vorm vervalt de voorwaarde dat boven de spil nullen moeten staan

(maar wel eronder) en meestal ook de voorwaarde dat de spillen 1 moeten zijn. *Hieronder zullen we echter alleen werken met de gereduceerde rijechelonvorm en kortweg spreken van de* echelonvorm.

Hoe kunnen we een willekeurige matrix met behulp van elementaire rijoperaties tot een dergelijke vorm brengen? Voorbeeld 2.11 toont reeds de basistechniek, die op één na alle elementen van een kolom gelijk maakt aan 0. Dit wordt het *schoonvegen van een kolom* genoemd.

In voorbeeld 2.11 gaat het om de eerste kolom waarin alle elementen nul gemaakt worden behalve het element links boven. Dit gaat als volgt. Het element links boven is een van nul verschillend element. Door de andere rijen te vervangen door een gepast van nul verschillend veelvoud van zichzelf en een veelvoud van de eerste rij, kunnen alle andere elementen van de eerste kolom nul gemaakt worden.

Het algoritme van Gauss is een algoritme dat achtereenvolgens verschillende kolommen van de matrix $[A\ b]$ schoonveegt. Hiertoe is telkens een van nul verschillend element nodig, dat de rol speelt van het element links boven in voorbeeld 2.11. Dit element wordt de *spil* genoemd.

We moeten alleen nog beschrijven hoe de positie van de opeenvolgende spillen gekozen wordt. Dit gaat als volgt:

Een nieuwe spil wordt altijd gezocht in de deelmatrix onder en rechts van de vorige spil. (Bij het zoeken van de eerste spil is deze deelmatrix de gehele matrix). Als we verder werken op voorbeeld 2.11, waar we al één spil hadden op rij 1 kolom 1 bekijken we dus de matrix die we bekomen hadden, behalve de eerste rij en de eerste kolom:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}.$$

In deze matrix gaan we op zoek naar de eerste kolom die niet volledig uit nullen bestaat. In het voorbeeld is dat de tweede kolom (van de deelmatrix). In de tweede kolom vinden we wel een van nul verschillend element. We kiezen het bovenste 5 als spil en vegen daarmee de hele kolom schoon (d.w.z. de derde kolom van de totale matrix, zowel boven als onder de spil). Hiertoe combineren we zowel de eerste als de derde rij met de tweede om boven en onder de 5 een nul te bekomen. We vertrekken van

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}.$$

Rij 1 vervangen door vijf maal zichzelf plus rij 2 levert

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}.$$

Rij 3 vervangen door 5 maal zichzelf min 13 maal rij 2 levert

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Merk op dat bij het schoonvegen van de derde kolom de nullen die we al bekomen hadden in de eerste twee kolommen niet gewijzigd zijn.

De bekomen matrix heeft reeds de gewenste trapvorm. Via een scalering van rij 1 en rij 2 zorgen we tenslotte nog dat het eerste element van de niet-nulrijen een 1 is: Dit levert

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deze matrix is in (gereduceerde rij)echelonvorm.

In de bovenstaande afleiding kwamen geen rijverwisselingen voor. Als we echter voor de deelmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}.$$

gevonden hadden, dan was de tweede kolom (van de deelmatrix) nog steeds de eerste niet-nulkolom. Maar het eerste niet-nulelement (13) staat niet bovenaan. In zo'n geval moet de rij van de nieuwe spil (13) door een verwisseling net onder de rij van de vorige spil gebracht worden om tot een echte trapvorm te komen.

We vatten het algoritme nog eens samen

Algoritme 2.14 (Gausseliminatie/berekening echelonvorm)

1. Zoek in de deelmatrix onder en rechts van de vorige spil (of in de gehele matrix voor de eerste spil) naar de eerste kolom die niet volledig uit nullen bestaat, en in die kolom naar het eerste van nul verschillende element.

2. Voer indien nodig rijverwisselingen uit om dit element in de bovenste rij van de beschouwde deelmatrix te brengen.

3. Veeg met dit element als spil de overeenkomstige kolom (van de gehele matrix) schoon. D.w.z. maak nullen boven en onder de spil door de andere rijen te vervangen door een veelvoud van zichzelf plus een veelvoud van de rij die de spil bevat.

4. Indien zich beneden de rijen die reeds een spil bevatten nog rijen bevinden die niet volledig uit nullen bestaan, ga je opnieuw naar stap 1.

5. Deel de rijen met een spil door de spil om de eerste niet nulelementen gelijk aan 1 te maken.

Merk op dat de verwisselingen in stap 2 er automatisch toe leiden dat rijen die volledig uit nullen bestaan onderaan terechtkomen.

Alhoewel er andere wegen zijn om tot een echelonvorm te komen, kan men bewijzen dat de gereduceerde! rijechelonvorm die bekomen wordt vanuit een gegeven matrix $[A\ b]$ uniek is.

Nu we de uitgebreide matrix $[A\ b]$ in echelonvorm $[A'\ b']$ kunnen brengen, gaan we over tot het aflezen van de oplossing.

Als $[A'\ b']$ een rij bevat waarvan alle elementen 0 zijn behalve het laatste (of anders gezegd als er een spil staat in de laatste kolom van $[A'\ b']$), dan heeft het stelsel geen oplossingen. We redeneren op een voorbeeld: een rij

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

staat voor de vergelijking

$$0s + 0t + 0u + 0v + 0w = -2.$$

Dit is duidelijk voor geen enkel stel (s, t, u, v, w) voldaan. We spreken van een *vals* of *strijdig* of *onoplosbaar* stelsel. Merk nog op dat hoewel de laatste kolom (b') een spil bevat, het niet meer nodig is om de kolom schoon te vegen. We stellen onmiddellijk vast dat het stelsel vals is.

In alle andere gevallen bestaat er wel minstens één oplossing. In dat geval is de positie van de spillen van belang. Veronderstel dat de echelonvorm r rijen bevat die niet volledig nul zijn. Omdat nulrijen automatisch onderaan terechtkomen, zijn deze rijen de eerste r rijen van de echelonvorm. Elk van die rijen bevat precies één spil. Maar de spillen staan niet noodzakelijk in de eerste *kolommen*. De kolommen die een spil bevatten heten de spilkolommen (of pivotkolommen). Met elke kolom van A komt ook één van de onbekenden overeen. De onbekenden die horen bij een spilkolom heten *hoofdonbekenden* (ook gebonden onbekenden, spilonbekenden of pivotonbekenden). De andere onbekenden zijn *nevenonbekenden* (of vrije onbekenden).

We redeneren nu verder op het stelsel 2.1 waarvan we de echelonvorm

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hierboven berekend hebben. Voor dit stelsel zijn de eerste en de derde kolom de spilkolommen en zijn s en u de hoofdonbekenden, en t, v en w de nevenonbekenden.

Als we de nevenonbekenden (of vrije onbekenden) vrij kiezen:

$$t = a, \quad v = b, \quad w = c, \tag{5}$$

met a, b, en c willekeurige reële getallen, laat het stelsel nog precies één manier toe om de hoofdonbekenden te kiezen. Elk van de vergelijkingen in

$$\begin{cases} s & -2t & & -v & +3w & = -2 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{cases}$$

bevat immers precies één van de hoofdonbekenden. We vinden

$$\left\{\begin{array}{rcrrrr} s & = & -2 & +2a & +b & -3c \\ u & = & 1 & & -2b & +2c \end{array}\right. \tag{6}$$

Vergelijkingen (5) en (6) leveren samen de volledige oplossing

$$(s,t,u,v,w) = (-2+2a+b-3c, a, 1-2b+2c, b, c)$$

of

$$(s,t,u,v,w) = (-2,0,1,0,0) + a(2,1,0,0,0) + b(1,0,-2,1,0) + c(-3,0,2,0,1)$$

met a, b en c willekeurige reële getallen.

Probleem 2.2 heeft dezelfde A matrix als probleem 2.1 maar het rechter lid is 0. De oplossingsmethode verloopt volledig analoog. Alleen bestaat de laatste kolom van de uitgebreide matrix uit nullen. Deze kolom blijft onveranderd doorheen de verschillende rijoperaties. De echelonvorm is dan ook dezelfde op de laatste kolom na. De oplossing is

$$(s,t,u,v,w) = a(2,1,0,0,0) + b(1,0,-2,1,0) + c(-3,0,2,0,1).$$

We vestigen nog de aandacht op een belangrijk geval. Als elke kolom, behalve de laatste, die overeenkomt met de rechter leden b', een spil bevat, dan zijn alle onbekenden hoofdonbekenden en zijn er geen onbekenden vrij te kiezen. Het stelsel heeft dan precies één oplossing. In het geval van een homogeen stelsel ($Ax = 0$) is deze oplossing $x = 0$ (de nulvector).

