Zomercursus Wiskunde

Katholieke Universiteit Leuven
Groep Wetenschap & Technologie

September 2008

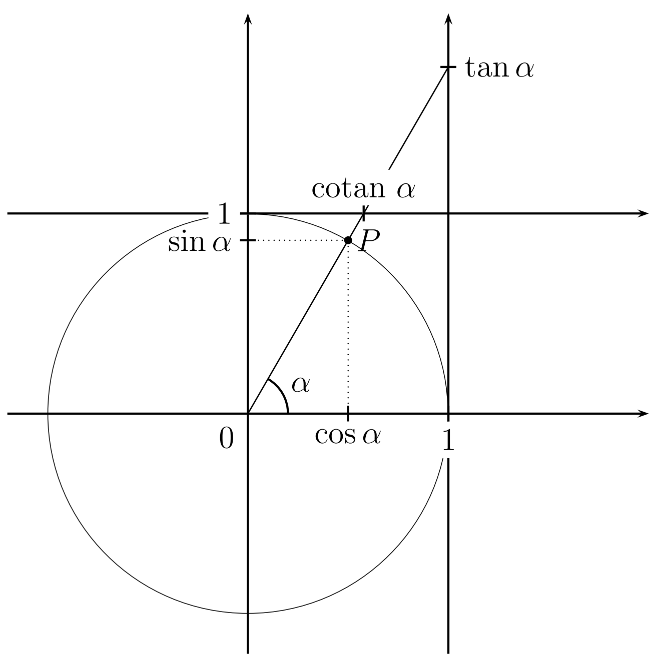
Goniometrie, vlakke meetkunde en rekenen met vectoren in de fysica

(versie 10 juli 2008)

Rekenen met vectoren is een basisvaardigheid voor vakken natuurkunde. Bij het vectorrekenen maken we gebruik van goniometrie en vlakke meetkunde. In deze module willen we de belangrijkste definities en eigenschappen herhalen en toepassen in oefeningen.

1 Goniometrie

1.1 Goniometrische cirkel



Een goniometrische cirkel is een cirkel met als middelpunt de oorsprong van een cartesiaans assenstelsel en met straal 1. Met elke hoek α kan een punt P van de goniometrische cirkel geassocieerd worden. Hiertoe laat men het eerste been van de hoek samenvallen met de positieve x-as. Het tweede been snijdt de goniometrische cirkel in het punt P. De lengte van de cirkelboog tussen de twee benen geeft ons de hoek in radialen. De hoek is positief indien die in tegenwijzerzin gemeten wordt vanaf de x-as. Merk op dat een hoek gemeten in radialen eigenlijk dimensieloos is, en dat je de eenheid radialen mag weglaten. Aangezien de omtrek van een eenheidscirkel 2π is, vinden we dat het verband tussen een hoek gemeten in graden en radialen gegeven is door $360° = 2\pi$. We vinden dus:

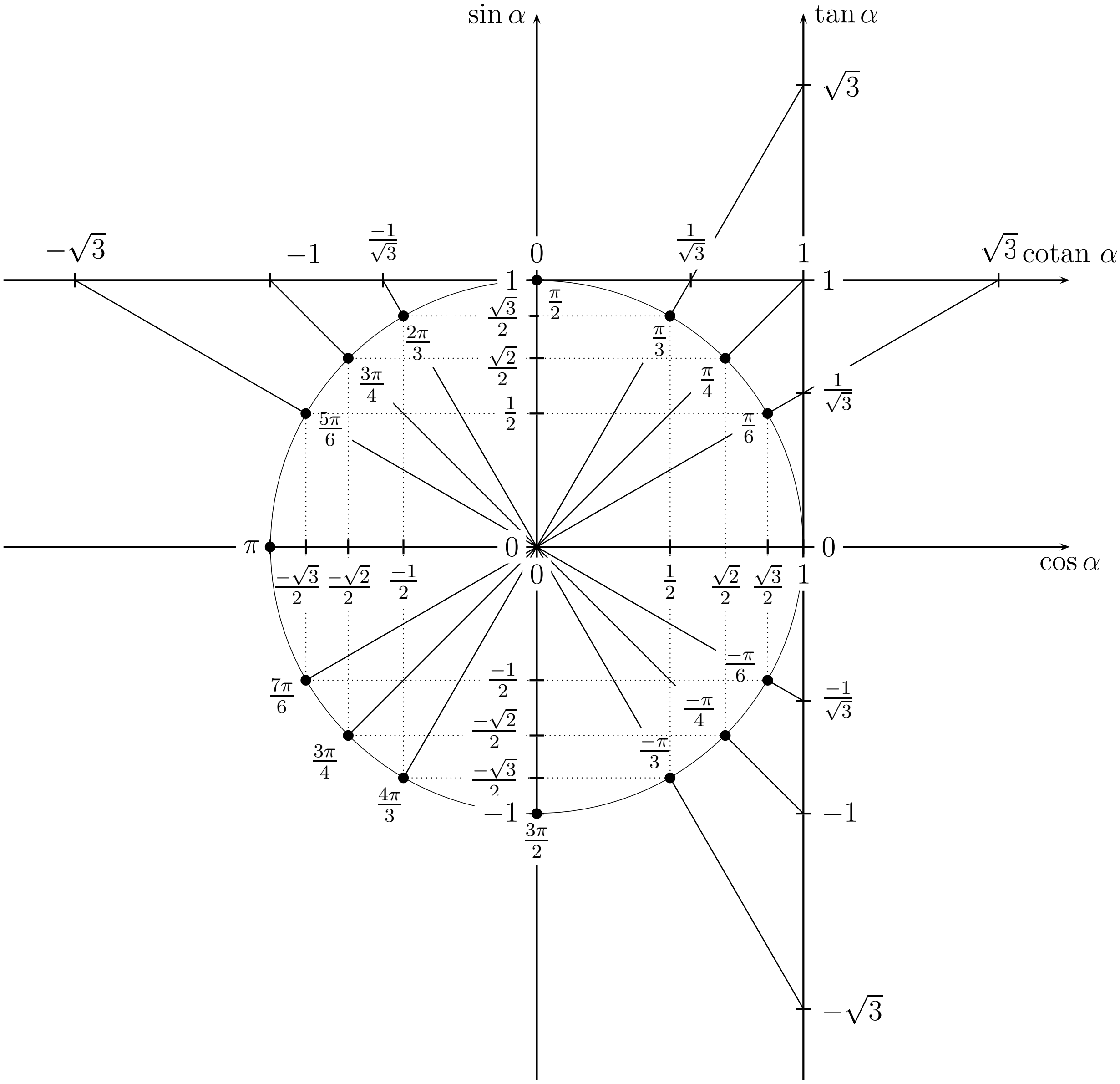
$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{6} &= 30° & \pi &= 180° \\
\frac{\pi}{4} &= 45° & \frac{4\pi}{3} &= 240° \\
\frac{\pi}{2} &= 90° & \frac{3\pi}{2} &= 270° = -90° \\
\frac{3\pi}{4} &= 135° & \frac{7\pi}{4} &= 315° = -45°
\end{aligned}
$$

De cosinus en sinus van de hoek α zijn gedefinieerd via de coördinaten van het punt $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$. De tangens (afgekort tan of tg) en de cotangens (afgekort cotan of cotg) zijn gedefinieerd als

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{cotan}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

en kunnen eveneens aangeduid worden op de goniometrische cirkel.

