ZOMERCURSUS WISKUNDE

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN
GROEP WETENSCHAP & TECHNOLOGIE

SEPTEMBER 2008

INTEGRATIETECHNIEKEN: SUBSTITUTIE EN PARTIËLE INTEGRATIE
(versie 26 juni 2008)

Inleiding

In deze module wordt zeer kort de definitie van onbepaalde integralen herhaald evenals het verband tussen bepaalde en onbepaalde integralen. Het is geenszins de bedoeling hier diep op in te gaan.
Wel willen we de basisprincipes van de eenvoudigste integratietechnieken overlopen. We bekijken de splitsing van integralen, de substitutie en de partiële integratie.
Voor een uitgebreide behandeling van de betekenis van onbepaalde en bepaalde integralen en voor andere integratietechnieken verwijzen we naar de handboeken uit het secundair onderwijs.

1 Primitieve functies, bepaalde en onbepaalde integralen

Definitie 1.1 (Primitieve functie)
Zij f een functie met domein I dan is een functie F een *primitieve functie van* f als

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{voor alle } x \in I.$$

Definitie 1.2 (Onbepaalde integraal)
De onbepaalde integraal van f is de verzameling van alle primitieve functies van f, en wordt traditioneel genoteerd als

$$\int f(x)\, dx,$$

of ook (bij gebruik van een andere variabele)

$$\int f(t)\, dt,$$

$f(x)$ (of $f(t)$) wordt de *integrand* genoemd,
x (of t) de *integratievariabele*,
dx (of dt), is een symbool zonder "echte betekenis". Het geeft enkel aan wat de naam is van de gebruikte variabele. (Dit is vooral belangrijk als er ook parameters voorkomen in de integrand.)

Stelling 1.3
Als f een functie is gedefinieerd op een open interval[1] I en
F is één primitieve functie van f,
dan is elke primitieve functie van f van de vorm $F + C$ met $C \in \mathbb{R}$.
Traditioneel noteert men dit als

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

C noemt men de integratieconstante.

[1] I kan zowel een oneindig open interval zijn zoals $\mathbb{R}$, $]-\infty, a[$ of $]a, +\infty[$, als een eindig open interval $]a, b[$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

Het vinden van de primitieven noemt men het "primitiveren" van f, informeel spreekt men ook van "integreren" van f. Zo noemt men functies waarvoor een primitieve functie bestaat "integreerbaar".
Vermits primitiveren het inverse is van afleiden, is het niet verwonderlijk dat de belangrijke rekenregels voor de afgeleide (somregel, productregel, kettingregel...) hun "vertaling" zullen hebben voor het primitiveren. In volgende paragrafen gaan we hier verder op in.

Opmerking 1.4
Men kan aantonen dat vorige stelling 1.3 niet geldt als het domein geen open interval is (zoals bijvoorbeeld $\mathbb{R}_0$). Voortaan zullen we voor elke functie die we integreren telkens veronderstellen dat ze een open interval als domein heeft zonder dit telkens expliciet te vermelden.

Voorbeelden 1.5

1. $\displaystyle\int x\ dx = \frac{x^2}{2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$
2. $\displaystyle\int \cos x\ dx = \sin x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Bgsin}\, x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

Stelling 1.6 (Verband tussen bepaalde en onbepaalde integralen)
Stel f een functie gedefinieerd op een open interval I en $[a,b] \subseteq I$ en F een primitieve functie van f zodat

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

dan is

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\ dx &= F(b) - F(a) \\ &= [F(x)]_a^b \qquad \textit{eerste notatie} \\ &= F(x)\big|_a^b \qquad \textit{tweede notatie.} \end{aligned}$$

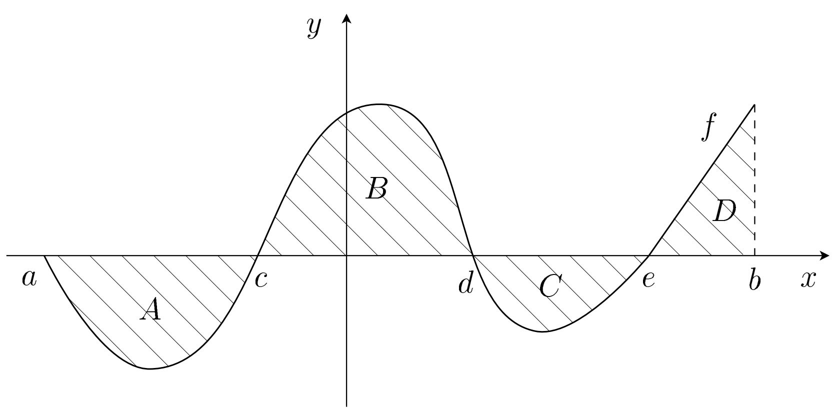
Opmerking 1.7
Men kan aantonen dat continue functies steeds een primitieve zullen hebben. Maar men kan ook aantonen dat er geen algoritme bestaat om expliciet die primitieve te vinden. In sommige gevallen kan men ook aantonen dat de primitieven niet expliciet kunnen uitgedrukt worden met behulp van de bewerkingen en samenstelling van functies in termen van de *elementaire* functies (dit zijn veeltermfuncties, worteltrekkingen,

goniometrische en cyclometrische functies, exponentiële en logaritmische functies). Een typisch voorbeeld hiervan is de functie f met voorschrift $f(x) = e^{-x^2}$. Deze functie is continu en heeft dus een primitieve. Niettegenstaande het *onschuldig* voorschrift van deze functie, is een primitieve ervan niet expliciet neer te schrijven met een eindige combinatie van elementaire functies.