Voorbeeld 2.15
Het stelsel

$$\left\{\begin{array}{lll} u & +v & = 5 \\ u & -v & = 1 \\ u & -2v & = -1 \end{array}\right.$$

heeft als uitgebreide matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

met als echelonvorm

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hieruit lezen we onmiddellijk de (unieke) oplossing af:

$$(u,v) = (3,2).$$

2.3 Meerdere rechter leden en de berekening van de inverse matrix

We zagen reeds dat de berekeningen voor het niet-homogene stelsel van probleem 2.1 en het overeenkomstige homogene stelsel van probleem 2.2 gelijk lopen op de rechter kolom van de uitgebreide matrix na. Indien we nog stelsels met dezelfde A matrix en verschillende rechter leden $b_1, b_2, \ldots$ willen oplossen kunnen we werken met een uitgebreide matrix $[A\ b_1\ b_2\ \cdots]$. Op die manier passen we de rijoperaties die A in echelonvorm brengen tegelijk op alle rechter leden toe. Merk op dat we geen spillen moeten bepalen en kolommen schoonvegen in het gedeelte dat met rechter leden b_1, b_2,... overeenkomt. (Indien een rij in het A-gedeelte enkel nullen bevat, moeten we voor alle rechter leden apart bekijken of de vergelijking ofwel wegvalt ($0 = 0$) ofwel het stelsel vals maakt.)

Voorbeeld 2.16
Los volgende stelsels gelijktijdig op

$$\begin{cases} u & +v & = 4 \\ u & -v & = 2 \\ u & -2v & = 2 \end{cases}$$

en

$$\begin{cases} u & +v & = 5 \\ u & -v & = 1 \\ u & -2v & = -1 \end{cases}$$

De uitgebreide matrix $[A\ b_1\ b_2]$ is

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Toepassing van het algoritme van Gauss levert

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Het eerste stelsel is vals. Het tweede stelsel heeft als oplossing $(u, v) = (3, 2)$.

Deze aanpak biedt ook de oplossing voor een probleem van hoofdstuk 1, namelijk het bepalen van de inverse matrix (van een inverteerbare matrix).

Als A een gegeven inverteerbare (en dus vierkante) matrix is, bestaat dit probleem erin een matrix X te bepalen zodat

$$AX = I$$

met I de eenheidsmatrix. (Men kan bewijzen dat voor vierkante A een oplossing van $AX = I$ ook voldoet aan $XA = I$). Omdat de i-de kolom van het matrixproduct AX volgens definitie 1.21 gelijk is aan A maal de i-de kolom van X, kunnen we X kolom per kolom bepalen door stelsels $Ax = b_i$ op te lossen, waarbij de rechter leden b_i gelijk zijn aan de kolommen van de eenheidsmatrix.

Voorbeeld 2.17
Om de matrix

$$\begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$$

te bepalen, die voldoet aan

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

lossen we de stelsels

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

op.

Als we de hierboven beschreven methode toepassen voor het gelijktijdig oplossen van stelsels met dezelfde matrix en verschillende rechter leden, levert dit het volgende algoritme voor het bepalen van de inverse matrix:

Algoritme 2.18 (Berekening van de inverse matrix)
Als A een inverteerbare matrix is kan de inverse van A bepaald worden door de echelonvorm te bepalen van de matrix

$$[A\ I].$$

De echelonvorm is (indien A inverteerbaar is) automatisch van de vorm

$$[I\ B],$$

waarbij B de inverse van A is.

Als de matrix A een inverteerbare $n \times n$ matrix is, zijn de pivotkolommen van $[A\ I]$ de eerste n kolommen. Indien in één van deze kolommen geen pivot kan gevonden worden is de matrix niet inverteerbaar.

Voorbeeld 2.19
Bepaal de inverse van

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

We bepalen de echelonvorm van

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dit levert (na enkele stappen)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dus de inverse van

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

is

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Merk tenslotte nog op dat als A inverteerbaar is, de oplossing van een stelsel

$$Ax = b$$

kan geschreven worden als

$$x = A^{-1}b.$$

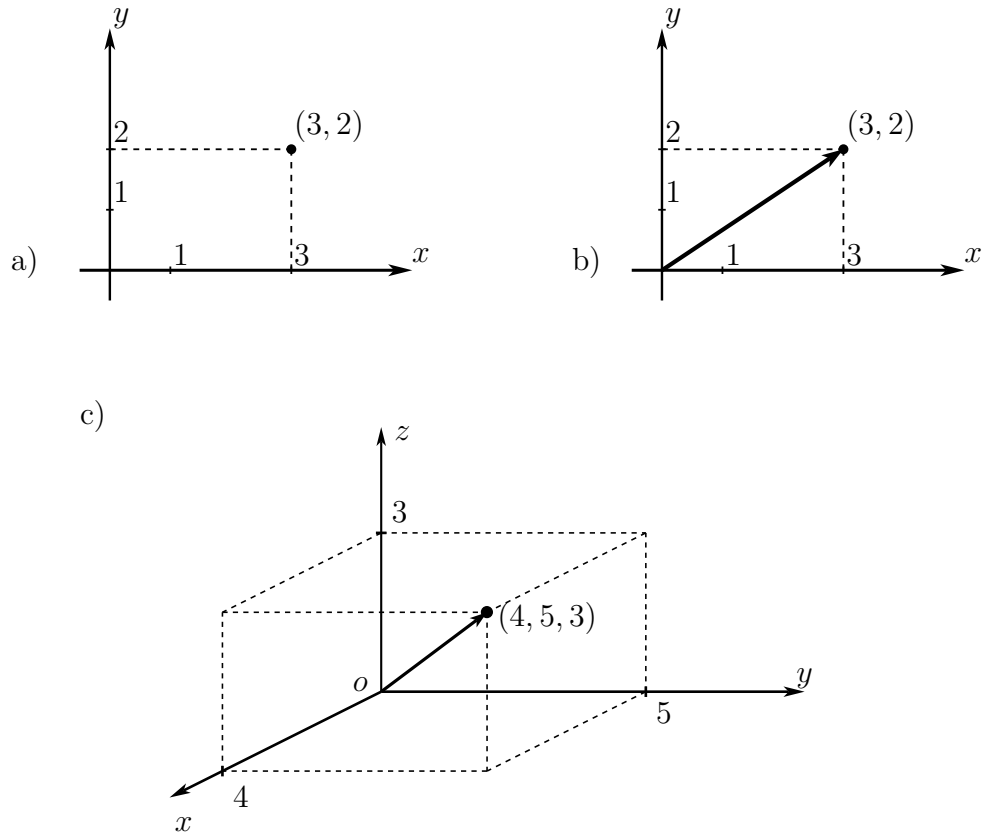
Eerst A^{-1} berekenen en dan $A^{-1}b$ is echter meer werk dan de oplossing van $Ax = b$ berekenen met de methode van Gauss.

3 Lineaire combinaties, deelruimtes en lineaire afhankelijkheid

In dit hoofdstuk gaan we dieper in op lineaire combinaties. We werken nog steeds met vectoren in $\mathbb{R}^n$ maar zullen voor $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ uitvoerig werken met meetkundige interpretaties. Om vlot te kunnen redeneren over lineaire combinaties is het uiterst nuttig om steeds een meetkundig beeld voor ogen te hebben.

3.1 Lineaire combinaties, meetkundig

Een vector (a, b) in $\mathbb{R}^2$ kan voorgesteld worden in een vlak. Hiertoe tekenen we een assenstelsel met een x-as en een y-as en stellen de vector (a, b) voor door het punt met coördinaten a en b t.o.v. deze assen (Fig. 1a). Een vector (a, b) wordt ook voorgesteld door een pijl te tekenen vanuit de oorsprong naar het punt (a, b). Deze voorstelling wordt nog veralgemeend in hoofdstuk 5 (Fig. 1b).



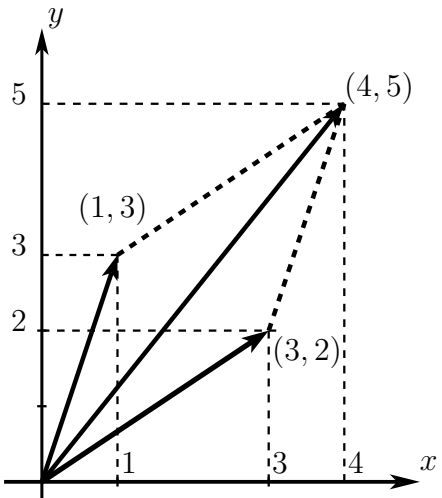
Figuur 1: a) Meetkundige voorstelling van de vector $(3, 2)$ in een vlak met behulp van een assenstelsel. b) Voorstelling d.m.v. een pijl vanuit de oorsprong. c) Meetkundige voorstelling van de vector $(4, 5, 3)$ in de ruimte met behulp van een assenstelsel.

Een vector (a, b, c) in $\mathbb{R}^3$ stellen we op analoge manier voor door een punt in de ruimte met coördinaten a, b en c t.o.v. drie assen. (Fig. 1c). Vaak worden de termen "vector" en "punt" door elkaar gebruikt.