Enkele veelvoorkomende hoeken en hun goniometrische getallen zijn gegeven in onderstaande figuur.



1.2 Goniometrische formules

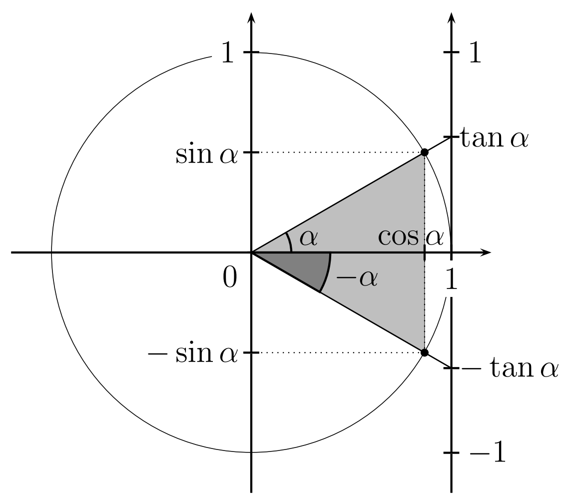
Hieronder wordt een overzicht gegeven van de belangrijkste verbanden tussen de goniometrische getallen van hoeken.

Verwante hoeken

Om verbanden te zien tussen goniometrische getallen van verwante hoeken, teken je best steeds de goniometrische eenheidscirkel. Verwante hoeken zijn:

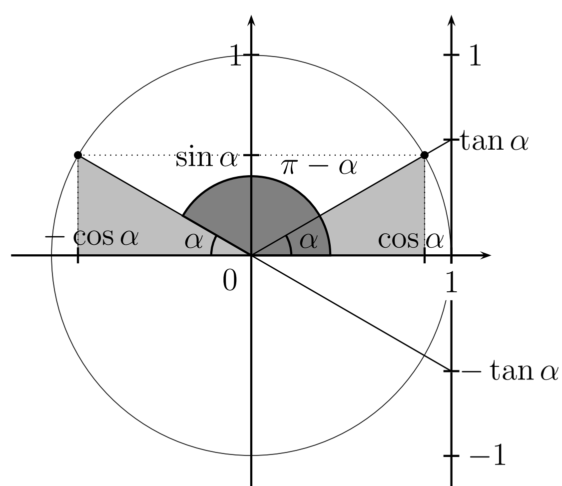
Tegengestelde hoeken: α en $-\alpha$

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos\alpha\\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \text{cotan }(-\alpha) &= -\text{ cotan }\alpha\end{aligned}$$



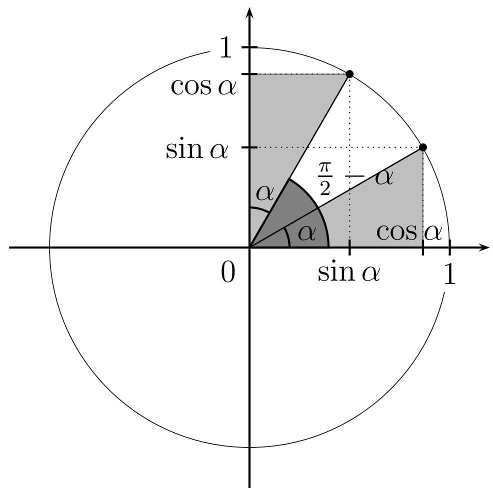
Supplementaire hoeken: hoeken waarvan de som 180° of π is.

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \text{cotan }(\pi-\alpha) &= -\text{ cotan }\alpha\end{aligned}$$



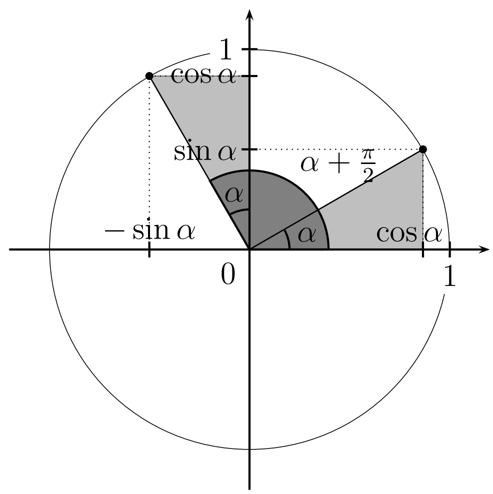
Complementaire hoeken: hoeken waarvan de som 90° of $\dfrac{\pi}{2}$ is.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{cotan}\alpha$$
$$\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$$



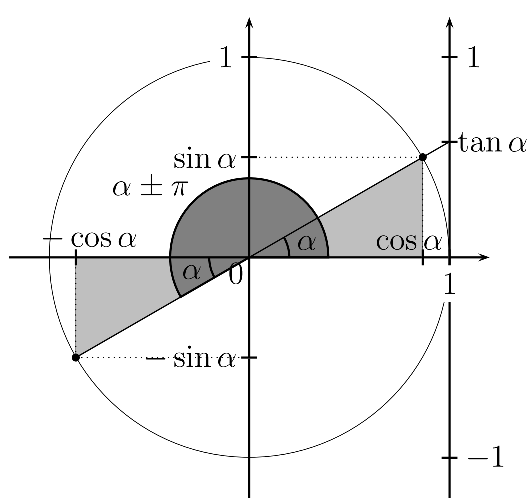
Anticomplementaire hoeken: hoeken waarvan het verschil 90° of $\dfrac{\pi}{2}$ is.

