Leerlingen van nu weten niet meer wat echte algebra is. Zelfs een MULO A-opgave uit de jaren dertig van de vorige eeuw zou wel eens te machtig kunnen zijn voor de huidige VWO B-ers. Een summiere terugblik op een eeuw algebra door **Martin Kindt**.

5 maal 20 jaar algebra

Tussen 1900 en 1920

Bij de eindexamens algebra HBS tot en met het jaar 1916 was er steeds sprake van drie opgaven, waarvan één met een puur algebraïsch gezicht, daarvan ziet u voorbeelden (1907 en 1916) op de bladzijde hiernaast, terwijl de andere twee meestal ingekleed waren (interestrekening, wielrijders die elkaar tegenkomen of inhalen, en dergelijke).
De formele opgave van 1916 wordt in de jaargang '29/30 van *Euclides* bekritiseerd vanwege wat we tegenwoordig het 'stapeleffect' noemen. Ik citeer P. Wijdenes:

> Tegen zo'n aaneenrijging van vraagpunten in één opgave bestaan m.i. ernstige bezwaren; het gevaar is lang niet denkbeeldig dat een leerling niet op al te goeden voet staat met vormen als:
>
> $$(6\sqrt{6})^{\log 10 - 2\log\sqrt{5} + \log\sqrt{\log 18 + \log 72}}$$
>
> (ik zou het hem bijna als een deugd aanrekenen) en alleen daarom zich niet waagt aan het vraagstuk, hoewel hij vier van de vijf onderdeelen wel aandurft; hij werpt zich op het andere vraagstuk.

Inderdaad was de inspectie erin geslaagd de hoofdonderwerpen van de algebra, te weten 'wortelvormen', 'eigenschappen van logaritmen', 'theorie van de vierkantsvergelijking' en 'reeksen' in één som te verenigen, een knappe prestatie. Als je het een beetje slim aanpakt, dan is het vraagstuk minder afschrikwekkend dan het eerste gezicht belooft, maar een curiositeit is het wel. Dat geldt trouwens ook voor de door mij gekozen examensom uit 1907, die na verstandig substitueren leidt tot:

$$u^2 = u + \log\frac{\pi}{\pi - 1}$$

Was het nu de bedoeling om x (via u) te benaderen in een aantal decimalen? Je zou het wel denken, gelet ook op de mededeling omtrent π. Grappig dat deze problematiek, benaderend of exact oplossen, thans zeer actueel is vanwege de inzetbaarheid van de grafische rekenmachine!

Tussen 1920 en 1940

Rond 1928 verscheen een serie opmerkelijke algebraboeken met als auteurs: Dr. W.F. de Groot en Dr. C. de Jong. Voor zover ik weet, is deze methode vrij onbekend gebleven, naar mijn mening ten onrechte. Leest u het vraagstuk over de goot (1928) maar eens. Het stamt uit een rijk hoofdstuk over grafische voorstellingen in deel 1 van de serie. Diezelfde goot is jaren later terug te vinden in de eerste editie van *Moderne Wiskunde* (1969 4 VWO), weer later in Hewet (Differentiëren, wiskunde A, 1983) zij het in uitgebreide vorm, waarbij het zink door kunststof is vervangen en de opstaande kanten ook schuin mogen staan. Ook nu figureert de opgave nog in diverse boeken.
Een interessant aspect van het tweede boek uit de methode de Groot & de Jong is de aandacht voor 'benaderingsrekenen'. Het algoritme voor worteltrekken wordt aanschouwelijk met oppervlakten behandeld. Ook komt er een aantrekkelijk voorgerecht voor de differentiaalrekening op tafel met lineaire benaderingen als:

$$\sqrt{1+u} \sim 1 + \tfrac{1}{2}u \quad \text{en} \quad \frac{1}{1+u} \sim 1 - u \quad \text{voor 'kleine' } u$$

In hun voorwoord betogen de schrijvers dat ze het werken met wortelvormen tot een minimum hebben beperkt, terwijl ze, wat het oefenmateriaal betreft, niet geschroomd hebben hun toevlucht te zoeken bij de meetkunde.

> (...) Het denkbeeld, reeds een halve eeuw geleden door Felix Klein verkondigd, bij het onderwijs een fusie van de onderdelen der wiskunde tot stand te brengen, heeft nog veel te weinig ingang gevonden (...)

Jammer dat deze methode zo weinig invloed gehad heeft op het algebraonderwijs in de jaren daarna.
Natuurlijk werd in dit boek ook forse algebra gedaan, zoals dat destijds – tot op het niveau MULO A! – betaamde. De opgave (1937) uit een oefenbundel voor het examen MULO A gebaseerd op de 'eisen der laatste regeringsbesluiten', illustreert dat en het is lang niet de ingewikkeldste som. MULO B was nog een stukje pittiger en in een schoolboek van die tijd vond ik dit fraaie exemplaar:

Van welke vorm is

$$a\left(a + \frac{1}{a} + \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a}}}\right)$$

het kwadraat?