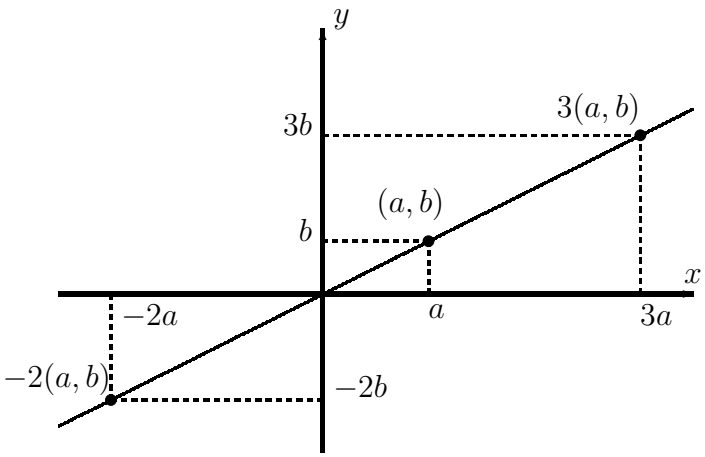
De optelling van vectoren kan nu ook meetkundig voorgesteld worden. Als we de vectoren $p = (a, b)$, $q = (c, d)$ en $p + q = (a + c, b + d)$ tekenen in een vlak. Dan vormen de punten p, q en $p + q$ samen met de oorsprong $o = (0, 0)$ van het assenstelsel een parallellogram. (Fig. 2a). Ook in de driedimensionale ruimte kan de optelling van vectoren weergegeven worden met behulp van een parallellogram.

Een veelvoud $r(a, b) = (ra, rb)$ van een vector (a, b) (verschillend van de nulvector) vinden we meetkundig terug op de rechte door $(0, 0)$ en (a, b) (Fig. 2b). Als we alle veelvouden rp beschouwen van een vector p (met positieve en negatieve r), vinden we heel de rechte door 0 en p terug. Dit geldt ook voor vectoren in een driedimensionale ruimte.

Dit laatste beeld willen we veralgemenen tot lineaire combinaties van meer vectoren. Neem twee van 0 verschillende vectoren p en q in de ruimte die geen veelvoud zijn



a) Meetkundige voorstelling van de som van twee vectoren m.b.v. een parallellogram.

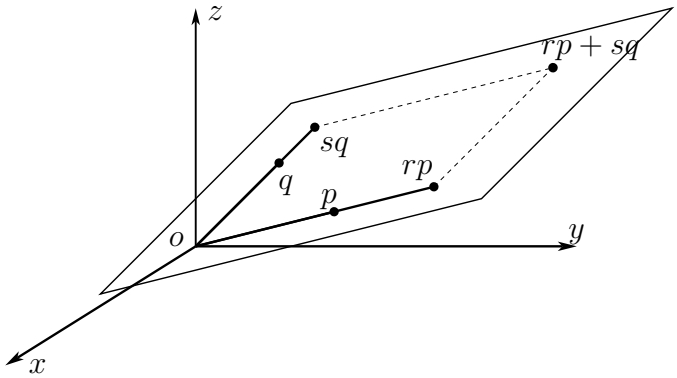


b) De veelvouden van een vector vormen een rechte door de oorsprong.

Figuur 2: Som en veelvoud van vectoren in een vlak.

elkaar, zoals in Fig. 3. De veelvouden van p vinden we terug op de rechte door o en p. De veelvouden van q vinden we terug op de rechte door o en q. Een lineaire combinaties $rp + sq$ van de vectoren p en q (met reële getallen r en s) is een som van een veelvoud van p en een veelvoud van q. Om die som meetkundig te situeren moeten we een parallellogram tekenen met hoekpunten in o, rp en sq. Het vierde hoekpunt ligt dan ergens in het vlak door o, p en q. Je kan intuïtief gemakkelijk inzien dat de verzameling van alle lineaire combinaties van p en q heel dit (oneindige) vlak vormt.

We noemen de verzameling van alle lineaire combinaties van een stel vectoren, de *ruimte voortgebracht door dat stel vectoren.* (Soms wordt ook gesproken van de *ruimte opgespannen door een stel vectoren*). In het voorbeeld hierboven is de ruimte voortgebracht door p en q een vlak door de oorsprong in de driedimensionale ruimte. We noemen een vlak door de oorsprong een *tweedimensionale deelruimte* van de driedi-



Figuur 3: Lineaire combinaties van twee vectoren in de ruimte. Het buitenste parallellogram suggereert een oneindig vlak door de oorsprong.

mensionale ruimte. Een rechte door de oorsprong is een *ééndimensionale deelruimte*. Straks maken we iets preciezer wat we bedoelen met dimensie.

Voor we overgaan naar meer dimensies vertalen we deze meetkundige inzichten terug naar de taal van het vorige hoofdstuk, d.w.z. vectoren in $\mathbb{R}^3$.

Een van de nulvector verschillende vector in $\mathbb{R}^3$ brengt een ééndimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^3$ voort. Bijvoorbeeld de vector $(1, 2, -1)$ brengt alle vectoren van de vorm $r(1, 2, -1)$ (of anders geschreven $(r, 2r, -r)$) met r een willekeurig reëel getal voort.

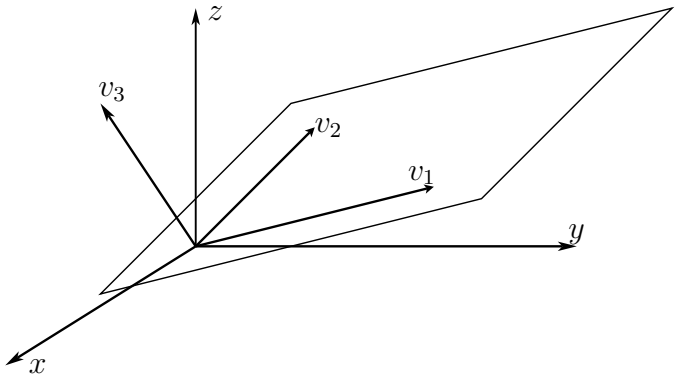
Een stel van twee van de nulvector verschillende vectoren die geen veelvoud van elkaar zijn brengen een tweedimensionale deelruimte voort. Bijvoorbeeld de vectoren $(1, 2, -1)$ en $(2, 0, 3)$ brengen alle vectoren $r(1, 2, -1) + s(2, 0, 3) = (r + 2s, 2r, -r + 3s)$ met r en s willekeurige reële getallen voort. Merk op dat deze vectoren een tweedimensionale deelruimte vormen van $\mathbb{R}^3$ maar nog steeds met drie componenten geschreven worden (omdat het vectoren van $\mathbb{R}^3$ zijn).

Hetzelfde verhaal gaat op in meer dimensies. Bijvoorbeeld in $\mathbb{R}^5$ brengen de vectoren $(1, 2, 3, 0, -1)$ en $(-2, 1.5, 2, 0, 1)$ een tweedimensionale deelruimte voort (bestaande uit alle vectoren $r(1, 2, 3, 0, -1) + s(-2, 1.5, 2, 0, 1)$).

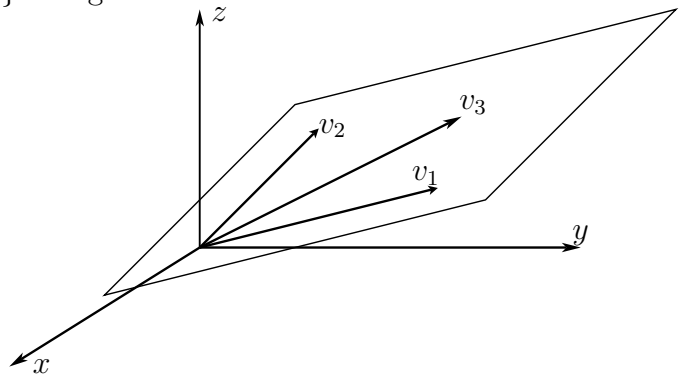
Wat als we een derde vector toevoegen? Brengen drie vectoren een driedimensionale deelruimte voort (in $\mathbb{R}^3$ is dit noodzakelijkerwijze heel de ruimte $\mathbb{R}^3$)? Als die derde vector niet ligt in de tweedimensionale deelruimte die we al hadden, is het antwoord ja. (Fig 4a).

Als die derde vector wel al voortgebracht werd door de eerste twee, kunnen we met de drie vectoren niet meer vectoren voortbrengen dan met de eerste twee, en brengt het stel van drie vectoren gewoon dezelfde *twee*dimensionale deeluimte voort. (Fig. 4b).

Eigenlijk deed een gelijkaardige situatie zich ook al voor bij twee vectoren. We heb-



a) Drie vectoren in de ruimte. Het parallellogram suggereert het oneindige vlak (door de oorsprong), voortgebracht door v_1 en v_2. De vector v_3 ligt niet in dit vlak. Het stel $\{v_1, v_2, v_3\}$ brengt heel $\mathbb{R}^3$ voort.

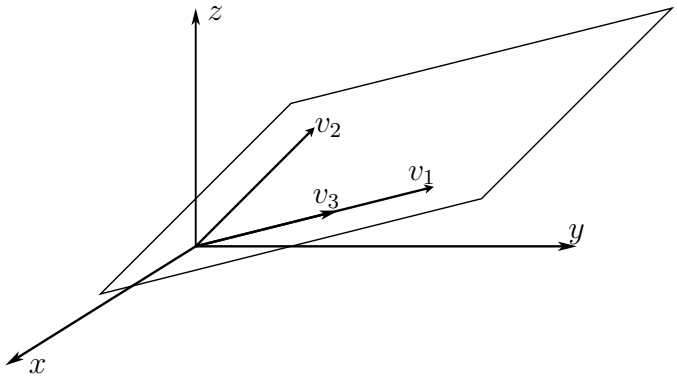


b) Drie vectoren in de ruimte. Het parallellogram suggereert een oneindig vlak door de oorsprong. De drie vectoren v_1, v_2 en v_3 liggen in dit vlak. Dit vlak wordt voortgebracht door $\{v_1, v_2, v_3\}$ maar ook door $\{v_1, v_2\}$ of $\{v_1, v_3\}$ of $\{v_2, v_3\}$.