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$$
$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotan}\alpha$$
$$\operatorname{cotan}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\tan\alpha$$



Antisupplementaire hoeken: hoeken waarvan het verschil 180° of π is.

$$\sin(\alpha\pm\pi) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha\pm\pi) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\alpha\pm\pi) = \tan\alpha$$
$$\operatorname{cotan}(\alpha\pm\pi) = \operatorname{cotan}\alpha$$



Grondformule en afgeleide formules

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1\\
\sin^2\alpha &= 1-\cos^2\alpha\\
\cos^2\alpha &= 1-\sin^2\alpha\\
\tan^2\alpha + 1 &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ als } \cos^2\alpha \neq 0\\
1+\text{cotan}^2\alpha &= \frac{1}{\sin^2\alpha} \text{ als } \sin^2\alpha \neq 0
\end{aligned}$$

Som-en verschilformules

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Formules voor de dubbele/ halve hoek

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\
\cos 2\alpha &= 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1\\
\cos 2\alpha &= \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\
\sin 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}
\end{aligned}$$

Formules van Simpson

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\
-2\sin\alpha\sin\beta &= \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

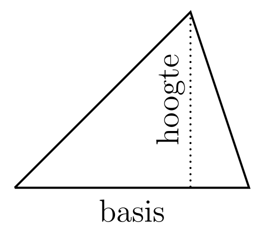
2 Vlakke meetkunde

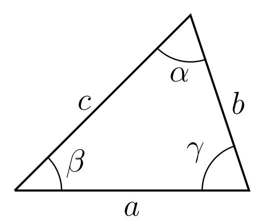
In deze sectie vatten we de belangrijkste eigenschappen van driehoeken, de cirkel en rechten samen.

2.1 Driehoeken

Eigenschappen 2.1 (Willekeurige driehoeken)

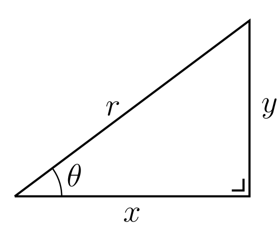
1. *De oppervlakte van een driehoek is*
   $\dfrac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2}$
2. *De som van de hoeken in een driehoek is* 180° *of* π*:*
   $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
3. *Sinusregel*
   $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$
4. *Cosinusregel*
   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\gamma$

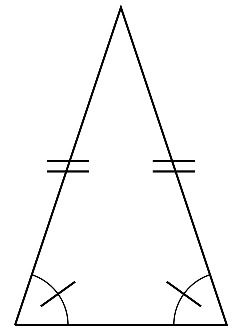




Eigenschappen 2.2 (Rechthoekige driehoeken)
Voor een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden x *en* y*, schuine zijde* r *en* θ *de hoek ingesloten tussen* x *en* r*, geldt:*

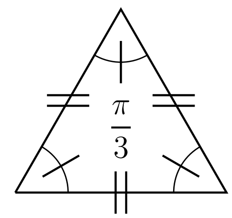
$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2 \ (\textit{Stelling van Pythagoras}) \\
\cos\theta &= \frac{x}{r} \left(= \frac{\textit{aanliggende rechthoekszijde}}{\textit{schuine zijde}} \right) \\
\sin\theta &= \frac{y}{r} \left(= \frac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{schuine zijde}} \right) \\
\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= \frac{y}{x} \left(= \frac{\textit{overstaande rechthoekszijde}}{\textit{aanliggende rechthoekszijde}} \right)
\end{aligned}
$$





Eigenschap 2.3 (gelijkbenige driehoek)

- *Bij een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.*
- *Gevolg: de hoeken van een gelijkzijdige driehoek meten* $60°$ *of* $\frac{\pi}{3}$

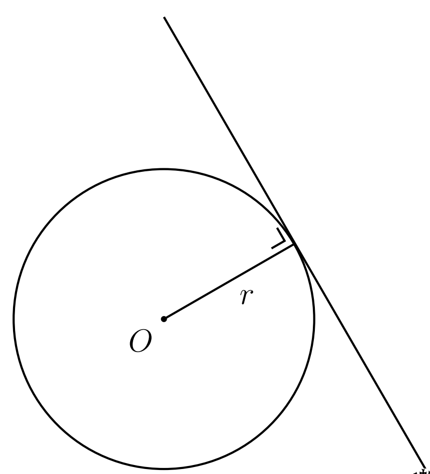


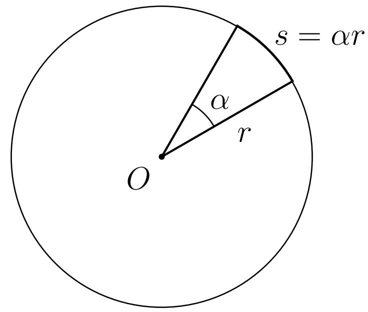
2.2 De cirkel

Een cirkel met middelpunt O en straal r is de verzameling van alle punten die op een afstand r van het punt O liggen. De belangrijkste eigenschappen van een cirkel zijn:

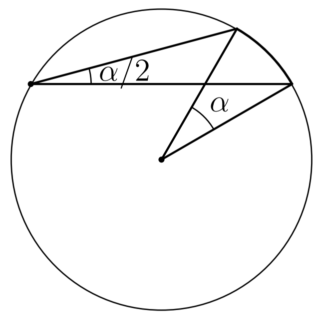
Eigenschappen 2.4 (cirkel)

1. *De omtrek is* $2\pi r$.
2. *De oppervlakte is* πr^2.
3. *De raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.*

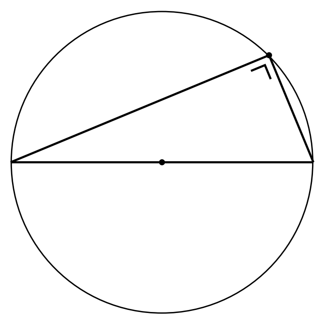




4. Als je op een cirkel met straal r een boog s tekent die vanuit het middelpunt O onder een hoek α wordt gezien, dan is de booglengte s gegeven door αr, met de hoek α uitgedrukt in radialen.

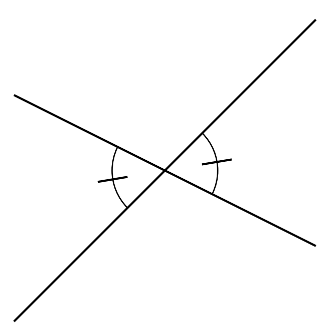


5. Een omtrekshoek meet de helft van de middelpuntshoek op dezelfde boog.

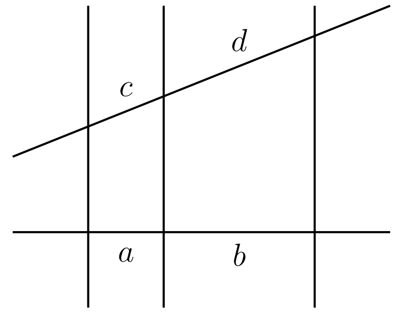


speciaal geval: de omtrekshoek op een halve cirkel is 90° *of* $\dfrac{\pi}{2}$

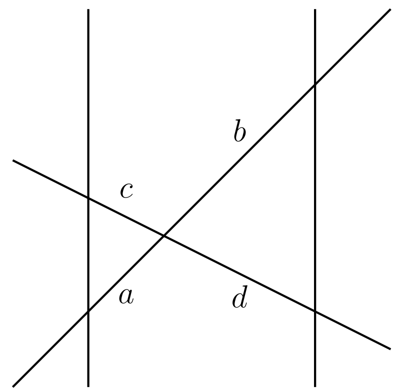
2.3 Rechten



Eigenschap 2.5 (Overstaande hoeken)
Overstaande hoeken bij twee snijdende rechten zijn gelijk.