Zouden VWO B-leerlingen van nu dit vlot kunnen? Ik weet niet hoe het u vergaat, maar ik heb zo mijn twijfels.

Van de vierkantsvergelijking **1916**

$$A(\sqrt{3}-\sqrt{2})x^2 + \frac{B}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}x + C = 0$$

is gegeven:

$$A = \sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}}$$

B = de som der oneindig voortlopende reeks

$$8\sqrt{3} + (8\sqrt{6}) \times 3^{-1/2} + 16 \times 3^{-1/2} + \ldots$$

Het verschil der wortels is

$$(6\sqrt{6})^{\log 10 - 2\log\sqrt{5} + \log\sqrt{\log 18 + \log 72}}$$

waarbij als grondtal van het logarithmenstelsel 6 is aan te nemen.

Gevraagd de waarde van C te berekenen.

Gegeven is de functie **1962**

$$f(x) = \frac{|x+1|-1}{|x|} + \frac{x+|x|}{2} \cdot (x-4)$$

a. Los x op uit $f(x) = -1$

b. Teken de grafiek van $f(x)$ voor $-5 \le x \le 5$.

Welke van onderstaande relaties is *geen* functie:

A $\{(x,y) \mid x = 2\}$

B $\{(x,y) \mid y = 2\}$

C $\{(x,y) \mid x + y = 2\}$

D $\{(x,y) \mid x - y = 2\}$ **1977**

1954

Van een reeks stelt t_n de $n$de term voor, s_n de som van de eerste n termen, p_n het produkt van de eerste n termen, terwijl $p_1 = s_1 = t_1$ en $s_0 = 0$.
Van deze reeks wordt gegeven dat voor constante g de betrekking:

$$^g\log p_{n+1} - {}^g\log(p_n s_n - p_n s_{n-1}) = 2$$

geldt voor alle gehele waarden van $n \le 1$.
a. Bewijs dat de reeks een meetkundige reeks is.
b. Bereken het produkt van de vijfde tot en met de veertiende term van de beschouwde reeks, indien $t_5 = 4$ en $t_{14} = 25$.

Iemand heeft een rechthoekig stuk zink, 80 cm breed. Hij wil daarvan een goot maken met rechthoekige doorsnede.

Stel een formule op voor het oppervlak der doorsnede, uitgedrukt in de hoogte h. Bereken voor verschillende waarden van h dit oppervlak. Wat is het interval van de functie? Maak een grafische voorstelling en ga na, wanneer de goot een zo groot mogelijke doorsnede heeft.

1928

Vermenigvuldig:

$$a + b + \frac{a^2+b^2}{a-b}$$

met

$$a - b - \frac{a^2+b^2}{a-b}$$

en deel de uitkomst door het tegengestelde van de tweede macht van

$$\frac{2ab}{a+b}$$

1937

Benader door inklemming de oplossing in één decimaal. Schets zonodig de grafieken.

a. $x^3 = 2x + 1$
b. $x^3 - 5x = 100$
c. $x^4 = 10 - x$

1995

Los x op uit de vergelijking: $\quad x^{\log x} = x + \frac{x}{\pi} + \frac{x}{\pi^2} + \frac{x}{\pi^3} + \text{ enz.}$

waarin het tweede lid een oneindig voortlopende meetkundige reeks en π = 3, 14159 ..... is.

1907

Of je daar nu wakker van moet liggen, is weer wat anders.

Tussen 1940 en 1960

In de tweede helft van deze periode heb ik mijn algebra-onderwijs genoten (nou ja ...). Over het algemeen vond ik algebra veel saaier dan meetkunde. Pas toen het eindexamen in zicht kwam en er dwarsverbanden tussen verschillende hoofdstukken van de algebra werden gelegd, begon ik er plezier in te krijgen. De som (1954) die ik heb gekozen, was de laatste van mijn eindexamen en zeker niet-standaard. Ik herinner me dat ik trots was op mijn oplossing – vrijwel uit het hoofd – van het laatste onderdeel: combineer à la Gauss de factoren paarsgewijs van buiten naar binnen. Het schoolboek dat wij gebruikten, Stoelinga & van Tol, was degelijk en had een lange bestaansgeschiedenis. Er werd gestart met redactiesommen in de stijl van de basisschool van toen. Aan de hand daarvan werd 'letterrekenen' ingeleid. Na twee paragrafen van voorbeelden kwam de conclusie dat het wenselijk is een getal door een letter voor te stellen in twee situaties:

** wanneer men het getal nog niet kent en het wil vinden*

**** wanneer men in het midden wil laten hoe groot een getal is***

Verstandige taal, nietwaar? Wij moesten deze vetgedrukte regels als een stelling uit het hoofd kunnen opzeggen! Bladerend in het boek bestemd voor de eerste klas valt weer op hoezeer de auteurs het in complicatie zochten, met af en toe een leuke uitzondering, bijvoorbeeld:

Als a, b en c drie opeenvolgende gehele getallen zijn, bereken dan de waarde van:

$$\frac{(b-a)^2+(c-a)^2}{(b-c)^3+(a-b)^3}$$

In deze periode stonden er ook 'nieuwlichters' op, zoals het echtpaar van Hiele die een paar jaar na de oorlog hun *Werkboek der Algebra* hadden geschreven. Bij het werkboek hoorde een inlegvel met de uitkomsten van machten van 2 en 5 (tot en met 2^{64} en 5^{30}) dat als een soort primitieve logaritmetafel dienst deed. Zo kon de leerling een product als $16\,384 \times 17\,592\,186\,044\,416$ uitrekenen door deze getallen eerst als macht van 2 te schrijven, de exponenten op te tellen en vervolgens in de lijst het resultaat op te zoeken. Een prachtig idee om het rekenen met machten te introduceren. Veel later is dit idee ook toegepast in de *Wageningse Methode*, maar dan in samenhang met eenvoudige combinatorische problemen.

Inmiddels werd ook op landelijk niveau de wederopbouw van het vaderlandse wiskundeonderwijs ter hand genomen. Vijf kopstukken uit het veld (Alders, Bunt, Holwerda, Vredenduin en Wansink) hadden in 1954 voorstellen gedaan, waarin geen plaats was voor een aantal exotische algebra-gewassen. Dit leerplan, waarbij op de HBS nu ook de analytische meetkunde zijn intrede deed (een ware oefentuin voor zinvolle algebra!) werd officieel van kracht in 1958.

Tussen 1960 en 1980

Ter voorbereiding op het eindexamen nieuwe stijl werd de beroemde Wimecosbundel (250 opgaven in de nieuwe geest) uitgebracht. In 1960 begon ik aan het leraarschap, juist toen die bundel een 'must' was. De opgaven waren misschien niet opzienbarend, wél kort en fris. Dat veroorzaakte algauw kritiek in het veld. Want de examens bleken weer ouderwets complex en er ontstond een nieuw exotisch gewas: functies gecomponeerd uit absolute waarden. Zie de hier gekozen 'bloem' uit het HBS-examen van 1962. Een stukje parabool, een stukje hyperbool en een recht lijntje als grafische verbeelding van een en dezelfde formule, ... het leven kan mooi zijn.

Er gebeurde heel veel in dit 'vintennium', want in het midden van de jaren zestig stoomde de Moderne Algebra op met zijn structuurwetten en getallenverzamelingen. Een functie f werd een *verzameling geordende paren met de eigenschap*: *als* $(x, y_1) \in f$ *én* $(x, y_2) \in f$, *dan* $y_1 = y_2$. Dit soort formuleringen heeft enige jaren de wiskundeboeken geteisterd. In plaats van *los x op uit* ... kon men lezen: *bepaal het volledig origineel van nul van de functie* $\{(x, y) \in \mathrm{IR} \times \mathrm{IR} \mid ...\}$. De complexiteit van de taal was omgekeerd evenredig met de ingewikkeldheid van de vraagstukken, zeker in de onderbouw en in LBO en MAVO. Een treffend voorbeeld is de hier gekozen, en toch eigenlijk verbijsterende opgave (examen LBO/MAVO) uit 1977. In de bovenbouw van het HAVO/VWO stond de algebra geheel in dienst van de analyse, met name van het functieonderzoek. Dit acht ik bij de lezer zo vertrouwd, dat ik daarvan geen voorbeeld heb opgenomen.

Tussen 1980 en 2000

Net als in veel andere landen verdwenen de bourbakistische trekjes uit de schoolwiskunde. De projecten Hewet, Hawex en Wiskunde 12-16 versnelden dit proces en brachten een grondige herziening van het curriculum teweeg. In de algebra van de onderbouw is het nu vooral te doen *om het werken aan problemen waarbij verbanden tussen variabelen een rol spelen*, dat zegt de toelichting bij het programma. Een op praktisch gebruik gerichte algebra dus, met betrekkelijk weinig aandacht voor rekenstructuren. Bij vergelijkingen wordt naast de exacte methode ook de benaderingsmethode (inklemmen) gepropageerd. Eén voorbeeld (*Moderne Wiskunde* 3 HAVO, 1995) heb ik opgenomen. Met de komst van de grafische rekenmachine is dit achterhaald, in die zin dat het machientje het inklemmende werk verricht. De sommen zullen weer veranderen, zeker als de symbolische rekenmachine zijn intrede doet. Hoe over honderd jaar een plukje uit een eeuw algebra eruit zal zien? Wie weet met deze som?

8 paarden die men 7 weken in een wei van 400 m^2 heeft gelaten, hebben niet alleen het gras opgegeten dat in de weide stond, maar ook wat er in die tijd is bijgegroeid. Onder gelijke omstandigheden zouden 9 paarden in 8 weken voedsel vinden in een wei van 500 m^2. Hoeveel paarden zouden in 12 weken voedsel vinden in een wei van 600 m^2? (Neem aan dat de hoeveelheid gras die bijgroeit, evenredig is met de tijd en onafhankelijk is van het aantal paarden).

2083, pardon, 1883

Martin Kindt, Freudenthal Instituut ❑