Figuur 4: Lineaire combinaties van vectoren in de ruimte.

ben daar verondersteld dat het ging om van de nulvector verschillende vectoren die geen veelvoud van elkaar waren. Eén van de nulvector verschillende vector brengt een ééndimensionale deelruimte voort. Als we een tweede vector toevoegen die een veelvoud is van de eerste (en dus ligt binnen de ééndimensionale deelruimte die we al hadden), kunnen we niets extra voortbrengen.

Bij iedere nieuwe vector moeten we ons dus afvragen of hij al voortgebracht wordt door de vectoren die we al hadden, d.w.z. een lineaire combinatie is van de vectoren die we al hadden. Als een vector w een lineaire combinatie is van een stel vectoren $\{v_1, \ldots, v_l\}$ zeggen we dat w *lineair afhankelijk* is van $\{v_1, \ldots, v_l\}$. Als een stel vectoren een vector bevat die lineair afhankelijk is van de andere zeggen we dat het een *lineair afhankelijk stel vectoren* is. In Fig. 4b vormen de vectoren v_1, v_2 en v_3 een lineair afhankelijk stel. De vector v_1 is lineair afhankelijk van v_2 en v_3. Maar we kunnen evengoed zeggen dat



Figuur 5: Drie vectoren in de ruimte. Het parallellogram suggereert een oneindig vlak. De drie vectoren v_1, v_2 en v_3 liggen in dit vlak. De vectoren v_1 en v_3 liggen op dezelfde rechte door de oorsprong. Het vlak wordt voortgebracht door $\{v_1, v_2, v_3\}$ maar ook door $\{v_1, v_2\}$ of $\{v_2, v_3\}$. Het stel $\{v_1, v_3\}$ brengt slechts een rechte voort.

v_2 lineair afhankelijk is van v_1 en v_3 of dat v_3 lineair afhankelijk is van v_1 en v_2. In Fig. 5 vormen de vectoren v_1, v_2 en v_3 eveneens een lineair afhankelijk stel. De vector v_2 is hier echter niet lineair afhankelijk van v_1 en v_3. De vectoren v_1 en v_3 zijn wel lineair afhankelijk van elkaar.

Als v_3 een lineaire combinatie is van v_1 en v_2, bijvoorbeeld $v_3 = 3v_1 - 2v_2$ kunnen we dit ook herschrijven als

$$3v_1 - 2v_2 - v_3 = 0 \tag{7}$$

(waarbij 0 staat voor de nulvector).
Een lineaire combinatie van een stel vectoren die de nulvector oplevert zonder dat alle coëfficiënten van de lineaire combinatie gelijk zijn aan 0, wordt ook een *lineair verband* tussen die vectoren genoemd. Deze schrijfwijze maakt duidelijker dat v_3 geen speciale rol hoeft te spelen. We kunnen immers elke vector die in het verband voorkomt met een coëfficiënt verschillend van 0, schrijven als lineaire combinatie van de andere. Uit (7) volgt bijvoorbeeld ook $v_2 = \frac{3}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$.

We zetten nog eens alles op een rijtje:

1. Een stel vectoren $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ *brengt een deelruimte voort.* Deze bestaat uit alle lineaire combinaties van het stel.

2. Als er een *lineair verband* is tussen de vectoren (d.w.z een lineaire combinatie die de nulvector oplevert zonder dat alle coëfficiënten nul zijn) zeggen we dat het stel *lineair afhankelijk is.* Een vector die met een coëfficiënt verschillend van 0 voorkomt in een lineair verband, kan geschreven worden als lineaire combinatie van de andere. Als we deze vector weglaten uit het stel, wordt nog steeds dezelfde ruimte voortgebracht.

3. Als er geen lineaire verbanden zijn tussen de vectoren van een stel, zeggen we dat het stel *lineair onafhankelijk* is.

Een lineair onafhankelijk stel vectoren dat een deelruimte V voortbrengt wordt ook een *basis* van V genoemd. Een basis van V is dus een stel vectoren van V dat V voortbrengt zonder dat één van de vectoren overtollig is. In Fig. 4a is $\{v_1, v_2\}$ een basis van het getekende vlak, en is $\{v_1, v_2, v_3\}$ een basis van $\mathbb{R}^3$. Men kan bewijzen dat alle basissen van een gegeven deelruimte hetzelfde aantal elementen hebben. Dit aantal vormt een wiskundige definitie van het begrip dimensie van een deelruimte.

We vermelden nog één van de belangrijkste eigenschappen van basissen. Als een stel vectoren een basis vormt voor een deelruimte V, dan kan elke vector van V op *precies één* manier geschreven als lineaire combinatie van die vectoren.

3.2 Berekeningen met lineaire combinaties

Dit onderdeel wordt niet behandeld in het A-programma

De hierboven aangebrachte begrippen i.v.m. met lineaire combinaties, deelruimten, en lineaire afhankelijkheid zijn nauw verweven met de theorie van lineaire stelsels van hoofdstuk 2. Hieronder proberen we zonder in detail te gaan een aantal van die verbanden te schetsen. Deze theorie wordt niet in alle vervolgcursussen op dezelfde manier aangebracht. De werkwijze hieronder sluit het best aan bij de cursus toegepaste algebra van de richting burgerlijk ingenieur.

Indien vectoren gegeven zijn als vectoren in $\mathbb{R}^n$ beschikken we reeds over een methode om te testen of een vector lineair afhankelijk is van andere vectoren. We hebben het oplossen van het stelsel $Ax = b$ immers reeds geïnterpreteerd als het zoeken naar coëfficiënten om b te schrijven als een lineaire combinatie van de kolommen van A (interpretatie 2.5). Als we bijvoorbeeld willen nagaan of $(1, 2, 3)$ te schrijven is als lineaire combinatie van $(2, 0, 2)$ en $(0, 1, 1)$, kunnen we de oplosbaarheid nagaan van het stelsel

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Als (x, y) een oplossing is van het stelsel, geldt $(1, 2, 3) = x(2, 0, 2) + y(0, 1, 1)$.

Een *stel* vectoren is lineair onafhankelijk als er geen enkel lineair verband tussen de vectoren bestaat. Ook om dit na te gaan beschikken we reeds over een methode. Het bestaan van een lineair verband betekent dat er een lineaire combinatie bestaat die de nulvector oplevert zonder dat alle coëfficiënten 0 zijn. Als we ons afvragen of het stel vectoren $\{(1, 2, 0, -1), (2, 3, -1, 2), (3, 1, 2, 2)\}$ een lineair afhankelijk stel is kunnen we

nagaan of het homogene stelsel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oplossingen heeft die verschillen van de nulvector. Dit inzicht levert meteen ook een nieuwe interpretatie op van de oplossingenverzameling van een homogeen stelsel:

Interpretatie 3.1 (Lineaire stelsels 4 (homogeen))
Elke van de nulvector verschillende oplossing x van een homogeen stelsel $Ax = 0$ kan geïnterpreteerd worden als de coëfficiënten van een lineair verband tussen de kolommen van de matrix A. (En omgekeerd: De coëfficiënten van elk lineair verband tussen de kolommen van A leveren een oplossing van $Ax = 0$).

We kunnen nog veel verder gaan met het rekenen met vectoren door de echelonvorm te interpreteren. Om een idee te geven van waar deze ideeën toe leiden, schetsen we enkele resultaten die het verband leggen tussen de inzichten van dit hoofdstuk en de echelonvormen van hoofdstuk 2. Voor details verwijzen we echter naar de vervolgcursussen.

De berekening van een echelonvormberekening levert twee manieren om een basis te vinden voor een deelruimte V voortgebracht door een stel vectoren $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

1. Breng de vectoren als kolommen samen in een matrix A, bereken de echelonvorm A' en selecteer in A alleen de spilkolommen, d.w.z. de kolommen van A (dus niet A') waarvoor de overeenkomstige kolom van A' een spil bevat. Dit levert een basis van V.

   Of:

2. Breng de vectoren als rijen samen in een matrix B, bereken de echelonvorm B' en selecteer de van 0 verschillende rijen van B'.

Het bewijs van de eerste manier steunt op de interpretatie van de oplossingen van het homogeen stelsel als lineaire verbanden tussen de kolommen (interpretatie 3.1). Omdat de stelsels $Ax = 0$ en $A'x = 0$ (met A' de echelonvorm van A) dezelfde oplossingenverzameling hebben, bestaan dezelfde lineaire verbanden tussen de kolommen van A als tussen de kolommen van A'. Een blik op de echelonvorm leert dat de niet-spilkolommen te schrijven zijn als lineaire combinaties van de spilkolommen, terwijl de spilkolommen zelf onafhankelijk zijn. We gaan hier niet dieper op in.