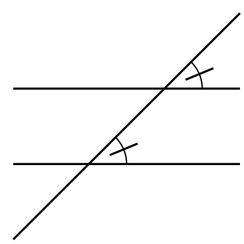


Eigenschap 2.6 (Stelling van Thales)
De evenwijdige projectie behoudt de verhouding van evenwijdige lijnstukken: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

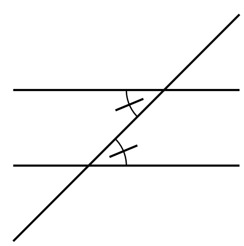


Eigenschappen 2.7 (Twee evenwijdige rechten en een snijlijn)
Als twee evenwijdige rechten gesneden worden door een derde rechte dan zijn:

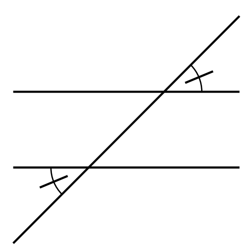
- *elke twee overeenkomstige hoeken gelijk*



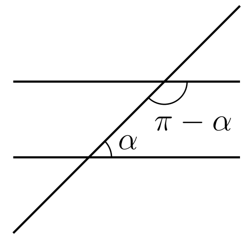
- *elke twee verwisselende binnenhoeken gelijk*



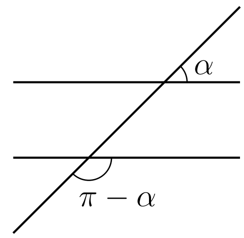
- *elke twee verwisselende buitenhoeken gelijk*



- *elke twee binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn supplementair*



- *elke twee buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn supplementair*



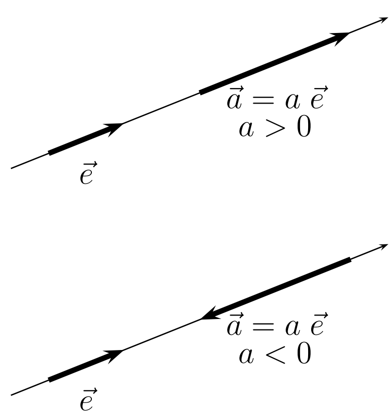
3 Rekenen met vectoren in de fysica.

3.1 Scalar vs. vector

Elementaire fysische grootheden kunnen in twee grote categorieën opgedeeld worden: "scalaire fysische grootheden" en "vectoriële fysische grootheden". *Scalars of scalaire grootheden* zijn volledig gekend door een algebraïsch maatgetal (reëel getal) en een eenheid, bv. een massa m van 5 kg, een lengte l van 2 m, een temperatuur T van -10°C. *Vectoriële fysische grootheden* zijn gekenmerkt door een grootte, richting, zin en eenheid. Vectoren worden aangeduid met een pijltje of worden vet gedrukt. Voorbeelden van vectoriele grootheden zijn positie ($\vec{r}$), snelheid ($\vec{v}$), versnelling ($\vec{a}$), kracht ($\vec{F}$), elektrisch veld ($\vec{E}$). Vectoren worden op een figuur aangeduid met een pijl. De rechte waarop een vector gelegen is wordt de drager genoemd.

3.2 Vectoren volgens een as, vectoren in een cartesiaans assenstelsel

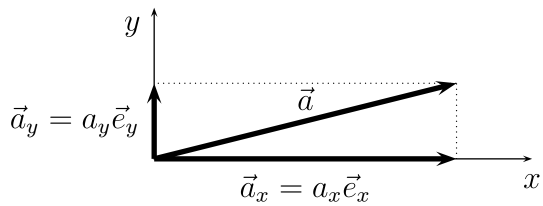
Een as is een rechte waar een positieve zin aan toegekend is. In een figuur wordt de positieve zin meestal aangeduid met een pijltje of door een eenheidsvector $\vec{e}$ (vector met lengte 1) volgens de positieve zin. De vector $\vec{a}$ wordt aangeduid met een pijl en kunnen we schrijven als een product van een reëel getal a en de eenheidsvector $\vec{e} \parallel \vec{a}$. a wordt de algebraïsche waarde of grootte[1] van de vector $\vec{a}$ genoemd. Deze waarde is positief als $\vec{a}$ en $\vec{e}$ dezelfde zin hebben, en negatief als $\vec{a}$ en $\vec{e}$ een tegengestelde zin hebben.



Wanneer we vectoren in een vlak willen beschrijven hebben we twee assen nodig. Deze assen zullen we othogonaal kiezen met de eenheid op iedere as dezelfde, i.e. een cartesiaans assenstelsel. Conventioneel worden de assen voor een vlak benoemd met x en

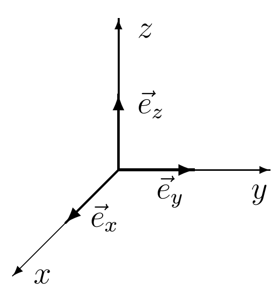
[1] Met de "grootte van een vector"wordt soms ook de norm bedoeld, meestal is het duidelijk uit de context als men de norm of de algebraïsche waarde bedoelt.

y. De eenheidsvectoren $\vec{e}_x \parallel x$ en $\vec{e}_y \parallel y$[2] vormen een basis. Dit betekent dat elke vector $\vec{a}$ in het xy-vlak op éénduidige wijze kan ontbonden worden in vectorcomponenten volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$: $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$. $\vec{a}_x = a_x\vec{e}_x$ is dan de vectorcomponent volgens $\vec{e}_x$ of de coördinaatprojectie op x. Analoog wordt $\vec{a}_y = a_y\vec{e}_y$ de vectorcomponent volgens $\vec{e}_y$ of de coördinaatprojectie op y genoemd.



Om een vector in de driedimensionele ruimte te beschrijven, hebben we drie assen nodig. Orthogonaal op de x- en y-as wordt de z-as ingevoerd. Meestal kiezen we voor een rechtdraaiend assenstelsel: eens de zin van de x- en y-as vastligt, bepaal je de zin van de z-as met behulp van de rechterhandregel of kurketrekkerregel.

- rechterhandregel, versie 1: neem je rechterhand, leg je duim volgens x, je wijsvinger volgens y, je middenvinger geeft je de richting van z.
- rechterhandregel, versie 2: neem je rechterhand, laat je vingers (behalve de duim) draaien van x naar y. Je duim geeft je de richting van z.
- kurketrekkerregel: draai met de kurketrekker van x naar y, de zin waarin de kurketrekker beweegt geeft je de positieve zin voor z.