Voor de volledigheid geven we ook de meetkundige betekenis van een bepaalde integraal.

Stelling 1.8
Stel f een functie die continu is in een interval $[a, b]$ dan is $\int_a^b f(x)\, dx$ de **georiënteerde oppervlakte** *van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de vertikale rechten $x = a$ en $x = b$.*
De georiënteerde oppervlakte telt de oppervlakte van een gebied dat boven de x-as ligt, positief en telt de oppervlakte van een gebied dat onder de x-as ligt, negatief.

Dit wordt duidelijk in volgende figuur.



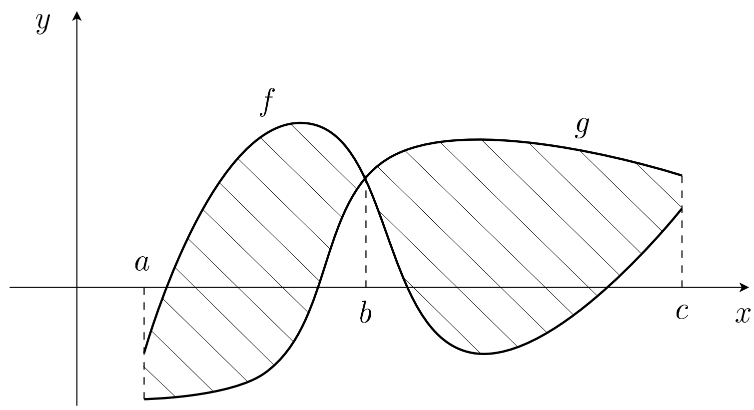
$$\int_a^b f(x)\, dx = -\operatorname{opp} A + \operatorname{opp} B - \operatorname{opp} C + \operatorname{opp} D.$$

Bijgevolg geldt ook:

$$\operatorname{opp} A + \operatorname{opp} B + \operatorname{opp} C + \operatorname{opp} D = -\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^d f(x)\, dx - \int_d^e f(x)\, dx + \int_e^b f(x)\, dx.$$

Om **de oppervlakte tussen twee krommen** te berekenen kan men het volgende aantonen.

Stel f en g twee functies die continu zijn in een interval $[a, c]$ met grafieken zoals gegeven in volgende figuur.



De gearceerde oppervlakte tussen de twee grafieken van f en g wordt gegeven door

$$\int_a^c |f(x) - g(x)|\, dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx + \int_b^c (g(x) - f(x))\, dx$$

De oppervlakte is dus de som van de integralen tussen twee opeenvolgende snijpunten met als integrand het voorschrift van de **bovenliggende kromme** min die van de **onderliggende kromme**, ongeacht of die krommen boven of onder de x-as liggen.

2 Integratietechnieken: Basisintegralen en integratie door splitsing

De tabel van de afgeleiden van de elementaire functies (zie pakket afgeleiden) levert ons een aantal basisintegralen. We zullen vaak ingewikkelder functies kunnen integreren door ze met speciale technieken te herleiden naar een of meerdere van deze basisintegralen.

Rekenregels 2.1 (Basisintegralen)

$\int dx = x + C$
$\int x^r \, dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C, \qquad r \in \mathbb{R}, r \neq -1$
$\int \dfrac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + C$
$\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{Bgsin} x + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\operatorname{Bgcos} x + C$
$\int \dfrac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{Bgtan} x + C$

De afgeleide van het veelvoud van een functie is het veelvoud van de de afgeleide van die functie.
De afgeleide van de som van twee functies is de som van de afgeleide van beide functies. Voor integralen vertaalt dit zich dan in volgende stelling:

Stelling 2.2 (Integratie door splitsing)
Stel dat f en g twee integreerbare functies zijn, $a, b \in \mathbb{R}$, dan is

$$\int (af(x) + bg(x)) \, dx = a \int f(x) \, dx + b \int g(x) \, dx.$$

Deze stelling geldt ook voor bepaalde integralen. Dankzij deze stelling en de basisintegralen kunnen we al heel wat functies integreren.