Voor het bewijs van de tweede manier is het van belang in te zien dat de verschillende operaties bij de berekening van een echelonvorm niets veranderen aan de ruimte die

wordt voortgebracht door de rijen (net zoals ze niets veranderen aan de oplossingenverzameling van een stelsel). Ook hier gaan we niet dieper op in.

We merken ook op dat de oplossing van een homogeen stelsel, zoals we die gevonden hebben in hoofdstuk 2 (voorbeeld 2.10), bestond uit alle lineaire combinaties van een stel vectoren en dus een deelruimte vormt. We kunnen een deelruimte dus niet alleen beschrijven door een stel vectoren te geven dat de deelruimte voortbrengt maar ook door een stel (homogene) vergelijkingen te geven waaraan de punten van de deelruimte moeten voldoen.

De oplossing van een niet-homogeen stelsel (voorbeeld 2.9) levert een verschoven deelruimte, bijvoorbeeld een vlak in $\mathbb{R}^5$ dat niet door de oorsprong van het assenstelsel gaat (zo'n vlak is geen deelruimte). We tellen immers bij elke oplossing van het homogene stelsel een vaste vector op.

Uit de manier waarop we lineaire afhankelijkheid aangebracht hebben, is intuïtief duidelijk dat het bestaan van meer lineaire verbanden tussen een stel vectoren betekent dat er een kleinere deelruimte wordt voortgebracht. We kunnen dit resultaat ook terugvinden in de echelonvorm. Meer verbanden tussen de kolommen komt overeen met meer nevenonbekenden en meer oplossingen van het homogeen stelsel. Meer nevenonbekenden betekent (bij een zelfde aantal kolommen) minder hoofdonbekenden, en dus minder spilkolommen en een kleinere basis voor de ruimte voortgebracht door de kolommen. Het aantal spillen van de echelonvorm van een matrix A, is dan ook een uiterst belangrijk getal, dat de *rang* van A genoemd wordt.

4 Inwendige producten

Een bijkomende veel gebruikte bewerking op vectoren is het *inwendig product* of *scalair product* dat twee vectoren afbeeldt op een getal (niet te verwarren met het scalair veelvoud).

Definitie 4.1 (Inwendig product of scalair product)

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Voorbeeld 4.2

$$(1.5, -2, 1) \cdot (2, -1, 2) = 7.$$

Let op dat als we beide vectoren zouden weergeven als kolommatrices, dit product niet kan geïnterpreteerd worden als een matrixproduct. Dit kan wel op de volgende manier:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

waarbij het linker lid een inwendig product is en het rechter lid een matrixproduct.

De belangrijkste eigenschappen van dit product zijn

1. $u \cdot (av + bw) = au \cdot v + bu \cdot w$ en $(au + bv) \cdot w = au \cdot w + bv \cdot w$,
   (Het inwendig product is *bilineair*)

2. $u \cdot v = v \cdot u$,
   (Het inwendig product is *symmetrisch*)

3. $u \cdot u \geq 0$ en $u \cdot u = 0$ (nul) $\Leftrightarrow u = 0$ (de nulvector),
   (Het inwendig product is *positief definiet*).

met u, v en w willekeurige vectoren (van hetzelfde formaat) en a en b willekeurige getallen.

Op basis van het inwendig product kan ook een norm gedefinieerd worden:

Definitie 4.3 (Norm)
De *norm* of *lengte* van een vector $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ wordt gedefinieerd als

$$\|(u_1, u_2, \ldots, u_n)\| = \sqrt{(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}.$$

Als de vector u wordt voorgesteld in een assenstelsel met loodrechte assen (en dezelfde meeteenheid op alle assen), komt dit overeen met de lengte van het lijnstuk ou tussen de oorsprong en het punt u.

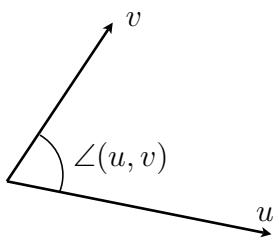
Men kan ook bewijzen dat voor elke twee vectoren u en v geldt dat

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos(\angle(u, v)) \tag{8}$$

waarbij $\angle(u, v)$ de hoek tussen de lijnstukken ou en ov is zoals voorgesteld op Fig. 6 (opnieuw bij een voorstelling in een loodrecht assenstelsel).

Een vector met norm 1 wordt een *eenheidsvector* genoemd. Als v een eenheidsvector is, levert het inwendig product van u en v

$$u \cdot v = \|u\| \cos(\angle(u, v)).$$



Figuur 6: De hoek $\angle(u,v)$ tussen twee vectoren u en v

Dit is de grootte van de projectie van het lijnstuk ou op de rechte ov. Als de cosinus negatief is, is dit strikt genomen *min* de grootte van de projectie, al gaven we hierboven al aan dat het begrip grootte soms ruim geïnterpreteerd wordt.

In dezelfde zin kan het inwendig product van twee algemene (dus niet noodzakelijk genormeerde) vectoren geïnterpreteerd worden als de norm van u maal de grootte van de projectie van v op u, of als de norm van v maal de grootte van de projectie van u op v:

$$u \cdot v = \|u\|(\|v\| \cos(\angle(u,v))) = \|v\|(\|u\| \cos(\angle(u,v))).$$

Vectoren u en v waarvoor het inwendig product 0 is, zijn *orthogonaal* of *loodrecht*.

Dit feit geeft ook aanleiding tot een nieuwe interpretatie van een homogeen stelsel. We kunnen elke vergelijking

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n = 0$$

immers interpreteren als een voorwaarde die uitdrukt dat de onbekende vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ loodrecht staat op de vector $(a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})$. Hieruit volgt

Interpretatie 4.4 (Lineaire stelsels 5 (homogeen))
De oplossingenverzameling van het homogene stelsel $Ax = 0$ bestaat uit alle vectoren die loodrecht staan op de rijen van A (geïnterpreteerd als vectoren).

5 Vectoren in de fysica en de wiskunde

We komen nog eens terug op de vraag "Wat is een vector".

In het eerste hoofdstuk hebben we een voorlopig antwoord gegeven

Definitie 5.1 (Vector - Antwoord 1)
Een *vector* is (voorlopig) een element van $\mathbb{R}^n$. Dat wil zeggen, een stel van n getallen, die we noteren als

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

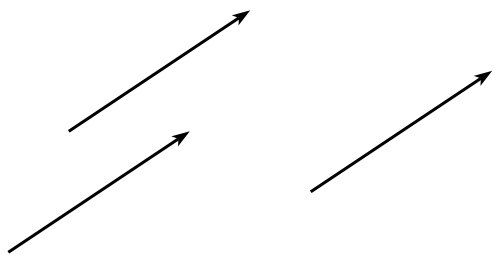
We hebben reeds gezien hoe deze definitie ons toelaat om met vectoren te rekenen, en vragen te beantwoorden als "Hoe is een vector w te schrijven als lineaire combinatie van de vectoren v_1,v_2 en v_3". Als computers met vectoren moeten rekenen zal het ook meestal met vectoren onder deze vorm zijn.

Toch worden vaak nog andere antwoorden gegeven. Hieronder volgen twee antwoorden van sterk verschillende aard.

5.1 Vectoren in de fysica

Definitie 5.2 (Vector - Antwoord 2, het anwoord van de fysicus)
Een *vector* is een object met een grootte een richting en een zin.

Zo'n vector wordt grafisch voorgesteld door een pijl te tekenen met de gegeven grootte, richting en zin. Een evenwijdige pijl met dezelfde grootte en zin stelt dezelfde vector voor. Het begrip richting wordt hier wel niet helemaal in de dagelijkse betekenis gebruikt wordt. De *richting* specifieert met welke rechte(n) de vector evenwijdig is. Dit laat nog twee mogelijkheden voor welke kant de vector uitwijst. Dit wordt de *zin* genoemd.



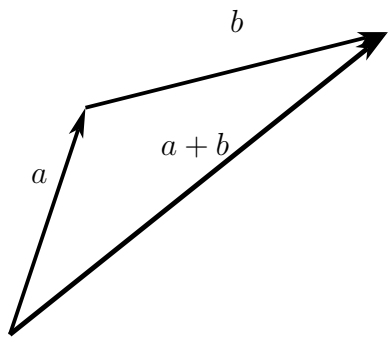
Figuur 7: Drie voorstellingen van dezelfde vector.

Deze definitie probeert in gewone taal te zeggen wanneer een fysische grootheid door een (meestal driedimensionale) vector kan worden voorgesteld. Bijvoorbeeld fysische begrippen als verplaatsing, snelheid, versnelling en kracht, zijn gekenmerkt door een grootte een richting en een zin. Dit in tegenstelling tot begrippen als massa of temperatuur die geen richting hebben en *scalaire* grootheden genoemd worden, en wiskundig gewoon door een getal (of *scalar*) beschreven worden.

Voor sommige fysische grootheden (zoals een kracht) wordt een iets enger concept gehanteerd waarbij het aangrijpingspunt (het vertrekpunt van de pijl) wel van belang is. Men spreekt dan van een *gebonden* vector. Indien het aangrijpingspunt niet van belang is, spreekt men van een *vrije* vector. (Soms is niet het precieze aangrijpingspunt van belang maar wordt een *drager* gespecifieerd. Dit is een rechte doorheen het beginpunt en eindpunt van de pijl, waarlangs de pijl mag verschoven worden.)