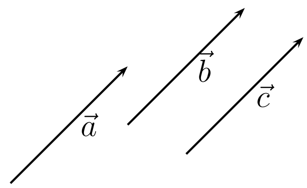


Een driedimensionele vector kan ontbonden worden volgens zijn coördinaatprojecties: $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$.

In de fysica maakt men een onderscheid tussen *vrije en gebonden vectoren.* Als je een *vrije vector* verschuift in het vlak of in de 3-dimensionele ruimte, blijft dit dezelfde vector. Wanneer men op eenzelfde afbeelding verschillende malen dezelfde vector tekent, heeft men verschillende, evenwijdige pijltjes van gelijke lengte die in dezelfde richting

[2] In sommige tekstboeken worden ook de notaties $\hat{\imath} \parallel x$ en $\hat{\jmath} \parallel y$ gebruikt.

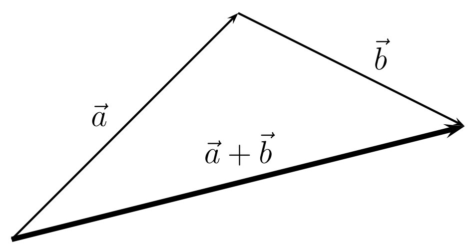
wijzen. Twee vrije vectoren zijn gelijk als ze dezelfde lengte, richting en zin hebben. *Gebonden vectoren* hebben ook een vast *aangrijpingspunt*. Hierdoor ligt de grafische voorstelling van een gebonden vector volledig vast: op één afbeelding kan men slechts op één manier de gebonden vector tekenen. De vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in onderstaande figuur zijn gelijk als het gaat om vrije vectoren, maar verschillend als het gaat om gebonden vectoren, aangezien ze een verschillend aangrijpingspunt hebben.



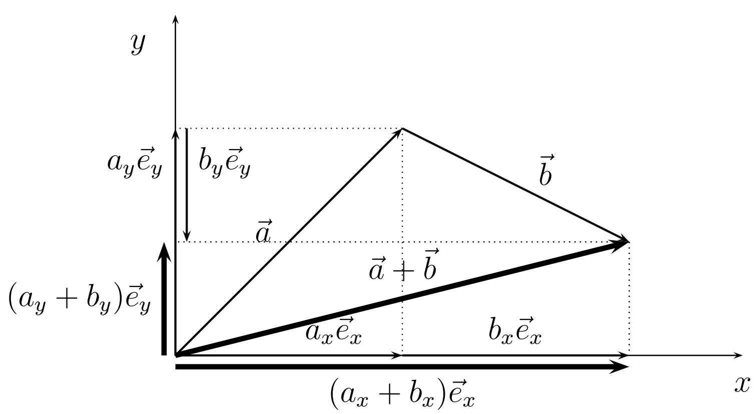
3.3 Bewerkingen met vectoren

3.3.1 Som en vermenigvuldiging met een scalar

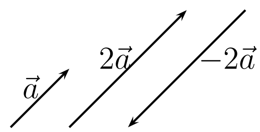
De som van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ bekomt men door $\vec{b}$ te verschuiven zodat het beginpunt samenvalt met het eindpunt van $\vec{a}$. De vector die men bekomt door het beginpunt van $\vec{a}$ te verbinden met het eindpunt van $\vec{b}$ is de vector $\vec{a}+\vec{b}$.



Indien de componenten van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gegeven zijn, kunnen we de vectorsom berekenen door component per component op te tellen:
$\vec{a}+\vec{b} = (a_x+b_x)\vec{e}_x + (a_y+b_y)\vec{e}_y + (a_z+b_z)\vec{e}_z$.



Wanneer we de vector $\vec{a}$ vermenigvuldigen met een scalar m verkrijgen we de vector $m\vec{a}$ die dezelfde richting heeft als de vector $\vec{a}$. Indien $m > 0$ heeft die vector ook dezelfde zin; indien $m < 0$ heeft die vector een tegengestelde zin. De lengte van de vector $m\vec{a}$ is $|m|$ keer de lengte van de vector $\vec{a}$.



Vectoren met de som en de vermenigvuldiging met een scalar gedefinieerd zoals hierboven vormen een vectorruimte. Er gelden dus volgende eigenschappen.

Eigenschappen 3.1

1. *Het optellen van twee vectoren is associatief:*
   $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

2. *De vector met lengte 0 wordt genoteerd met $\vec{0}$. Deze vector wordt de nulvector genoemd. Er geldt:*
   $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

3. *De tegengestelde vector van $\vec{a}$ is $-\vec{a}$:*
   $-\vec{a} + \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

4. *Het optellen van twee vectoren is commutatief:*
   $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

5. *Het vermenigvuldigen van een vector met een scalar is distributief ten opzichte van de opteling van scalairen:*
   $(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$.

6. *Het vermenigvuldigen van een vector met een scalar is distributief ten opzichte van de vectoroptelling:*
   $n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$.

7. *Het vermenigvuldigen van een vector met een scalar is associatief ten opzichte van de vermenigvuldiging van scalairen:*
   $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$.

8. $1\vec{a} = \vec{a}$

3.3.2 Lengte of norm

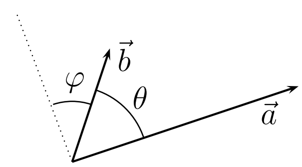
De lengte of norm van de vector $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$ kan berekend worden via $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Dit is een rechtstreeks gevolg van de stelling van Pythagoras.

In fysische problemen, is dikwijls de richting van de vector $\vec{a}$ gekend, maar niet de zin en de lengte (norm). Op een figuur wordt er dan een bepaalde zin vrij gekozen. $\vec{a}$ wordt geschreven als $\vec{a} = a \cdot \vec{e}_a$, met de zin van $\vec{e}_a$ zoals aangeduid op de figuur. De onbekende a wordt dan gezocht door een stelsel van vergelijkingen op te lossen. Indien $a > 0$, dan is $\|\vec{a}\| = a$ en heeft $\vec{a}$ dezelfde zin als $\vec{e}_a$. De vector $\vec{a}$ heeft bijgevolg de zin zoals aangeduid op de figuur. Indien $a < 0$, dan is $\|\vec{a}\| = -a$ en heeft $\vec{a}$ een tegengestelde zin als $\vec{e}_a$. De vector $\vec{a}$ heeft bijgevolg de tegengestelde zin als aangeduid op de figuur.