Voorbeelden 2.3

1. $$\begin{aligned} \int (\sqrt{x} + 3x^2 - 5) \, dx &= \int x^{1/2} \, dx + 3 \int x^2 \, dx - 5 \int dx \\ &= \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + \frac{3x^3}{3} - 5x + C \\ &= \frac{2x^{3/2}}{3} + x^3 - 5x + C \\ &= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + x^3 - 5x + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\int (2^{\,x} + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}})\ dx &= \int 2^{\,x}\ dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{2^{\,x}}{\ln 2} + 4\ \mathrm{Bgsin}\, x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

3 Integratietechnieken: Substitutie

De kettingregel voor de afgeleide van samengestelde functies geeft aanleiding tot volgende stelling voor integralen.

Stelling 3.1 (Substitutieregel)
Stel f een functie met primitieve F zodat

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

en g een afleidbare functie, dan is

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = F(g(x)) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 3.2

$$\int e^{x^2}\ 2x\ dx$$

Hier kunnen de functies f en g als volgt gedefinieerd worden $f(y) = e^y$ en $g(x) = x^2$ zodat $f(g(x)) = f(x^2) = e^{x^2}$. Een primitieve van f is de functie F met $F(y) = e^y$ want $F'(y) = e^y = f(y)$.
Dus is

$$\int e^{x^2}\ 2x\ dx = \int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x)) + C = e^{x^2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Om deze stelling vlotter hanteerbaar te maken zullen we de substitutieregel als volgt neerschrijven

Stellen we $g(x) = t$ en $g'(x)dx = dt$, de substitutieregel wordt dan

Stelling 3.3 (Substitutieregel: *eerste formele schrijfwijze*)
Stel f een functie met primitieve F zodat

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

en g een afleidbare functie, dan is met $g(x) = t$ en $g'(x)\,dx = dt$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(g(x)) + C \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Voorbeelden 3.4

1. $\displaystyle\int e^{x^2}\, 2x\,dx$

   Oplossing
   Stel $x^2 = t$, zodat $2x\,dx = dt$ dan is

   $$\int e^{x^2}\, 2x\,dx = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{x^2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2. $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

   Oplossing
   Stel $\cos x = t$, zodat $-\sin x\,dx = dt$ of nog $\sin x\,dx = -dt$ dan is

   $$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

3. $\displaystyle\int \frac{4}{2x-3}\,dx$

   Oplossing
   Stel $2x - 3 = t$, zodat $2\,dx = dt$ dan is

   $$\int \frac{4}{2x-3}\,dx = 2\int \frac{2\,dx}{2x-3} = 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln|t| + C = 2\ln|2x-3| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Deze schrijfwijze is wel handig maar wel wat formeel. We hebben immers vroeger reeds opgemerkt dat uitdrukkingen als "dx" en "dt" afzonderlijk geen betekenis hebben. De bovenbeschreven schrijfwijze is dus niets meer is dan een handigheidje om wat schrijfwerk te besparen bij de substitutieregel .

Een andere, nog kortere maar nog formelere manier om de substitutieregel op te schrijven is

Stelling 3.5 (Substitutieregel: *tweede formele schrijfwijze***)**
Stel f een functie met primitieve F zodat

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

en g een afleidbare functie, dan is met $g'(x)\,dx = dg(x)$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(g(x))dg(x) = F(g(x)) + C \qquad C \in \mathbb{R}.$$

We hernemen vorige drie voorbeelden met deze schrijfwijze.

Voorbeelden 3.6

1. $\displaystyle\int e^{x^2}\,2x\,dx = \int e^{x^2}\underbrace{2x\,dx}_{dx^2} = \int e^{x^2}\,dx^2 = e^{x^2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

2. $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\int \frac{\overbrace{-\sin x\,dx}^{d\cos x}}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

3. $\displaystyle\int \frac{4}{2x-3}\,dx = 2\int \frac{\overbrace{2\,dx}^{d(2x-3)}}{2x-3} = 2\int \frac{d(2x-3)}{2x-3} = 2\ln|2x-3| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

De "substitutie door de letter t"wordt niet meer expliciet uitgevoerd maar gebeurt hier eerder "mentaal".

Het voordeel van de tweede formele schrijfwijze is nog duidelijker als we de substitutieregel opschrijven voor bepaalde integralen. We bekijken eerst de eerste formele schrijfwijze.

Stelling 3.7 (Substitutieregel bepaalde integralen, *eerste formele schrijfwijze***)**
Stel f een functie gedefinieerd op een open interval I en $[a,b] \subseteq I$ en met primitieve F zodat

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

en g een afleidbare functie,waarvoor $g(a) = c$ en $g(b) = d$,
dan is met $g(x) = t$ en $g'(x)\ dx = dt$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int_c^d f(t)\ dt = [F(t)]_c^d = F(d) - F(d).$$

Let op: door de substitutie moeten we hier **de grenzen aanpassen**!