De twee belangrijkste bewerkingen met deze vectoren zijn:

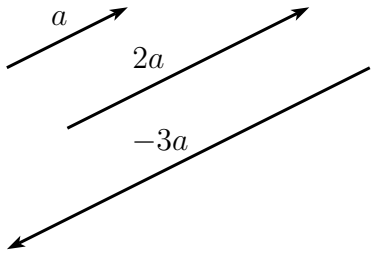
(1) De *optelling*: Op de pijlenvoorstelling wordt de som van twee vectoren a en b bekomen door een driehoek te tekenen. Deze wordt bekomen door een voorstelling van b te kiezen waarvan het vertrekpunt samenvalt met het eindpunt van een voorstelling van a. De vector die het beginpunt van a verbindt met het eindpunt van b is dan de som van a en b (Fig. 8).



Figuur 8: Meetkundige voorstelling van de som van a en b d.m.v. een driehoek.

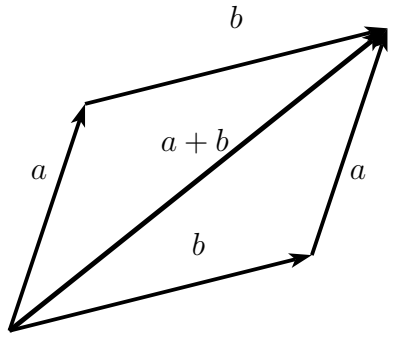
(2) De *scalaire vermenigvuldiging*: Vectoren kunnen met een getal vermenigvuldigd worden. Deze bewerking heet de scalaire vermenigvuldiging. Wanneer een vector a met een getal r vermenigvuldigen, verkrijgen we de vector ra. De richting van ra is dezelfde als van a. Als r positief is wordt ook de zin behouden. Als r negatief is, heeft ra de tegengestelde zin als a. De grootte van ra is $|r|$ maal de grootte van a. (Fig. 9).

Men zegt ook vaak kortweg dat bij de scalaire vermenigvuldiging de richting behouden wordt en de grootte met r vermenigvuldigd. Het begrip *grootte* wordt immers dikwijls ruimer geïnterpreteerd, waarbij een "negatieve grootte" betekent dat de vector de tegengestelde kant uitwijst (d.w.z. tegengesteld aan de kant die per afspraak positief genoemd wordt). Deze werkwijze bewijst ook zijn nut wanneer in vraagstukken moet gewerkt worden met vectoren met een gegeven richting maar onbekende grootte en zin.



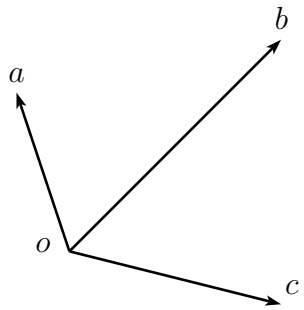
Figuur 9: Meetkundige voorstelling van de scalaire vermenigvuldiging.

Merk op dat als we bij de som de rol van a en b verwisselen, we een andere driehoek tekenen, maar wel dezelfde resultaatvector bekomen. Beide driehoeken samen vormen



Figuur 10: Meetkundige voorstelling van de som van a en b d.m.v. een parallellogram.

een parallellogram (Fig. 10). Dit doet denken aan de meetkundige voorstelling van de som van vectoren in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ in hoofdstuk 3, behalve dat er helemaal niet verwezen wordt naar een assenstelsel. Maar in de plaats van ergens in de ruimte een pijl met een bepaalde grootte, richting en zin te tekenen, wordt vaak één punt van de ruimte uitgekozen als vertrekpunt voor de voorstelling van vectoren. Dit punt wordt de oorsprong genoemd. (Men noemt de voorstelling van een vector door middel van een pijl vanuit de oorsprong ook soms een gebonden vector). Eens de oorsprong vastligt, hoeven we alleen het eindpunt van de pijl te kennen om een vector volledig te specifiëren. Daarom kunnen vectoren ook geassocieerd worden met punten van een ruimte waarin een oorsprong gekozen is. (Fig. 11).

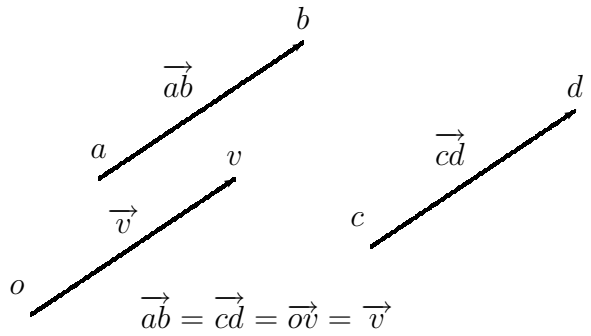


Figuur 11: Voorstelling van vectoren door een pijl vanuit de oorsprong.

Als we nu ook nog een assenstelsel invoeren, kunnen we de vectoren voorstellen door een stel getallen zoals in definities 1.1 en 5.1 (Antwoord 1). De getallen (a, b, c) die een meetkundige vector voorstellen t.o.v. een afgesproken assenstelsel, worden de coördinaten van die vector genoemd. Merk op dat de coördinaten van een vector er anders uitzien als we met een ander assenstelsel werken. Toch komt de definitie 1.5 die we in hoofdstuk 1 gaven voor de som in $\mathbb{R}^n$ altijd overeen met de hogerbeschreven optelling d.m.v. een parallellogram of driehoek (Fig. 10), in welk assenstelsel we ook werken. Als bijvoorbeeld de vectoren p en q voorgesteld worden door (a, b, c) en (d, e, f) t.o.v. één assenstelsel en door (a', b', c') en (d', e', f') t.o.v. een tweede, dan wordt de vector $p + q$ voorgesteld door $(a + d, b + e, d + f)$ t.o.v. het eerste assenstelsel en door

$(a' + d', b' + e', d' + f')$ t.o.v. het tweede.

Soms wordt voor een vector een notatie gebruikt die verwijst naar het beginpunt en eindpunt van een voorstelling van die vector. De vector in Fig. 12 kan dus voorgesteld worden als $\overrightarrow{ab}$, of als $\overrightarrow{cd}$ of als $\overrightarrow{ov}$. Deze laatste notatie wordt meestal verkort tot $\overrightarrow{v}$. De nulvector wordt genoteerd als $\overrightarrow{0}$.



Figuur 12: Benaming van een vector op basis van beginpunt en eindpunt.

Met deze notaties geldt ook dat het tegenstelde van $\overrightarrow{ab}$ gelijk is aan

$$-\overrightarrow{ab} = (-1)\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ba}.$$

Verder geldt

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a},$$

$$-\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b},$$

$$\overrightarrow{aa} = \overrightarrow{0}.$$

Soms wordt in de fysica niet gewerkt met een assenstelsel. Indien niet gewerkt wordt met coördinaten maar met grootten en richtingen (dikwijls gegeven door het specifiëren van enkele hoeken), kan men op basis van eenvoudige meetkunde en goniometrie soms sneller tot een antwoord komen dan via de algebra. Als men toch met assen werkt, dan worden die vaak niet op voorhand vastgelegd, maar oordeelkundig gekozen om tot eenvoudige scalaire vergelijkingen te komen, bijvoorbeeld evenwijdig met of loodrecht op één van de vectoren, of volgens een symmetrie-as van het probleem. Op dit soort benadering van vectoren wordt dieper ingegaan in de cursussen fysica.

Er worden nog twee bewerkingen gedefinieerd naast de optelling en de scalaire vermenigvuldiging:

(3) Het inwendig product (of scalair product, niet te verwarren de hierboven gedefinieerde scalaire vermenigvuldiging). Dit is een bewerking op twee vectoren die een getal (een scalar) als uitkomst oplevert.

Deze bewerking wordt gedefinieerd als

$$p \cdot q = \|p\|\|q\| \cos(\angle(p, q)),$$

waarbij $\|p\|$ en $\|q\|$ de grootte van de vectoren p en q voorstelt en $\angle(p, q)$ de hoek tussen p en q. Merk op dat deze definitie overeenkomt met eigenschap 8 van het inwendig product zoals we het gedefinieerd hebben in $\mathbb{R}^n$ (definitie 4.1).

(4) Het *vectorieel product*. Dit is een bewerking op twee vectoren die een derde vector als uitkomst oplevert. Deze bewerking heeft vooral betekenis in driedimensionale ruimtes en wordt kort besproken in hoofdstuk 6.

5.2 Vectoren in de wiskundige theorie van vectorruimten

Dit onderdeel wordt niet behandeld in het A-programma

In wiskundecursussen tref je meestal een totaal verschillend antwoord aan op de vraag "Wat is een vector". Wiskundigen weten graag precies waarover ze spreken om ondubbelzinnige en exacte bewijzen te kunnen leveren van de uitspraken die ze doen. Ze zijn daarom op zoek gegaan naar een lijst van duidelijk formuleerbare en eenvoudige wiskundige eigenschappen waaraan een object (of een verzameling objecten) moet voldoen om zich te gedragen als de objecten die we tot nu toe vectoren genoemd hebben. Woorden zoals grootte, richting, zin, of dimensie komen in deze definitie niet voor en worden later gedefinieerd op basis van deze eigenschappen. (Om een betekenis te geven aan het begrip grootte volstaat de eerste definitie hieronder zelfs niet). Elke bewezen stelling is terug te brengen tot een gevolg van deze aangenomen eigenschappen. Naast exactheid winnen we met deze aanpak algemeenheid. De hele theorie is ook toepasbaar op wiskundige objecten die aan de gestelde lijst van eigenschappen voldoen, maar op het eerste gezicht niets te maken hebben met de hierboven beschreven vectoren.