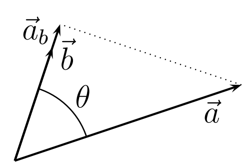
3.3.3 Scalair produkt (inwendig produkt) en orthogonale projectie

Het scalair product van twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is het reëel getal gegeven door $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta$, waarin θ de hoek voorstelt die ingesloten is tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Indien φ het complement van de ingesloten hoek θ is, dan is $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}\| \sin\varphi$.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin\varphi}$$

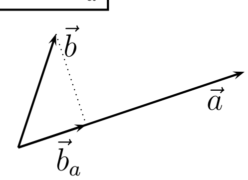


$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_b\, b}$$



De orthogonale projectie van een vector $\vec{a}$ op een as bepaald door de eenheidsvector $\vec{e}_b \parallel \vec{b}$ is gegeven door $\vec{a}_b = \|\vec{a}\| \cos\theta\, \vec{e}_b = (\vec{a} \cdot \vec{e}_b)\, \vec{e}_b$. Hieruit vinden we dat het scalair produkt ook kan berekend worden met behulp van orthogonale projecties:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_b\, b = a\, b_a$.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b_a}$$

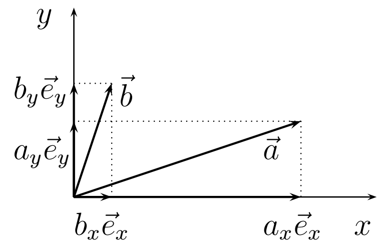


Voor de eenheidsvectoren evenwijdig met de assen van een cartesiaans assenstelsel geldt ($i, j = x, y$ of z):

- $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 1$ als $i = j$
- $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ als $i \neq j$.

Hieruit volgt dat voor de vectoren $\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$ en $\vec{b} = b_x\vec{e}_x + b_y\vec{e}_y + b_z\vec{e}_z$, het scalair produkt berekend kan worden via $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$



Eigenschappen 3.2

1. *Het scalair product is commutatief:* $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. *Het scalair product is lineair* ($m, n \in \mathbb{R}$)*:*
   $(m\vec{a} + n\vec{b}) \cdot \vec{c} = m(\vec{a} \cdot \vec{c}) + n(\vec{b} \cdot \vec{c})$

3. *De norm van een vector $\vec{a}$ kan berekend worden via het scalair product:*
   $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

4. *De ingesloten hoek θ tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ kan bepaald worden via*
   $$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}.$$

5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ *of* $\vec{b} = \vec{0}$ *of* $\vec{a} \perp \vec{b}$

3.4 Vectorvergelijkingen

Twee vectoren zijn aan mekaar gelijk als hun lengte, richting en zin aan mekaar gelijk zijn.

Grafische methode

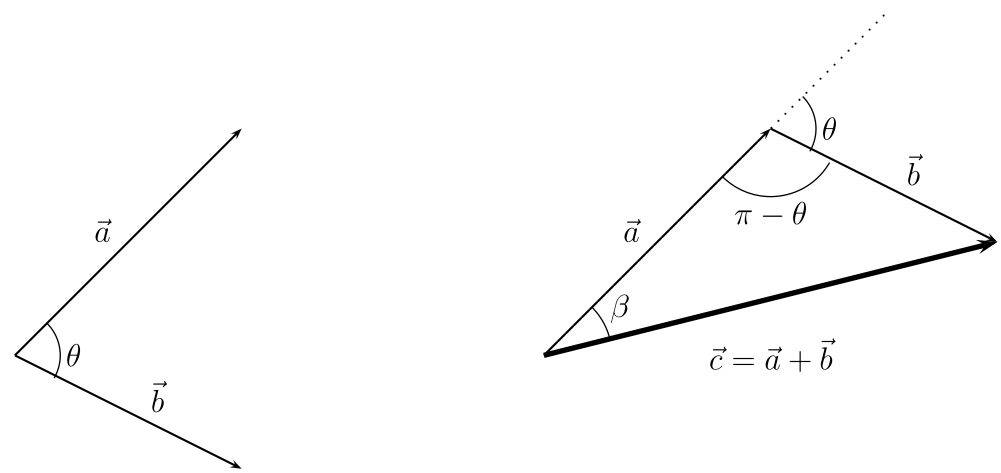
Een eerste manier om een vectorvergelijking op te lossen is grafisch: je maakt een schets van de gegevens en je gebruikt meetkundige eigenschappen om de onbekende te vinden.

Voorbeeld 3.3
De vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ kan grafisch bepaald worden door de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ na elkaar te tekenen en het beginpunt van $\vec{a}$ met het eindpunt van $\vec{b}$ te verbinden. Indien $\|\vec{a}\|$,

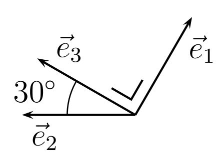
$\|\vec{b}\|$ en de hoek θ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gegeven zijn, kan de grootte en richting van de vector $\vec{c}$ berekend worden via de cosinus- en sinusregel:

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\pi - \theta) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\theta)$$

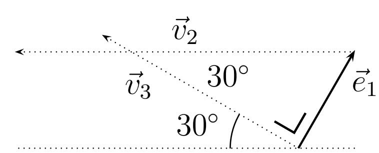
$$\frac{\sin\beta}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sin(\pi - \theta)}{\|\vec{c}\|} = \frac{\sin\theta}{\|\vec{c}\|}$$



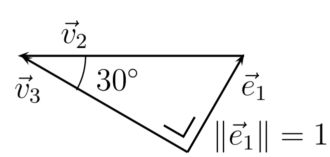
Voorbeeld 3.4
Los volgende vectorvergelijking op naar v_2 en v_3: $\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 = v_3\vec{e}_3$, met $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ de eenheidsvectoren aangeduid op nevenstaande figuur.
oplossing:



- Teken de vector $\vec{v}_2$ zodat het beginpunt aansluit op het eindpunt van $\vec{e}_1$.
- Teken de vector $\vec{v}_3$ zodat het beginpunt samenvalt met het beginpunt van $\vec{e}_1$.



- $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ moeten hetzelfde eindpunt hebben. Dit valt dus samen met de kruising van de 2 dragers.
- De vectoren $\vec{e}_1$, $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ vormen een rechthoekige driehoek met rechthoekszijde $\|\vec{e}_1\| = 1$. In deze rechthoekige driehoek vinden we dat $v_2 = 2$ en $v_3 = \sqrt{3}$.



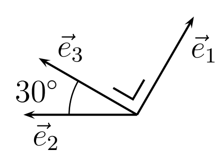
Via de componenten

Een tweede manier om een vectorvergelijking op te lossen is gebruik makend van de eigenschap dat twee vectoren aan elkaar gelijk zijn als elk van hun componenten aan elkaar gelijk zijn. Dit betekent dat een vectorvergelijking in de driedimensionele ruimte equivalent is aan een set van 3 scalaire vergelijkingen.