Voorbeelden 3.8

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} e^{x^2}\ x\ dx$

   Oplossing
   Stel $x^2 = t$, zodat $2x\ dx = dt$,of nog $x\ dx = \dfrac{dt}{2}$.
   Als $x = -1$, dan is $t = 1$,
   als $x = 2$, dan is $t = 4$, zodat

   $$\int_{-1}^{2} e^{x^2}\ x\ dx = \int_1^4 e^t\ \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}[\ e^t]_1^4 = \frac{1}{2}(\ e^4 - e).$$

2. $\displaystyle\int_{-7}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}\ dx$

   Oplossing
   Stel $1 - x = t$, zodat $-\ dx = dt$, of nog $dx = -dt$.
   Als $x = -7$, dan is $t = 8$,
   als $x = 0$, dan is $t = 1$, zodat

   $$\begin{aligned}\int_{-7}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}\ dx &= -\int_8^1 t^{-2/3}\ dt = -\left[3t^{1/3}\right]_8^1 = -3\left[\sqrt[3]{t}\right]_8^1 = -3\left(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{8}\right) \\ &= -3(1-2) = 3.\end{aligned}$$

Stelling 3.9 (Substitutieregel bepaalde integralen, *tweede formele schrijfwijze***)**
Stel f een functie gedefinieerd op een open interval I en $[a,b] \subseteq I$ en met primitieve F zodat

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

en g een afleidbare functie,

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int_a^b f(g(x))\, dg(x) = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Hier moeten de grenzen niet aangepast worden omdat de primitieve functie $F(g(x))$ toch in functie van x uitgedrukt is.

Voorbeelden 3.10

1. $\displaystyle\int_{-1}^2 e^{x^2}\, x\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^2 e^{x^2} 2x\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^2 e^{x^2}\, dx^2 = \frac{1}{2}\,[e^{x^2}]_{-1}^2 = \frac{1}{2}\,(e^4 - e).$

2. $$\begin{aligned}\int_{-7}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}\, dx &= -\int_{-7}^0 (1-x)^{-2/3}\, d(1-x) = -\left[3(1-x)^{1/3}\right]_{-7}^0 \\ &= -3\left[\sqrt[3]{1-x}\,\right]_{-7}^0 = -3(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{8}) = -3(1-2) = 3.\end{aligned}$$

Wanneer en welke substitutie moet uitgevoerd worden is niet altijd even duidelijk. Hier geldt de regel "oefening baart kunst." We geven toch enkele tips.

Toepassingen 3.11

1. Veelal dringt de substitutie zich op omdat in de integrand een functie $g(x)$ in het oog springt samen met de onontbeerlijke uitdrukking $g'(x)\, dx$ zonder dewelke de substitutie niet tot een goed einde kan gebracht worden. Een duidelijk voorbeeld hiervan is

$$\int \frac{3\tan 2x}{5\cos^2 2x}\, dx = \frac{3}{10}\int \underbrace{\tan 2x}_{g(x)} \underbrace{\frac{2}{\cos^2 2x}\, dx}_{g'(x)\, dx}$$

Stel $\tan 2x = t$, zodat $\dfrac{1}{\cos^2 2x} 2\, dx = dt$ of nog $\dfrac{1}{\cos^2 2x}\, dx = \dfrac{dt}{2}$ zodat

$$\int \frac{3\tan 2x}{5\cos^2 2x}\, dx = \frac{3}{10}\int t\, dt = \frac{3}{10}\,\frac{t^2}{2} + C = \frac{3}{20}\tan^2 2x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2. Als in de integrand een wortel voorkomt helpt het soms om wat onder de wortel staat als nieuwe veranderlijke te nemen zoals in

$$\int (x^2+2)\sqrt{x-2}\,dx$$

Oplossing
Stel $x-2=t$, zodat $dx=dt$ zodat ook $x^2+2=(t+2)^2+2=t^2+4t+6$ dit geeft

$$\begin{aligned}\int (x^2+2)\sqrt{x-2}\,dx &= \int (t^2+4t+6)t^{1/2}\,dt = \int t^{5/2}+4t^{3/2}+6t^{1/2}\,dt\\ &= \frac{2}{7}\,t^{7/2}+\frac{8}{5}\,t^{5/2}+4t^{3/2}+C\\ &= \frac{2}{7}\,\sqrt{(x-2)^7}+\frac{8}{5}\,\sqrt{(x-2)^5}+4\,\sqrt{(x-2)^3}+C,\end{aligned}$$

met $C\in\mathbb{R}$.

3. In de vorige voorbeelden hebben we telkens (volgens de eerste formele schrijfwijze) t gelijkgesteld aan een functie van x die in de integrand voorkwam. We kunnen ook x gelijk stellen aan een functie van t. Zo komt in volgende integraal $(1-x^2)$ voor, als we $x=\sin t$ stellen kunnen we de grondformule van de goniometrie gebruiken waardoor de integraal eenvoudiger wordt. Paragraaf 3.12.6 geeft in een tabel een overzicht van dit soort substituties.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Oplossing
Stel $x=\sin t$ en $dx=\cos t\,dt$ dan is

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt\\ &= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2}+\frac{1}{4}\int \cos 2t\,d2t\\ &= \frac{t}{2}+\frac{1}{4}\,\sin 2t+C = \frac{t}{2}+\frac{1}{4}\,2\sin t\cos t+C\\ &= \frac{t}{2}+\frac{1}{2}\,\sin t\,\sqrt{1-\sin^2 t}+C\\ &= \frac{\operatorname{Bgsin} x}{2}+\frac{1}{2}\,x\,\sqrt{1-x^2}+C, \qquad C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

We maakten hier gebruik van formules uit de goniometrie.