Definitie 5.3 (Vector - Antwoord 3, het antwoord van de wiskundige)
Een *vector* is een element van een *vectorruimte*. Dit is een verzameling van objecten die we vectoren noemen, vergezeld van een verzameling van objecten die we scalars noemen (we nemen hieronder aan dat de verzameling van scalars de verzameling van reële getallen is en spreken van een reële vectorruimte), waarop twee bewerkingen gedefinieerd zijn, namelijk een bewerking die met elk stel van twee vectoren een derde associeert en die we optelling noemen, en een bewerking die met een scalar en een vector een vector associeert en die we scalaire vermenigvuldiging noemen. Over deze objecten en bewerkingen hoeven we niets te weten, behalve dat ze aan de volgende eigenschappen voldoen (die per definitie van het geheel een vectorruimte maken). Deze eigenschappen moeten voldaan zijn voor willekeurige vectoren u, v en w en willekeurige scalars a en b

1. $u + v$ bestaat en is een vector,

2. $u + v = v + u$,
   (De optelling is *commutatief*),

3. $(u + v) + w = u + (v + w)$,
   (De optelling is *associatief*)

4. Er bestaat een vector die we met 0 noteren en de nulvector noemen en waarvoor $u + 0 = u$,

5. Voor elke vector u bestaat er een vector die we als $-u$ noteren, die we de *tegengestelde* vector noemen, en waarvoor $u + (-u) = 0$.

6. au bestaat en is een vector,

7. $a(u + v) = au + av$,
   (De scalaire vermenigvuldiging is *distributief* t.o.v. de optelling van vectoren),

8. $(a + b)u = au + bu$,
   (De scalaire vermenigvuldiging is *distributief* t.o.v. de optelling van scalars),

9. $a(bu) = (ab)u$,
   (De vermenigvuldiging van scalars en de scalaire vermenigvuldiging zijn *gemengd associatief*).

10. $1u = u$.

Eén van de belangrijkste stellingen uit de wiskundige theorie van vectorruimten is dat elke eindigdimensionale reële vectorruimte isomorf is met $\mathbb{R}^n$ (met n gelijk aan de dimensie van de vectorruimte). Intuïtief gezegd betekent dit dat dit stel eigenschappen voldoende is opdat een object, wat de optelling en de vermenigvuldiging met een getal betreft, zich precies zo gedraagt als een vector in $\mathbb{R}^n$.

Voorbeeld 5.4
De verzameling van $m \times n$ matrices, met de hogerbeschreven optelling en scalaire vermenigvuldiging voor matrices, vormt een vectorruimte.
Ga zelf na dat matrices zonder probleem de rol van u, v en w kunnen vervullen in de bovenstaande definitie.
Wat de optelling en de scalaire vermenigvuldiging betreft, gedragen $m \times n$ matrices zich precies zoals vectoren met mn componenten.

We kunnen niet ingaan op de details van deze wiskundige benadering van vectorruimten, maar geven wel nog aan hoe deze aanpak heel wat zaken uit de eerste hoofdstukken in een ander licht stelt:

$\mathbb{R}^n$ is een vectorruimte van *eindige* dimensie n. De wiskundige definitie 5.3 laat ook oneindigdimensionale vectorruimten toe (waarvoor geen eindige basis kan gevonden

worden). De theorie van oneindige vectorruimten is heel wat subtieler dan de theorie van $\mathbb{R}^n$.

We hebben het begrip *deelruimte* aangebracht als de verzameling van alle lineaire combinaties van een stel vectoren. In de abstracte wiskundige aanpak, is een deelruimte van een vectorruimte gewoon een deelverzameling van de vectoren die zelf ook een vectorruimte vormt.

Ook de definitie van het *inwendig product* verloopt anders. Het inwendig product is eigenlijk een extra bewerking die toegevoegd wordt aan de bewerkingen waarvan sprake is in definitie 5.3. Voor deze bewerking worden de volgende eigenschappen toegevoegd aan het lijstje van eigenschappen in definitie 5.3.

1. $u \cdot v$ bestaat en is een scalar,
2. $u \cdot (av + bw) = au \cdot v + bu \cdot w$ en $(au + bv) \cdot w = au \cdot w + bv \cdot w$,
   (Het inwendig product is *bilineair*),
3. $u \cdot v = v \cdot u$,
   (Het inwendig product is *symmetrisch*),
4. $u \cdot u \geq 0$ en $(u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0)$,
   (Het inwendig product is *positief definiet*).

Het hogergedefinieerde inwendig product in $\mathbb{R}^n$ is niet het enige product dat aan deze eigenschappen voldoet. Het is voor meetkundige toepassingen wel de meest natuurlijke keuze in een loodrecht assenstelsel. In de wiskundige theorie van vectorruimten krijgen begrippen als hoeken en loodrechte stand echter pas betekenis na de keuze van een inwendig product dat aan de gestelde eigenschappen voldoet. De vergelijking

$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos(\angle(u, v))$$

is in deze context niet een meetkundig bewezen eigenschap, maar definieert de hoek tussen abstracte vectoren. Het hoeft hier overigens helemaal niet te gaan over meetkundige objecten. Zo bestaat er een belangrijke theorie over orthogonale veeltermfuncties.

Zoals hoger kan een *norm* gedefinieerd worden op basis van het inwendig product. Soms wordt ook een norm gedefinieerd (op basis van een lijst van eigenschappen), los van een inwendig product. Pas na het vastleggen van een norm krijgt de vector eigenlijk een grootte (zoals in de fysica).

We hebben het ook kort gehad over *lineaire afbeeldingen* (zie interpretatie 2.7), die we gedefinieerd hebben als afbeeldingen die een vector x afbeelden, door links te vermenigvuldigen met een vaste matrix A, op $f(x) = Ax$. In de abstracte theorie van vectorruimten worden lineaire afbeeldingen gedefinieerd als afbeeldingen waarvoor

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v) \text{ voor alle vectoren } u \text{ en } v \text{ en getallen } a \text{ en } b.$$

Dit is opnieuw een definitie die niet vertrekt van een concrete voorstelling van vectoren maar van een eigenschap waaraan een afbeelding moet voldoen om lineair te mogen heten. Men kan wel bewijzen dat afbeeldingen tussen eindigdimensionale vectorruimten altijd door een matrix kunnen worden voorgesteld.

Tot slot merken we nog op dat de aanpak om wiskundige structuren te definiëren op basis van abstracte objecten en bewerkingen die aan een stel voorgeschreven eigenschappen voldoen, helemaal niet beperkt is tot de theorie van vectorruimten. Vectorruimten vormen slechts één eenvoudig geval van een hele waaier van algebraïsche structuren die in de wiskunde bestudeerd worden.

6 Determinanten

In dit hoofdstuk gaan we heel beknopt in op de theorie van determinanten. (We doen het beknopt omdat determinanten uitgebreid behandeld worden in de meeste vervolgcursussen over lineaire algebra en meestal niet het grootste struikelblok vormen. Toch is enige voorkennis nuttig, omdat determinanten vaak al in de eerste les gebruikt worden in andere cursussen. We maken er ook zelf in beperkte mate gebruik van in de module over rechten en vlakken).

Een determinant is een getal dat iets zegt over een vierkante matrix. Bijvoorbeeld voor een 2×2 matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

wordt dit getal berekend als $\det A = ad - bc$. Bijvoorbeeld

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = -8.$$

Soms wordt de determinant ook als volgt genoteerd d.m.v. rechte strepen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8.$$

Eén van de belangrijkste eigenschappen van determinanten is de volgende:

Als de kolommen van een 2×2 matrix lineair afhankelijk zijn is de determinant 0, als de kolommen lineair onafhankelijk zijn is de determinant verschillend van 0.

We gaan hier niet diep op in, maar voor een 2×2 matrix, kan je gemakkelijk vaststellen dat als a en c verschillend zijn van 0, de uitdrukking $ad - bc = 0$ kan herschreven worden als

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

wat inderdaad betekent dat (b, d) evenredig is met (a, c) en dus dat de kolommen lineair afhankelijk zijn. (Werk zelf uit wat er gebeurt als a of c gelijk is aan 0).

Voor een (vierkante) $n \times n$ matrix staat het hebben van n lineaire onafhankelijke kolommen ook gelijk met inverteerbaarheid van de matrix en ook met het hebben van n lineair onafhankelijke rijen.

Voorbeeld 6.1
Bijvoorbeeld de matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

heeft determinant 1, is inverteerbaar, heeft twee lineair onafhankelijke rijen en twee lineair onafhankelijke kolommen.
De matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

heeft determinant 0, is niet inverteerbaar, heeft lineair afhankelijke rijen (de eerste rij is 2 maal de tweede) en lineair afhankelijke kolommen (de tweede kolom is 3 maal de eerste).