Voorbeeld 3.5

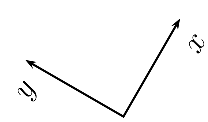
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a_x + b_x & = & c_x \\ a_y + b_y & = & c_y \\ a_z + b_z & = & c_z \end{array} \right.$$

Voorbeeld 3.6
Los volgende vectorvergelijking op naar v_2 en v_3: $\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 = v_3\vec{e}_3$, met $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ de eenheidsvectoren aangeduid op nevenstaande figuur.



oplossing:

- Aangezien $\vec{e}_1$ en $\vec{e}_3$ orthogonaal staan is een natuurlijke keuze voor het assenstelsel $\vec{e}_x \parallel \vec{e}_1$ en $\vec{e}_x \parallel \vec{e}_3$.



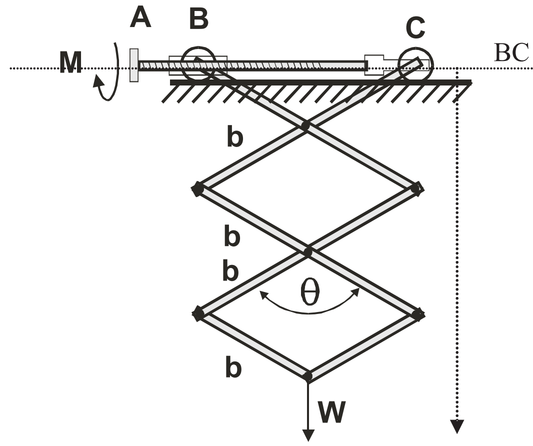
- Aangezien we werken in de tweedimensionele ruimte is de vectorvergelijking equivalent aan een stelsel van twee scalaire vergelijkingen:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1 - v_2 \ \sin 30° & = & 0 \\ v_2 \ \cos 30° & = & v_3 \end{array} \right.$$

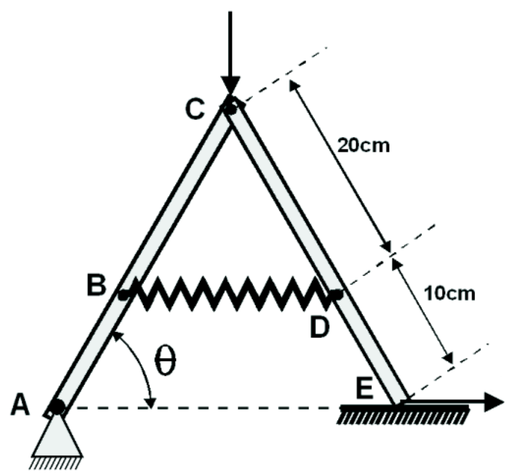
- Oplossen van dit stelsel geeft ons $v_2 = 2$ en $v_3 = \sqrt{3}$. Merk op dat dit dezelfde oplossing is als deze die we verkregen gebruik makend van de grafische methode.

4 Oefeningen

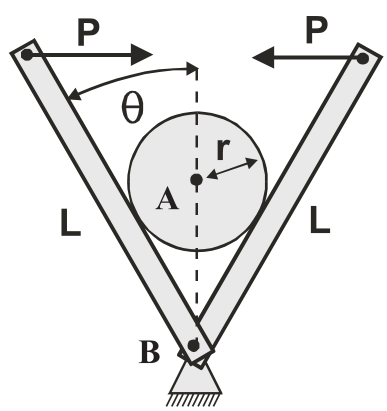
Oefening 4.1
Een meetapparaat met een gewicht W is opgehangen aan het dispositief voorgesteld in de figuur. Het meetapparaat wordt gepositioneerd door de afstand BC te regelen. Bepaal de afstand tussen de staaf BC en het punt W als functie van de hoek θ en lengte b.



Oefening 4.2
Twee staven AC en CE zijn met elkaar verbonden via een veer BD. Druk de lengte van de veer BD, uit in functie van de hoek θ.

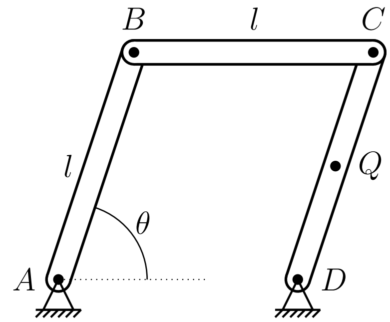


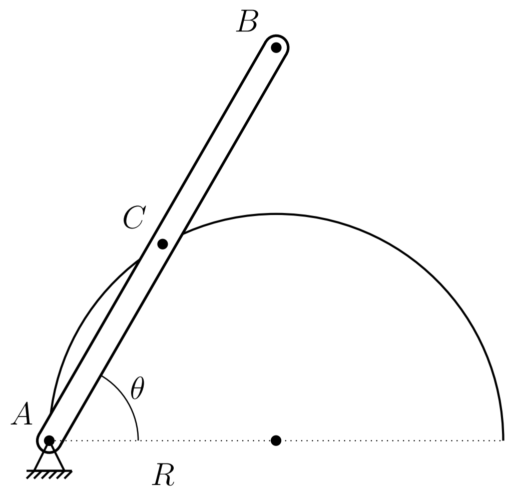
Oefening 4.3
Druk de afstand van A tot B uit in functie van de hoek θ en lengte L als je weet dat de cilinder de staven raakt op 1/3 hoogte.



Oefening 4.4
Bepaal het middelpunt en de straal van de cirkel door de punten (0,0), (0,2) en (10,0).

Oefening 4.5
De staven AB, BC en CD van het voorgestelde stangensysteem hebben een lengte l. De staaf AB is evenwijdig met de staaf CD. Bepaal de verticale afstand tussen de rechte AD en het punt Q als functie van de hoek θ en de lengte van de staven l.





Oefening 4.6
De staaf AB roteert in het vertikaal vlak rond zijn uiteinde A. De puntmassa C glijdt tegelijkertijd over de staaf en de cirkelvormige geleiding met straal R. Bepaal de afstand tussen A en C als functie van R en θ.

Oefening 4.7
Duid op een tekening de vectoren $\vec{a} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ en $\vec{b} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$ aan. Duid ook de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a}$ en $-\vec{b}$ aan.

Oefening 4.8
Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \vec{e_x} + 2\vec{e_y}$, $\vec{b} = -2\vec{e_x} + 3\vec{e_y}$ en $\vec{c} = \vec{e_x} - \vec{e_y}$. Teken deze vectoren. Bereken en construeer de vectoren $\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ en $\vec{t} = -\vec{a} + \dfrac{1}{2}(\vec{b} - 2\vec{c})$.

Oefening 4.9
Bereken de norm van de vector $\vec{a} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y$ en bereken de afstand tussen de vectoren $\vec{a} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y$ en $\vec{b} = -\vec{e}_x + \vec{e}_y$.