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} \qquad , \qquad \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \qquad \text{en} \qquad \sin 2t = 2\sin t \cos t.$$

We veronderstelden dat de cosinus positief is in het beschouwde domein.

We behandelen nu enkele veel gebruikte substituties.

Bijzondere gevallen 3.12

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ is door substitutie te herleiden tot de basisintegraal

$\displaystyle\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Bgtan} t + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

Oplossing

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2(1+(\frac{x}{a})^2)} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{a(1+(\frac{x}{a})^2)} = \frac{1}{a}\operatorname{Bgtan}\frac{x}{a} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{p\,x^2+q\,x+r}$ waarbij de discriminant van de noemer $q^2 - 4p\,r < 0$,

is door substitutie te herleiden tot de basisintegraal

$\displaystyle\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{Bgtan} t + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

Reduceer de vorm $p\,x^2+q\,x+r$ *met* $q^2-4p\,r<0$ *tot* $a(t^2+1)$.
We illustreren dit met een voorbeeld.

$\displaystyle\int \frac{dx}{4x-x^2-8}$, *de discriminant van de noemer is* $16-4\cdot(-1)\cdot(-8) = -16 < 0$.

Oplossing

$4x - x^2 - 8 = -(x^2-4x+8) = -(x^2-4x+4+4) = -[(x-2)^2+4] = -4[\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^2 + 1]$

Stel $t = \dfrac{x-2}{2}$, zodat $dt = \dfrac{dx}{2}$, dan is

$$\int \frac{dx}{4x-x^2-8} = -\frac{1}{4}\int \frac{2\,dt}{t^2+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{2}\operatorname{Bgtan}\frac{x-2}{2} + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (kies $a > 0$) is door substitutie te herleiden tot de basisintegraal $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{Bgsin}\, t + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

Oplossing

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \text{Bgsin}\,\frac{x}{a} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{p\,x^2 + q\,x + r}}$ waarbij de discriminant $q^2 - 4p\,r > 0$ en $p < 0$, is door substitutie te herleiden tot de basisintegraal

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{Bgsin}\, t + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Reduceer de vorm $p\,x^2 + q\,x + r$ met $q^2 - 4p\,r > 0$ en $p < 0$ tot $a(1-t^2)$. We illustreren dit met een voorbeeld.

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 5}}$, *de discriminant is* $36 - 4\cdot(-1)\cdot(-5) = 16 > 0$ *en* $p = -1 < 0$.

Oplossing

$$\begin{aligned} 6x - x^2 - 5 &= -(x^2 - 6x + 5) = -(x^2 - 6x + 9 - 4) \\ &= -[(x-3)^2 - 4] = 4 - (x-3)^2 = 4[1 - (\frac{x-3}{2})^2] \end{aligned}$$

Stel $t = \dfrac{x-3}{2}$ en $dt = \dfrac{dx}{2}$, dan is

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 5}} = \int \frac{2dt}{\sqrt{4(1-t^2)}} = \frac{2}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{Bgsin}\,\frac{x-3}{2} + C,$$

met $C \in \mathbb{R}$.

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$ is door de substitutie $t = x + \sqrt{x^2 + a}$

te herleiden tot de basisintegraal

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Oplossing

Stel $t = x + \sqrt{x^2+a}$, zodat $dt = (1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}})\, dx$

of nog $\dfrac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}\, dx = dt$

en dus $\dfrac{t}{\sqrt{x^2+a}}\, dx = dt$ zodat $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \dfrac{dt}{t}$.

Dit geeft $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|\, t| + C = \ln|\, x + \sqrt{x^2+a}| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

Voor de volledigheid, maar louter ter informatie geven we hier een lijst van goniometrische substituties die algemeen kunnen werken wanneer de integrand een rationale functie is waarin x en een wortelvorm $\sqrt{p\,x^2 + q\,x + r}$ voorkomen. Deze substituties geven dus niet noodzakelijk de snelste oplossingsmethode. Hierboven hebben we enkele andere substituties voorgesteld maar die dan enkel werken voor zeer specifieke vormen van de integrand.

6. In integralen waarvan de integrand een rationale functie is waarin x en een wortelvorm $\sqrt{p\,x^2 + q\,x + r}$ voorkomen volgen we volgende werkwijze.