Voor matrices van groter formaat dan 2×2 worden de formules ingewikkelder. Voor een 3×3 matrix, geldt de volgende formule:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$

Deze formule kan ook geschreven worden als

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Opnieuw is het 0 zijn van de determinant equivalent met lineaire afhankelijkheid van de kolommen. Dit is ook equivalent met lineaire afhankelijkheid van de rijen en met het niet inverteerbaar zijn van de matrix.

Tot slot gaan we nog kort in op het vectorieel product van twee vectoren in $\mathbb{R}^3$. We vermeldden deze bewerking op vectoren reeds in hoofdstuk 5.1 maar zonder ze te definiëren. De bewerking kan als volgt gedefinieerd worden op basis van 2×2 determinanten.

Definitie 6.2
Het vectorieel product van de vectoren (a, b, c) en (d, e, f) in $\mathbb{R}^3$ wordt genoteerd met

$$(a, b, c) \times (d, e, f)$$

of

$$(a, b, c) \wedge (d, e, f)$$

en is gedefinieerd door

$$(a,b,c)\times(d,e,f)=(bf-ce,cd-af,ae-bd)=(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix},\begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}).$$

Met een beetje misbruik van notatie (met vectoren op de eerste rij waar normaal getallen staan), wordt het vectorieel product soms ook kort genoteerd als

$$(a,b,c)\times(d,e,f)=\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

waarbij $e_x=(1,0,0)$, $e_y=(0,1,0)$ en $e_z=(0,0,1)$. Uitwerken levert inderdaad

$$\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}(1,0,0)-\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}(0,1,0)+\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}(0,0,1)=(bf-ce,cd-af,ae-bd).$$

(Merk op dat $-\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$ ook gelijk is aan $\begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix}$).

De belangrijkste eigenschap van het vectorieel product is dat voor een homogeen lineair stelsel van twee lineair onafhankelijke vergelijkingen in drie onbekenden

$$\begin{cases} ax & +by & +cz & =0 \\ dx & +ey & +fz & =0 \end{cases}$$

(met (a,b,c) en (d,e,f) lineair onafhanekelijk), de oplossingenverzameling bestaat uit alle vectoren van de vorm

$$k\,(a,b,c)\times(d,e,f) \text{ met } k \text{ een willekeurig reëel getal.}$$

Van deze eigenschap zullen we ook gebruik maken in de module over rechten en vlakken. Ga zelf na dat $(bf-ce,cd-af,ae-bd)$ inderdaad aan beide vergelijkingen voldoet. Omdat de vergelijkingen van dit stelsel ook kunnen geïnterpreteerd worden als "(x,y,z) staat loodrecht op (a,b,c) en op (d,e,f)" (zie interpretatie 4.4), vinden we ook dat $(a,b,c)\times(d,e,f)$ loodrecht staat op (a,b,c) en (d,e,f). Het vectorieel product levert dus een snelle manier om een vector te berekenen die loodrecht staat op twee gegeven vectoren.

7 Oefeningen

Oefening 7.1

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bereken $A+B$ en $5A$.

Oefening 7.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 15 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Bereken AB.

Oefening 7.3

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

Bereken AB.

Oefening 7.4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bereken AB en BA.

Oefening 7.5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bereken $A(BC)$ en $(AB)C$.

Oefening 7.6
Gegeven

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Bereken het product $C = AB$ door alle elementen van C te berekenen als een rij van A maal een kolom van B.

2. Schrijf de derde kolom van C als een lineaire combinatie van de kolommen van A.

3. Schrijf de eerste rij van C als een lineaire combinatie van de rijen van B.

Oefening 7.7
Gegeven A, B, C, D, E, en X zijn matrices

$$B + C = A,\ D - E = A^{-1},\ BXA^{-1} + CXD = CXE + B.$$

Bepaal de matrix X in functie van de matrices A en B.

Oefening 7.8
Bepaal de oplossingenverzameling van

$$\begin{cases} 3x & -2y & +z & = 4 \\ x & +y & -z & = 2 \\ x & & +3z & = 1 \end{cases}$$

Oefening 7.9
Bepaal de oplossingenverzameling van

$$\begin{cases} s & +2t & +3w & = 1 \\ u & +2w & & = 2 \\ v & -w & & = 3 \end{cases}$$

Oefening 7.10
Bepaal de oplossingenverzameling van

$$\begin{cases} 2x & +y & +z & = 1 \\ 4x & +y & +3z & = 1 \\ -2x & +2y & +z & = 7 \end{cases}$$

Oefening 7.11
Bepaal de oplossingenverzameling van de stelsels

$$\begin{cases} x & +2y & +z & +4u & = -1 \\ 2x & +4y & +2z & +u & = 5 \\ -x & -2y & & -u & = 0 \end{cases}$$

Oefening 7.12
Bepaal de oplossingenverzameling van de stelsels

$$\begin{cases} x & +2y & & = a \\ 4x & +7y & +z & = b \\ -2x & +2y & -6z & = c \end{cases}$$

met $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, $(a, b, c) = (-1, -2, -10)$, en met $(a, b, c) = (0, -2, 3)$.

Oefening 7.13
Toon aan dat het stelsel

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vals is.
Als we beide leden links vermenigvuldigen met

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

bekomen we

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Ga na dat dit stelsel oneindig veel oplossingen heeft. Verklaar waarom beide stelsels niet dezelfde oplossingenverzameling hebben.

Oefening 7.14
Voor welke waarden van de parameter a is het volgende stelsel oplosbaar?

$$\begin{cases} x & +ay & = -2 \\ ax & +y & = 2 \\ x & +2y & = 1 \end{cases}$$

Oefening 7.15
Bereken de inverse van

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Oefening 7.16
Schrijf $(1, 7, 0, 6)$ als een lineaire combinatie van $(0, 2, 3, 1)$, $(1, -1, 1, -1)$ en $(2, 1, 0, 1)$.

Oefening 7.17
Gegeven: u en v zijn vectoren in R^3.

1. Toon aan dat voor een vector u, de vector $v{=}u/\|u\|$ een veelvoud is van u met $\|v\| = 1$.
2. Toon aan dat $(u \cdot x)/\|u\|$ gelijk is aan de grootte van de projectie van de vector x op de rechte door de oorsprong en u.
3. Toon aan dat $(u \cdot x)/(u \cdot u)u$ gelijk is aan de projectie van x op de rechte door de oorsprong en u.

Oefening 7.18
Toon aan de vectoren $(1, 2, 1, -1, 1)$, $(3, -1, 1, 2, 1)$ en $(-3, 8, 1, -7, 1)$ een tweedimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^5$ voortbrengen.

Oefening 7.19
Toon aan dat de 2×2 matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

een lineaire combinatie is van van

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Oefening 7.20
Bereken de determinant van de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zijn de kolommen lineair onafhankelijk? Zijn de rijen lineair onafhankelijk?

Oefening 7.21
Bereken het vectorieel product van $(1, 2, 1)$ en $(-2, 0, 1)$. Toon aan dat de bekomen vector loodrecht staat op beide gegeven vectoren.

8 Oplossingen van oefeningen

7.1

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \; 5A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 25 \\ -10 & 15 \end{bmatrix}.$$

7.2

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

7.3

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 9 & 12 & -8 \\ 12 & 62 & -3 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

7.4

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.5

$$A(BC) = (AB)C = \begin{bmatrix} 0 & 60 \\ -8 & 24 \end{bmatrix}.$$

7.6

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.7

$$X = A^{-1}BA.$$

7.8

$$(x, y, z) = (25/16, 1/4, -3/16)$$

7.9

$(s, t, u, v, w,) = (1-2a-3b, a, 2-2b, 3+b, b) = (1, 0, 2, 3, 0)+a(-2, 1, 0, 0, 0)+b(-3, 0, -2, 1, 1)$

(met a en b willekeurige reële getallen).

7.10

$$(x, y, z) = (-1, 2, 1).$$

7.11

$(x, y, z, u) = (1, 0, 2, -1) + a(-2, 1, 0, 0)$ met a een willekeurig reëel getal.

7.12

$1)a(2, -1, -1)$ met $a \in \mathbb{R}$, $2)(-1, 0, 2) + a(2, -1, -1)$ met $a \in \mathbb{R}$, $3)$ strijdig stelsel.

7.13 Hint: De matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

is niet inverteerbaar.

7.14 Enkel als $a = -1$.

7.15

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -9 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

7.16

$$(1, 7, 0, 6) = (0, 2, 3, 1) - 3(1, -1, 1, -1) + 2(2, 1, 0, 1).$$

7.18 Hint: bereken de echelonvorm van

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestaan er lineaire verbanden tussen de kolommen van A?

7.19 Hint: Schrijf

$$a \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

als een stelsel van vergelijkingen in de onbekenden a en b.

7.20 det A=1. De kolommen zijn lineair onafhankelijk. De rijen ook.

7.21

$$\begin{aligned} &(1, 2, 1) \times (-2, 0, 1) = (2, -3, 4), \\ &(1, 2, 1) \cdot (2, -3, 4) = 0, \\ &(-2, 0, 1) \cdot (2, -3, 4) = 0. \end{aligned}$$