Oefening 4.10
Bereken de hoek tussen de vectoren

(a) $\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$ en $2\vec{e}_x - 6\vec{e}_y$

(b) $4e_x$ en e_y

(c) $2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ en $6\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$

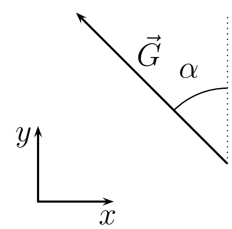
Oefening 4.11
Een vector $\vec{a}$ met lengte 10 maakt een hoek van 225° met de x-as. Bereken de vectorcomponenten volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$.

Oefening 4.12
Wat is de grootte van de vector $\vec{c} = \vec{e}_x - 3\vec{e}_y$ en welke hoek maakt deze vector met de x-as?

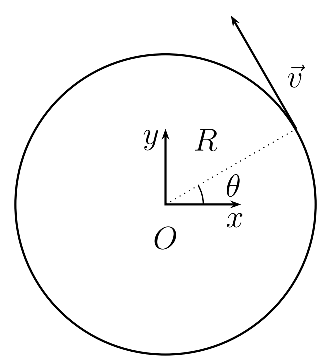
Oefening 4.13
Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = 3\vec{e_x} + 2\vec{e_y}$ en $\vec{b} = 4\vec{e_x} - 3\vec{e_y}$. (a) Bereken de grootte van beide vectoren. Bereken hun (b) scalair product en (c) de hoek tussen beide.

Oefening 4.14
Gegeven zijn de vectoren $\vec{a} = \vec{e_x} - \vec{e_y} + \vec{e_z}$ en $\vec{b} = 3\vec{e_x} + 3\vec{e_y} - 2\vec{e_z}$. Bereken de hoek tussen de vectoren $\vec{a} - \vec{b}$ en $\vec{a} + \vec{b}$.

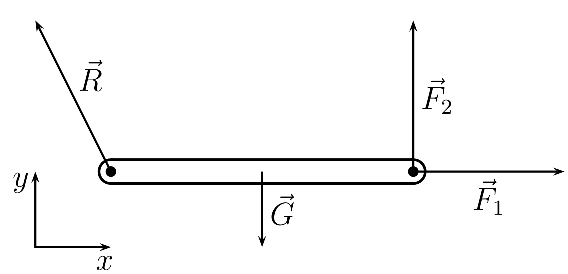
Oefening 4.15
Ontbind de vector $\vec{G}$ uit nevenstaande figuur in zijn componenten volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. Schrijf het resultaat als functie van $G = \|\vec{G}\|$ en de hoek α.



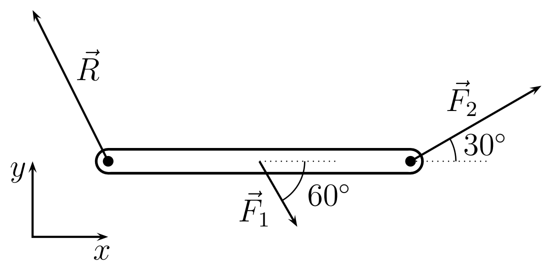
Oefening 4.16
De vector $\vec{v}$ raakt aan de cirkel met middelpunt O en straal R. Ontbind deze vector in zijn componenten volgens $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$. Schrijf het resultaat als functie van $v = \|\vec{v}\|$ en de hoek θ.



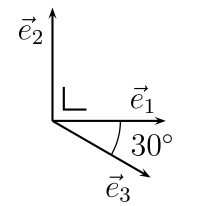
Oefening 4.17
Bereken de vector $\vec{R}$ die voldoet aan de vectorvergelijking
$\vec{R} + \vec{G} + \vec{F_1} + \vec{F_2} = 0$
met $F_1 = F_2 = 2G$ en de richting en zin van $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ en $\vec{F_3}$ zoals aangeduid op de figuur.
Welke hoek maakt deze vector met de x-as?



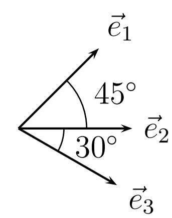
Oefening 4.18
Bereken de vector $\vec{R}$ die voldoet aan de vectorvergelijking
$\vec{R} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$
met $F_1 = 200$ N en $F_2 = 400$ N



Oefening 4.19
Los volgende vectorvergelijking op naar v_2 en v_3: $\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 = v_3\vec{e}_3$, met $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ de eenheidsvectoren aangeduid op nevenstaande figuur.



Oefening 4.20
Los volgende vectorvergelijking op naar v_2 en v_3: $\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 = v_3\vec{e}_3$, met $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ de eenheidsvectoren aangeduid op nevenstaande figuur.



5 Oplossingen

4.1 $5b\cos(\dfrac{\theta}{2})$

4.2 20 cm $\cos\theta$

4.3 $\dfrac{L}{3\cos\theta}$

4.4 (5,1); $\sqrt{26}$

4.5 $\dfrac{l}{2}\sin\theta$

4.6 $2R\cos\theta$

4.7 $\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{e}_x$; $2\vec{a} = 4\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$; $-\vec{b} = -\vec{e}_x + \vec{e}_y$.

4.8 $\vec{s} = 5\vec{e}_x$; $\vec{t} = -3\vec{e}_x + \dfrac{1}{2}\vec{e}_y$.

4.9 $\sqrt{10}$; $\sqrt{8}$

4.10 (a) 143°; (b) 90°; (c) 0°.

4.11 $\vec{a}_x = -7\vec{e}_x$, $\vec{a}_y = -7\vec{e}_y$.

4.12 $c = \sqrt{10}$, $\theta = -72°$ of $\theta = 288°$.

4.13 (a) $a = \sqrt{13}$; $b = 5$; (b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$; (c) $\phi = 70,5°$.

4.14 $\phi = 140°$

4.15 $\vec{G} = -G\sin\alpha\ \vec{e}_x + G\cos\alpha\ \vec{e}_y$

4.16 $\vec{v} = -v\sin\theta\ \vec{e}_x + v\cos\theta\ \vec{e}_y$

4.17 $-2G\vec{e}_x - G\vec{e}_y$; 210°

4.18 $-446\text{N}\ \vec{e}_x - 26\text{N}\ \vec{e}_y$

4.19 $v_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $v_3 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

4.20 $v_2 = -1.9$; $v_3 = -1.4$

Referenties

[1] Georges Van der Perre, Luc Labey, *Toegepaste Mechanica 1, cursustekst K.U.Leuven*, 2006.

[2] R. Silverans, *Algemene natuurkunde, cursustekst K.U.Leuven*, 2007.

[3] Formularium usolvit, *www.usolvit.be/usolvit/formularium*, versie 24/01/2008.

[4] Remediëringspakket K.U.Leuven Faculteit wetenschappen, *Goniometrie*, 2007.

[5] Remediëringspakket K.U.Leuven Faculteit wetenschappen, *Vectoren in* $\mathbb{R}^2$ *en vlakke meetkunde*, 2007.

[6] *Prisma, Vademecum van de wiskunde*, Uitgeverij Het Spectrum B.V., 15de druk, 1998