   (a) Reduceer de wortelvorm $\sqrt{p\,x^2 + q\,x + r}$ tot

   $\sqrt{a^2 - t^2}$ als $p < 0$ en $q^2 - 4p\,r > 0$

   $\sqrt{t^2 - a^2}$ als $p > 0$ en $q^2 - 4p\,r > 0$

   $\sqrt{t^2 + a^2}$ als $q^2 - 4p\,r < 0$ (dan moet $p > 0$)

   (b) Doe de gepaste substitutie

wortelvorm	substitutie
$\sqrt{a^2 - t^2}$	$t = a \sin\theta$
$\sqrt{t^2 - a^2}$	$t = \dfrac{a}{\sin\theta}$
$\sqrt{t^2 + a^2}$	$t = a \tan\theta$

   In alle gevallen vinden we na substitutie een rationale integrand in $\cos\theta$ en $\sin\theta$.

We gaan hier in dit remediëringspakket niet dieper op in en geven daarom ook geen voorbeelden ter illustratie.

$\hookrightarrow$ *Maak nu oefening 1 van paragraaf 5.*

4 Integratietechnieken: Partiële integratie (P.I.)

We weten al dat de integraal van de som van functies de som van de integralen is, helaas geldt dit niet voor het product. Hoe lossen we een integraal van de vorm $\int f(x)g(x)\,dx$ op als substitutie niet werkt?
De productregel voor afgeleiden levert een stelling voor integralen.

Stelling 4.1 (Partiële integratie)
Zij u, v afleidbare functies, dan is

$$\int u(x)v'(x)\,dx \stackrel{P.I.}{=} u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Het tweede lid bestaat uit twee termen waarvan enkel de eerste geen integraal meer bevat, men spreekt van “gedeeltelijke” of “partiële” integratie.

Voorbeelden 4.2

1. $\displaystyle\int xe^x\,dx$

   Oplossing
   Stel $u(x) = x$ zodat $u'(x) = 1$ en stel $v'(x) = e^x$, dan kunnen we $v(x) = e^x$ nemen. (Eigenlijk kan ook $v(x) = e^x + C$ met $C \in \mathbb{R}$, maar vermits we slechts één primitieve nodig hebben zullen we steeds $C = 0$ kiezen).

   Partiële integratie geeft dan

   $$\int xe^x\,dx \stackrel{P.I.}{=} xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2. $\displaystyle\int 9x^2 \ln x\,dx$

   Oplossing
   Stel $u(x) = \ln x$ zodat $u'(x) = 1/x$ en stel $v'(x) = 9x^2$, dan kunnen we $v(x) = 3x^3$ nemen. Partiële integratie geeft dan

   $$\int 9x^2 \ln x\,dx \stackrel{P.I.}{=} 3x^3 \ln x - \int \frac{3x^3}{x}\,dx = 3x^3 \ln x - x^3 + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Opmerking 4.3
Stel dat we in het eerste voorbeeld $\int xe^x\, dx$ een andere keuze hadden gemaakt voor u en v.

Stel bijvoorbeeld $u(x) = e^x$, zodat $u'(x) = e^x$ en stel $v'(x) = x$, zodat $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$. Dan geeft partiële integratie

$$\int xe^x\, dx \overset{P.I.}{=} e^x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 e^x\, dx.$$

In de tweede integraal is de macht van x verhoogd van 1 naar 2 i.p.v. x in de eerste integraal bekomen we een x^2 in de tweede integraal. Zo wordt de nieuwe integraal dus ingewikkelder dan de oorspronkelijke. Het is dus belangrijk een goede keuze te maken voor u en v.

Ook voor partiële integratie betaat een formele, kortere manier van noteren.

Stelling 4.4 (Partiële integratie, *formele notatie***)**
Zij u, v afleidbare functies, dan is

$$\int u(x)\, dv(x) \overset{P.I.}{=} u(x)v(x) - \int v(x)\, du(x)$$

of nog korter en nog formeler

$$\int u\, dv \overset{P.I.}{=} u\, v - \int v\, du.$$

Voorbeelden 4.5

1. $$\begin{aligned} \int x \sin x\, dx &= \int \underbrace{x}_{u}\, d\underbrace{(-\cos x)}_{dv} \\ &\overset{P.I.}{=} \underbrace{x\,(-\cos x)}_{u\,v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{v}\, \underbrace{dx}_{du} \\ &= -x\cos x + \int \cos x\, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \int x e^{2x}\, dx &= \frac{1}{2}\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{de^{2x}}_{dv} \\ &\overset{P.I.}{=} \frac{1}{2}(\underbrace{x e^{2x}}_{u\ v} - \int \underbrace{e^{2x}}_{v}\, \underbrace{dx}_{du}) \\ &= \frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x}\, d2x \\ &= \frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Om de laatste integraal uit te rekenen werd een substitutie toegepast.

Toepassingen 4.6

1. Partiële integratie wordt gebruikt als de integrand geen onmiddellijke integratie toelaat, zoals in volgend voorbeeld.

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\ln x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} &\overset{P.I.}{=} \underbrace{x \ln x}_{v\ u} - \int \underbrace{x}_{v}\, \underbrace{d\ln x}_{du} = x\ln x - \int \frac{x}{x}\, dx \\ &= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Partiële integratie wordt gebruikt voor integratie van een product van twee functies, op voorwaarde dat de nieuwe integraal eenvoudiger wordt (bv. een macht doen dalen). Eventueel moet men herhaalde malen partieel integreren.

$$\begin{aligned} \int (2x^2 - 4x)e^{2x}\, dx &\overset{P.I.}{=} \int (x^2 - 2x)\, de^{2x} \\ &= (x^2 - 2x)e^{2x} - \int e^{2x}(2x - 2)\, dx \\ &= (x^2 - 2x)\, e^{2x} - \int (x - 1)\, de^{2x} \\ &\overset{P.I.}{=} (x^2 - 2x)\, e^{2x} - \left[(x - 1)\, e^{2x} - \int e^{2x}\, dx\right] \\ &= (x^2 - 2x)\, e^{2x} - (x - 1)\, e^{2x} + \frac{1}{2}\, e^{2x} + C \\ &= (x^2 - 2x - x + 1 + \frac{1}{2})\, e^{2x} + C \\ &= (x^2 - 3x + \frac{3}{2})\, e^{2x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Soms krijgt men na (herhaald) partieel integreren opnieuw de gevraagde integraal terug. In zo'n geval past men volgende techniek toe.

$$
\begin{aligned}
I = \int \sin x\, e^x\, dx &= -\textstyle\int e^x\, d\cos x \\
&\overset{P.I.}{=} -e^x \cos x + \int \cos x de^x \\
&= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx \\
&= -e^x \cos x + \int e^x\, d\sin x \\
&\overset{P.I.}{=} -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x\, de^x \\
&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \underbrace{\int \sin x\, e^x\, dx}_{I}
\end{aligned}
$$

Brengt men de term I naar het eerste lid, dan bekomt men

$$2\, I = e^x\, (\sin x - \cos x) + D, \qquad D \in \mathbb{R}$$

Dus

$$I = \frac{1}{2}\, e^x\, (\sin x - \cos x) + C, \qquad C \in \mathbb{R},\ (\text{men stelt } C = D/2).$$

Opmerking 4.7
Het is misschien goed even op te merken dat, als er bij het oplossen van integralen een oplossingsmethode is, deze niet noodzakelijk *uniek* is. Zo kan men vele integralen op verschillende manieren oplossen. We illustreren dit hier door voorbeeld 3 uit toepassing 3.11 die daar met een substitutie werd opgelost, nu op te lossen met partiële integratie.

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\, dx &\overset{P.I.}{=} x\,\sqrt{1-x^2} - \int x \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= x\,\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= x\,\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad \textit{in teller 1 optellen en aftrekken} \\
&= x\,\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \textit{splitsing} \\
&= x\,\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\, dx + \operatorname{Bgsin} x + D, \qquad \text{met } D \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

In het tweede lid verschijnt opnieuw de gevraagde integraal, brengen we deze naar het eerste lid, dan krijgen we

$$2 \int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\,\sqrt{1-x^2} + \operatorname{Bgsin} x + D, \qquad \text{met } D \in \mathbb{R}.$$

Zodat

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Bgsin}\,x + C, \qquad \text{met } C \in \mathbb{R} \qquad (C = D/2).$$

Stelling 4.8 (Partiële integratie voor bepaalde integralen, *formele notatie***)**
Stel u, v functies gedefinieerd op een open interval I en $[a,b] \subseteq I$,
dan is

$$\int_a^b u(x)\;dv(x) \;\overset{P.I.}{=}\; [\;u(x)v(x)\;]_a^b - \int_a^b v(x)\;du(x)$$

of nog korter en nog formeler

$$\int_a^b u\;dv \;\overset{P.I.}{=}\; [\;u\;v\;]_a^b - \int_a^b v\;du.$$

Voorbeeld 4.9

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x\;x\;dx &= \int_1^e \ln x\;d\frac{x^2}{2} \\
&\overset{P.I.}{=} \left[\ln x\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\;dx \\
&= \left[\ln x\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\;dx \\
&= \left[\ln x\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e \\
&= \ln e\frac{e^2}{2} - \ln 1\frac{1}{2} - (\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}) \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

5 Oefeningen

1. Bereken volgende primitieven via een geschikte substitutie.

   (a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int \cos 2x \sin^3 2x\,dx$

   (c) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+2x^2+2}$

   (d) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{4t-t^2-3}}$

   (e) $\displaystyle\int (3x+5)\sqrt{3x+4}\,dx$

   (f) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}}\,dt$

   (g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$

   (h) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{2-\cos x}\,dx$

2. Bereken volgende primitieven via partiële integratie.

   (a) $\displaystyle\int \mathrm{Bgtan}\,x\,dx$

   (b) $\displaystyle\int (3x+x^2)e^x\,dx$

   (c) $\displaystyle\int \ln\sqrt{x}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int \mathrm{Bgsin}\,\theta\,d\theta$

   (e) $\displaystyle\int e^x \cos 3x\,dx$

   (f) $\displaystyle\int \frac{\ln t}{t^2}\,dt$

3. Bereken volgende primitieven.

(a) $\displaystyle\int \frac{4}{x^2-4x+4}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+7}$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{3x+3}{x^2+2x+1}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{2x^2+3}{2x^2+1}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\ln x\;dx}{x\ln x - x}$

(g) $\displaystyle\int \frac{e^x\;dx}{1+e^{2x}}$

(h) $\displaystyle\int x\,\mathrm{Bgtan}\,x\;dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{5^{2x}}\,dx$

(j) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx$

(k) $\displaystyle\int e^{-x}\cos 3x\;dx$

(l) $\displaystyle\int (\ln x)^3\;dx$

(m) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\;dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

(o) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$

(p) $\displaystyle\int x(1+x)^{3/2}\,dx$

(q) $\displaystyle\int \frac{e^x}{5(e^x-1)}\,dx$

(r) $\displaystyle\int \frac{3x}{(x^2-1)^{3/2}}\,dx$

(s) $\displaystyle\int e^{-2t}\sin t\;dt$

4. Bereken volgende integralen.

(a) $\displaystyle\int_1^e \ln x\;dx$

(b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos\theta\;d\theta$

(d) $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(4+x^2)^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

5. Bereken volgende primitieven.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^{3/2}}$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{(5-4x-x^2)^{3/2}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x-8}}$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+10}}\, dx$

6 Oplossingen

1. Oplossingen oefening 1.

(a) $\dfrac{1}{2}\ \ln(x^2+4)+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(b) $\dfrac{1}{8}\ \sin^4 2x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(c) $\dfrac{1}{2}\, \mathrm{Bgtan}\,(x^2+1)+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(d) $\mathrm{Bgsin}\,(t-2)+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(e) $\dfrac{2}{15}\ \sqrt{(3x+4)^5}+\dfrac{2}{9}\ \sqrt{(3x+4)^3}+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(f) $\ln|\, t+\sqrt{t^2+3}\,|+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(g) $\dfrac{1}{2}\ \mathrm{Bgtan}\, \dfrac{x-1}{2}+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(h) $\cos x+\ln(2-\cos x)^2+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

2. Oplossingen oefening 2.

(a) $x\ \mathrm{Bgtan}\, x+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(b) $(x^2+x-1)\ e^x+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(c) $x\ \ln\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\ x+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(d) $\theta\ \mathrm{Bgsin}\,\theta+\sqrt{1-\theta^2}+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(e) $\dfrac{e^x}{10}\ (\cos 3x+3\sin 3x)+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(f) $-\dfrac{\ln t}{t}-\dfrac{1}{t}+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

3. Oplossingen oefening 3.

(a) $\dfrac{-4}{x-2}+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Bgtan}\, \dfrac{x-2}{\sqrt{3}}+C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(c) $x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(d) $3\ln|x+1| + C, \qquad C \in \mathbb{R}$

(e) $x + \sqrt{2}\mathrm{Bgtan}\,(\sqrt{2}x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(f) $\ln|x\ln x - x| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(g) $\mathrm{Bgtan}\,(e^x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$

(h) $\frac{1}{2}x^2\mathrm{Bgtan}\,x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\mathrm{Bgtan}\,x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(i) $-\frac{1}{2}\ \ln 5\ 5^{2x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(j) $\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(k) $-\frac{1}{10}e^{-x}\cos 3x + \frac{3}{10}e^{-x}\sin 3x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(l) $x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(m) $\frac{1}{2}x\sin(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(n) $\mathrm{Bgtan}\,(e^x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(o) $-\ln(1+\cos x) + C = \ln(1+\tan^2\frac{x}{2}) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(p) $2\sqrt{(1+x)^5}\left(\frac{1+x}{7} - \frac{1}{5}\right) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(q) $\frac{1}{5}\ln|e^x - 1| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(r) $-\frac{3}{\sqrt{x^2-1}} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(s) $-\frac{1}{5}e^{-2t}(2\sin t + \cos t) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

4. Oplossingen oefening 4.

(a) $\int_1^e \ln x\, dx = 1.$

(b) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 4 - \ln 9.$

(c) $\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos x\, d\theta = 1/3.$

(d) $\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$

(e) $\int_0^1 \frac{x}{(4+x^2)^2}\, dx = \frac{1}{40}$

(f) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{6\sqrt{3}+2}{3}$

5. Oplossingen oefening 5.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^{3/2}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{(5-4x-x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}} - \frac{2}{9}\frac{x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-2x-8}} = \frac{1}{9(x-1)}\sqrt{x^2-2x-8} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$

(d) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-6x+10}} = \sqrt{x^2-6x+10} + 3\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+10}\right| + C, \; C \in \mathbb{R}.$